

EXPANSIONES ASINTÓTICAS Y EL  
OPERADOR CANÓNICO DE MASLOV EN  
LA TEORÍA LINEAL DE ONDAS DE AGUA.

Presentado por: María Isabel Romero Rodríguez  
para optar al título de Maestría en Matemáticas.

Asesor: Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova

enero de 2006, Morelia, Michoacan

**INTRODUCCIÓN.** En los métodos asintóticos para resolver ecuaciones diferenciales parciales en los que interviene un parámetro, ya sea pequeño o grande, existen aproximaciones de soluciones que se asemejan entre sí, como es el caso del Método WKB junto con todas sus modificaciones (WKB Semiclásico, Acústica geométrica, Óptica geométrica) y otras aproximaciones que difieren de las anteriores como son las de la capa en la frontera y la teoría regular de perturbaciones.

En el presente trabajo tenemos como principal objetivo el exponer cómo se construyen las soluciones del tipo WKB hasta llegar a su generalización mediante el método de Maslov, en el que describiremos al Operador Canónico de Maslov considerando la construcción de una solución especial del problema de Cauchy. Para lograr esto, presentamos tanto la teoría analítica asociada a dicha construcción como la teoría de los objetos geométricos involucrados en tales soluciones (Sistemas hamiltonianos, variedades lagrangianas, ecuación de Hamilton-Jacobi, la ecuación de Transporte), y todo lo anterior en conexión con un problema de ondas de agua.

Como un recurso didáctico para comprender las variedades lagrangianas y su comportamiento diagramamos un programa “sencillo” en MATLAB7 que nos permite visualizar las variedades que intervienen en el problema 2 de la sección 3.5. Dicho programa puede repetirse para cualquiera de los otros ejemplos. Lo ponemos como un anexo al trabajo.

Otro resultado didáctico está en los dos ejemplos de la última sección del trabajo, en ellos no solo damos las soluciones en términos del operador canónico sino que también explicamos el comportamiento de una solución en una vecindad de un punto focal a través de expresar esta solución en términos de funciones especiales como son las funciones de Airy y de Pearcey.

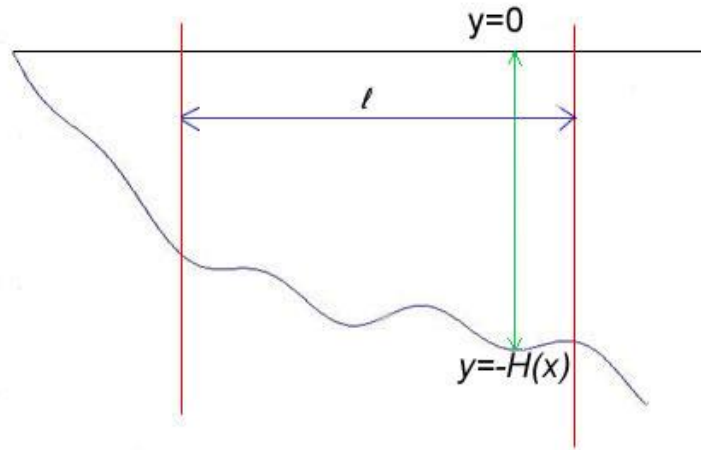
Es importante resaltar que este trabajo es preliminar para la consecución de un resultado original: el de explicar el comportamiento de las ondas al llegar al borde (playa) del recipiente.

En esta presentación nos restringimos al mínimo de nociones y construcciones necesarias para una realización práctica, por lo que omitimos pruebas complicadas que pueden encontrarse en la bibliografía referida y en la mayor parte solo utilizamos los resultados.

# 1. ECUACIÓN DE ONDAS DE SUPERFICIE. SOLUCIONES ASINTÓTICAS FORMALES.

## 1.1. Ecuación de ondas de superficie y parámetros.

Consideremos un fluido incompresible, ideal e irrotacional en el campo gravitacional, despreciando la temperatura, difusión molecular y efectos disipativos junto con los efectos capilares. Por simplicidad, excluirémos de nuestras consideraciones los efectos relacionados con la reflexión de ondas en los bordes. Para este fin, restringiremos nuestro estudio a un dominio  $\Omega$  el cual es pequeño comparado con el recipiente del agua, es decir, asumiremos que  $l \ll L$ , donde  $l$  es el diámetro de  $\Omega$  y  $L$  es el diámetro del recipiente. En el dominio  $\Omega$  introduciremos las coordenadas horizontales ( $x = (x_1, x_2)$ ) y la vertical ( $y$ ), asumiendo que cuando la superficie del fluido no está perturbada, está definida por la ecuación  $y = 0$ , mas aún, supondremos que la superficie del fluido está definida por la ecuación  $y = \eta(x, t)$ , y que  $y = -H(x)$ , es la ecuación que describe el fondo del recipiente.



En este caso, en la aproximación lineal (la aproximación de ondas de pequeña amplitud), tenemos el siguiente sistema para el potencial de velocidades  $\Phi(x, y, t)$ : [8-16]

$$\Phi_{yy} + \Delta\Phi = 0 \quad \text{para} \quad -H(x) < y < 0, \quad (1.1)$$

$$\Phi_y + \langle \nabla H, \nabla \Phi \rangle|_{y=-H(x)} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\Phi_t + g\eta|_{y=0} = 0, \quad \eta_t - \Phi_y|_{y=0} = 0, \quad (1.2b)$$

donde  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ ,  $\Delta = \nabla^2$ ,  $g$  es la gravedad y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar. Algunas veces, denotaremos el gradiente por  $(\partial/\partial x)$ .

Introducimos el parámetro  $h = \lambda/l$ , donde  $\lambda$  es la longitud típica de onda. Estudiaremos ondas cortas, es decir, vamos a suponer que  $h$  es pequeño ( $h \rightarrow +0$ ). El parámetro así introducido incluye dos situaciones frecuentemente consideradas, particularmente, las ondas de agua de pequeña profundidad (en este caso,

tenemos  $\lambda \gg H_0$  donde  $H_0$  es la profundidad típica del recipiente) y las ondas de agua de profundidad grande ( $\lambda \ll H_0$ ). En ambos casos, la desigualdad  $\lambda \ll l$  se encuentra en problemas interesantes. Asumiremos que  $H(x)$  es una función que varía suavemente, esto es,  $\partial H/\partial x_j \sim h$ ,  $j = 1, 2$  lo cual frecuentemente corresponde a la forma real del fondo del océano. Supongamos que  $H(x) > 0$  (porque no tenemos en cuenta la influencia de la frontera de la costa).

Pasemos de las variables  $(x, y, t)$  a las variables adimensionales  $x' = x/l$ ,  $y' = y/\lambda$ ,  $t' = t\sqrt{\lambda g}/l$  y escribamos  $\Phi'(x', y', t') = \Phi(lx', \lambda y', lt'/\sqrt{\lambda g})/(a\sqrt{\lambda g})$ ,  $\eta'(x', t') = \eta(lx', lt'/\sqrt{\lambda g})/a$  y  $H'(x') = H(lx')/\lambda$ , donde  $a$  es la amplitud de onda. Entonces el sistema (1.1)-(1.2) se transforma (omitiendo las primas en las nuevas variables) en:

$$\Phi_{yy} + h^2 \Delta \Phi = 0 \quad \text{para } -H(x) < y < 0 \quad (1.3)$$

$$\Phi_y + h^2 \langle \nabla H, \nabla \Phi \rangle|_{y=-H(x)} = 0 \quad (1.4a)$$

$$h\Phi_t + \eta|_{y=0} = 0, \quad h\eta_t - \Phi_y|_{y=0} = 0. \quad (1.4b)$$

## 1.2. Soluciones asintóticas y terminología.

Buscaremos una solución aproximada (asintótica cuando  $h \rightarrow +0$ ) de este sistema.

Recordemos que: Una solución asintótica *formal* mod  $O(h^N)$  de un sistema de ecuaciones se entiende como una función (en nuestro caso, funciones  $\Phi^N$  y  $\eta^N$ ) que satisface este sistema en  $O(h^N)$ .

Por una solución *rigurosa* mod  $O(h^N)$  se entiende una función la cual difiere de una cierta solución exacta por una función  $O(h^N)$ .

Por los *términos principales* de una solución asintótica formal (o una rigurosa)  $\Phi^N$ ,  $\eta^N$ , entendemos funciones  $\Phi^0$ ,  $\eta^0$  tales que  $\Phi^N = \Phi^0 + o(1)$  y  $\eta^N = \eta^0 + o(1)$ .

Casi siempre es posible probar que una solución asintótica formal del problema de Cauchy (Cauchy-Poisson aquí) es la solución rigurosa y muy a menudo este no es el caso para las funciones de ondas en problemas espectrales (ver [1,3]). Este tema se sale del alcance de este trabajo.

Como una regla tenemos que la construcción de una solución asintótica formal precede a la prueba de que una solución asintótica formal es la solución rigurosa. En lo que sigue consideraremos las soluciones asintóticas formales y omitiremos el término “formal”.

## 1.3. Ecuaciones pseudodiferenciales para ondas superficiales en dimensión dos.

En la sección 2, siguiendo las ideas de Hadamard (ver [11]) para reducir el sistema a una sola ecuación en el caso de profundidad variable, mostraremos que el sistema (1.3)-(1.4) puede ser reducido a una sola ecuación pseudodiferencial para la función  $\psi(x, t) = \Phi(x, y, t)|_{y=0}$ . La prueba es llevada a cabo usando la técnica de operadores ordenados. Las ganancias que dicha reducción produce

son: primero, el número de variables independientes en el problema se reducen y segundo, la ecuación resultante pertenece a la clase de ecuaciones cuyas soluciones asintóticas pueden ser encontradas usando el operador canónico de Maslov.

Las ecuaciones pseudodiferenciales no se presentan en los cursos tradicionales de mecánica y en una primera ojeada, los métodos de solución de estas ecuaciones pueden verse más complicadas que los conocidos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, este punto de vista es erróneo y se puede afirmar que las ecuaciones pseudodiferenciales “no son peores” que las diferenciales; para ejemplificar este caso, presentaremos el método de Maslov para encontrar soluciones asintóticas y mostraremos que su método puede ser aplicado tanto a las ecuaciones pseudodiferenciales como a las diferenciales con igual éxito. En la sección 2.1 explicaremos esta idea mediante las fórmulas (2.5) y (2.6). La obtención de la ecuación pseudodiferencial para ondas de agua está dada en la sección 2. Luego de esto, se puede aplicar el método asintótico de Maslov para encontrar soluciones específicas de interés físico.

Muchas monografías y artículos se dedican al estudio de ecuaciones pseudodiferenciales, a la técnica de operadores ordenados y a la teoría asintótica de Maslov (ver [2,3,5,38] y la bibliografía adentro), en dichas referencias se pueden encontrar las pruebas correspondientes a las estimaciones y fórmulas necesarias que en las secciones 2-6 del presente trabajo utilizamos. Nosotros prestaremos atención a las principales ideas y en algunos casos omitiremos las pruebas correspondientes.

Para concluir esta sección, presentamos la ecuación pseudodiferencial para la función  $\psi = \Phi(x, y, t)|_{y=0}$ , el dato de Dirichlet para  $\Phi$  en la superficie libre. Esta ecuación tiene la forma:

$$h^2\psi_{tt} + \hat{L}\psi = 0, \quad (1.5)$$

donde  $\hat{L} = L(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h)$  es un operador pseudodiferencial cuyo símbolo es de la forma

$$L(x, p, h) = L^0 + O(h), \quad L^0 = |p| \tanh(H(x))|p|, \quad |p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}. \quad (1.6)$$

Note que la ecuación (1.5) describe ondas cortas en un recipiente cuyo fondo puede ser finito o infinito, incluyendo dominios intermedios. Si  $H = cte$  (en particular, si  $H = \infty$ ), entonces las ondas planas,

$$\psi(x, t) = A \cos \frac{\langle k, x \rangle - \omega t}{h}$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es la frecuencia y  $k$  satisface la relación de dispersión  $\omega^2 = |k| \tanh(H|k|)$ , son soluciones de la ecuación (1.5). La solución asintótica de la ecuación (1.5) la obtendremos en el caso de un fondo arbitrario. En algunos dominios del plano  $(x_1, x_2)$  esta puede ser representada en la forma de soluciones WKB  $\varphi(x, t) \cos \frac{S(x, t)}{h}$  [1-24] las cuales son ondas planas que se encuentran “distorsionadas”.

En otros dominios (los cuales contienen cústicas y puntos focales), las soluciones así obtenidas, pueden ser representadas como integrales de funciones de rápida oscilación y pueden, algunas veces, ser expresadas en términos de funciones especiales. El operador canónico de Maslov da asintóticas globales en el espacio completo, incluyendo los puntos focales y las cústicas, dichas asintóticas pueden ser expresadas en términos de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (sistemas hamiltonianos), y estas soluciones forman objetos geométricos, llamados variedades lagrangianas en el espacio fase con coordenadas  $(x_1, x_2, p_1, p_2)$  como lo veremos en la sección 4 y en especial en la subsección 4.3. Las variedades lagrangianas sustancialmente dependen de la función  $H(x)$  y están determinadas por la geometría del fondo del recipiente. En algunos casos, por ejemplo, si las variables en (1.5) pueden ser separadas y tanto los puntos focales como las cústicas no aparecen, el método asintótico de Maslov permite llegar a soluciones conocidas en la literatura matemática, ver el ejemplo 1 de la subsección 3.3.

## 2. OPERADORES h-DIFERENCIALES Y h-PSEUDODIFERENCIALES. REDUCCIÓN DEL SISTEMA A UNA ÚNICA ECUACIÓN.

En esta sección introduciremos la noción de operadores h-pseudodiferenciales y con su ayuda reduciremos el sistema inicial con parámetro h a una ecuación h-pseudo diferencial sobre la superficie libre.

### 2.1. Operadores h-diferenciales y h-pseudodiferenciales.

La ecuación (1.5) es bidimensional,  $x \in \mathbb{R}^2$ . En lo que sigue de esta sección, para la generalidad de nuestra exposición, consideraremos operadores actuando sobre funciones de  $n$  variables. También en (1.5) algunas veces asumiremos que  $x \in \mathbb{R}^n$ , pero para resultados específicos tomaremos  $n = 2$ .

Consideremos una función suave  $L(x, p, h)$ , donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  e introduzcamos el operador  $\hat{x}_j = x_j$  de multiplicación por  $x_j$  y el operador  $\hat{p}_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}$  de diferenciación respecto a  $x_j$ . Sea  $L(x, p, h)$  un polinomio en  $p$ , esto es  $L(x, p, h) = \sum q_m(x, h) p^m$ , donde  $m$  es un multiíndice,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ,  $p^m = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ ,  $m_1, \dots, m_n$  son números naturales y  $q_m(x, h)$  son funciones suaves. El operador  $\hat{L} = L(\hat{x}, \hat{p}, h)$  se define por la fórmula

$$\hat{L}\varphi = L\left(\hat{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h\right)\varphi(x, h) = \sum q_m(x, h) (-ih)^{|m|} \frac{\partial^{|m|} \varphi}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}. \quad (2.1)$$

El operador así definido es referido como un operador  $h$ -diferencial y la función  $L(x, p, h)$  es llamada el *símbolo*. La manera como el operador  $\hat{L}$  es reconstruido desde su símbolo no está definida de una manera única, por esto se debe declarar el orden en el cual los operadores  $-ih \frac{\partial}{\partial x}$  y  $\hat{x}$  actúan. De hecho, uno puede pensar que  $L(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h)$  es el operador

$$L\left(\hat{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h\right)\varphi = \sum (-ih)^{|m|} \frac{\partial^{|m|} \varphi q_m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad (2.2)$$

que difiere de la ecuación (2.1) porque los operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$  no conmutan y el orden en los cuales estos actúan sobre las funciones  $q_m(x, h)$  influye en el resultado final.

Para lograr la reconstrucción del operador  $\hat{L}$  es conveniente seguir a Feynman, ordenando la acción de los operadores al escribir los índices sobre las letras correspondientes. Por ejemplo, el operador (2.1) puede ser representado en la forma  $L(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, h)$  donde el índice sobre un argumento muestra el orden de aplicación del operador correspondiente, en este caso, primero diferenciamos y luego multiplicamos. La notación  $L(\overset{1}{x}, -ih \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, h)$  es la que corresponde a (2.2).

Queremos definir operadores h-pseudodiferenciales, para esto, ntroduciremos la  $h$ -transformada de Fourier de una función  $\varphi(x, h)$  así:

$$\tilde{\varphi}(p, h) = F_{x \rightarrow p}^h[\varphi(x, h)] = (2\pi i h)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_x^n} e^{-i\langle p, x \rangle/h} \varphi(x, h) dx, \quad i = e^{i\pi/2} \quad (2.3)$$

y la transformada inversa

$$\varphi(x, h) = F_{p \rightarrow x}^{-h}[\tilde{\varphi}(p, h)] = (-2\pi i h)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_p^n} e^{i\langle p, x \rangle/h} \tilde{\varphi}(p, h) dp, \quad -i = e^{-i\pi/2}. \quad (2.4)$$

De acuerdo con las propiedades de la transformada de Fourier, la actuación de los operadores diferenciales puede estar también definida por las fórmulas:

$$L(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, h)\varphi = F_{p \rightarrow x}^{-h}[L(x, p, h)F_{x \rightarrow p}^h[\varphi(x, h)](p, h)] \quad (2.5)$$

$$L(\overset{1}{x}, -ih \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, h)\varphi = F_{p \rightarrow x}^{-h}[F_{x \rightarrow p}^h[L(x, p, h)[\varphi(x, h)](p, h)]] \quad (2.6)$$

Ahora, podemos definir operadores  $h$ -pseudodiferenciales  $L(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h)$  y  $L(\overset{1}{x}, \overset{2}{\hat{p}}, h)$  cuyos símbolos no son polinomiales, mediante las fórmulas (2.5), (2.6). Note que tal operador no puede ser definido para una función arbitraria  $L(x, p, h)$  en general, porque uno tiene que asegurarse de que las integrales de Fourier converjan. Por ejemplo, si la estimación

$$\left| \frac{\partial^{|m|+|l|} L(x, p, h)}{\partial x^m \partial p^l} \right| \leq C_{ml} (1 + |x|)^M (1 + |p|)^M \quad (A)$$

es válida, para algún entero  $M$  y para multiíndices arbitrarios  $m$  y  $l$ , entonces los operadores (2.5) y (2.6) están bien definidos sobre el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$  (funciones  $\mathcal{C}^\infty$  que decaen en el  $\infty$  más rápido que cualquier potencia) [3]. En la siguiente parte del texto, *siempre consideraremos operadores para los cuales la estimación (A) está satisfecha*. Entonces la actuación del operador  $\hat{L}$  está definida por las fórmulas (2.5), (2.6) donde  $L(x, p, h)$  es alguna función, la cual no necesariamente es polinomial. Uno puede definir el operador  $h$ -pseudodiferencial de  $k$  argumentos en una vía similar. Por ejemplo, al operador  $L(\overset{4}{x}, -ih \overset{3}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, h)$  lo definimos por la siguiente relación:

$$\hat{L}\varphi = F_{p' \rightarrow x}^{-h} F_{x' \rightarrow p'}^h F_{p \rightarrow x'}^{-h} L(x, p', x', p, h) F_{x \rightarrow p}^h \varphi(x, h).$$

De ahora en adelante necesitaremos operadores que puedan depender de algunas variables adicionales como de parámetros, su actuación sobre las funciones también está dada por las fórmulas (2.5) y (2.6) donde el símbolo de un operador puede ser de la forma  $L(x, p, a, h)$ , donde  $a$  es un parámetro.



*Observación.* La correspondencia del operador  $\hat{L}$  con el símbolo  $L$  es conocida como *cuantización* (ver. e.g., [2,5,38]). Note que, ninguno de los operadores (2.5) y (2.6) son adjuntos entre si y como son distintos, en general, no son autoadjuntos y ni siquiera son simétricos.

## 2.2. Ejemplo de cómo se trabaja con un operador pseudodiferencial: Reducción del sistema original a una ecuación en la superficie.

Pasemos a la obtención de la ecuación (1.5). Buscamos una solución de las ecuaciones (1.3)-(1.4) en la forma

$$\Phi = \hat{R}\psi, \quad \psi = \Phi \Big|_{y=0}, \quad (2.7)$$

donde  $\hat{R} = R(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, y, h)$  es algún operador  $h$ -pseudodiferencial, encontrar este operador es lo mismo que encontrar su símbolo y esta es una de las principales razones para introducir operadores pseudodiferenciales, porque así, el trabajo con operadores se reemplaza por el trabajo con funciones (sus símbolos).

Sustituyendo  $\Phi$  en la forma (2.7) en la ecuación (1.3), obtenemos

$$[\partial^2/\partial y^2 - (-ih\nabla)^2]R(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, y, h)\psi = 0 \quad (2.8)$$

de esta forma (2.8) proporciona la ecuación para el operador

$$[\partial^2/\partial y^2 - (-ih\overset{3}{\partial}/\partial x)^2]R(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, y, h) = 0. \quad (2.8')$$

Es claro que el operador  $\hat{R}$  cuyo símbolo es cero satisface la condición (2.8'), sin embargo, este operador no es interesante porque no satisface (2.7).

Queremos expresar el operador (2.8') unicamente en términos de los operadores de  $-ih\overset{1}{\partial}/\partial x$  y  $\overset{2}{x}$ . Si el símbolo del operador así obtenido es cero, entonces la condición (2.8') está satisfecha y por lo tanto, la condición (2.8) también se satisface.

Encontraremos el símbolo en cuestión. Para este fin, debemos "llevar" el operador  $-ih\overset{1}{\partial}/\partial x$  a través de  $\hat{R}$ . Explicaremos esta operación. (Para una prueba rigurosa, ver, e.g., [2,5,38]). Consideremos la actuación de  $(-ih\overset{1}{\partial}/\partial x)$  sobre  $\hat{R}\psi$ ,

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)[\hat{R}\psi] = \frac{1}{(-2\pi ih)^{n/2}}(-ih)\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}_p^n} e^{i\langle p, x \rangle/h} R(x, p, y, h) \tilde{\psi}(p, h) dp$$

Diferenciando bajo el signo de la integral, obtenemos

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)[\hat{R}\psi] = \frac{1}{(-2\pi ih)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_p^n} e^{i\langle p, x \rangle/h} \left[ R p - ih \frac{\partial R}{\partial x}(x, p, y, h) \right] \tilde{\psi}(p, h) dp.$$

Así, por la fórmula (2.5) el símbolo del operador  $(-ih\partial/\partial x)R(x, -ih\partial/\partial x, y, h)$  es

$$Rp - ih\frac{\partial R}{\partial x}(x, p, y, h). \quad (2.9)$$

“Llevando”  $(-ih\partial/\partial x)$  en (2.8') a través de  $\hat{R}$  dos veces, notamos que el símbolo del operador (2.8') es

$$-p^2R + 2ih\langle p, \nabla \rangle R + h^2\Delta R + R_{yy}, \quad \langle p, \nabla \rangle = p_1\partial/\partial x_1 + p_2\partial/\partial x_2.$$

La condición de que el símbolo desaparezca en (2.8') junto con el símbolo del operador en el lado izquierdo de la ecuación (1.4a) y la condición  $R|_{y=0} = 1$ , da un problema de valor en la frontera para  $R$ ,

$$\begin{aligned} R_{yy} - p^2R + 2ih\langle p, \nabla \rangle R + h^2\Delta R &= 0, & -H(x) < y < 0; \\ R_y + ihR\langle p, \nabla \rangle H + h^2\nabla H\nabla R &= 0, & y = -H(x); \\ R &= 1, & y = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Representando  $R$  en (2.10) en la forma de una serie regular  $R = R^0 + hR^1 + \dots$  e igualando los coeficientes de potencias iguales de  $h$  a cero, obtenemos una cadena de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $R^j$  respecto a  $y$  (cf.[8-12,15-17,22-24]). Las variables  $(x, p)$  entran a esas ecuaciones como parámetros. En particular para  $R^0$  y  $R^1$  tenemos

$$R_{yy}^0 - p^2R^0 = 0, \quad -H(x) < y < 0; \quad R_y^0 = 0, \quad y = -H(x); \quad R^0 = 1, \quad y = 0; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} R_{yy}^1 - p^2R^1 &= -2i\langle p, \nabla \rangle R^0, & -H < y < 0; \\ R_y^1 &= -ih\langle p, \nabla \rangle H, & y = -H; \quad R^1 = 0, \quad y = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Solucionando (2.11) y (2.12), obtenemos

$$\begin{aligned} R^0 &= \cosh[(y + H(x))|p|] / \cosh(H(x)|p|); \\ R^1 &= \frac{i\langle p, \nabla \rangle H}{\cosh^3 H|p|} (H \sinh y|p| \sinh H|p| - y \cosh y|p| \cosh H|p|). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para eliminar a  $\eta$  de (1.4b) realizamos los siguientes cálculos: En (1.4b) tenemos las condiciones en la superficie libre  $h\Phi_t + \eta|_{y=0} = 0$ ,  $h\eta_t - \Phi_y|_{y=0} = 0$ , derivemos la primera condición respecto a la variable  $t$  y de la segunda despejemos el término  $\eta_t$ , entonces obtenemos la ecuación  $h^2\Phi_{tt} + \Phi_y|_{y=0} = 0$ ; y sustituyendo  $\Phi$  en la forma (2.7), obtenemos la ecuación deseada (1.5), donde  $L = L^0 + hL^1 + \dots$  y donde todo término  $L^j$  es construido desde  $R^j$  usando las relaciones.

$$L^j = \frac{\partial R^j}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Así, hemos obtenido una ecuación pseudodiferencial para la función  $\psi(x, t)$  de (1.5). Si una solución de la ecuación (1.5) es conocida, entonces enseguida se puede encontrar la función  $\Phi$  en toda la capa  $\{-H < y < 0\}$ , por la fórmula (2.7).

### 3. MÉTODO WKB.

En esta sección presentaremos el método clásico de construcción de soluciones que describen la propagación de paquetes de ondas cortas, esto incluye la solución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y de Transporte. Daremos varios ejemplos de aplicación de este método a la ecuación de ondas de agua y también conseguiremos las fórmulas del método de la fase estacionaria usando la ecuación de Schrödinger. Este último método nos sirve para construir las asintóticas en los puntos focales.

#### 3.1. Relación de conmutación para un operador pseudo-diferencial y una función exponencial.

De acuerdo con el método WKB (o de rayo)(ver[1-10,15-24]), una solución asintótica de la ecuación original se busca en la forma de ondas planas distorsionadas,  $\psi(x, t) = \varphi(x, t) \exp\{iS(x, t)/h\}$ , donde la fase  $S(x, t)$  y la amplitud  $\varphi(x, t)$  son nuevas funciones desconocidas.

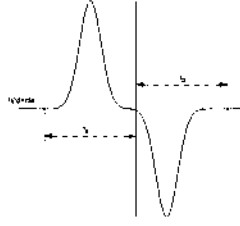
Esta representación es una generalización de soluciones del tipo de onda plana para la cual tenemos  $\varphi = cte$ ,  $S = \langle k, x \rangle - \omega t$ .

Localmente, las soluciones WKB son ondas planas perturbadas. Las funciones  $S(x, t)$  y  $\varphi(x, t)$  (que son real valuadas) están determinadas al substituir una solución WKB dentro de la ecuación original con la subsecuente conmutación de la función exponencial de rápida oscilación con el operador  $h$ -pseudodiferencial y al igualar los coeficientes en  $h^0$  y  $h^1$  a cero. El punto central en la consecución de las ecuaciones para  $S(x, t)$  y  $\varphi(x, t)$  es la siguiente *fórmula de conmutación para un operador pseudodiferencial y una función exponencial de rápida oscilación* [1-5, 38],

$$L(x, -ih\partial/\partial x)[\varphi \exp(iS/h)] = \exp(iS/h) \times \left\{ L(x, \nabla S)\varphi - ih \left[ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial p}(x, \nabla S) \right\rangle + \frac{1}{2}\varphi \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial p^2}(x, \nabla S) \right) \right] \right\} + O(h^2) \quad (3.1)$$

que se tiene para un operador  $h$ -pseudodiferencial con símbolo arbitrario  $L(x, p)$  satisfaciendo la condición (A) introducida en la sección (2); en particular, la fórmula (3.1) se tiene para el operador de la ecuación (1.5). La obtención rigurosa de esta fórmula está basada en la definición (2.5) y en el método de la fase estacionaria.

A manera de ejemplo, mostraremos que la fórmula (3.1) se tiene para el operador  $\hat{L}$ . Para esto, supongamos que  $H(x)$  es  $C^\infty$  y  $H(x) = H_0$  donde  $|x| > r_0$  para algún  $r_0$ ,



por lo tanto  $|L^0| \leq |p|$ . Se puede demostrar que la condición (A) está satisfecha con  $M = 1$ , calculando las derivadas y aplicando inducción.

En (3.1), el símbolo  $\text{Tr}$  se entiende como la traza del producto de dos matrices  $(\partial^2 S / \partial x^2)$  y  $(\partial^2 L / \partial p^2)$ ,

$$\text{Tr} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 L}{\partial p^2} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Existen diferentes pruebas de la fórmula (3.1), las omitimos y nos restringiremos a demostrar la fórmula (3.1) por medio de un ejemplo unidimensional, asumiendo que  $L(x, \hat{p})$  es polinomial en  $p$ . Para esto asumamos que  $L(x, p) = p^m$  y así  $(-ih\partial/\partial x) \exp(iS/h)\varphi = \exp(iS/h)(S_x - ih\partial/\partial x)\varphi$  para cuando  $m = 1$ ; procediendo por inducción, vemos que

$$\left( -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{iS/h} \varphi = e^{iS/h} \left( S_x - ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^m \varphi. \quad (3.2)$$

La actuación del operador  $(S_x - ih\partial/\partial x)^m$  se reduce a la aplicación consecutiva de  $m$  operadores  $S_x - ih\partial/\partial x$ . Si la fórmula es aplicada a las funciones  $\varphi$  que no dependen del parámetro  $h$  (o dependen regularmente de este parámetro) entonces el operador puede ser representado en la forma:

$$\left( S_x - ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^m = S_x^m - ih \left( m S_x^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m(m-1)}{2} S_{xx} S_x^{m-2} \right) + \hat{O}(h^2), \quad (3.3)$$

donde  $\hat{O}(h^2)$  se entiende como un operador que manda una función de  $O(1)$  en una función de  $O(h^2)$ . Sustituyendo (3.2) y usando (3.3) dentro de la fórmula explícita para el operador  $\hat{L}$  introducido en (2.1), obtenemos la fórmula de conmutación (3.1). En el caso de símbolos no polinomiales, la fórmula es “desarrollada” al hacer tender el grado del polinomio a infinito, porque si la dependencia de  $L(x, p)$  en  $p$  es analítica, entonces el operador puede ser representado en la forma de la serie de Taylor en potencias de  $\hat{p}$  lo que implica la misma demostración para el operador polinomial. En el caso general la fórmula (3.1) se demuestra mediante el método de la fase estacionaria.

### 3.2. Ecuación de Hamilton Jacobi y la Ecuación de Transporte.

Sustituyendo una solución WKB en (1.5) y usando la fórmula (3.1) obtenemos:

$$e^{iS/h} \left\{ [-S_t^2 + L^0(x, \nabla S)] \varphi + \right. \\ \left. ih \left[ 2\varphi_t S_t + \varphi S_{tt} - iL^1(x, \nabla S)\varphi - \frac{\partial L^0}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] \right\} \\ + O(h^2) = 0$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de  $h$  a cero, obtenemos las ecuaciones:

$$-S_t^2 + L^0(x, \nabla S) = 0; \quad (3.4)$$

$$2\varphi_t S_t + \varphi S_{tt} - iL^1 \varphi - \frac{\partial L^0}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \varphi \text{Tr} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

donde  $L^0$ ,  $L^1$  son de la forma (1.6) y (2.14) y donde  $iL^1 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 L^0}{\partial x \partial p} \right)$ . Después de extraer la raíz, la ecuación (3.4) se descompone en dos ecuaciones,

$$S_t + \mathcal{H}^\pm(x, \nabla S) = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{H}^\pm(x, p) = \pm \{L^0(x, p)\}^{1/2}$ . De (3.6)  $S_{tt} = -\mathcal{H}_p^\pm \nabla S_t$ . Usando estas relaciones y expresando  $\nabla S_t$  mediante (3.6), obtenemos la siguiente ecuación proveniente de (3.5):

$$\varphi_t + \frac{\partial \mathcal{H}^\pm}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}^\pm}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \varphi \text{Tr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^\pm}{\partial x \partial p} = 0 \\ \text{Tr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^\pm}{\partial x \partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{H}^\pm}{\partial p_i \partial x_i} \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) son conocidas en análisis, la primera es la llamada *Ecuación de Hamilton-Jacobi* o la *Ecuación Icónica* y la segunda se conoce como la *Ecuación de Transporte*. Si  $H(x) = cte$  y si  $S = \omega t - \langle k, x \rangle$  en (3.6), entonces (3.6) se convierte en la llamada *relación de dispersión*.

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) requieren algunos datos iniciales, para encontrarlos, consideraremos el problema de Cauchy para la ecuación (1.5) con datos iniciales que oscilan rapidamente:

$$\psi(x, 0) = \varphi_1 \exp(iS_0/h), \quad h\psi_t(x, 0) = i\varphi_2 \exp(iS_0/h), \quad \nabla S_0 \neq 0. \quad (3.8)$$

La condición  $\nabla S_0 \neq 0$  se especifica porque los hamiltonianos considerados no son funciones suaves en  $p = 0$ . Tengamos en cuenta que el hamiltoniano para nuestro ejemplo de ondas de agua, está dado por  $\mathcal{H} = \pm \sqrt{L^0} = \pm \sqrt{|p| \tanh |p| H(x)}$ , así cuando  $p$  es pequeño tenemos que  $\pm \sqrt{|p| \tanh |p| H(x)} \sim \pm |p| \sqrt{H} + O(|p|^2)$  y por lo tanto la función en  $p = 0$  no es lisa, por lo que la condición  $\nabla S_0 \neq 0$  impuesta nos evita estas singularidades.

El método WKB nos permite encontrar una solución asintótica para  $t$  suficientemente pequeño. En (3.8) asumiremos que  $S_0$  y  $\varphi_{1,2}$  son funciones suaves y la presencia de un parámetro pequeño en el denominador del exponente describe rápidas oscilaciones espaciales de la forma inicial de la superficie del fluido. El factor en la mano izquierda de la segunda condición en (3.8) describe oscilaciones rápidas temporales. Observemos que  $\psi = \varphi(x, t) \exp(iS(x, t)/h)$  y  $\psi_t = ((iS_t/h)\varphi + \varphi_t) \exp(iS(x, t)/h)$  donde  $|\varphi(x, t)| \leq cte$  y por lo tanto  $\psi_t \sim 1/h$ , el factor  $i$  al lado derecho es introducido por conveniencia. Asumimos que las funciones  $\varphi_{1,2}$  son de soporte compacto.

Para expresar una solución WKB se puede tomar una superposición de funciones  $\varphi^\pm(x, t) \exp(iS^\pm(x, t)/h)$  donde  $S^\pm$  y  $\varphi^\pm$  satisfacen (3.6) y (3.7), y además

$$S^\pm(x, 0) = S_0(x), \quad \varphi^\pm(x, 0) = \frac{1}{2}[\varphi_1 \mp \varphi_2 / \sqrt{L^0(x, \nabla S_0)}] \equiv \varphi_0^\pm(x). \quad (3.9)$$

En efecto, para encontrar los datos iniciales de (3.6) y (3.7) consideramos los datos iniciales para (1.5) dados por (3.8). Escogemos  $S^\pm|_{t=0} = S_0$ . Para satisfacer la primera condición de (3.8) necesitamos que  $\varphi^+ + \varphi^- = \varphi_1$ . Para la derivada tenemos  $h\varphi_t|_{t=0} = iS_t^+ \varphi^+ e^{iS_0^+/h} + iS_t^- \varphi^- e^{iS_0^-/h} + O(h) = i\varphi_2 e^{iS_0/h}$ . Teniendo en cuenta que  $S^\pm = -\mathcal{H}^\pm$  se tiene  $\varphi_2 = -\mathcal{H}^+ \varphi^+ + \mathcal{H}^+ \varphi^-$ . Escogiendo como en (3.9)  $S^\pm(x, 0)$ ,  $\varphi^\pm(x, 0)$  satisfacemos las condiciones para (3.6), (3.7) salvo  $O(h)$ .

### 3.3. Sistema hamiltoniano, bicaracterísticas y características.

De la mecánica clásica (ver[39, 1,3]) sabemos que, hasta algún momento del tiempo que es llamado *momento crítico* (ver abajo), la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, es decir *la acción*, con datos iniciales (3.9) es construída como sigue:

Se considera el sistema Hamiltoniano correspondiente a  $\mathcal{H}$  (omitimos los superíndices “+” y “-”),

$$\dot{p} = -\partial\mathcal{H}/\partial x, \quad \dot{x} = \partial\mathcal{H}/\partial p. \quad (3.10)$$

Consideramos las soluciones  $p = P(\alpha, t)$ ,  $x = X(\alpha, t)$  de este sistema que satisfacen las condiciones iniciales

$$p|_{t=0} = \nabla S_0(\alpha), \quad x|_{t=0} = \alpha. \quad (3.11)$$

Aquí  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un parámetro real  $n$  dimensional. En el caso cuando el jacobiano  $J(\alpha, t) = \det(\partial X/\partial \alpha)$  difiere de cero en el intervalo  $t \in [0, t_0]$ , la solución del problema (3.6),(3.9) existe, es única y tiene la forma:

$$S(x, t) = \left[ S_0(\alpha) + \int_0^t [\langle P(\alpha, \tau), \dot{X}(\alpha, \tau) \rangle - \mathcal{H}(P(\alpha, \tau), X(\alpha, \tau))] d\tau \right]_{\alpha=\alpha(x,t)} \quad (3.12)$$

donde  $\alpha = \alpha(x, t)$  es la solución de la ecuación  $X(\alpha, t) = x$ . El momento  $t$  en el cual  $J(\alpha, t) = 0$  se denomina *crítico*. Para estos valores de  $t$ , la ecuación  $X(\alpha, t) = x$  puede no tener una única solución y por lo tanto la función  $S(x, t)$  tampoco está definida de una manera única.

Las funciones  $P(\alpha, t)$  y  $X(\alpha, t)$  definen trayectorias en el espacio fase  $2n$ -dimensional; dichas trayectorias son llamadas *bicaracterísticas*. Las proyecciones de estas trayectorias en el espacio de configuración  $\mathbb{R}_x^n$  están dadas por las funciones  $X(\alpha, t)$  y estas proyecciones son llamadas *características*. Se sigue de las propiedades de los sistemas hamiltonianos que dos bicaracterísticas coinciden o siempre son diferentes, en cambio las características pueden intersectarse entre si. En los puntos en los que las características se intersectan, el jacobiano  $J$  se anula, y por lo tanto el sistema de ecuaciones  $x = X(\alpha, t)$  no tiene solución única.

### 3.4. Reducción de la ecuación de transporte.

Deseamos reducir la ecuación de transporte, para esto, usaremos la fórmula de Liouville. Sea  $\dot{x} = A(t)x$ , la fórmula de Liouville nos dice que el determinante  $W$  de la matriz fundamental (matriz cuyas columnas son soluciones linealmente independientes del sistema) satisface  $\dot{W} = (\text{Tr}A)W$ .

Para reducir la ecuación (3.7) (ver[3]), tengamos en cuenta que  $\dot{x} = \mathcal{H}_p(x, p)$ ,  $P(\alpha, t) = S_x(X(\alpha, t), t)$  luego  $\partial P/\partial \alpha = S_{xx}\partial X/\partial \alpha$ ,  $J = \det \partial X/\partial \alpha$  - obviamos los índices de sumación, y teniendo en mente que  $X$ ,  $\alpha$  y  $p$  están en  $\mathbb{R}^n$ - obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{X}}{\partial \alpha} &= \mathcal{H}_{px} \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \mathcal{H}_{pp} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \dot{X}}{\partial \alpha} &= (\mathcal{H}_{px} + \mathcal{H}_{pp} S_{xx}) \frac{\partial X}{\partial \alpha}\end{aligned}$$

tenemos que  $\frac{\partial X}{\partial \alpha}|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ , por que  $x = \alpha|_{t=0}$  y por lo tanto

$\partial X/\partial \alpha$  es una matriz fundamental ya que satisface el sistema y en el momento del tiempo inicial es la matriz identidad, por esto, al anterior sistema podemos aplicarle la fórmula de Liouville, obteniendo  $\dot{J} = \text{Tr}(\mathcal{H}_{px} + \mathcal{H}_{pp} S_{xx})J$ , ahora bien, en la ecuación de transporte, los dos primeros sumandos son  $d\varphi/dt$  y así

$$\begin{aligned}\left( \frac{d}{dt} \varphi + \frac{1}{2} \varphi \frac{\dot{J}}{J} = 0 \right) \times \sqrt{J}, \\ \sqrt{J} \dot{\varphi} + \varphi \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{\sqrt{J}} = 0\end{aligned}$$

obteniendo:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \sqrt{|J|}) = 0.$$



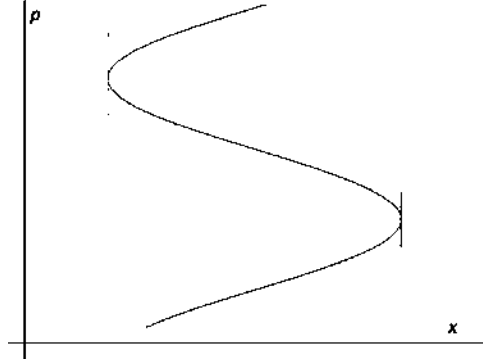
Aquí  $d/dt$  se entiende como la derivada a lo largo de las trayectorias (3.10) donde  $J$  es el jacobiano introducido anteriormente. Para  $t = 0$  se tiene  $J = 1$  y por la fórmula anterior junto con las condiciones iniciales (3.9) sabemos que  $\varphi\sqrt{J}$  es constante por lo que vale lo mismo que vale en  $t = 0$ , es decir  $\varphi\sqrt{J} = \varphi_0 \cdot 1$ , y por lo tanto

$$\varphi(x, t) = \frac{\varphi_0(\alpha)}{\sqrt{|J(\alpha, t)|}}, \quad \alpha = \alpha(x, t). \quad (3.13)$$

Nuevamente omitimos los superíndices “+” y “-” como en (3.10).

Las fórmulas (3.12) y (3.13) determinan completamente la solución WKB del problema de Cauchy para la ecuación (1.5) con condiciones iniciales (3.8) en el intervalo  $0 \leq t \leq t_0$  en el que el jacobiano  $J$  es diferente de cero.

Los puntos en los cuales  $J$  se anula se dicen *focales*, estos puntos son singulares (en particular son puntos de ramificación) de la función  $S(x, t)$  y en una vecindad de tales puntos, la representación de una solución asintótica en la forma  $\varphi \exp(iS/h)$  no es válida.



(En la gráfica mostramos los puntos en los cuales el jacobiano se anula, es decir los puntos focales.)

Esto no significa que la solución  $\psi$  en sí misma sea insensible en una vecindad de los puntos focales, sino que las asintóticas WKB no puedan ser aplicadas en este caso y se debe buscar una solución aproximada en otra forma.

Notemos que las soluciones de un sistema hamiltoniano permanecen suaves en los puntos focales y la presencia de puntos focales no es una obstrucción en la construcción de dichas soluciones para los momentos “después del crítico”.

Es conveniente, interpretar geoméricamente las soluciones del sistema hamiltoniano (las bicaracterísticas), particularmente, mirarlas como funciones que definen superficies en el espacio fase del sistema (3.10). Estas superficies se dicen que son *lagrangianas*<sup>1</sup> y juegan un papel significativo, no solo en la teoría de Maslov, sino también en otras áreas de la matemática contemporánea. La próxima sección está dedicada a objetos relacionados con el método WKB, y completamos esta sección con varios ejemplos.

*Observación.* Recordemos que el *soporte*  $\text{supp}\varphi$  de una función  $\varphi$  se entiende como la clausura del conjunto de puntos en los cuales  $\varphi$  es distinto

<sup>1</sup>Estos objetos quien los introdujo por primera vez fue Maslov.

de cero. Si los puntos focales no están contenidos en el soporte de la función  $\varphi_0$  entonces las asintóticas WKB son aplicables para los momentos de ‘‘después del crítico’’.

### 3.5. Ejemplos.

Consideremos ondas en un recipiente con profundidad infinita, lo que corresponde a las relaciones  $H = \infty$  y  $\mathcal{H}^\pm = \pm\sqrt{|p|}$ . Asumamos que  $S_0(x)$  depende de  $x_1$  únicamente, así nuestro problema se reduce a una ecuación unidimensional pudiéndose menospreciar  $p_2$  y  $x_2$  y escribir  $x = x_1$  y  $p = p_1$ . Consideramos el hamiltoniano con el índice ‘‘+’’ y escribamos  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ = \sqrt{|p|}$ .

**EJEMPLO 1.** Sea  $S_0 = kx$ ,  $k > 0$  (Onda plana). El sistema hamiltoniano está dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{x} = \frac{\text{sgn}p}{2\sqrt{|p|}} \end{cases},$$

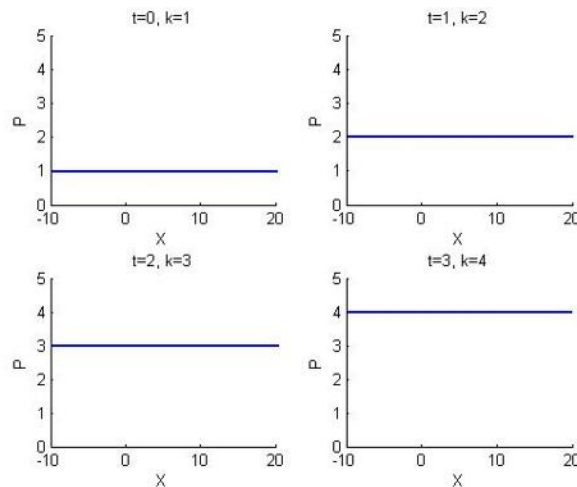
y las condiciones iniciales son

$$\begin{cases} p|_{t=0} = k \\ x|_{t=0} = \alpha \end{cases}$$

Resolviendo el sistema hamiltoniano, obtenemos

$$\begin{cases} P = k \\ X = \alpha + \frac{t}{2\sqrt{k}} \end{cases}.$$

Graficaremos la curva definida por las ecuaciones  $x = X(\alpha, t)$ ,  $p = P(\alpha, t)$  que están parametrizadas por  $\alpha$  para distintos valores de  $t$ .



En la sección 4 veremos que estas curvas son “variedades lagrangianas” que corresponden a las soluciones WKB que estamos considerando. De la ecuación y de la gráfica vemos que el jacobiano  $J = \partial X/\partial \alpha = 1$  es distinto de cero para todo  $t$ .

Para hallar la acción tenemos en cuenta la ecuación de Hamilton-Jacobi dada por la fórmula (3.6), así:

$$S_t + \sqrt{|\nabla S|} = 0,$$

en el caso unidimensional tenemos

$$S_t + \sqrt{|S_x|} = 0,$$

resolviendo esta última ecuación por la fórmula (3.12) obtenemos la acción  $S = kx - \sqrt{kt}$ . Para una amplitud arbitraria inicial  $\varphi_0(x)$ , despejando  $\alpha$  de la solución del sistema hamiltoniano y reemplazando en la fórmula (3.13) hallamos la solución WKB

$$\psi(x, t) = \varphi_0 \left( x - \frac{t}{2\sqrt{k}} \right) e^{\frac{i(kx - \sqrt{kt})}{h}},$$

que es un tren de ondas planas con la frecuencia  $\omega = \sqrt{k}/h$ .

Ahora bien, si queremos ver el comportamiento de las bicaracterísticas asociadas al sistema hamiltoniano dado para un  $\alpha$  fijo y  $t$  variando, graficaremos el comportamiento de  $x = X(\alpha, t)$ ,  $p = P(\alpha, t)$ .

**EJEMPLO 2.** Sea  $S_0 = kx + \beta \frac{x^3}{3}$ ,  $k > 0$  y  $\beta > 0$ . El sistema hamiltoniano es justamente como en el primer ejemplo y las condiciones iniciales son:

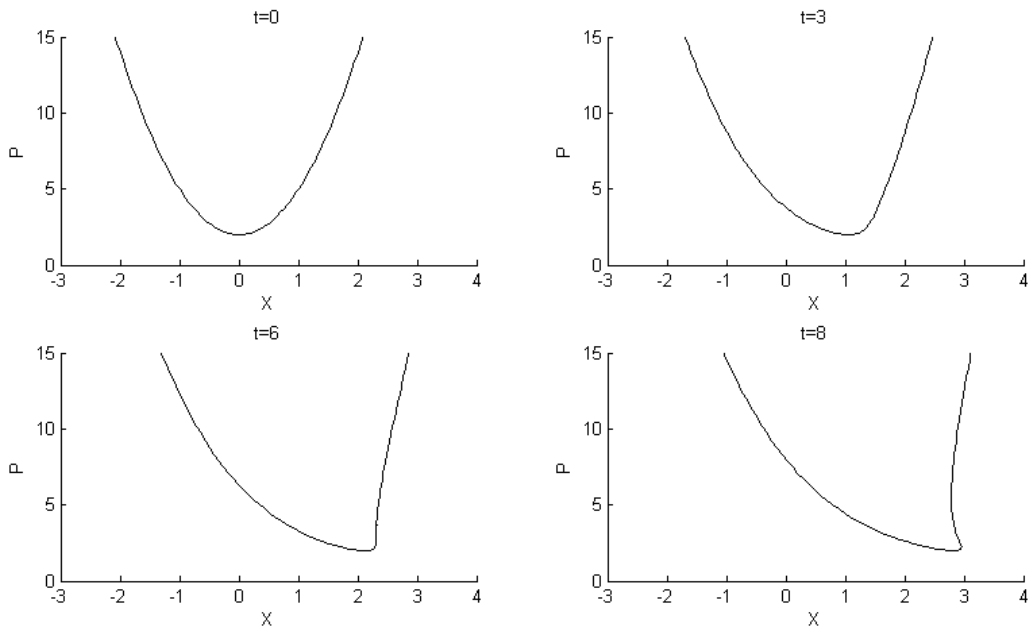
$$\begin{cases} p|_{t=0} = k + \beta \alpha^2 \\ x|_{t=0} = \alpha \end{cases}$$

La solución del sistema hamiltoniano es:

$$\begin{cases} P = k + \beta \alpha^2 \\ X = \frac{1}{2}t(k + \beta \alpha^2)^{-1/2} + \alpha \end{cases};$$

la acción en este caso es  $S(x, t) = \left[ k\alpha + \beta \frac{\alpha^3}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{k + \beta \alpha^2}t \right]_{\alpha=\alpha(x,t)}$ .

La variedad lagrangiana se ve de la siguiente forma:

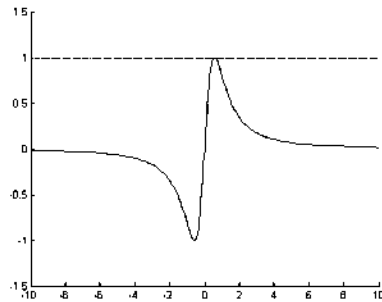


El hecho de que en algunos puntos la tangente a estas curvas sea vertical, significa que  $J = \partial X / \partial \alpha = 0$  y por lo tanto la asintótica WKB en estos puntos no es válida.

La ecuación  $J = \partial X / \partial \alpha = 0$  para encontrar los puntos focales se reduce a:

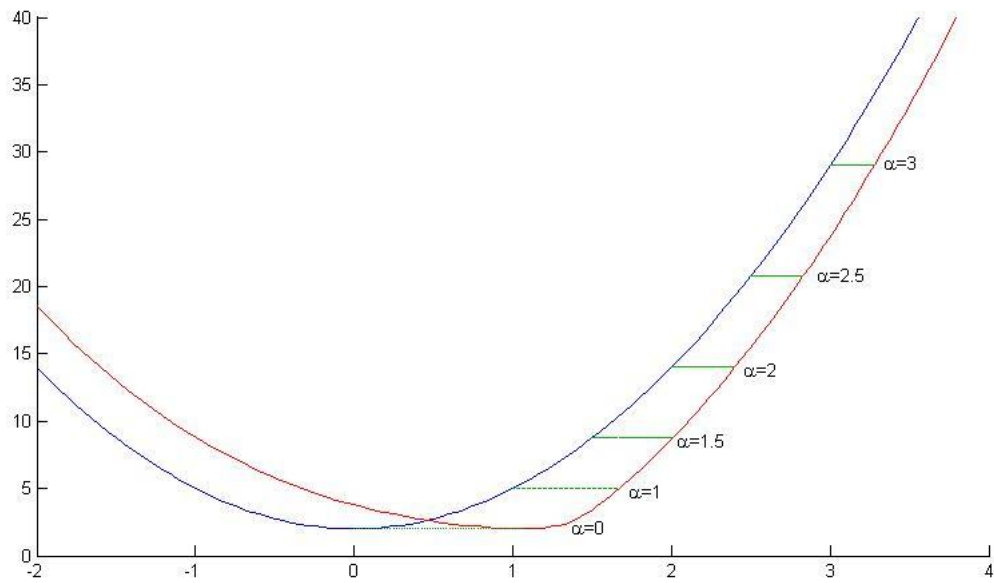
$$1 = \frac{t\beta\alpha}{2(k + \beta\alpha^2)^{3/2}}.$$

Para encontrar las soluciones de esta ecuación aplicaremos un método gráfico. Igualamos la gráfica de la función  $f_1(\alpha) = \frac{t\beta\alpha}{2(k + \beta\alpha^2)^{3/2}}$  a  $f_2 = 1$ .



Derivamos la función  $f_1(\alpha)$  y hallamos sus máximos y mínimos, obtenemos  $\alpha = \sqrt{k/2\beta}$ , en este caso, para  $k = 2$ ,  $\beta = 3$ , tenemos  $\alpha = \sqrt{1/3}$ . Reemplazamos dicho valor en la ecuación para el jacobiano y obtenemos el primer momento  $t_0 = 6$  en el que se anula y en el que no es posible hallar una solución WKB. En  $t > t_0 = 3k\sqrt{3}/\sqrt{\beta}$  la ecuación de anulación del jacobiano posee dos soluciones. Se entiende que dos puntos focales ocurren para  $t > t_0$ .

La evolución de la variedad lagrangiana en el tiempo se ve en la siguiente figura:



**EJEMPLO 3.** Sea

$$S_0(x) = kx - \int_0^x \exp(-\xi^2/2) d\xi, \quad k > 1.$$

El hamiltoniano va como en el primer ejemplo.

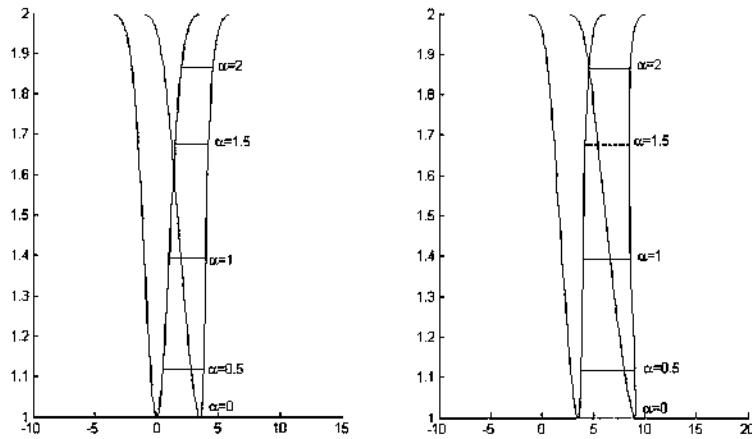
Las condiciones iniciales (3.11) son

$$\begin{cases} p|_{t=0} = k - \exp(-\alpha^2/2) \\ x|_{t=0} = \alpha \end{cases}.$$

La solución del sistema (3.10) está dada por

$$\begin{cases} P = k - \exp(-\alpha^2/2) \\ X = \alpha + \frac{t}{(2(k - \exp(-\alpha^2/2)))^{1/2}} \end{cases}.$$

La evolución de la variedad lagrangiana se ve en la siguiente figura:



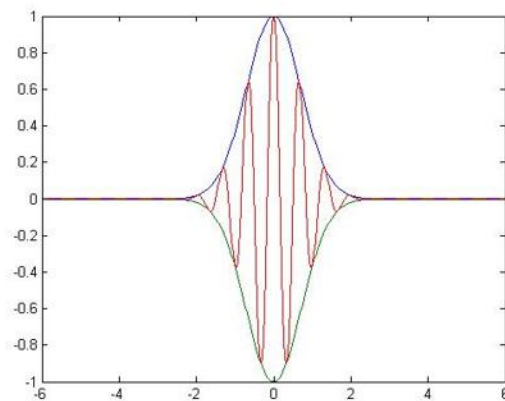
La ecuación que define los momentos críticos es:

$$1 = t\alpha \frac{\exp(-\alpha^2/2)}{(4(k - \exp(-\alpha^2/2)))^{3/2}}$$

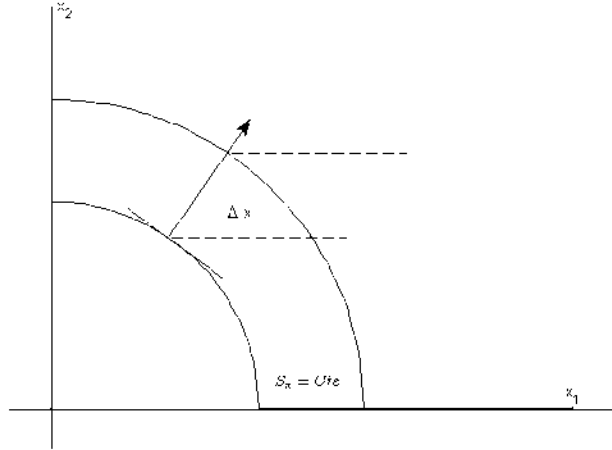
que tiene dos raíces para  $t > t_0$ , donde  $t_0 = 4(k - \exp(-\alpha_0^2/2))^{3/2} \exp(\alpha_0^2/2)/\alpha_0$ , y  $\alpha_0$  es la raíz positiva de la ecuación  $k \exp(\alpha^2/2)(1 - \alpha^2) = (1 + \alpha^2/2)$ .

**EJEMPLO 4.** La velocidad fase y la velocidad grupo. La siguiente representación de las velocidades fase y de la velocidad grupo está relacionada con las soluciones asintóticas WKB.

Si  $\varphi(x, t)$  es una función de soporte compacto entonces la solución WKB describe un tren de ondas (o paquete de ondas), donde  $\varphi(x, t)$  es la “envolvente” del paquete y la función  $\exp(iS(x, t)/h)$  define sus oscilaciones.



Por la velocidad fase se entiende la velocidad de propagación de la superficie de la fase constante  $S(x, t)$ .



Como  $S(x, t) = cte$  se tiene que  $S(x_0, t) = cte$ ,  $S(x_0 + \Delta x, t + \Delta t) = cte$  desarrollando en su serie de Taylor esta última expresión, tenemos que

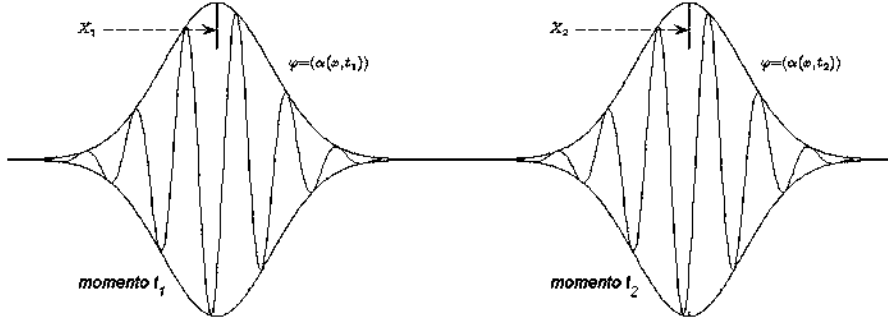
$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) - S(x_0, t_0) = S_t \Delta t + \nabla S \Delta x + \dots = 0$$

- De aquí se desprende que  $|\Delta x| \simeq -S_t \Delta t / |\nabla S|$ . De la gráfica vemos que  $\Delta x = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} |\Delta x|$ , ya que  $\Delta x$  es paralelo a  $\nabla S$ .

Esta ecuación, salvo términos de mayor orden nos proporciona una fórmula para la velocidad fase,

$$c_f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{S=cte} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\nabla S}{|\nabla S|} |\Delta x|}{\Delta t} = -S_t \nabla S |\nabla S|^{-2} = \mathcal{H}(x, \nabla S) \nabla S |\nabla S|^{-2}.$$

Por la velocidad del grupo se entiende la velocidad de desplazamiento de un paquete estrecho de ondas, es decir, la velocidad de desplazamiento del soporte de  $\varphi(x, t)$  bajo la hipótesis de que el diámetro del  $supp \varphi$  es suficientemente pequeño. Se sigue de la fórmula (3.13) que la velocidad del desplazamiento del soporte  $supp \varphi$  coincide con la velocidad de desplazamiento de los puntos en donde  $\alpha(x, t) = cte$ , esto es, con el vector velocidad de un punto bajo su desplazamiento a lo largo de la trayectoria del sistema hamiltoniano (3.10). Así, la velocidad del grupo está dada por la relación  $c_{gr} = \dot{X} = \mathcal{H}_p(x, \nabla S)$ .



En efecto, la velocidad del soporte  $\text{supp}\varphi_0$  cuando es muy estrecho está dada por

$$c_{gr} = \left. \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right|_{t_2 \rightarrow t_1},$$

las envolventes son  $\varphi_0(\alpha(x, t))$ , donde  $\alpha(x, t)$  es la solución de  $X(\alpha, t) = x$ . Supongamos que  $\varphi_0(\alpha(x, t))$  alcanza su máximo en  $\alpha = \alpha_0$ , esto es  $\alpha(x_1, t_1) = \alpha_0$  y  $\alpha(x_2, t_2) = \alpha_0$ , lo que a su vez indica que  $x_1 = X(\alpha_0, t_1)$ ,  $x_2 = X(\alpha_0, t_2)$  y así

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{X(\alpha_0, t_2) - X(\alpha_0, t_1)}{t_2 - t_1} \rightarrow \dot{X} \quad \text{si } t_2 \rightarrow t_1,$$

entonces

$$c_{gr} = \dot{X} = \mathcal{H}_p$$

Finalmente, consideramos un ejemplo que nos habilita para conseguir, en lo que sigue, algunas fórmulas asintóticas en una vecindad de un punto focal.

**EJEMPLO 5.** Método de la fase estacionaria en el caso unidimensional. En este ejemplo comenzaremos por estudiar la siguiente integral:

$$I = \int \varphi(x) e^{\frac{iS(x)}{h}} dx; \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty; \quad S \in \mathcal{C}^\infty.$$

Mas adelante veremos que estas integrales nos permiten encontrar soluciones asintóticas alrededor de puntos focales.

Consideremos los siguientes casos:



1)  $S_x \neq 0$ ; integrando por partes tenemos que

$$I = -h \int e^{iS/h} \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi}{iS_x} \right) dx = O(h).$$

Repetiendo este procedimiento  $N$  veces vemos que  $I = O(h^N)$ , donde  $N$  es cualquier número natural.

2)  $S_x = 0$  para  $x = x_0$ , este punto se llama *el punto de la fase estacionaria*.

En el presente ejemplo queremos calcular la asintótica de  $I$  cuando solo hay un punto de la fase estacionaria y este punto es no degenerado ( $S_{xx}(x_0) \neq 0$ ), para este fin, consideremos el problema de Cauchy con condiciones iniciales de rápida oscilación para la ecuación de Schrödinger que describe un oscilador mecánico cuántico,

$$\begin{cases} ih\psi_t = \frac{1}{2} \left( -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right) \psi, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 = \varphi_0(x) \exp(iS_0(x)/h). \end{cases} \quad (3.14)$$

El método WKB puede ser aplicado a este problema, prácticamente sin modificaciones. Asumiendo que  $\psi = \varphi(x, t) \exp(iS(x, t)/h)$  y llevando a cabo manipulaciones simples, uno puede obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de transporte como en el principio de esta sección. El hamiltoniano es  $\mathcal{H} = (p^2 + x^2)/2$  y el sistema hamiltoniano correspondiente es

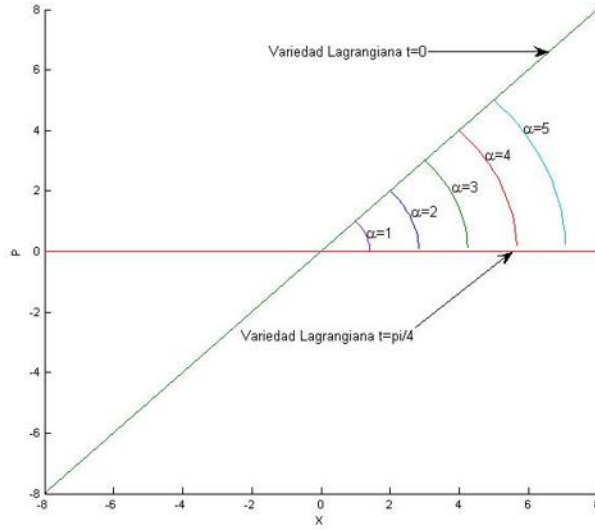
$$\begin{cases} \dot{p} = -x \\ \dot{x} = p \end{cases},$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(x)}{\partial \alpha} \\ x|_{t=0} = \alpha \end{cases}$$

y así

$$\begin{cases} P(\alpha, t) = \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} \cos t - \alpha \sin t, \\ X(\alpha, t) = \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} \sin t + \alpha \cos t \end{cases}$$



El jacobiano es  $J = (\partial^2 S_0 / \partial \alpha^2) \sin t + \cos t$ . Se sigue de esta fórmula que, si  $\partial^2 S_0 / \partial \alpha^2 > 0$ , entonces el jacobiano es distinto de cero para cualquier  $t$  en el intervalo  $0 \leq t \leq \pi/2$  y si  $\partial^2 S_0 / \partial \alpha^2 < 0$  entonces  $J$  es distinto de cero para cualquier  $t$  en el intervalo  $-\pi/2 \leq t \leq 0$ . De esta forma una solución WKB del problema (3.14) existe para cada  $t$  en el intervalo  $0 \leq t \leq \pi/2$  o en  $-\pi/2 \leq t \leq 0$  si  $\partial^2 S_0 / \partial \alpha^2 \neq 0$ , dicha solución asintótica es de la forma:

$$\psi(x, t) = \varphi(\alpha) \left( \cos t + \frac{\partial^2 S_0}{\partial \alpha^2} \sin t \right)^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( S_0(\alpha) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \alpha \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \alpha} \right)^2 - \alpha^2 \right] \sin 2t \right) \right\}$$

donde  $\alpha = \alpha(x, t)$  es una solución de la ecuación  $(\partial S_0 / \partial \alpha) \sin t + \alpha \cos t = x$ . Resulta que, (ver, e.g., [2], Russian p.70 e Inglés p.75) para el problema dado, las asintóticas WKB no solo dan la solución asintótica formal sino que también dan la asintótica rigurosa de la solución del problema, es decir, la solución que difiere de la solución exacta por una cantidad de  $O(h)$ .

Por otra parte, (ver, e.g., [2]), la solución exacta de (3.14) es:

$$\psi = \frac{1}{(2\pi h |\sin t|)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi) \exp \left\{ \frac{i}{2h \sin t} (x^2 \cos t - 2x\xi + \xi^2 \cos t) - \frac{i\pi}{4} \text{sign} t \right\} d\xi. \quad (3.15)$$

Para hallar esta solución debemos calcular  $G$  de tal manera que

$$G|_{t=0} = \delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ip}{h}(x-\xi)} dp.$$

Esta  $G$  se denomina la función de Green para la ecuación de Schrödinger. Para encontrar dicha  $G$  solucionamos el problema auxiliar  $G_p|_{t=0} = \varphi_0 e^{iS_0(x)/h}$ , donde  $\varphi_0 = 1/2\pi h$ ,  $S_0(x) = p(x - \xi)$ , donde  $G_p$  satisface la ecuación de Schrödinger para  $t > 0$ . Obviamente  $G = \int_{-\infty}^{\infty} G_p dp$ . Para encontrar la  $G_p$  usaremos el método

WKB; en este caso las fórmulas WKB proporcionan la solución exacta. Entonces buscaremos  $G_p$  en la forma  $G_p = \varphi e^{iS/h}$ . Por la ecuación de transporte reducida tenemos que  $\varphi(x, t) = 1/2\pi h \sqrt{|\cos t|}$ . Por la fórmula (3.12) tenemos que  $S(x, t) = -\frac{1}{2\cos t} [x^2 \sin t + p^2 \sin t + 2p(\xi \cos t - x)]$ .

Así  $G_p = (1/\sqrt{|\cos t|}) \exp(-i[x^2 \sin t + p^2 \sin t + 2p(\xi \cos t - x)]/h)$  y  $G = \int_{-\infty}^{\infty} G_p dp$ . Para calcular esta última integral debemos hacer el cambio de variable  $q = \sqrt{2h \cos t} \left( p + \frac{\xi \cos t - x}{\sin t} \right)$  para poder aplicar la fórmula para las integrales de Fresnel:

$$\int_0^{\infty} \exp \pm(iq^2) dq = \pm e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

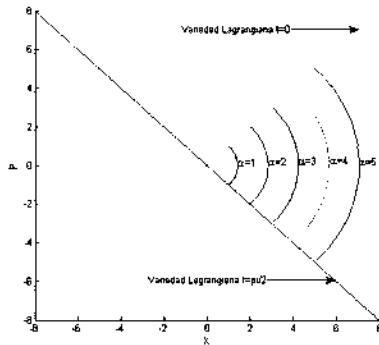
Aplicándola a la  $\int_{-\infty}^{\infty} (1/2\pi h \sqrt{|\cos t|}) \exp(-i[x^2 \sin t + p^2 \sin t + 2p(\xi \cos t - x)]/h) dp$  obtenemos la función de Green y después, la fórmula exacta (3.15) para la solución del problema de Cauchy, que es igual a la integral de la función de Green con los datos iniciales:  $\psi = \int \psi_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi$ .

Se puede comprobar que esta solución posee las siguientes propiedades:

1) Para  $t = \frac{\pi}{2}$  y  $x = p$  la función  $\psi(x, t)$  es la  $h$  transformada de Fourier de la función  $\psi_0(x)$ .

2) Para  $t = \frac{-\pi}{2}$  y  $x = -p$  la función  $\psi(x, t)$  es la  $h$  transformada de Fourier de la función  $\psi_0(x)$  multiplicada por  $e^{i\pi/2}$ .

De esta forma la solución WKB en los puntos  $(p, \pi/2)$  y  $(-p, -\pi/2)$  es la asíntota de la transformada de Fourier de la función  $\psi_0(x)$  salvo  $O(h)$  (despreciando un factor constante de módulo unitario). El flujo clásico del oscilador son rotaciones y en los momentos  $t = \pm\pi/2$ , el flujo coincide con rotaciones por el ángulo recto, es decir, cambia la coordenada  $x$  por  $p$ , y viceversa. Por otra parte, la solución en estos puntos está dada por la transformada de Fourier. Podemos entonces decir que la transformada de Fourier y las rotaciones del plano fase por el ángulo  $\pm\pi/2$ , son lo mismo cuando  $h \rightarrow 0$ .



La acción en ambos puntos es  $S = S_0(\alpha(p)) - \alpha(p)(\partial S_0/\partial \alpha)(\alpha(p))$ , donde  $\alpha(p)$  es la solución de la ecuación  $(\partial S_0/\partial \alpha)(\alpha) = p$ . Considerando la última relación y denotando  $(\alpha(p))$  por  $x(p)$ , finalmente obtenemos

$$F_{x \rightarrow p}^h[\varphi_0 \exp(iS_0/h)] = \varphi_0(x) \left| \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i\pi\mu}{2} + \frac{i}{h}(S_0(x) - xp) \right\} + O(h) \quad (3.16)$$

donde  $x = x(p)$  es la solución de la ecuación  $\partial S_0(x)/\partial x = p$ ,  $\mu = 1$  si  $\partial^2 S_0/\partial x^2 < 0$  y  $\mu = 0$  en el caso contrario. Para  $p = 0$ , la fórmula (3.15) coincide con la fórmula del método de la fase estacionaria.

Usando las asintóticas WKB de una solución de la ecuación de Schrödinger para un oscilador multidimensional, uno puede similarmente obtener las asintóticas de la transformada de Fourier. La forma de las asintóticas se repite como en (3.15), con la única diferencia de que  $\partial^2 S_0/\partial x^2$  es reemplazada por  $\det(\partial^2 S_0/\partial x^2)$  y  $\mu$  se transforma en  $\text{Inerdex}(\partial^2 S_0/\partial x^2)$ , donde el símbolo  $\text{Inerdex}A$  se entiende como el índice de inercia negativa de la matriz cuadrada  $A$ , es decir, el número de eigenvalores negativos de  $A$  [1-5].

## 4. VARIEDADES LAGRANGIANAS Y SUS PROPIEDADES.

En esta sección presentaremos una breve descripción de los objetos geométricos relacionados con la ecuación de Hamilton-Jacobi. Son importantes porque además de proveer la dicha interpretación geométrica nos ayudan en la construcción de la solución en puntos focales, como veremos a continuación.

### 4.1. Variedades Lagrangianas.

El sistema hamiltoniano (3.10) con las condiciones iniciales (3.11) define una variedad lagrangiana en el espacio fase  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ . Para información detallada concerniente a variedades lagrangianas, ver e.g., [1-7, 39,40,42]. En esta sección solamente presentamos los hechos necesarios para la siguiente exposición.

Por una *variedad suave de dimensión  $m$*  en el espacio  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ , se entiende un conjunto que puede ser cubierto por subdominios de dimensión  $m$ , que son los llamados *mapas*, cada uno de los cuales admite una proyección uno a uno y suave sobre algún plano coordenado de dimensión  $m$  definido por  $2n - m$  ecuaciones de la forma  $x_i = 0$ ,  $p_j = 0$ , donde  $i$  y  $j$  son enteros a lo largo del conjunto  $(1, \dots, n)$ . Mas aún, todo punto de la variedad debe pertenecer al interior de uno de los mapas. En contraste con las propiedades de ser superficie (aquí entendemos superficies como objetos que admiten una proyección suave sobre el espacio de configuración), la propiedad de ser una variedad es preservada bajo traslados a lo largo de trayectorias del sistema hamiltoniano (3.10) porque las trayectorias del sistema hamiltoniano son disjuntas en el espacio fase.

Veamos el ejemplo 2 de la sección previa, las condiciones iniciales en una curva  $\Lambda_0^1$  en el espacio fase  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ , están dadas por  $p = k + \beta\alpha^2$  y  $x = \alpha$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ . Obviamente, la curva es una “superficie” porque admite una proyección suave sobre el eje  $x$ , y su proyección es uno a uno. Como un resultado de evolución de esta curva respecto al sistema hamiltoniano, obtenemos una curva  $\Lambda_t^1$  la cual no es una “superficie” para  $t > t_0$  pero es una variedad, porque puede ser cubierta por dos mapas, uno de los cuales admite una proyección uno a uno y suave sobre el eje  $x$  y el otro sobre el eje  $p$ .

Es natural definir paramétricamente curvas en el espacio fase, en la forma  $\Lambda_0^1 = \{(p, x) \in \mathbb{R}_{x,p}^2 : p = P(\alpha), x = X(\alpha), -\infty < \alpha < \infty\}$  donde  $P(\alpha)$ ,  $X(\alpha)$  son funciones suaves. El parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  es una coordenada en la curva. Algunas veces la curva  $\Lambda_0^1$  puede ser cerrada; en este caso asumimos que las funciones  $P(\alpha)$ ,  $X(\alpha)$  son periódicas respecto a  $\alpha$ .

Podríamos similarmente definir variedades  $n$  dimensionales en el espacio fase  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ , y escribiríamos en este caso  $\Lambda^n = \{p, x \in \mathbb{R}_{x,p}^{2n} : p = P(\alpha), x = X(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ . Entonces,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un parámetro  $n$  dimensional y  $P(\alpha)$  y  $X(\alpha)$  son funciones vectoriales  $n$  dimensionales. Para simplificar la exposición, asumiremos que el parámetro  $\alpha$  varía sobre el espacio  $\mathbb{R}^n$ ; asumiendo que las funciones  $P(\alpha)$  y  $X(\alpha)$  son periódicas respecto a algún  $\alpha_j$  si es necesario. Denotemos

los puntos sobre la variedad por  $\sigma$ ; así,  $\sigma = (P(\alpha), X(\alpha))$ , y a  $\sigma$  uno le puede asignar la colección de coordenadas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Si tenemos una familia de variedades dependiendo de un parámetro, digamos el tiempo  $t$ , entonces dotamos los puntos  $\sigma$  con el subíndice  $t$  e inscribimos a  $t$  en la lista de argumentos de las funciones  $P, X$ , esto es, escribimos  $\sigma_t = (P(\alpha, t), X(\alpha, t))$ . Escribimos los índices  $j$  de puntos con superíndices  $\sigma^j$ .

Las funciones vectoriales  $P(\alpha)$  y  $X(\alpha)$  generan matrices  $n \times n$  dadas por las fórmulas

$$B = \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad C = \frac{\partial X}{\partial \alpha}. \quad (4.1)$$

El hecho de que la dimensión de la variedad  $\Lambda^n$  es igual a  $n$  se entiende como que el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$  es igual a  $n$ .

Por una *Variedad Lagrangiana* entendemos una variedad suave de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$  que poseé las propiedades siguientes que son equivalentes:

a) Los corchetes lagrangianos

$$[p, x]_{i,j} = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial P}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \right\rangle, \quad i, j = 1, \dots, n$$

se anulan en la variedad, es decir  $[p, x]_{i,j} = 0$ .

b) La integral

$$\int \langle P, dX \rangle$$

está *localmente definida*, esto es  $\oint \langle P, dX \rangle = 0$  en la variedad.

La equivalencia de estas propiedades se logra a partir de utilizar la Fórmula de Green.

El ejemplo mas simple de una variedad lagrangiana es la variedad definida por las condiciones (3.11). Otros ejemplos son presentados después.

Un hecho importante es que la propiedad de ser una variedad lagrangiana es *invariante* respecto a las transformaciones canónicas, es decir, los traslados a lo largo de trayectorias del sistema hamiltoniano [1-4,39]. Denotamos por  $g_{\mathcal{H}}^t$  al flujo fase correspondiente al sistema hamiltoniano (3.10), esto es, sea  $g_{\mathcal{H}}^t$  es la aplicación que manda las condiciones iniciales a  $p|_{t=0} = p_0, \quad x|_{t=0} = x_0$  en la solución del sistema (3.10), con estas condiciones iniciales en el momento  $t$ ,  $(p, x) = g_{\mathcal{H}}^t(p_0, x_0)$ . El flujo fase “transporta” objetos a lo largo de trayectorias del sistema (3.10) y uno puede tomar una familia  $n$  paramétrica como condiciones iniciales. La propiedad mencionada anteriormente dice que las variedades  $\Lambda_t^n = g_{\mathcal{H}}^t \Lambda_0^n$  obtenidas al usar los traslados de una variedad lagrangiana a lo largo de trayectorias del sistema (3.10) siguen siendo variedades lagrangianas para cualquier  $t$ .

La definición de variedad lagrangiana sustenta la existencia de la integral  $\int \langle P, dX \rangle$ . De aquí se sigue que uno puede definir (localmente en general) a una función  $s$ , sobre  $\Lambda_t^n$ , como la llamada *acción*<sup>2</sup>, que satisface la condición

$$ds = \langle P, dX \rangle. \quad (4.2)$$

<sup>2</sup>Esta acción es diferente a la introducida anteriormente.

La función  $S(\alpha, t)$  definida por (3.12) cumple la condición (4.2) y la función  $S(\alpha, t)$  puede ser representada como:

$$S = S_0(\alpha^0) + \int_0^t (\langle P, \dot{X} \rangle - \mathcal{H}) \Big|_{\alpha=\alpha^0} d\tau + \int_\gamma \langle P, dX \rangle \quad (4.3)$$

donde  $\alpha^0$  designa algún valor elegido del parámetro  $\alpha$  definiendo un punto  $\sigma_0^0 = (P(\alpha^0, 0), X(\alpha^0, 0))$  en la variedad lagrangiana  $\Lambda_0^n$  y  $\gamma$  para un camino sobre  $\Lambda_t^n$  que une los puntos  $\sigma_t^0 = (P(\alpha^0, t), X(\alpha^0, t))$  y  $\sigma_t = (P(\alpha, t), X(\alpha, t))$ .

Como la solución de la ecuación (4.2) no es única (por ejemplo,  $s' = s + f(t)$  es también una solución) las fórmulas (3.12) y (4.3) definen de manera única la acción sobre  $\Lambda_t^n$ . En lo que sigue, asumiremos que la acción sobre  $\Lambda_t^n$  está definida por dichas fórmulas.

La variedad lagrangiana  $\Lambda_0^n$  define una acción en si misma y de esta forma las condiciones iniciales para la ecuación de Hamilton-Jacobi pueden ser tomadas en términos de variedades lagrangianas. Una variedad lagrangiana puede estar dada en la forma  $\Lambda_0^n = \{p = P_0(\alpha), x = X_0(\alpha)\}$ . Eligiendo un punto para esta variedad, correspondiente al valor  $\alpha = \alpha^0$  la acción puede ser definida por la fórmula

$$s_0(\alpha) = \int_\gamma \langle P_0, dX_0 \rangle + s_0(\alpha^0)$$

donde  $\gamma$  es el camino sobre  $\Lambda_0^n$  que une los puntos  $\sigma_0^0 = (P_0(\alpha^0), X_0(\alpha^0))$  y  $\sigma^0 = (P_0(\alpha), X_0(\alpha))$ . Así, al dar una variedad  $\Lambda_0^n$  se definen las condiciones iniciales para la ecuación de Hamilton-Jacobi salvo una constante aditiva.

## 4.2. Puntos focales y cáusticas.

Usaremos la notación (4.1). Por *Puntos focales sobre una variedad lagrangiana* entendemos los puntos en los cuales  $J \equiv \det C(\alpha) = 0$ . Las proyecciones de estos puntos sobre el espacio de configuración  $\mathbb{R}_x^n$  son también llamados *puntos focales*. En óptica geométrica, las curvas o las superficies en el espacio de configuración  $\mathbb{R}_x^n$  que consisten de puntos focales se dice que son *cáusticas* o *superficies cáusticas*. La amplitud de las soluciones WKB en estos puntos va al infinito. Desde el punto de vista de la geometría de las variedades lagrangianas, los puntos focales son singulares respecto a la proyección de la variedad  $\Lambda_t^n$  sobre el espacio de configuración, es decir, sobre el plano  $n$  dimensional  $\mathbb{R}_x^n$  que está dado por las  $n$  ecuaciones  $p_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$ .

Los puntos focales (y sus colecciones) son también llamados *Singularidades Lagrangianas*. La investigación de estas singularidades es una de las direcciones de la teoría de las catástrofes (ver, e.g., [39,41-44,46,47]). En los puntos focales, la amplitud de las soluciones asintóticas se incrementa indefinidamente cuando  $h \rightarrow 0$  y el orden del crecimiento respecto al parámetro  $h$  depende del tipo de singularidad, la cual a su vez, está determinada por la geometría de la variedad lagrangiana en una vecindad del punto focal. Una clasificación de singularidades

lagrangianas es lograda en [39, 42, 44]. En la sección 6 daremos un ejemplo en el que veremos cómo se interpreta este tipo de situación.

### 4.3. Coordenadas focales y el atlas canónico

Otra importante propiedad de las variedades lagrangianas es que en una vecindad de un punto focal admiten una proyección suave, uno a uno, sobre algún plano coordenado  $n$  dimensional que no sea el espacio de configuración. Obviamente, una variedad de dimensión  $n$  siempre se proyecta bien localmente sobre un plano  $n$ -dimensional. La propiedad específica de dicho plano para variedades *lagrangianas* consiste en lo siguiente: existen dos conjuntos de índices disjuntos,  $I$  e  $\bar{I}$  que se complementan el uno con el otro de  $(1, \dots, n)$  y tales que en una vecindad de cualquier punto,  $\Lambda^n$  admite una proyección local suave, uno a uno, sobre algún plano coordenado  $n$  dimensional  $\mathbb{R}_{x_I p_{\bar{I}}}^n$  dado por las ecuaciones de la forma  $x_i = 0, i \in \bar{I}$  y  $p_j = 0, j \in I$ .

Las colecciones <sup>3</sup>  $I$  e  $\bar{I}$  de índices y las coordenadas generadas por esas colecciones, juegan un importante papel en las siguientes construcciones. Los conjuntos de índices  $I$  e  $\bar{I}$  consisten de una cantidad variable de elementos; es conveniente mirar a  $I$  e  $\bar{I}$  como *vectores  $n$ -dimensionales* llenando los lugares vacíos con cero. Por ejemplo, para  $n = 2$  tenemos los siguientes pares de colecciones:  $I = (1, 2)$   $\bar{I} = (0, 0)$ ;  $I = (1, 0)$   $\bar{I} = (0, 2)$ ;  $I = (0, 2)$   $\bar{I} = (1, 0)$ ;  $I = (0, 0)$   $\bar{I} = (1, 2)$ . Escribiremos  $i \in I$  si  $i$  se mueve sobre todo elemento distinto de cero del vector  $I$ .

En la teoría de los sistemas hamiltonianos y de variedades lagrangianas, la matriz  $\hat{J}$  de tamaño  $2n \times 2n$  juega un importante papel. Esta matriz se define como sigue: Sea  $E_n$  la matriz identidad  $n \times n$ , y sea  $O$  la matriz cero del tamaño necesario. Entonces  $\hat{J} = \begin{pmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}$ .

Junto con la matriz  $\hat{J}$ , introduciremos otras matrices  $\hat{J}^I$ . Consideremos la matriz identidad  $E_{2n}$ ; denotemos los vectores filas de  $E_{2n}$  por  $l_j$  y los vectores fila de la matriz  $\hat{J}$  por  $f_j, j = 1, 2, \dots, 2n$ . Entonces, denotaremos por  $\hat{J}^I$  la matriz compuesta por las filas  $l_j$  y  $l_{j+n}$  si  $j \in I$  y las filas  $f_j$  y  $f_{j+n}$  si  $j \in \bar{I}$ . Escribiremos las matrices  $\hat{J}^I$  para  $n = 2$ :

---

<sup>3</sup>La notación usada de ahora en adelante, no es tradicional en los libros de la teoría de los operadores canónicos. Esperamos que esta nueva notación sea mas conveniente para los problemas aplicados. Esta notación es igual que en la descripción del índice de Maslov, el operador canónico, etc.



$$\hat{J}^{(1,2)} \equiv E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}^{(0,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usaremos las matrices  $\hat{J}^I$  para construir los vectores

$$\begin{pmatrix} p^I \\ x^I \end{pmatrix} = \hat{J}^I \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P^I(\alpha) \\ X^I(\alpha) \end{pmatrix} = \hat{J}^I \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ X(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

de los vectores

$$\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ X(\alpha) \end{pmatrix}$$

La matriz  $\hat{J}^I$  actúa sobre los vectores columna (y las matrices) como sigue: se preservan las componentes de los vectores columna (o de los vectores filas de una matriz) cuyos lugares poseen los índices  $j$  y  $j+n$  si  $j \in I$  y transpone esas componentes cambiando el signo de la componente de el vector columna con el índice  $j+n$  (o de los vectores fila de la matriz) si  $j \in \bar{I}$ . En particular, para  $n=2$  tenemos

$$\begin{pmatrix} p^{(1,2)} \\ x^{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{(1,0)} \\ x^{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -x_2 \\ x_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{(0,2)} \\ x^{(0,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ p_2 \\ p_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{(0,0)} \\ x^{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

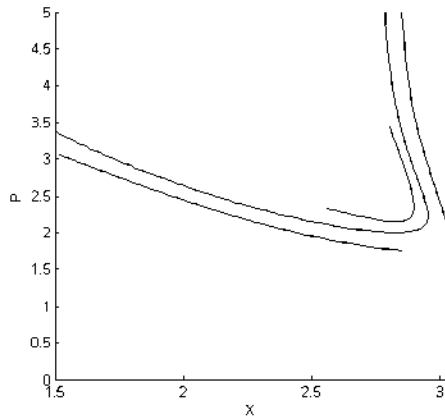
También necesitaremos los vectores “truncados”  $\check{x}^I$  y  $\check{p}^I$  que contienen solo las componentes  $x_l$  y  $p_l$ . Estos vectores se obtienen de  $x^I$  y  $p^I$  borrando los elementos  $p_k$  y  $x_k$ , respectivamente. Por ejemplo,  $x^{(1,0)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ,  $p^{(0,2)} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ , sin embargo  $\check{x}^{(1,0)} = x_1$ ,  $\check{p}^{(0,2)} = p_2$

El plano coordenado  $n$  dimensional  $\mathbb{R}_{x^I}^n$  (en el espacio fase) el cual hemos introducido anteriormente puede ser dado por la ecuación  $p^I = 0$  o por la ecuación (equivalente)  $x^{\bar{I}} = 0$ . Obviamente,  $x^I$  define las coordenadas en este plano; dichas coordenadas se dicen *I-Focales*. Si  $I = (1, 2, \dots, n)$ , entonces  $x^I = x$  y  $p^I = p$ , y en este caso omitimos el superíndice  $I$

Dado que la variedad  $\Lambda^n$  es lagrangiana, se sigue que todo conjunto acotado en  $\Lambda^n$  puede ser cubierto por un número finito de dominios  $\Omega_j^{I_j}$  (con índices  $j=1, 2, \dots, m$ ) de tal forma que cada dominio  $\Omega_j^{I_j}$  admite una proyección suave, uno a uno sobre  $\mathbb{R}_{x^{I_j}}^n$  y la matriz  $C^{I_j} = \partial X^{I_j} / \partial \alpha$  es no degenerada en estos dominios.

Los dominios  $\Omega_j^{I_j}$  son referidos como mapas con coordenadas (focales)  $x^{I_j}$ , y la colección entera  $\{\Omega_j^{I_j}\}$  se conoce como *atlas canónico* de  $\Lambda^n$ . Los mapas con  $I_j = \{1, 2, \dots, n\}$  se dice que son no singulares. El índice  $j$  es el índice del mapa; en general, las colecciones  $I_j$  pueden coincidir para distintos  $j$ . Notemos también que para cualquier punto de una variedad lagrangiana, las coordenadas focales tomadas en  $I$  no son únicas en general. Lo mismo es cierto para dominios (mapas)  $\Omega^I$ . En particular, algunas veces uno puede introducir coordenadas focales en un mapa no singular.

La variedad  $\Lambda_t^1$  en el ejemplo 2 de la sección previa puede ser cubierta en momentos “después del crítico” por tres mapas, dos de los cuales están “bien” proyectados sobre el eje  $x$  (mapas no singulares) y uno sobre el eje  $p$ .



Esto implica la siguiente observación: Si una solución asintótica en una vecindad de un punto focal es escrita en las coordenadas  $p$ , entonces, esta no tiene singularidades, se entiende esto porque la solución asintótica en vecindades de puntos singulares viene dada por

$$\mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-h} \frac{\varphi_0}{e} e^{i\tilde{S}/h} \sqrt{\partial P / \partial \alpha}$$

En mecánica cuántica, la representación de una solución en las variables del momento  $p$  se refiere como el *pasaje a la representación de momentos o  $p$  representación* y se logra con la ayuda de la transformada de Fourier. En particular, el pasaje a la  $p$ -representación nos da la posibilidad de construir una nueva clase de soluciones asintóticas, como veremos a continuación.

## 5. SOLUCIONES ASINTÓTICAS EN LA REPRESENTACIÓN DE MOMENTOS Y REPRESENTACIONES MIXTAS.

En esta sección construiremos soluciones asintóticas en pequeñas vecindades de los puntos focales.

### 5.1. Solución en la representación de momentos.

Buscaremos una solución de la ecuación (1.5) en la forma de la transformada inversa de Fourier de alguna función  $\chi(p, t)$ , es decir, representaremos  $\psi(x, t)$  en la forma  $\psi(x, t) = F_{p \rightarrow x}^{-h}[\chi(p, t)]$ . Sustituiremos  $\psi$  de esta manera en la ecuación (1.5) y aplicaremos la transformada de Fourier  $F_{x \rightarrow p}^h$  por la izquierda. Por (1.5) obtendremos la ecuación

$$h^2 \chi_{tt} + \tilde{L}\chi = 0 \quad (5.1)$$

donde

$$\tilde{L} = L(ih\partial/\partial p, \overset{1}{p}, h) \equiv F_{x \rightarrow p}^h L(\overset{2}{x}, -ih\partial/\partial x, h) F_{p \rightarrow x}^{-h}.$$

La transformada de Fourier lleva al operador de multiplicación en el operador de diferenciación y el operador diferenciación es convertido al operador de multiplicación. Se sigue que  $\tilde{L} = L(ih\partial/\partial p, \overset{1}{p}, h)$ . De hecho,

$$\tilde{L}\chi = (2\pi h)^{-2n} \int_{\mathbb{R}_{p', p'', x'}^{4n}} \chi(p'', t) L(x, p', h) \exp \left\{ \frac{i}{h} (\langle x, (p' - p) \rangle + \langle x', (p'' - p') \rangle) \right\} dx dp' dx' dp''$$

Cambiando el orden de integración y teniendo en cuenta la fórmula

$$\delta(p'' - p') = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ \frac{i}{h} \langle (p'' - p'), x \rangle \right\} dx,$$

obtenemos

$$\tilde{L}\chi = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}_{x, p'}^{2n}} \chi(p', t) L(x, p', h) \exp \left\{ \frac{i}{h} \langle (p' - p), x \rangle \right\} dx dp'$$

Reemplazando  $x$  por  $-x$  en la última integral e invirtiendo los límites de integración respecto a  $x$ , obtenemos (por definición)

$$\tilde{L}\chi = F_{x \rightarrow p}^{-h} [F_{p \rightarrow x}^h [L(-x, p, h)\chi(p, t)]] = L(ih\partial/\partial p, \overset{1}{p}, h)\chi(p, t).$$

De esta manera, la relación (5.1) es una ecuación  $h$ -pseudodiferencial y la solución de esta ecuación puede ser buscada de acuerdo con el método WKB, en la forma de una función exponencial de rápida oscilación:

$$\chi(p, t) = \tilde{\varphi}(p, t) \exp(i\tilde{S}(p, t)/h)$$

La fórmula de conmutación del operador  $\tilde{L}$  con la función exponencial de rápida oscilación tiene la forma que difiere de la (3.1) porque los índices sobre el operador de multiplicación y del gradiente son transpuestos. En vez de (3.1) tenemos la siguiente fórmula [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{L}[\tilde{\varphi}e^{i\tilde{S}/h}] = e^{i\tilde{S}/h} & \left\{ L^0(-\nabla_p \tilde{S}, p) \tilde{\varphi} + ih \left[ \left\langle \frac{\partial L^0}{\partial x}(-\nabla_p \tilde{S}, p), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p} \right\rangle + \tilde{\varphi} \right. \right. \\ & \left. \left. \text{Tr} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x \partial p}(\nabla_p \tilde{S}, p) - iL^1(-\nabla_p \tilde{S}, p) \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 L^0}{\partial x^2}(-\nabla_p \tilde{S}, p) \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} \right) \right] \right\} \\ & + O(h^2), \quad \nabla_p = \frac{\partial}{\partial p} \quad (3,1') \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\chi$  dentro de (5.1) y manipulando como en la sección 3, obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de transporte,

$$\tilde{S}_t + \mathcal{H}^\pm(-\nabla_p \tilde{S}, p) = 0 \quad (3,6')$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_t - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}^\pm}{\partial x}(-\nabla_p \tilde{S}, p), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p} \right\rangle - \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \\ & \text{Tr} \frac{\partial \mathcal{H}^\pm}{\partial x \partial p}(-\nabla_p \tilde{S}, p) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \text{Tr} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}^\pm}{\partial x^2}(-\nabla_p \tilde{S}, p) \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} \right) = 0 \quad (3,7') \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}^\pm(x, p) = \pm \{L^0(x, p)\}^{1/2}$  como anteriormente. Estas ecuaciones tienen la misma forma que (3.6) y (3.7) al reemplazar  $-\nabla_p \tilde{S} \rightarrow x$  y  $p \rightarrow \nabla S$  y se resuelven exactamente por los mismos métodos. El sistema hamiltoniano correspondiente a la ecuación (3.6') es  $\dot{x}' = -\mathcal{H}_x(-p', x')$ ,  $\dot{p}' = \mathcal{H}_p(-p', x')$  y pasan a (3.10) bajo el cambio  $x' \rightarrow p$  y  $p' \rightarrow -x$ .

Ahora encontraremos las condiciones iniciales para la ecuación (5.1) y las ecuaciones (3.6') y (3.7') dadas las condiciones (3.8). Para este fin, estimamos la  $h$ -transformada de Fourier con condiciones (3.8) con la ayuda del método de la fase estacionaria (ejemplo 5 de la sección 3). Aplicando la fórmula (3.16) tenemos

$$\begin{aligned} \chi|_{t=0} & \simeq e^{-i\pi\mu/2} \varphi_1(x) \left| \det \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} (S_0(x) - \langle x, p \rangle) \right\} \\ h\chi_t|_{t=0} & \simeq e^{-i\pi\mu/2} \varphi_2(x) \left| \det \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} (S_0(x) - \langle x, p \rangle) \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\mu = \text{Inerdex}(\partial^2 S_0/\partial x^2)$  y  $x = x(p)$  es la solución de la ecuación  $\nabla S_0(x) = p$ . De esta manera, como las condiciones iniciales para las ecuaciones (3.6'), (3.7') uno debe tomar las funciones (salvo un factor  $\exp(i\pi\mu/2)$  para la ecuación (3.7'))

$$\tilde{S}^\pm(p, 0) = \tilde{S}_0(p) = S_0(x(p)) - \langle p, x(p) \rangle, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^\pm(p, 0) &= \tilde{\varphi}_0(x) \left| \det \frac{\partial^2 S_0(x)}{\partial x^2} \right|^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \psi_1(x) \mp \frac{\psi_2(x)}{\sqrt{L^0(-\nabla_p \tilde{S}, p)}} \right] \left| \det \frac{\partial^2 S_0(x)}{\partial x^2} \right|^{-1/2}; \quad x = x(p) \quad (3.9') \end{aligned}$$

Vemos que la función  $\tilde{S}_0$  es, salvo el signo, la *transformada de Legendre* (ver, e.g., [1, 3, 39]). De esta manera los datos iniciales para el sistema hamiltoniano correspondiente a (3.6') son:

$$x'|_{t=0} = \alpha', \quad p'|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{S}_0(\alpha')}{\partial \alpha'}.$$

Reemplazando  $p'$  por  $-x$  y  $x'$  por  $p$  como anteriormente, obtenemos  $p|_{t=0} = \alpha'$  y  $x|_{t=0} = -\partial \tilde{S}_0(\alpha')/\partial(\alpha')$ , donde  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$  es un parámetro  $n$  dimensional. Así, la variedad lagrangiana es de la forma

$$\tilde{\Lambda}_0^n = \left\{ p = \alpha', x = -\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial \alpha'} \right\}$$

De las propiedades de la transformada de Legendre se sigue que la variedad inicial lagrangiana  $\Lambda_0^n$  es la misma variedad lagrangiana  $\tilde{\Lambda}_0^n$ . En efecto, haremos el cambio de variables  $\alpha' = \partial S_0(\alpha)/\partial \alpha$ . Así, utilizando la transformada de Legendre

$$\tilde{\Lambda}_0^n = \left\{ p = \frac{\partial S_0(\alpha)}{\partial \alpha}, x = x \left( \frac{\partial S_0(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right\},$$

donde  $x = x(p)$  es la solución de la ecuación  $\nabla S_0 = p$ . Uno puede ver que  $x(\partial S_0(\alpha)/\partial \alpha) \equiv \alpha$  y  $\tilde{\Lambda}_0^n \equiv \Lambda_0^n$ . El cambio de coordenadas en el espacio fase  $p' \rightarrow -x$ ,  $x' \rightarrow p$  preserva, tanto al sistema hamiltoniano como a sus datos iniciales y por lo tanto las variedades lagrangianas  $\Lambda_t^n$  también son preservadas. De esta manera, las ecuaciones de las soluciones (3.6') y (3.7') están definidas por la misma familia de variedades  $\Lambda_t^n$ . Particularmente, si el jacobiano  $J^{(0, \dots, 0)}(\alpha, t) = \det(\partial P(\alpha, t)/\partial \alpha)$  es siempre distinto de cero sobre el intervalo  $0 \leq t \leq t_0$ , donde  $P(\alpha, t)$  es la solución de (3.10) que satisface las condiciones (3.11) en  $t = 0$ , entonces la solución  $\tilde{S}(p, t)$  de la ecuación (3.6') tiene la siguiente forma para  $0 \leq t \leq t_0$

$$\tilde{S}(p, t) = s(\alpha, t) - \langle P(\alpha, t), X(\alpha, t) \rangle.$$

Aquí  $\alpha = \alpha(p, t)$  es la solución de la ecuación  $P(\alpha, t) = p$ . Similarmente a (3.15) obtenemos una solución la ecuación de transporte (3.7'),

$$\tilde{\varphi}(p, t) = \varphi_0(\alpha) |J^{(0, \dots, 0)}(\alpha, t)|^{-(1/2)}, \quad \alpha = \alpha(p, t). \quad (3.13')$$

Estudiaremos la fórmulas así obtenidas. La relación (3.13') muestra que, si las variedades lagrangianas  $\Lambda_t^n = g_{\mathcal{H}}^t \Lambda_n^0$  admiten una proyección suave, uno a uno sobre el plano  $\mathbb{R}_p^n$ , entonces la solución asintótica de la ecuación (1.5) con las condiciones iniciales (3.8) puede ser representada en la forma de la transformada inversa de Fourier de la función exponencial de rápida oscilación  $\tilde{\varphi}(t) \exp(i\tilde{S}(p, t)/h)$ ; el denominador del lado derecho de la fórmula (3.13') es siempre diferente de cero sobre la cáustica y la solución asintótica no tiende al infinito en los puntos focales. Hemos visto en la sección 4 que en el caso alternativo en el cual  $\Lambda_t^n$  admite una proyección uno a uno, suave sobre el plano  $\mathbb{R}_x^n$  (el espacio de configuración), la solución asintótica puede ser representada en la forma de una solución WKB (el denominador en la fórmula (3.13) es siempre distinto de cero). Así, hemos construido la solución asintótica deseada para las variedades lagrangianas que son "bien" proyectadas sobre el plano  $\mathbb{R}_x^n$  o sobre el plano  $\mathbb{R}_p^n$ . La misma afirmación se posee en situaciones generales en las que el soporte  $\text{supp} \varphi_0$  pertenece a los dominios de la variedades lagrangianas  $\Lambda_t^n$  que están bien proyectados sobre los planos anteriores.

## 5.2. La transformada parcial de Fourier y una solución en la representación mixta.

En algunas situaciones, la variedad  $\Lambda_t^n$  no admite una proyección suave sobre  $\mathbb{R}_x^n$  ni sobre  $\mathbb{R}_p^n$ . Como sabemos de la sección 4, en este caso existe un plano  $\mathbb{R}_{x^I}^n$  sobre el cual  $\Lambda_t^n$  está "bien" proyectada. Una solución asintótica puede entonces ser representada en la forma de *h-transformada parcial de Fourier*, a lo largo de las coordenadas  $x^{\bar{I}}$ .

Una transformada parcial de Fourier es la transformada de Fourier solo sobre algunas variables  $x_i$ . Asumimos que esta transformada es hecha sobre las variables  $i \in \bar{I}$  solamente, y las otras variables, es decir, las variables  $x_i, i \in I$  son preservadas. Usualmente, para la transformada parcial de Fourier (con parámetro  $h$ ) se usa la notación  $F_{\bar{x}^{\bar{I}} \rightarrow \bar{p}^{\bar{I}}}^h$ , y  $F_{\bar{p}^{\bar{I}} \rightarrow \bar{x}^{\bar{I}}}^{-h}$  para la transformada inversa. (Por ejemplo, para  $n = 2$ , escribimos  $F_{x_1 \rightarrow p_1}^h$  y  $F_{p_1 \rightarrow x_1}^{-h}$ ). Para simplificar y también para unificar la notación, usualmente escribiremos  $\mathcal{F}_{x \rightarrow x^I}^h$  y  $\mathcal{F}_{x^I \rightarrow x}^{-h}$ , entendiendo que la transformada es aplicada sobre los distintos componentes de los vectores  $x$  y  $x^I$ . Tomamos

$$\langle x, p \rangle_{\bar{I}} = \sum_{i \in \bar{I}} p_i x_i.$$

Entonces la *h-transformada parcial de Fourier* (respecto a las componentes  $x_i, i \in$

$\bar{I}$  del vector  $x$ ) está definida por la fórmula

$$\tilde{\varphi}^I(x^I) = \mathcal{F}_{x \rightarrow x^I}^h \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi i h)^{k/2}} \int \varphi(x) \exp\left(-\frac{i}{h} \langle x, p \rangle_{\bar{I}}\right) d\tilde{x}^{\bar{I}}$$

y la transformada parcial inversa de Fourier por la fórmula

$$\varphi(x) = \mathcal{F}_{x^I \rightarrow x}^{-h} \tilde{\varphi}^I(x^I) = \frac{1}{(-2\pi i h)^{k/2}} \int \tilde{\varphi}^I \exp\left(\frac{i}{h} \langle x, p \rangle_{\bar{I}}\right) d\tilde{p}^{\bar{I}}$$

Los conjuntos de índices  $I$  e  $\bar{I}$  y los vectores  $\tilde{x}^{\bar{I}}$  y  $\tilde{p}^{\bar{I}}$  fueron introducidos en la sección previa, y la  $k$  significa el número de elementos diferentes de cero en  $\bar{I}$ . Si  $I = (1, \dots, n)$  entonces  $\mathcal{F}_{x \rightarrow x}^{\pm h}$  es la transformada identidad.

Sea  $\Lambda_t^n$  tal que admite una proyección uno a uno y suave sobre el plano  $\mathbb{R}_{x^I}^n = x_i = 0, i \in \bar{I}, p_j = 0, j \in I$ , para cualquier  $t$ . Buscamos una solución de la ecuación (1.5) en la forma de una  $h$ -transformada parcial de Fourier con respecto a las variables  $p_j, j \in \bar{I}$ , esto es,  $\psi(x) = \mathcal{F}_{x^I \rightarrow x}^{-h} \varphi^I(x^I, t)$ . Para encontrar una ecuación para  $\psi$ , aplicamos a (1.5) la  $h$ -transformada parcial de Fourier con respecto a las componentes  $x_j, j \in \bar{I}$  de la izquierda; esto permite encontrar una solución para  $\psi$  similar a (5.1). El método WKB estándar puede ser aplicado a esta ecuación; como en la sección 3, obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de transporte. Los subsiguientes argumentos son completamente similares a los usados anteriormente (ver[3]). La respuesta final se ve como sigue:

$$\psi(x, t) = \mathcal{F}_{x^I \rightarrow x}^{-h} \left[ \frac{\varphi_0(\alpha)}{\sqrt{|J^I(\alpha, t)|}} \exp\left\{ \frac{i}{h} (s(\alpha, t) - \langle P(\alpha, t), X(\alpha, t) \rangle_{\bar{I}}) \right\} \right] \quad (5.3)$$

donde  $J^I(\alpha, t) = \det \frac{\partial X^I}{\partial \alpha}$  y  $\alpha = \alpha(x^I, t)$  es la solución del sistema  $X^I(\alpha, t) = x^I$ .

### 5.3. Número de integrales en la representación mixta. Funciones especiales y cáusticas.

Cuando estudiamos la fórmula (5.2), las siguientes preguntas aparecen naturalmente. Asumamos que  $\Lambda_t^n$  puede estar “bien” proyectada simultáneamente sobre distintos planos coordenados  $\mathbb{R}_{x^I}^n$ , por ejemplo, sobre el espacio de configuración  $\mathbb{R}_x^n$  y el espacio momento  $\mathbb{R}_p^n$ . ¿Cuál representación ( $x$  o  $p$ -representación) debe ser elegida para la solución? y ¿Cómo estas representaciones están relacionadas? La respuesta a la primera pregunta se sigue del análisis elemental de las variedades lagrangianas. Naturalmente, la solución es más simple si el número de integrales es cada vez menor. A su vez, la solución está determinada por el número de variables  $p_i, i \in \bar{I}$ , (por el número  $k$  de las componentes del momento en el conjunto  $\bar{I}$ ) en el plano coordenado  $\mathbb{R}_{x^I}^n$  sobre el cual la variedad  $\Lambda_t^n$  está “bien” proyectada. El mínimo número  $k$  de las variables del momento, y así de las integrales en la solución, está determinado por el tipo de las singularidades de las variedades  $\Lambda_t^n$  y es igual al defecto de la matriz  $\partial p / \partial x$ , esto es, por el número  $n - \text{rango}(\partial p / \partial x)$ . En algunos casos, la solución del problema (1.5), (3.8) puede

ser representada con la ayuda de funciones especiales (en términos de las funciones de Airy para singularidades  $A_2$  y funciones de Pearcey para singularidades  $A_3$ ;  $k = 1$  en ambos casos). En otros casos, el estudio computacional de una solución en las vecindades de las singularidades (cáusticas) es necesario. Notemos que el comportamiento del campo ondulatorio es un importante y complicado problema desde los puntos de vista teóricos y aplicados. El estudio de estos problemas ha avanzado significativamente durante los últimos años, no solo teóricamente sino también en campos aplicados. La segunda pregunta se responde en la sección 6.

#### 5.4. Operadores pre-canónicos.

Completamos esta sección introduciendo el *operador precanónico* [3] que nos habilita para obtener una solución asintótica del problema (1.5)-(3.8), si para cualquier  $t$ , el soporte  $\text{supp}\varphi_0(\alpha)$  pertenece a los mapas  $\Omega^I$  que pueden estar bien proyectados sobre  $\mathbb{R}_{x^I}^n$  y si el conjunto  $I$  es independiente del tiempo.

Así, asumimos que un mapa  $\Omega^I$  pertenece a la variedad lagrangiana  $\Lambda_t^n = \{p = p(\alpha, t), x = x(\alpha, t)\}$  y que  $\varphi_0(\alpha)$  es una función suave de soporte compacto con soporte en  $\Omega^I$ . Entonces, el operador precanónico  $K(\Omega^I, \sigma_t^0)$  está definido por la fórmula:

$$K(\Omega^I, \sigma_t^0)[\varphi_0(\alpha)] = \mathcal{F}_{x^I \rightarrow x}^{-h} \left[ \varphi_0(\alpha) \frac{1}{\sqrt{|J^I(\alpha, t)|}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \int_{\sigma_t^0}^{\sigma_t} \langle P, dX \rangle - \langle X(\alpha, t), P(\alpha, t) \rangle_{\bar{I}} \right) \right\} \right]$$

donde  $\sigma_0^0$  es un punto distinguido sobre  $\Lambda_0^n$ ,  $\sigma_0^0 = \{p = P(\alpha^0, 0), x = X(\alpha^0, 0)\}$ ,  $\alpha^0$  es un valor elegido del parámetro  $\alpha$ ,  $\sigma_t^0 = g_{\mathcal{H}}^t \sigma_0^0$ ,  $\sigma_t$  es un punto sobre  $\Lambda_t^n$  con las coordenadas  $\alpha, \sigma_t = \{p = P(\alpha, t), x = X(\alpha, t)\}$  y  $J^I$  y  $\alpha = \alpha(x^I, t)$  lo estamos entendiendo como en la fórmula (5.2). Bajo la hipótesis de que los puntos de la trayectoria que brotan del punto  $\sigma_0^0$  no son focales, obtenemos la siguiente solución asintótica del problema (1.5), (3.8), para las funciones  $\varphi_0^\pm$  que poseen la anterior propiedad:

$$\psi(x, t) \simeq \sum_{+,-} \exp \left( \frac{i}{h} \delta^\pm - \frac{i\pi\mu}{2} \right) K(\Omega^I, \sigma_0^t)[\varphi_0^\pm(\alpha)] \quad (5.4)$$

donde

$$\mu = \text{Inerdex} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \check{x}_I^2}, \quad \delta^\pm(t) = \int_0^t (\langle P^\pm, \dot{X}^\pm \rangle - \mathcal{H}^\pm) \Big|_{\alpha=\alpha^0} d\tau + S_0(\alpha^0)$$



## 6. ÍNDICES Y EL OPERADOR CANÓNICO.

En esta sección construiremos la solución asintótica global “pegando” las soluciones locales proporcionadas mediante el operador pre-canónico. Esta construcción nos llevará a la definición del índice de Maslov y el operador canónico.

### 6.1. El índice de cadena de mapas.

El procedimiento de pegar las asintóticas locales obtenidas con la ayuda del operador precanónico permite lograr la noción de índice de la cadena de mapas sobre una variedad lagrangiana. Consideremos la intersección de dos mapas  $\Omega^{I_1}$  y  $\Omega^{I_2}$  y sea un punto en el dominio  $\Omega^{I_1} \cap \Omega^{I_2}$  tal que, alguna vecindad de este punto está bien proyectada sobre el espacio de configuración. Estos puntos se llaman no singulares. Comparemos las fórmulas (5.3) en una vecindad de tal punto. Tenemos por (5.3)

$$K(\Omega^{I_1}, \sigma_t^0)[\varphi_0(\alpha)] = (-2\pi i \hbar)^{-k_1/2} \int_{\mathbb{R}^{k_1}} \varphi_0(\alpha) |J^{I_1}(\alpha, t)|^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \langle \check{p}^{\bar{I}_1}, \check{x}^{\bar{I}_1} \rangle + \int_{\sigma_t^0}^{\sigma_t} \langle \check{P}^{I_1}, d\check{X}^{I_1} - \int_{\sigma_t^0}^{\sigma_t} \langle \check{X}^{\bar{I}_1}, d\check{P}^{\bar{I}_1} - \langle \check{P}^{\bar{I}_1}, \check{X}^{\bar{I}_1} \rangle \Big|_{\sigma_t^0} \right) \right\} d\check{p}^{\bar{I}_1} \quad (6.1)$$

donde  $\alpha = \alpha(x^{I_1}, t)$  es la solución del sistema  $X^{I_1}(\alpha, t) = x^{I_1}$ . Es fácil ver que la ecuación para el punto estacionario de la fase es  $\check{x}^{\bar{I}_1} = \check{X}^{\bar{I}_1}(\alpha, t)$  y la matriz de las segundas derivadas de la fase es igual a

$$-\frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_1}(\alpha(x^{I_1}, t), t)}{\partial \check{p}^{\bar{I}_1}}.$$

Por hipótesis la matriz es no degenerada. Por la fórmula (3.16) tenemos

$$K(\Omega^{I_1}, \sigma_t^0)[\varphi_0] \simeq \varphi_0(\alpha) |J(\alpha, t)|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (s(\alpha, t) - \delta(t)) + \frac{i\pi}{2} \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_1}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_1}} \right\} \quad (6.2)$$

donde  $\alpha = \alpha(x, t)$  es una solución del sistema  $x(\alpha, t) = x$ . Por la misma vía obtenemos

$$K(\Omega^{I_2}, \sigma_0^t)[\varphi_0] \simeq \varphi_0(\alpha) |J(\alpha, t)|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (s(\alpha, t) - \delta(t)) + \frac{i\pi}{2} \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_2}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_2}} \right\} \quad (6.3)$$

Comparando las fórmulas (6.2) y (6.3) vemos que las respuestas escritas en las representaciones para  $I_1$  e  $I_2$  difieren por el factor numérico

$$\exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \left[ \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_2}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_2}} - \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_1}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_1}} \right] \right\}$$

La cantidad entre [ ] de la última expresión se llama el *índice de Maslov* del par de mapas  $\Omega^{I_1}$  y  $\Omega^{I_2}$ ,

$$\text{Ind}(\Omega^{I_1}, \Omega^{I_2}) = \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_2}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_2}} - \text{Inerdex} \frac{\partial \check{X}^{\bar{I}_1}}{\partial \check{p}^{\bar{I}_1}}.$$

Por el *índice de Maslov* de una cadena de mapas que se intersectan por pares  $\Omega_1^{I_1}, \dots, \Omega_m^{I_m}$  uno entiende el número

$$\text{Ind}(\Omega_1^{I_1}, \dots, \Omega_m^{I_m}) = \text{Ind}(\Omega_1^{I_1}, \Omega_2^{I_2}) + \dots + \text{Ind}(\Omega_{m-1}^{I_{m-1}}, \Omega_m^{I_m}).$$

## 6.2. Operador canónico

Se sigue, de las fórmulas (6.2) y (6.3) que es natural buscar una solución asintótica en la forma

$$\psi = \sum_j C_j K(\Omega_j^{I_j}, \sigma_0^t) [\varphi_0(\alpha) e_j(\alpha)] \quad (6.4)$$

donde  $e_j(\alpha)$  es una *partición de la unidad subordinada al atlas*  $\Omega^{I_j}$  es decir, un conjunto de funciones suaves no negativas que satisfacen las siguientes condiciones:

$$1) \quad \sum_j e_j(\alpha) \equiv 1, \quad 2) \quad \text{supp} e_j \subset \Omega_j^{I_j}$$

Los coeficientes  $C_j$  son elegidos de tal manera que la expresión (6.4) satisfaga a (1.5) salvo  $o(h)$ . En efecto, este requerimiento se entiende como que los coeficientes  $C_j$  son escogidos con la ayuda de los argumentos que nos llevaron a las fórmulas (6.2) y (6.3). Está construcción nos permite llegar a la siguiente definición:

**DEFINICIÓN.** Por el *operador canónico de Maslov*  $K(\Lambda_t^n, \sigma_t^0)$  entendemos al operador actuando sobre las funciones suaves de soporte compacto  $\varphi(\alpha)$  sobre la variedad  $\Lambda_t^n$  por la fórmula

$$K(\Lambda_t^n, \sigma_t^0) [\varphi(\alpha)] = \sum_j \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \text{Ind}(\Omega_1^{I_1}, \dots, \Omega_j^{I_j}) \right\} K(\Omega_j^{I_j}, \sigma_0^t) [\varphi(\alpha) e_j(\alpha)] \quad (6.5)$$

donde  $(\Omega_1^{I_1}, \dots, \Omega_j^{I_j})$  es una cadena de mapas que contienen el camino  $\gamma(\sigma_t^0, \sigma_t)$  a lo largo del cual la integración en la fórmula (5.3) es llevada a cabo. Aquí se asume que el punto  $\sigma_0^t$  es no singular.

Asumamos que el punto  $\sigma_0^0$  está elegido de tal manera que los puntos focales no están sobre la trayectoria  $g_{\mathcal{H}^\pm}^t(\sigma_0^0)$  Entonces la solución asintótica del problema (1.5), (3.8) es de la forma

$$\psi(x, t) \simeq \sum_{+,-} \exp \left( \frac{i}{h} \delta^\pm \right) K(g_{\mathcal{H}^\pm}^t \Lambda_0^n, \sigma_t^0) [\varphi_0(\alpha)], \quad (6.6)$$

donde  $\delta^\pm$  es como en (5.4).

La fórmula (6.6) es uno de los principales resultados en la teoría del operador canónico. Esta habilita para construir las asintóticas del problema (1.5) y (3.8) en la presencia de cústicas y puntos focales de forma arbitraria.

### 6.3. Regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld

El operador canónico de Maslov (6.5) define de manera única la función  $\psi(x, t)$  solo si la *Regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld* [1-7]

$$\frac{2}{\pi h} \oint p dx = \text{Ind} \gamma + 4m \quad (6.7)$$

donde  $\text{Ind} \gamma$  es el índice de cadenas de mapas que cubren al camino  $\gamma$  y  $m$  es un entero, está satisfecho para toda curva cerrada  $\gamma$  sobre la variedad  $\Lambda_t^n$ . Para las variedades  $g_{\gamma t^\pm}^t \Lambda_0^n$  introducidas anteriormente, estas condiciones son automáticamente satisfechas para  $m = 0$ . Para las variedades que aparecen en problemas estacionarios de ondas de agua, las condiciones (6.7) definen las frecuencias de las llamadas *ondas atrapadas*. Las condiciones de cuantización sostienen que el operador canónico está bien definido, lo que se entiende como que salvo  $o(1)$  cuando  $h \rightarrow +0$ , el operador así definido no depende de la elección del atlas en la variedad lagrangiana, ni de la elección de la correspondiente partición de la unidad, y tampoco de la elección de las cadenas de mapas en la definición de cada índice (asumiendo que la condición de cuantización (6.7) se tiene). La prueba de este hecho puede ser encontrada en [1-5].

En general, se sigue de la anterior construcción que el operador canónico puede ser definido desdeñando la dinámica, aunque está claro que uno de los principales objetivos de introducir esta noción es justamente la construcción de la solución del problema de Cauchy. Uno puede ver que, para definir el operador canónico, se requiere una variedad lagrangiana, una función sobre esta variedad, la elección de un punto sobre esta variedad y las condiciones de cuantización deben ser impuestas si son necesarias.

En conclusión de esta sección, notemos que la función (6.6) satisface la ecuación (1.5) salvo  $o(h)$  únicamente. Se pueden construir correcciones a esta solución. El proceso de encontrar estas correcciones es muy laborioso, y en la práctica, usualmente solo se requiere el término principal de las asintóticas, por lo cual no presentamos el proceso aquí. El lector puede encontrar mas detalles en [2-5,7]

### 6.4. Ejemplos de aplicación del operador canónico.

El objetivo de estos ejemplos es mostrar como se aplica el operador canónico en casos relativamente sencillos y encontrar cómo se comporta la solución de la ecuación (1.5) en vecindades de puntos focales. Vamos a ver que la solución es proporcional a  $h^{-\alpha}$  donde  $\alpha$  es un número positivo determinado por el tipo de singularidad de la variedad lagrangiana.

**EJEMPLO 6.** Sea

$$\begin{cases} p = P(\alpha) \\ x = X(\alpha) \end{cases},$$

una variedad lagrangiana, tal que  $\frac{\partial X}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_0} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=\alpha_0} > 0$ ,  $\frac{\partial P}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_0} > 0$ , es decir  $\alpha_0$  es un punto focal sobre la variedad.

Por la transformada de Legendre tenemos que:

$$\tilde{S}(p) = [s(\alpha) - \langle P(\alpha), X(\alpha) \rangle]_{\alpha=\alpha(p)},$$

$s(\alpha)$  por (4.2) cumple la condición  $ds = \langle P, dX \rangle$ , en este caso  $ds = P(\alpha) \frac{dX}{d\alpha}$ , luego  $s = \int_{\alpha_f}^{\alpha} P(\alpha) \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha$  así,

$$\tilde{S}(p) = \left[ \int_{\alpha_f}^{\alpha} \left( P(\alpha') \frac{\partial X}{\partial \alpha'} d\alpha' \right) - PX \right]_{\alpha=\alpha(p)}.$$

Integrando por partes tenemos que

$$\tilde{S}(p, t) = \left[ - \int_{\alpha_f}^{\alpha} X(\alpha') \frac{\partial P(\alpha')}{\partial \alpha'} d\alpha' \right]_{\alpha=\alpha(p)}$$

$$\tilde{\varphi}(p, t) = \frac{\varphi_0(\tilde{\alpha})}{\sqrt{|J|}}, \quad \text{donde } J = \frac{\partial P}{\partial \alpha},$$

así por el operador canónico la solución  $\psi$  en el punto focal tiene la forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \int \frac{\varphi_0(\tilde{\alpha})}{\sqrt{|J|}} \exp \frac{i(px + \tilde{S})}{\hbar} dp.$$

Para comprender el comportamiento de  $\psi$  expresamos esta en términos de la función de Airy:

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left(yx - \frac{y^3}{3}\right) dy.$$

Para lograrlo, desarrollamos la fase y la amplitud en su serie de Taylor.

Las derivadas de  $\tilde{S}(p, t)$  respecto a  $p$  son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{S}(p)}{\partial p} = -X(\alpha(p)) \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}(p)}{\partial p^2} = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} \\ \frac{\partial^3 \tilde{S}(p, t)}{\partial p^3} = \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)^2 \end{array} \right.,$$

notemos que la segunda derivada se anula cuando  $\alpha = \alpha_0$ . Desarrollando a  $\tilde{S}(p, t)$  en su serie de Taylor, con centro en  $p_0 = P(\alpha_0)$  tenemos

$$\tilde{S}(p) = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} X(\alpha') \frac{\partial P(\alpha')}{\partial \alpha'} d\alpha' - X(\alpha(p_0))(p-p_0) - \frac{1}{6} \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)^2 (p-p_0)^3 + O((p-p_0)^4).$$

Más adelante veremos que se pueden despreciar los términos de  $O((p-p_0)^4)$  en la fase y los de  $O((p-p_0))$  en el desarrollo de la amplitud. Sea  $\mu = \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)^2$ , luego

$$\psi = \frac{\tilde{\varphi}_0}{\sqrt{-2\pi i h |J|_{\alpha=\alpha_0}}} \int \exp \frac{i(px + \tilde{S}(p_0) - X(\alpha_0)(p-p_0) - (1/6)\mu(p-p_0)^3)}{h} dp,$$

mediante manipulación algebraica logramos expresar a  $\psi$  de la siguiente manera:

$$\psi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{-2\pi i |J|_{\alpha=\alpha_0}}} h^{-1/2} \exp \frac{i(\tilde{S}(p_0) + p_0 x)}{h} \int \exp \frac{i(x - X_0)(p-p_0) - (1/6)\mu(p-p_0)^3}{h} dp,$$

donde  $X_0 = X(\alpha_0)$  haciendo  $(p-p_0) = p'$  y llamando  $A = \frac{\tilde{\varphi}_0}{\sqrt{-2\pi i |J|_{\alpha=\alpha_0}}}$  obtenemos

$$\psi = Ah^{-1/2} \int \exp \frac{i(p(x - X_0) - (1/6)\mu p^3)}{h} dp,$$

ahora haciendo el cambio de variable

$$\frac{\mu}{6h} p^3 = \frac{y^3}{3}$$

logramos

$$\psi = \frac{A(2)^{1/3}}{\mu^{1/3}} h^{-1/6} \int \exp i \left( \left( \frac{2}{\mu} \right)^{1/3} (x - X_0) h^{-2/3} - \frac{1}{3} y^3 \right) dy,$$

donde  $A_1 = (2/\mu)^{1/3} A$ , donde  $A_1 = (2/\mu)^{1/3} A$  así  $\psi$  queda expresada en términos de la función de Airy como:

$$\psi = A_1 h^{-1/6} Ai \left( \left( \frac{2}{\mu} \right)^{1/3} \frac{(x - X_0)}{h^{2/3}} \right).$$

Para que la función de Airy sea el término principal de la asintótica de  $\psi$  debemos determinar para qué  $x$  la variable de Airy es de  $O(1)$  y para los cuales las series de Taylor se pueden truncar. Para esto, retomemos la expresión de  $\psi$  dada por:

$$\psi = Ah^{-1/2} \int \exp \frac{i(px + \tilde{S})}{h} dp$$

y observemos su comportamiento para cuando la integral la hacemos a lo largo de los intervalos  $I_1 = |p - p_0| > h^{1/4+\delta}$  e  $I_2 = |p - p_0| < h^{1/4+\delta}$ ,  $\delta > 0$ . Sobre  $I_2$  podemos despreciar fácilmente los términos de  $O((p - p_0)^4)$ . Ahora bien, sobre  $I_1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \left| Ah^{-1/2} \int \exp \frac{i(px + \tilde{S})}{h} dp \right| &= \left| Ah^{-1/2} \int \frac{-ih}{\Phi_p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \exp \frac{i\phi}{h} \right) \right| = \\ &= \left| iA\sqrt{h} \left[ \frac{1}{\Phi_p} \exp \left( \frac{i\Phi_p}{h} \right) \right] - \int \exp \left( \frac{i\Phi}{h} \right) \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\Phi_p} \right) dp \right| \\ &\leq \left| O(h^{-2\delta}) - iA\sqrt{h} \int \exp \left( \frac{i\Phi}{h} \right) \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\Phi_p} \right) dp \right|, \end{aligned}$$

donde  $\Phi = px + \tilde{S}$  y  $\Phi_p = x - \tilde{S}_p = x - X(\alpha)$ . Sabemos que  $\Phi_p$  es de  $O(X)$ , a su vez  $X$  es de  $O((p - p_0)^2)$  y este a su vez es de  $O(h^{1/2})$ , con lo que queda justificada la desigualdad anterior. Así si  $x - X_0 \sim h^{2/3}$ , la función de Airy es de  $O(h^{-1/6})$  que es mucho mayor que  $O(h^{-2\delta})$ , para  $\delta < (1/3)$ .

Para finalizar debemos mostrar que en la función de Airy el término principal corresponde a la integral sobre el intervalo  $I_1 = |y| < h^{-1/12+\delta}$  y que es posible despreciar la integral sobre el intervalo  $I_2 = |y| > h^{-1/12+\delta}$ ;

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left(yx - \frac{y^3}{3}\right) dy = \int_{I_1} \exp i\left(yx - \frac{y^3}{3}\right) dy + \int_{I_2} \exp i\left(yx - \frac{y^3}{3}\right) dy.$$

por un argumento similar al usado anteriormente logramos acotar la integral sobre  $I_2$ .

**EJEMPLO 7.** Retomemos el Ejemplo 2 de la sección 3.5. La solución del sistema hamiltoniano venía dada por

$$\begin{cases} P = k + \beta\alpha^2 \\ X = \frac{1}{2}t(k + \beta\alpha^2)^{-1/2} + \alpha \end{cases};$$

en el momento  $t_0 = \frac{3k\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}$ , para  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{2\beta}}$  y  $p_0 = \frac{3k}{2}$  tenemos el primer punto focal. Por la transformada de Legendre tenemos:

$$\tilde{S}(p, t) = -\frac{2(p - k)^{3/2}}{3\beta^{1/2}} - p^{1/2}t$$

y

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2\beta\alpha}}.$$

Por el operador canónico de Maslov, la solución  $\psi$  es de la forma:

$$\mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-h} \tilde{\varphi} \exp \frac{i\tilde{S}}{h} = \frac{\varphi_0(\alpha)}{2\sqrt{\beta\alpha\pi i}} h^{-1/2} \int \exp \left( \frac{i(px + \tilde{S})}{h} \right) dp$$

Sea  $\Phi(x, p, t) = px - \frac{2(p-k)^{3/2}}{3\beta^{1/2}} - p^{1/2}t$ , las derivadas de  $\Phi$  respecto a  $p$  vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = x - X(\alpha) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = \frac{-(p-k)^{-1/2}}{2\beta^{1/2}} + \frac{p^{-3/2}t}{4} \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial p^3} = \frac{(p-k)^{-3/2}}{4\beta^{1/2}} - \frac{3p^{-5/2}t}{8} \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial p^4} = \frac{15p^{-7/2}t}{16} - \frac{3(p-k)^{-5/2}}{8\beta^{1/2}} \end{array} \right. ,$$

tengamos en cuenta que la segunda y la tercera derivadas de  $\Phi$  respecto a  $p$  se anulan cuando  $p = p_0$  y  $t = t_0$ .

Desarrollando en su serie de Taylor a  $\Phi$  con centro en  $p_0$  y haciendo  $z = (p-p_0)$  obtenemos:

$$\Phi(x, z, t) = a_4(t, x) + a_3(t, x)z + a_2(t)z^2 + a_1(t)z^3 + a_0(t)z^4 + O(z^5),$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(t) = \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial p^4} \Big|_{p=p_0} \\ a_1(t) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial p^3} \Big|_{p=p_0} \\ a_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \Big|_{p=p_0} \\ a_3(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p=p_0} = x - X(\alpha_0) = x - X_0 \\ a_4(t) = \Phi \Big|_{p=p_0} \end{array} \right.$$

Aplicando la transformación  $z = z' - \alpha$ , con  $\alpha = \frac{a_1(t)}{4a_0(t)}$ , que nos sirve para eliminar el término cúbico, expresamos  $\Phi$  de la siguiente forma:

$$\Phi(x, z, t) = b_0(t)z'^4 + b_1(t)z'^2 + b_2(t, x)z' + b_3(t, x) + O(z'^5),$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_2 - \frac{3a_1^2}{8a_0} \\ b_2 = \frac{a_1^3}{8a_0^2} - \frac{a_1 a_2}{2a_0} + a_3 \\ b_3 = \frac{15a_1^4}{64a_0^3} + \frac{a_1^2 a_2}{4a_0} - \frac{a_3 a_1}{4a_0} + a_4 \end{array} \right.$$

Así, despreciando los términos de  $O(z'^5)$  en la fase y los de  $O(z')$  en la amplitud  $\psi$  puede ser expresada como:

$$\psi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{i\pi\beta k}} h^{-1/2} \exp\left(\frac{ib_3}{h}\right) \int \exp\left(\frac{i(b_0 z'^4 + b_1 z'^2 + b_2 z')}{h}\right) dz'.$$

Al igual que en el caso anterior, para entender el comportamiento de  $\psi$  buscamos expresarla en términos de una función especial, para este caso, la función de Pearcey dada por la fórmula:

$$Pe(\gamma_1, \gamma_2) = \int \exp \left\{ i \left( \frac{\beta^4}{8} - \gamma_1 \frac{\beta^2}{2} + \gamma_2 \beta \right) \right\} d\beta$$

Teniendo en cuenta que para cuando  $p = p_0$  y  $t = t_0$ ,  $b_0 < 0$ , hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} \frac{(-b_0)z^4}{h} = \frac{\beta^4}{8} \\ z' = \frac{h^{1/4}\beta}{2^{-3/4}(-b_0)^{1/4}} \end{cases},$$

luego

$$\psi = \frac{\tilde{\varphi}_0(-b_0)^{-1/4} \exp(\frac{ib_3}{h})}{2^{1/4}} h^{-1/4} \int \exp i \left( -\frac{\beta^4}{8} + \frac{b_1\beta^2}{2^{3/2}(-b_0)^{1/2}h^{1/2}} + \frac{b_2\beta}{h^{3/4}2^{3/4}(-b_0)^{1/4}} \right) d\beta,$$

donde  $\gamma_1 = b_1/(2^{3/2}(-b_0)^{1/2})$ ,  $\gamma_2 = b_2/(2^{3/4}(-b_0)^{1/4})$  y así  $\psi$  se escribe en terminos de la función de Pearcey :

$$\psi = Ah^{-3/4} \bar{P}e(h^{-1/2}\gamma_1, -h^{-3/4}\gamma_2). \quad (6.8)$$

Queremos que el argumento de la función de Pearcey sea de  $O(1)$ , para esto necesitamos que  $\gamma_1$  sea del  $O(h^{1/2})$  y por lo tanto  $(t - t_0) \sim h^{1/2}$  y  $\gamma_2$  sea de  $O(h^{3/4})$ , es decir  $(x - X_0) \sim h^{3/4}$ , esto lo determinamos al desarrollar en su serie de Taylor a  $\gamma_1$ , con centro en  $t_0$  y  $\gamma_2$ , con centro en  $X_0$ , esto es

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = \frac{8a_2a_0 - 3a_1^2}{2^{7/2}(-a_0)^{3/2}} \\ \gamma_1(t) = \frac{\frac{\sqrt{12}(t-t_0)}{54k^4\beta^{1/2}} - \frac{23(t-t_0)^2}{324k^5}}{2^{7/2} \left( \frac{\sqrt{2}}{36k^{5/2}\beta^{1/2}} - \frac{5\sqrt{6}(t-t_0)}{1296k^{7/2}} \right)^{3/2}} \\ \gamma_1(t) = \left( \frac{\frac{\sqrt{12}(t-t_0)}{54k^4\beta^{1/2}} + O(t-t_0)^2}{2^{7/2}} \right) (Cte(1 + (t-t_0) + O(t-t_0)^2)) \\ \gamma_1(t) \sim O(t-t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_2(t) = a_3 + \frac{a_1^3}{8a_0^2} - \frac{a_1a_2}{2a_0} \\ \gamma_2(t) = (x - X_0) - \frac{\frac{(t-t_0)^2}{36k^4}}{2 \left( \frac{-\sqrt{2}}{36k^{5/2}\beta^{1/2}} + \frac{5\sqrt{6}(t-t_0)}{1296k^{7/2}} \right)} + \frac{\left( \frac{-\sqrt{6}(t-t_0)}{18k^{5/2}} \right)^3}{8 \left( \frac{-\sqrt{2}}{36k^{5/2}\beta^{1/2}} + \frac{5\sqrt{6}(t-t_0)}{1296k^{7/2}} \right)} \\ \gamma_2(t) = (x - X_0) + O(t-t_0)^2 \\ \gamma_2(t) \sim (x - X_0) \end{cases}$$



Para mostrar que podemos truncar la serie de Taylor de  $\Phi$  en los términos de  $O(p^5)$  para  $(t - t_0)$  de  $O(h^{1/2})$  y  $(x - X_0)$  de  $O(h^{3/4})$ , analizamos sobre los intervalos  $I_1 = |p - p_0| < h^{1/5}$ ,  $I_2 = |p - p_0| > h^{1/5}$ . En  $I_1$  podemos despreciar fácilmente los términos de  $O(p^5)$ , para ver que también lo podemos hacer en  $I_2$  acotamos a  $\psi$  sobre el intervalo  $I_2$ :

$$\psi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{i\pi\beta\alpha}} h^{-1/2} \int \exp\left(\frac{i(px + \tilde{S})}{h}\right) dp,$$

haciendo  $A = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{i\pi\beta\alpha}}$ ,  $\Phi = px + \tilde{S}$ ,  $\Phi_p = x - X(\alpha)$  donde  $x - X(\alpha)$  es de  $O(p^3)$  y  $p$  es de  $O(h^{3/5+3\delta})$  tenemos:

$$\left| Ah^{1/2} \int \frac{-ih}{\Phi_p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \exp \frac{i\Phi}{h} \right) dp \right| \leq \left| Ah^{-1/10-3\delta} - iAh^{1/2} \int \exp\left(\frac{i\Phi}{h}\right) \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\Phi_p} \right) dp \right|.$$

Como  $h^{-1/10-3\delta} \ll h^{-1/4}$ , para  $\delta < 1/20$  el término principal de la asintótica para  $\psi$  es como en la ecuación (6.8).

## 6.5. ANEXO

Presentamos a continuación un modelo de programa para plataforma MATLAB7 que sirve para visualizar la dinámica de variedades lagrangianas. Se puede modificar variando el sistema hamiltoniano correspondiente. El Programa 2 como lo llamamos se refiere justamente al ejemplo 2 de la sección 3.5, solo se ejecuta dentro del MATLAB . La programación se da a continuación:

```
disp('PROGRAMA DEL EJEMPLO 2');
k=input('Íngrese el valor de la constante k ');
b=input('Íngrese el valor de la constante B ');
t1=input('Íngrese el valor t inicial ');
t2=input('Íngrese el valor t final ');
a1=input('Íngrese el valor a inicial ');
a2=input('Íngrese el valor a final ');
disp('Variedad lagrangiana inicial con a variando y con t=');
disp(t1);
a=a1:0.005:a2;
t=t1:0.005:t2;
P1=Pej2V(a,b,k);
X1=Xej2V(t1,a,P1);
plot(X1,P1);
title('Grafica de Variedades Lagrangianas');
xlabel('X');
ylabel('P');
axis([-2,5,0,8]);
hold on;
al=0;
f=input('Pulse 5 para continuar');
for i=1:8 disp('Paso');
disp(i);
disp('Grafico con t variando y con a=');
disp(al);
P2=Pej2F(al,b,k);
X2=Xej2F(t,al,P2);
plot(X2,P2);
al=al+0.2;
f=input('Pulse 5 para continuar');
end disp('Variedad lagrangiana final con a variando y con t=');
disp(t2);
P10=Pej2V(a,b,k);
X10=Xej2V(t2,a,P10);
plot(X10,P10,'r');
```

Debe tener en cuenta que debe previamente formar los ficheros para las funciones *Pej2* y *Xej2*.

## Bibliografía

- [1] Maslov, V.P., *Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Moscow: Izdat. Moskov. Gos. Univ., 1965; French transl. in: *Teórie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Paris: Dunod. 1972.
- [2] Maslov, V.P., *Operator Methods*, Moscow: Nauka, 1973; English transl. in: *Operational Methods*, Moscow: Mir Publishers, 1976.
- [3] Maslov, V.P. and Fedoryuk, M.V., *Quasiclassical Approximation for the Equations of Quantum Mechanics*, Moscow: Nauka, 1976; English transl. in: *Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics*, Dordrecht: Reidel, 1981.
- [4] Maslov, V.P., *Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Moscow: Nauka, 1988.
- [5] Maslov, V.P., *Asymptotic Methods for Solving Pseudodifferential Equations*, Moscow: Nauka, 1987.
- [6] Vainberg, B. R., *Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Moskov. Gos. Univ., 1982; English transl.: New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1989.
- [7] Lazutkin, V.F., *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*(3), vol. 24, Berlin: Springer, 1993.
- [8] Stoker, J.J., *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, New York: John Wiley and Sons, 1992.
- [9] Lighthill, M.J., *Waves in fluids*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [10] Whitham, G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, New York: Wiley Interscience, 1974.
- [11] Sretenskii, L.N., *Theory of Wave Motions of Fluids*, Moscow: Nauka, 1977.
- [12] LeBlond, P.H. and Mysak, L.A., *Waves in the Ocean*, Amsterdam: Elsevier, 1978.
- [13] Cherkosov, L.V., *Surface and Internal Waves*, Kiev: Naukova Dumka, 1973.
- [14] Aleshkov, Yu. Z., *Theory of Waves on the Surface of a Heavy Liquid*, Leningrad: Leningrad. Univ., 1981.
- [15] Mei, C.C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Singapore: World Scientific, 1989.

- [16] Johnson, R.S., *A modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [17] Pelinovskii, E.N., *Nonlinear Dynamics of Tsunami Waves*, Gor'kii: IPF AN SSSR, 1982.
- [18] Marchuk, An.G., Chubarov, L.B., and Shokin, Yu. I., *Numerical Simulations of Tsunami Waves*, Novosibirsk: Nauka, 1984.
- [19] Selezov, I.T., Sidorchuk, V.N., and Yakovlev, V.V., *Transformation of Waves in the Near-Shore Zone of a Shelf*, Kiev: Naukova Dumka, 1963.
- [20] Brehovskii [Brekhovskikh], L.M., *Waves in Layered Media*, Moscow: Nauka, 1973; English transl.: New York: Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers,] 1980.
- [21] Babich, V.M., Buldyrev, V.S., and Molotkov, I.A., *The Space-Time Ray Method. Linear and Nonlinear Waves*, Leningrad: Leningrad. Univ., 1985.
- [22] Keller, J.B., Surface Waves on Water of Non-Uniform Depth *J. Fluid Mech.*, 1985, vol.4, pp.607-614.
- [23] Shen, M.C. and Keller, J.B., Uniform Ray Theory of Surface, Internal and Acoustic Wave Propagation in a Rotating Ocean or Atmosphere, *SIAM J. Appl. Math.*, 1975, vol.28, pp.857-875.
- [24] Babich, V.M. and Buldyrev, V.S., The Art of Asymptotics, *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, 1977, vol. 13, no.3, pp. 5-12.
- [25] Trèves, F., *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, vols. 1-2, New York: Plenum, 1980.
- [26] Guillemin, V. and Sternberg, S., *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys, no. 14, Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
- [27] Danilov, V. G. and Le Vu An, Fourier Integral Operators, *Mat. Sb.*, 1979, vol. 110 (152), no.3, pp.323-368.
- [28] Dobrokhotov, S. Yu., Maslov's Methods in the Linearized Theory of Gravitational Waves on a Liquid Surface, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 28, pp. 229-231.
- [29] Dobrokhotov, S. Yu. and Zhevandrov, P.N., Maslov's Operational Method in Problems of Water Waves Generated by a Source Moving Over Uneven Bottom, *Fizika Atmosfery i Okeana*, 1985, vol.21, no.7, pp. 744-751; English transl. in *Atmosph. Oceanic Phys.*, 1985, vol. 21, pp. 572-577.
- [30] Dobrokhotov, S. Yu. and Zhevandrov, P.N., Nonstandard Characteristics and the Maslov Operator Method in Linear Problems on Time Dependent Waves in Water, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1985, vol. 19, no. 4, pp.43-54; English transl. in *Funct. Anal. Appl.*, vol. 19, no.4, pp. 285-295.

- [31] Dobrokhotov, S. Yu. and Kuz'mina, V.M., Quasilinear Theory of the Evolution of Surface Waves Under the Action of Wind in a Basin with Uneven Bottom, *Izvestiya AN SSSR. Fizika Atmosfery i Okeana*, 1985, vol.21, no. 12, pp. 1299-1307; English transl.:in *Atmosph. Oceanic Phys.*, 1985, vol.21.
- [32] Dobrokhotov, S. Yu. and Zhevandrov, P.N., Calculation of Wave Moves in Ocean Over a Variable Bottom by Maslov's Method, in *Studies in Tsunami*, vol.1, Moscow, 1986, pp.73-79.
- [33] Dobrokhotov, S. Yu., Asymptotic Behavior of Water Surface Waves Trapped by Shores and Irregularities of the Bottom Relief, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol.289, no. 3, pp.575-579; English transl. in: *Sov. Phys. Doklady*, 1986, vol.31, no. 7, pp. 537-539.
- [34] Zhevandrov, P.N., The Cauchy-Poisson Problem for Gravitational-Capillary Waves on Water of Variable Depth, *Zh. Vychislit. Mat. Mat. Fiz.*, 1987, vol. 27, no. 12, pp. 1834-1844.
- [35] Dobrokhotov, S. Yu., Korobkin, A.A., Sturova, I.V., and Zhevandrov, P.N., Asymptotic Theory of Propagation of Nonstationary Surface and Internal Waves Over Uneven Bottom , *Intern. Series of Numerical Mathematics*, 1992, vol. 106, no. 7, pp. 105-112.
- [36] Dobrokhotov, S. Yu. and Zhevandrov, P.N., *Asymptotic Expansions and Canonical Maslov Operator in Linear Theory of Surface Gravity Waves: Main Equations and Constructions*, Inst. Probl. Mech., preprint no. 328, Moscow, 1988.
- [37] Dobrokhotov, S. Yu. and Zhevandrov, P.N., *Asymptotic Expansions and Canonical Maslov Operator in Linear Theory of Surface Gravity Waves: Cauchy-Poisson Problem Trapped Waves*, Inst. Probl. Mech., preprint no. 329, Moscow, 1989.
- [38] Karasev, M.V. and Maslov, V.P. *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*, Moscow: Nauka, 1991; English transl. in: *Math. Monographs*, vol 119, Providence: Amer. Math. Soc., 1993.
- [39] Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Moscow: Nauka, 1989; English transl.: New York: Springer, 1989.
- [40] Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko, A.T., *Modern Geometry. Methods and Applications*, Moscow: Nauka, 1986; English transl. in Dubrovin , B.A., Fomenko, A. T., and Novikov, S.P., *Modern Geometry- Methods and Applications* Parts I, II, New York: Springer, 1984, 1985.
- [41] Poston, T. and Stewart, I., *Catastrophe Theory and Its Applications. With an appendix by Olsen , D.R., Carter, S. R., and Rockwood, A.*, Mineola: dover Publications, 1996.

- [42] Arnol'd, V.I., *Singularities of Caustics and Wavefronts*, Kluwer Academic Publishers, 1990; Russian transl.: Moscow: FAZIS, 1996.
- [43] Berry, M.V., Waves and Thoms Theorem, *Adv. Phys.*, 1974, vol. 209, pp. 161-180.
- [44] Arnol'd, V.I., Varchenko, A.N., and Gusein-Zade, S.M., *Singularities of Differentiable Mappings. Classification of Critical Points, Caustic and Wave Fronts*, Moscow: Nauka, 1982; English transl. in: Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., and Varchenko, A.N., *Singularities of Differentiable Maps. Vol. I. The Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*, Boston: Birkhauser, 1985.
- [45] Arnol'd, V.I., Zeldovich, Ya.B., and Shandarin, S.F., *The Large Scale Structure of the Universe. I. General Properties. One Dimensional and Two Dimensional Models*, Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint, no. 100, 1981; English transl. in: *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1982, vol. 20, nos. 1-2, pp. 111-130.
- [46] Berry, M.V. and Klein, S., Diffraction near Fake Caustics, *European J. Phys.*, 1997, vol. 18, no. 4, pp. 303-306.
- [47] Berry, M.V. and Bodenschatz, E., Caustics, Multiply Reconstructed by Talbot Interference, *J. Modern optics*, 1999, vol. 46, pp. 349-365.
- [48] Borovikov, V.A., *Uniform Stationary Phase Method*, IEEE Electromagnetic Waves Series, vol. 40, London, 1994.
- [49] Lukin, D.S. and Palkin, E.A., Application of the Maslov Canonical Operator for Numerical Solution of Problem in Diffraction and Propagation of RadioWaves in Inhomogeneous Media, in *Theoretical and Experimental Investigation of the Propagation of Decimeter Radio Waves*, Moscow: IZMIRAN, 1976, pp. 146-167.
- [50] Krukovskii, A.S. and Lukin, D.S., Theory of Calculation of Model Functions and Diffraction of Electro-Magnetic Fields Based on Special Functions of the Wave Fronts, *Radiotekhnika i Elektronika*, 2003, vol. 40.
- [51] Krukovskii, A.S. and Lukin, D.S., Boundary and Angle Catastrophes in Uniform Geometrical Diffraction Theory *Radiotekhnika i Elektronika*, 2001, vol. 46, no. 7, pp. 816-825.
- [52] Krukovskii, A.S. and Lukin, D.S., Construction of Uniform Diffraction Theory Based on Methods of Boundary and Angle Catastrophes. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1998, vol.43, no.9, pp.1044-1060.
- [53] Ipatov, E.B., Lukin, D.S., and Palkin, E. A., Numerical Realization of Maslov Canonical Operator Method in Problems of Propagation of Short Radio in

the Earth Ionosphere, *Izv. Vusov, Radiofizika*", 1990, vol 33, no. 5, pp. 562-573.

- [54] Ipatov, E.B., Lukin, D.S., and Palkin, E.A., Maslov Canonical Operator in Problems of Numerical Simulation of Diffraction and Propagation of Waves in Inhomogeneous Media, *Sov. J. of Numer. Analysis and Math. Modelling*, 1990, vol.5, no. 6, pp. 465-488.
- [55] Arnold, V.I., On a Characteristic Class Entering into Conditions of Quantization, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 1-14.
- [56] Belov, V.V. and Dobrokhotov, S. Yu., On the Maslov Index and Canonical Operator on the Isotropic Manifolds with the Complex Germ.