

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**FERMIONES EN CAMPOS
MAGNÉTICOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS EN EL ÁREA
DE FÍSICA**

PRESENTA

MARÍA DE JESÚS ANGUIANO GALICIA

ASESORES: DR. ADNAN BASHIR Y DR. ALFREDO RAYA

MORELIA, MICHOACÁN, JULIO 2007.

Índice general

1. Introducción	3
2. Formalismo Clásico y Cuántico	7
2.1. Partícula Clásica	7
2.2. Ecuación de Schrödinger	10
2.3. Ecuación de Klein-Gordon	13
3. Fermiones Relativistas en $(3 + 1)$ Dimensiones	15
3.1. Ecuación de Dirac	15
3.2. Interpretación: Niveles de Landau y Espín	21
4. El Plano y Sus Peculiaridades	23
4.1. $(3 + 1)$ Dimensiones	23
4.1.1. Lagrangiano de Dirac	23
4.1.2. Lagrangiano de Maxwell	29
4.2. $(2 + 1)$ Dimensiones	31
4.2.1. Lagrangiano de Dirac “Heredado”	32
4.2.2. Lagrangiano de Dirac “Extendido”	33
4.2.3. Lagrangiano de Dirac “Reducible”	34
4.2.4. Lagrangiano de Maxwell	36
4.2.5. Lagrangiano de Chern-Simons	36
5. Fermiones Relativistas en $(2 + 1)$ Dimensiones	38
5.1. Ecuación de Dirac Irreducible	38
5.2. Ecuación de Dirac Reducible	43
5.3. Ecuación τ - Dirac	46
5.3.1. Sin Campo Magnético	47
5.3.2. Con Campo Magnético	49

6. Condensado Quiral Fermiónico	53
6.1. Generalidades	53
6.2. (3 + 1) Dimensiones	53
6.3. (2 + 1) Dimensiones con la Representación Irreducible	59
6.4. (2 + 1) Dimensiones con la Representación Reducible	62
6.5. (2 + 1) Dimensiones con la Ecuación de τ -Dirac	63
7. Conclusiones	65

Capítulo 1

Introducción

Los condensados (parámetros de orden) juegan un papel muy importante en la física de partículas elementales. Un condensado es el valor esperado (no cero) de un campo escalar en el vacío. En el modelo estándar de física de partículas, el condensado de Higgs $\langle 0|\phi|0\rangle$ es responsable de generar la masa de las partículas elementales de una manera invariante de norma que preserva la renormalizabilidad del modelo. La masa generada de esta manera explica aproximadamente sólo 2 % de la masa observada en el universo visible. El resto de la masa se debe en sí a los protones y neutrones residentes en los átomos que permean el mundo luminoso. Esos nucleones están hechos de quarks, cuya masa libre o de “corriente” es de unos cuantos MeV . Sin embargo, éstos se ligan mediante la interacción fuerte de la Cromodinámica Cuántica (QCD) para formar los nucleones que pesan casi $1000 MeV$. De este modo, la mayor parte de la masa visible puede atribuirse a QCD . La manera en que esto sucede es similar al mecanismo de Higgs. Un campo escalar obtiene un valor de expectación no nulo en el vacío. Cuando los quarks viajan a través del medio permeado por el condensado, adquieren una masa “constituyente” muy grande, del orden de $300 MeV$. Los cálculos teóricos revelan que incluso si las masas corrientes de los quarks fueran cero, aún así los quarks adquieren casi toda su masa constituyente [1]. La simetría que distingue entre los fermiones masivos y no masivos es la llamada simetría quiral. Así que en QCD , la simetría quiral se rompe mediante la formación de un condensado quiral. Sin embargo, contrario al Higgs del Modelo Estándar, el campo escalar que adquiere un valor del condensado no nulo en QCD es un compuesto. Está hecho de campos de quark y antiquark. Se define como $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ y se llama *condensado de quark quiral*.

En esta tesis estudiamos la generación de masas para fermiones debida a la presencia de campos magnéticos externos. Este tema ha sido estudiado extensamente en la literatura y continúa siendo un tópico de investigación muy popular. Al respecto, la *catálisis magnética* fue descubierta por Miransky *et. al.* en [2] y Leung *et. al.* en [3]. En este fenómeno, aún si comenzamos con fermiones no masivos en el Lagrangiano, en presencia de campos magnéticos suficientemente fuertes, los fermiones y anti-fermiones forman condensados incluso al valor más débil del acoplamiento electromagnético y generan sus masas. Esto en la *Generación Dinámica de Masas* (GDM).

En un trabajo separado, usando el método del tiempo propio del Schwinger, Miransky *et. al.*, [4], calcularon también el condensado cuyo origen es no dinámico. Como era de esperarse, este condensado es una función de la masa desnuda y se anula a medida que ésta tiende a cero. Su trabajo se basa en suponer que el campo magnético externo es muy intenso. En este régimen, el nivel más bajo de Landau es dominante y uno puede despreocuparse de la contribución de otros niveles. Nuestro trabajo en esta tesis no recurre a ninguna suposición de este estilo. Esta es la razón por la que somos capaces de deducir el condensado como una suma sobre los infinitos niveles de Landau. En la aproximación del nivel más bajo de Landau, recuperamos los resultados de Miransky *et. al.* La formación de los condensados en la presencia de campos magnéticos puede tener relevancia en la transición de fase electrodébil [5].

En el mismo trabajo, Miransky *et. al.* también calculan el condensado en $(2+1)$ -dimensiones, bajo la misma suposición. Independientemente, el mismo condensado fue evaluado por A. Das en [6]. Este cálculo se basa en resolver la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético constante de fondo, cuantizar los campos fermiónicos y obtener el condensado de primeros principios. En esta tesis empleamos este método para evaluar el condensado en varios Lagrangianos invariantes y variantes bajo paridad en $(2+1)$ -dimensiones. Todos los resultados para Lagrangianos que violan paridad presentados en esta tesis son originales. Los resultados para el Lagrangiano invariante bajo paridad concuerdan con los de A. Das.

Una variedad caleidoscópica de Lagrangianos $(2+1)$ -dimensionales refleja la riqueza de la estructura de las teorías planares. Estos Lagrangianos son relevantes tanto en estudios de modelos de juguete de interés en la física de altas energías o en aplicaciones prácticas en la física de la materia condensada.

El Lagrangiano invariante bajo paridad ha sido estudiado extensamente para la generación dinámica de masas para fermiones en presencia y ausencia de campos magnéticos. Estos estudios se llevan a cabo usando (i) ecuaciones

temperatura [12]. Estos estudios parten de la analogía formal que existe en la aparición de la fase superconductor en τ - $QED3$ y la generación dinámica de masas a temperatura finita en su contraparte ordinaria.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 2 recordamos el comportamiento de una partícula cargada en presencia de un campo magnético en la mecánica clásica. Enseguida estudiamos a la misma partícula desde la mecánica cuántica mediante la ecuación de Schrödinger. Como un ejemplo simple hacia la dinámica relativista, estudiamos la solución a la Ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo magnético constante de fondo. En el Capítulo 3, realizamos el estudio anterior ahora para la ecuación de Dirac. En el Capítulo 4, abordamos los sistemas planares. Discutimos en detalle las peculiaridades de estos sistemas en cuanto a sus simetrías y la riqueza de su estructura, que permiten formular varios Lagrangianos que violan o respetan Paridad. En el Capítulo 5, resolvemos la ecuación de Dirac en $(2+1)$ -dimensiones para varios Lagrangianos en presencia de un campo magnético constante. El Capítulo 6 está dedicado al cálculo del condensado fermiónico para sistemas en $(3+1)$ y $(2+1)$ dimensiones. Presentamos varios resultados nuevos y hacemos conexión con aquellos ya conocidos cuando es posible. Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Formalismo Clásico y Cuántico

En este capítulo estudiaremos los aspectos básicos del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo magnético constante de fondo. Comenzaremos revisando las generalidades del formalismo clásico y posteriormente estudiaremos la dinámica de una partícula cuántica cargada en presencia de este campo clásico.

2.1. Partícula Clásica

El movimiento de una partícula con carga $-e$ ¹ moviéndose en un campo electromagnético está descrito por la fuerza de Lorentz

$$\dot{\mathbf{p}} = -e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) ,$$

donde los vectores \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{p} , \mathbf{E} y \mathbf{B} son, respectivamente, el vector de posición, velocidad y momento lineal de la partícula, y los campos eléctrico y magnético y el punto denota, como es usual, la derivada con respecto al tiempo.

Si ahora consideramos el caso de una carga puntual *no relativista* en presencia de un campo magnético únicamente ($\mathbf{E} = 0$), tenemos que la fuerza de Lorentz toma la siguiente forma :

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \tag{2.1}$$

donde m es la masa de la partícula. Consideramos a la velocidad y al campo magnético orientados de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} , \quad \mathbf{B} = -B\mathbf{k} .$$

¹El electrón tiene carga $-e$.

Entonces, los componentes vectoriales de la fuerza de Lorentz son :

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x &= -Bv_y , \\(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y &= Bv_x , \\(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z &= 0 .\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.1), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}m\dot{v}_x &= eBv_y , \\m\dot{v}_y &= -eBv_x , \\m\dot{v}_z &= 0 .\end{aligned}\tag{2.2}$$

De la última relación, podemos ver que no hay fuerza en la dirección del campo magnético. Analicemos ahora las ecuaciones restantes. Si tomamos la segunda derivada de ellas, obtenemos las siguientes expresiones

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x = 0 , \quad \ddot{v}_y + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y = 0 .$$

Uno puede escoger las condiciones iniciales de forma tal que la solución se pueda escribir como :

$$v_x(t) = v \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m}\right) t , \quad v_y(t) = v \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m}\right) t .$$

Integrando estas expresiones, podemos ver fácilmente que las coordenadas que describen el movimiento de la partícula son :

$$\begin{aligned}x(t) &= -\frac{vm}{eB} \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m}\right) t + x_0 \\y(t) &= \frac{vm}{eB} \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m}\right) t + y_0 .\end{aligned}$$

Estas ecuaciones paramétricas describen un círculo con centro en (x_0, y_0) y radio $r = vm/eB$, el cual sólo necesita de condiciones iniciales para ser determinado. A la cantidad $\omega_B \equiv eB/m$ se le llama frecuencia de ciclotrón y sus unidades son de s^{-1} . Esta ω_B depende únicamente de e , m y B , no de v . A r se le llama radio de Larmor o de giro y éste depende sólo del momento de

la partícula. Podemos ver entonces que todas las partículas (no relativistas) con el mismo cociente e/m tienen la misma frecuencia ciclotrónica ω_B y que a distintas energías, la partícula tiene radios de Larmor r distintos.

Analicemos ahora el *caso relativista*. Sabemos que en relatividad especial el momento lineal está dado por

$$\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v} \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}},$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $v = |\mathbf{v}|$. Si resolvemos la ecuación (2.1) con los mismos razonamientos que usamos anteriormente, llegamos a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{eBv_y}{m_0\gamma}, \\ \dot{v}_y &= -\frac{eBv_x}{m_0\gamma}, \\ \dot{v}_z &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Este conjunto de ecuaciones que hemos obtenido para el caso relativista, son iguales (salvo por un factor) al conjunto de ecuaciones (2.2) que obtuvimos para el caso clásico, por lo que sus soluciones son también formalmente iguales y para condiciones iniciales similares tenemos

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m_0\gamma} \right) t, \\ v_y(t) &= v \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m_0\gamma} \right) t, \\ x(t) &= -\frac{vm_0\gamma}{eB} \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m_0\gamma} \right) t + x_0, \\ y(t) &= \frac{vm_0\gamma}{eB} \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m_0\gamma} \right) t + y_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Podemos entonces concluir que la dinámica de una partícula en este campo magnético puede calcularse como si esta no fuera relativista, ya que lo único que varía es su masa, la cual es más grande por el factor relativista γ .

En la siguiente sección estudiaremos la dinámica de una partícula cuántica cargada en presencia de un campo magnético constante de fondo. Nos enfocamos en el caso no relativista descrito por la ecuación de Schrödinger.

2.2. Ecuación de Schrödinger

El Hamiltoniano para una partícula cargada en un campo magnético tiene la siguiente forma :

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 ,$$

donde hemos utilizado la prescripción de la sustitución mínima $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ para incorporar los efectos del campo en una manera invariante de norma a través del potencial vectorial \mathbf{A} . El potencial que describe a un campo magnético uniforme en la dirección negativa de z puede escribirse de muchas formas. Nosotros elegimos trabajar en la norma de Landau, donde éste es

$$\mathbf{A} = -xB\mathbf{j} .$$

Podemos verificar fácilmente que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -B\mathbf{k} .$$

Para esta elección del potencial, el operador Hamiltoniano adquiere la forma siguiente

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_y - eB\hat{x})^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} . \quad (2.5)$$

Queremos entonces resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) .$$

Observando el hecho que

$$[\hat{H}, \hat{p}_y] = [\hat{H}, \hat{p}_z] = 0 , \quad (2.6)$$

vamos a proponer una solución $\psi(x, y, z)$ que cumpla con lo siguiente :

- Debe ser el producto de dos funciones.
- Una de estas funciones será la de partícula libre en las coordenadas y y z , de acuerdo a la relación (2.6).
- La otra será una función $\chi(x)$ que nos describa el movimiento en la coordenada x .

Entonces, nuestra solución se puede escribir como

$$\psi(x, y, z) = e^{i(y p_y + z p_z)} \chi(x) . \quad (2.7)$$

Notamos que p_y y p_z pueden adquirir todos los valores reales posibles y dado que $p_z = m v_z$, *la velocidad de la partícula a lo largo de la dirección del campo puede tomar un valor real arbitrario no cuantizado*. Sustituyendo la expresión para la función de onda dada en (2.7) y el Hamiltoniano en (2.5), la ecuación de Schrödinger se vuelve :

$$\left[\frac{1}{2m} (p_y - eBx)^2 - \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{p_z^2}{2m} - E \right] \chi(x) = 0 .$$

Tomando

$$\bar{x} = x - \frac{p_y}{eB} \equiv x - x_0 \quad \text{y} \quad \omega_B = \frac{eB}{m} ,$$

esta ecuación se simplifica como

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \frac{m\omega_B^2}{2} \bar{x}^2 + \frac{p_z^2}{2m} - E \right] \chi(\bar{x}) = 0 , \quad (2.8)$$

donde ω_B es la frecuencia ciclotrónica de la sección anterior correspondiente a las órbitas circulares clásicas de una partícula de masa m y carga e bajo un campo uniforme B . La ecuación (2.8) describe el movimiento de un oscilador armónico cuántico unidimensional con frecuencia ω_B , cuyas soluciones son de la forma

$$\chi_n(\bar{x}) \equiv I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB} \right) \right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB} \right)^2} ,$$

donde $H_n(p, x)$ son los polinomios de Hermite asociados que se obtienen a través de la generatriz

$$H_n(x) = (-1) e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} .$$

Los niveles de energía correspondientes están dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{eB}{m} + \frac{p_z^2}{2m} \quad \text{donde} \quad n = 0, 1, 2, \dots . \quad (2.9)$$

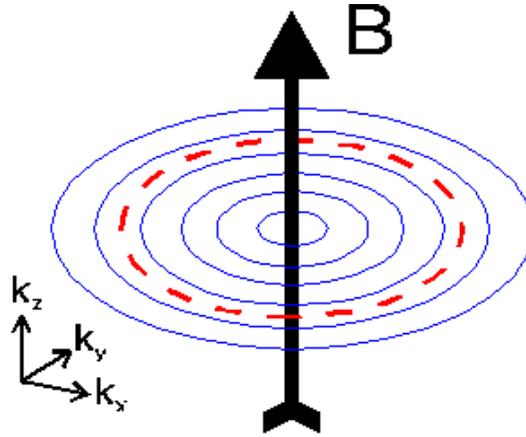


Figura 2.1: Niveles de Landau.

Estos niveles de energía son llamados niveles de Landau [13], que se ilustran en la Figura (2.1). Notemos que para los niveles de Landau habrá una degeneración, puesto que diferentes valores permitidos para p_y corresponden al mismo valor de energía, que es independiente de esta componente del momento de la partícula.

Suponemos ahora que la longitud del sistema en la dirección y es L_y . Si imponemos condiciones de frontera periódicas en esta dirección, tenemos que

$$\psi(y) = \psi(y + L_y) .$$

Por lo tanto, los valores permitidos para p_y están dados por la relación

$$p_y = \frac{2\pi n_y}{L_y} \quad \text{donde} \quad n_y = 0, 1, 2, \dots ,$$

lo que impone una restricción para x_0 , dada por

$$x_0 = \frac{2\pi n_y}{eBL_y} .$$

Si imponemos además que

$$0 \leq x_0 \leq L_x ,$$

donde L_x es la longitud del sistema en la dirección x , para que todos los electrones estén girando dentro del sistema, debemos tener que :

$$n_y \leq \frac{eBL_xL_y}{2\pi} = n_{max} .$$

Este es el número máximo de electrones que pueden estar en un nivel de Landau dado. Este resultado es de suma importancia en el estudio de sistemas de Materia Condensada, particularmente en el efecto Hall cuántico, donde, bajo ciertas condiciones y a bajas temperaturas, la conductividad y resistividad eléctricas de un sistema bidimensional de electrones sujeto a la acción de un campo magnético perpendicular a la muestra se cuantizan conforme se incrementa la intensidad del campo. Cada nivel en esta cuantización corresponde a un nivel de Landau completamente lleno.

Finalmente, consideraremos el caso de una partícula cuántica relativista, estudiando la ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo magnético en la siguiente sección.

2.3. Ecuación de Klein-Gordon

Sabemos que la ecuación de Schrödinger es válida sólo para partículas cuya velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz. Esta ecuación no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Para partículas cuánticas relativistas sin espín, la ecuación invariante de Lorentz es la llamada ecuación de Klein-Gordon, la cual la podemos escribir de la siguiente manera :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \phi(\vec{r}, t) = 0 ,$$

o, en términos del operador D' Alambertiano \square^2 , ésta se escribe como

$$(\square^2 + m^2)\phi(\vec{r}, t) = 0 . \tag{2.10}$$

Consideremos ahora el movimiento de una partícula cuántica relativista cargada en el campo magnético de fondo que hemos considerado hasta ahora, basados en la Ref. [14]. Siguiendo la prescripción de la sustitución mínima,

$$\partial_\mu \Rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$$

en (2.10), tenemos

$$(\square^2 - 2ieA^\mu\partial_\mu - ie(\partial_\mu A^\mu) - e^2A^2 + m^2)\phi = 0 .$$

Sustituyendo ahora $A_y = -xB$ y el resto de las componentes de A_μ nulas, la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$\left(\square^2 + 2iexB \frac{\partial}{\partial y} + e^2 x^2 B^2 + m^2 \right) \phi = 0 .$$

Buscamos soluciones de la forma

$$\phi(\vec{r}, t) = e^{-iEt + ip_y y + ip_z z} f(x) ,$$

donde $f(\bar{x})$ satisface

$$\left(E^2 - m^2 - p_z^2 + \frac{d^2}{d\bar{x}^2} - e^2 B^2 \bar{x}^2 \right) f(\bar{x}) = 0 . \quad (2.11)$$

Aquí, hemos usado el cambio de variable $\bar{x} = x - p_y/eB$. Esta última relación nos describe nuevamente a un oscilador armónico unidimensional. Sus eigenenergías E_n y eigenfunciones f_n están dadas respectivamente, por

$$E_n^2 = m^2 + p_z^2 + 2eB \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.12)$$

y

$$f_n(\bar{x}) \equiv I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right) \right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right)^2} . \quad (2.13)$$

Observemos que el espectro de energía es diferente en el caso no relativista dado en la ecuación (2.9). En el caso no relativista, para campos magnéticos muy intensos, los niveles de energía varían linealmente con el campo, mientras que en este caso la variación es con la raíz cuadrada de la intensidad del campo.

De esta manera concluimos nuestra revisión sobre las bases para la descripción de fermiones en campos magnéticos. A continuación, describiremos a los fermiones en un campo de fondo desde la teoría de Dirac.

Capítulo 3

Fermiones Relativistas en $(3 + 1)$ Dimensiones

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los fermiones, es decir, de las partículas cargadas con espín-1/2 en presencia de campos magnéticos uniformes. Como los fermiones satisfacen la ecuación de Dirac, entonces necesitamos resolver dicha ecuación con un campo magnético constante.

3.1. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético se escribe como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 ,$$

donde las matrices γ^μ satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} .$$

Uno puede escoger cualquier representación conveniente de las matrices γ^μ . Como nos interesa hacer una conexión directa entre las soluciones en $(3 + 1)$ y $(2 + 1)$ dimensiones, es recomendable entonces usar

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} &= i \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\vec{\gamma}$ representa las matrices γ^1 y γ^2 . Análogamente, $\vec{\sigma}$ representa a las matrices σ_1 y σ_2 . El hecho de que las primeras tres matrices γ^μ , es decir, γ^0 , γ^1 y γ^2 están en forma de bloques diagonales, nos hará más fácil la tarea de comparar los casos $(3 + 1)$ y $(2 + 1)$ dimensionales.

Las propiedades de las soluciones a la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético constante de fondo han sido estudiadas en la Ref. [15] utilizando $A_\mu = (0, -yB, 0, 0)$. Nosotros, de manera independiente y en acuerdo a nuestras convenciones, seleccionamos $A_\mu = (0, 0, xB, 0)$ ¹ y tomamos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix},$$

entonces, tenemos las siguientes ecuaciones por resolver

$$\begin{aligned} \left(i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + i\sigma_2 \left(i \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right) - m \right) \psi_A &= \frac{\partial}{\partial z} \psi_B \\ \left(-i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\sigma_2 \left(i \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right) - m \right) \psi_A &= \frac{\partial}{\partial z} \psi_B. \end{aligned}$$

Basándonos en nuestra experiencia anterior, podemos proponer una solución de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-iEt + iyp_y + izp_z} \psi(x).$$

Usando nuevamente el cambio de variable $\bar{x} = x - p_y/eB$, es fácil ver que las derivadas involucradas en nuestro cálculo toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \partial_x - i\partial_y - eBx &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \\ \partial_x + i\partial_y + eBx &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \\ \partial_t &\rightarrow -iE. \end{aligned}$$

Además, si escribimos a ψ_A y ψ_B en términos de sus componentes

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ \psi_2^A \end{pmatrix} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_1^B \\ \psi_2^B \end{pmatrix},$$

¹ $A_y = A^2 = -A_2 = -xB.$

tenemos entonces el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(E - m)\psi_1^A - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x}\right)\psi_2^A &= ip_z\psi_1^B \\
(E + m)\psi_2^A + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x}\right)\psi_1^A &= -ip_z\psi_2^B \\
(E + m)\psi_1^B - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x}\right)\psi_2^B &= -ip_z\psi_1^A \\
(E - m)\psi_2^B + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x}\right)\psi_1^B &= ip_z\psi_2^A .
\end{aligned}$$

En forma compacta, podemos escribir este sistema como

$$\begin{aligned}
(E \mp m)\psi_{1,1}^{A,B} - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x}\right)\psi_{2,2}^{A,B} &= \pm ip_z\psi_{1,1}^{B,A} \\
(E \mp m)\psi_{2,2}^{B,A} + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x}\right)\psi_{1,1}^{B,A} &= \pm ip_z\psi_{2,2}^{A,B} .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Proponemos ahora con las soluciones de la forma

$$\begin{aligned}
\psi_1^A &= C_{1A}^n I(n, p, x) & \psi_2^A &= C_{2A}^n I(n - 1, p, x) \\
\psi_1^B &= C_{1B}^n I(n, p, x) & \psi_2^B &= C_{2B}^n I(n - 1, p, x) ,
\end{aligned}$$

donde las funciones $I(n, p, x)$ son, como hemos visto antes,

$$I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2}\left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} .$$

Estas funciones satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} - eBx\right) I(n - 1, p, x) &= -\sqrt{2neB} I(n, p, x) \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} + eBx\right) I(n, p, x) &= \sqrt{2neB} I(n - 1, p, x) .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2) y usando la relación dada anteriormente, obtenemos un conjunto de ecuaciones para los coeficientes involucrados. En forma

matricial, estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2neB} & ip_z & 0 & E_n + m \\ E_n - m & 0 & -ip_z & \sqrt{2neB} \\ ip_z & \sqrt{2neB} & E_n + m & 0 \\ 0 & E_n - m & \sqrt{2neB} & -ip_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1A}^n \\ C_{2A}^n \\ C_{1B}^n \\ C_{2B}^n \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Para que este conjunto de ecuaciones tenga solución, pedimos que su determinante sea igual a cero. Esto resulta en la expresión

$$E_n^2 = m^2 + 2eBn + p_z^2. \quad (3.5)$$

En el caso de las soluciones con energía negativa, las ecuaciones correspondientes adquieren la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2neB} & -ip_z & 0 & -E_n + m \\ -E_n - m & 0 & ip_z & \sqrt{2neB} \\ -ip_z & \sqrt{2neB} & -E_n + m & 0 \\ 0 & -E_n - m & \sqrt{2neB} & ip_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1A}^n \\ C_{2A}^n \\ C_{1B}^n \\ C_{2B}^n \end{pmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Nuevamente la existencia de solución requiere la expresión correcta de la energía relativista en presencia de un campo magnético constante dada en (3.5). Para los coeficientes relacionados con las soluciones de energía positiva tenemos

$$C_{1A}^n = E_n + m \quad C_{2A}^n = 0 \quad C_{1B}^n = -ip_z \quad C_{2B}^n = -\sqrt{2eBn}, \quad (3.7)$$

y

$$C_{1A}^n = 0 \quad C_{2A}^n = E_n + m \quad C_{1B}^n = -\sqrt{2eBn} \quad C_{2B}^n = -ip_z, \quad (3.8)$$

mientras que para las soluciones de energía negativa tenemos

$$C_{1A}^n = -E + m \quad C_{2A}^n = 0 \quad C_{1B}^n = ip_z \quad C_{2B}^n = -\sqrt{2eBn}, \quad (3.9)$$

y

$$C_{1A}^n = 0 \quad C_{2A}^n = -E + m \quad C_{1B}^n = -\sqrt{2eBn} \quad C_{2B}^n = ip_z. \quad (3.10)$$

Usando las relaciones (3.7) y (3.8), podemos escribir las soluciones de energía positiva como

$$\begin{aligned} \psi_1^P &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ -ip_z I(n-1, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, p, x) \end{pmatrix} \\ \psi_2^P &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n-1, p, x) \\ -ip_z I(n, p, x) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

mientras que para las soluciones de energía negativa usamos (3.9), (3.10) y obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_1^N &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ ip_z I(n-1, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, p, x) \end{pmatrix} \\ \psi_2^N &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n-1, p, x) \\ ip_z I(n, p, x) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} |E_n| &= \sqrt{2eBn + m^2 + p_z^2} \\ N_n &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por consistencia de la interpretación de las soluciones, requerimos

$$I(n = -1, p, x) = 0.$$

Si ahora tomamos $p_z = 0$ en (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_1^P &= N_n e^{-i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2neBI}(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n - 1, p, x) \end{pmatrix}, \\ \psi_2^P &= N_n e^{-i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n - 1, p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera análoga, si $p_z = 0$ en (3.12) obtenemos

$$\psi_1^N = N_n e^{i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2neBI}(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n - 1, p, x) \end{pmatrix}$$

$$\psi_2^N = N_n e^{i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n - 1, p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El límite $p_z = 0$ nos ayudará a comparar estas soluciones con las de la ecuación de Dirac en el plano que obtendremos en el próximo capítulo. Mientras tanto, en la siguiente sección damos una interpretación al espín en las soluciones correspondientes al nivel más bajo de Landau.

3.2. Interpretación: Niveles de Landau y Espín

En el nivel más bajo de Landau, $n = 0$, tenemos $\psi_1^{P,N} = 0$ trivialmente. Además

$$\psi_2^{P,N} = N_0 I(0, p, x) e^{\mp i(|E_0|t - py)} \begin{pmatrix} (|E_0| + m) \\ 0 \\ \mp ip_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si definimos el siguiente operador de proyección de espín

$$\widehat{\Sigma} \cdot \widehat{\vec{P}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \widehat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \widehat{\vec{p}} \end{pmatrix},$$

y sin pérdida de generalidad tomamos la dirección del movimiento de la partícula a lo largo del eje z , entonces tenemos que

$$(\widehat{\Sigma} \cdot \widehat{\vec{P}})_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que para $n = 0$,

$$(\widehat{\Sigma} \cdot \widehat{\vec{P}})_z \psi_2^{P,N} = +\frac{1}{2} \psi_2^{P,N}.$$

Por lo tanto, concluimos que las partículas y anti-partículas de espín en la dirección opuesta a su dirección de momentum no se encuentran en el nivel más bajo de Landau. Las partículas y anti-partículas de espín a lo largo de su momentum si se encuentran en el nivel más bajo de Landau. No hay ninguna restricción parecida en otros niveles de Landau, pues la interpretación del espín de la partícula se vuelve más intrincada.

Hasta aquí llega nuestro estudio sobre los fermiones relativistas en campos magnéticos en $(3 + 1)$ dimensiones. Antes de iniciar nuestro estudio sobre fermiones relativistas en $(2 + 1)$ dimensiones, con todas sus peculiaridades, es conveniente hacer una pausa para estudiar la teoría Lagrangiana de $QED4$ y $QED3$, la cual nos dará las herramientas necesarias para analizar y entender a los fermiones planares.

Capítulo 4

El Plano y Sus Peculiaridades

En este capítulo revisaremos las propiedades básicas de las transformaciones de quiralidad y paridad. Estudiaremos dichas transformaciones en los espacios $(3+1)$ y $(2+1)$ dimensiones y veremos que los Lagrangianos planares se comportan de una manera peculiar. Esto nos permite inferir una riqueza adicional de estos Lagrangianos.

4.1. $(3 + 1)$ Dimensiones

En esta sección, veremos cómo se modifica el Lagrangiano de QED en $(3+1)$ dimensiones bajo transformaciones quirales y de paridad.

4.1.1. Lagrangiano de Dirac

En el Lagrangiano fermiónico

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m) \psi . \quad (4.1)$$

Como hemos comentado anteriormente, existen varias representaciones equivalentes de estas 4 matrices, cuya dimensionalidad más baja es de 4×4 . A continuación estudiaremos las simetrías de quiralidad y de paridad en $QED4$.

Simetría Quiral

Definimos la matriz γ^5 como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 ,$$

la cual tiene las siguientes propiedades

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Es fácil ver que podemos construir una corriente

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$$

que satisface

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi} \gamma^5 \psi.$$

Por lo tanto, esta corriente es una cantidad conservada para $m = 0$. Esto es una consecuencia directa de la llamada transformación quiral del campo fermiónico definida como

$$\psi \rightarrow e^{i\chi\gamma^5} \psi.$$

El Lagrangiano de Dirac es invariante ante la transformación quiral sólo para fermiones no masivos. Para fermiones masivos, en cambio, esta transformación no es una simetría. Por lo tanto, la generación de masa para fermiones esta directamente relacionada con el rompimiento de la simetría quiral.

Simetría de Paridad

La transformación de paridad, también conocida como inversión espacial está dada por

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

En una forma compacta, esta transformación se puede escribir como

$$x'^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu,$$

donde Λ_ν^μ es la matriz explícitamente mostrada en la transformación.

Para ver como se transforma el Lagrangiano fermiónico dado en (4.1) ante esta transformación, primero debemos ver como se transforman las soluciones de la ecuación de Dirac en nuestra representación. Recordando que la ecuación de Dirac en la representación de momentos se escribe como :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0,$$

donde $\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \gamma^1 p_1 - \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3$, con $p_0 = E, p_1 = p_x, p_2 = p_y$ y $p_3 = p_z$. Usando nuestra representación dada en (3.1), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \sigma^3 E - i\sigma^1 p_x - i\sigma^2 p_y & iI p_z \\ iI p_z & -\sigma^3 E + i\sigma^1 p_x + i\sigma^2 p_y \end{pmatrix} u(p) = 0 .$$

Las soluciones así encontradas son

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= u_1(p) e^{-ip \cdot x} , & \psi_2(x) &= u_2(p) e^{-ip \cdot x} , \\ \psi_3(x) &= v_1(p) e^{ip \cdot x} , & \psi_4(x) &= v_2(p) e^{ip \cdot x} , \end{aligned}$$

donde u_1, u_2, v_1, v_2 están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= N' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-(ip_x + p_y)}{ip_z} \\ \frac{-(E+m)}{ip_z} \end{pmatrix} , \\ u_2 &= N' \begin{pmatrix} \frac{(ip_x + p_y)}{ip_z} \\ \frac{-(E+m)}{ip_z} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \\ v_1 &= N' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-(E+m)}{ip_z} \\ \frac{(ip_x - p_y)}{ip_z} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$v_2 = N' \begin{pmatrix} \frac{-(E+m)}{ip_z} \\ \frac{(ip_x - p_y)}{ip_z} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde la constante de normalización N' es :

$$N' = p_z N,$$

con

$$N = \sqrt{E + m}.$$

Con esta normalización tenemos ahora que las soluciones son

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -(p_x - ip_y) \\ i(E + m) \end{pmatrix},$$

$$u_2 = N \begin{pmatrix} (p_x - ip_y) \\ i(E + m) \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix},$$

$$v_1 = N \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ i(E + m) \\ (p_x + ip_y) \end{pmatrix},$$

$$v_2 = N \begin{pmatrix} i(E + m) \\ (p_x + ip_y) \\ p_z \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Si ahora aplicamos nuestra transformación de paridad

$$p \Rightarrow -p$$

obtenemos

$$u_1^{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_z \\ (p_x - ip_y) \\ i(E + m) \end{pmatrix} ,$$

$$u_2^{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} -(p_x - ip_y) \\ i(E + m) \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} ,$$

$$v_1^{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} -p_z \\ 0 \\ i(E + m) \\ -(p_x + ip_y) \end{pmatrix} ,$$

$$v_2^{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} i(E + m) \\ -(p_x + ip_y) \\ -p_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que en nuestra representación γ^0 está dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que las soluciones cumplen las siguientes relaciones :

- Para u_1

$$\gamma^0 u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -(p_x - ip_y) \\ i(E + m) \end{pmatrix} = u_1^{\mathcal{P}},$$

- Para u_2

$$\gamma^0 u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_x - ip_y) \\ i(E + m) \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} = -u_2^{\mathcal{P}},$$

- Para v_1

$$\gamma^0 v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ i(E+m) \\ (p_x + ip_y) \end{pmatrix} = -v_1^{\mathcal{P}},$$

- Para v_2

$$\gamma^0 v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(E+m) \\ (p_x + ip_y) \\ p_z \\ 0 \end{pmatrix} = v_2^{\mathcal{P}}.$$

Por lo que podemos decir que, salvo por un signo,

$$\gamma^0 u_i = u_i^{\mathcal{P}} \quad \text{y} \quad \gamma^0 v_i = v_i^{\mathcal{P}},$$

es decir, bajo una transformación de Paridad, un espinor de Dirac está relacionado directamente con sí mismo. Como veremos más adelante, esta propiedad no se mantiene en el caso del plano.

Proseguimos nuestro estudio sobre el Lagrangiano de $QED4$ considerando ahora al Lagrangiano de Maxwell.

4.1.2. Lagrangiano de Maxwell

Sabemos que las ecuaciones de Maxwell en términos del tensor electromagnético se escriben como :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0.$$

Introducimos ahora el potencial vectorial $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, a partir del cual derivamos los campos \vec{E} y \vec{B} de las relaciones

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A^0,$$

lo que implica que

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Ahora, el Lagrangiano de Maxwell es

$${}^{(4)}\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

y de él se obtienen las ecuaciones de Maxwell de las Ecuaciones de Euler-Lagrange respectivas para A^μ y sus derivadas.

En la Teoría Cuántica, A^μ se identifica con la función de onda para el fotón, la cual, de las ecuaciones de Maxwell, resulta una ecuación de onda de segundo orden

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu.$$

El Lagrangiano de Maxwell posee una *Simetría de Norma*, es decir, bajo la transformación

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$$

con $\Lambda(x)$ una función escalar arbitraria de las coordenadas, el Lagrangiano es invariante. Los alcances e importancia de esta simetría están fuera de los objetivos de estudio de este trabajo. Basta decir que dicha simetría permite acoplar los Lagrangianos de Maxwell y Dirac mediante la sustitución mínima $p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$ a través un término que describe las interacciones a nivel fundamental, de modo que la estructura del Lagrangiano de $QED4$ es

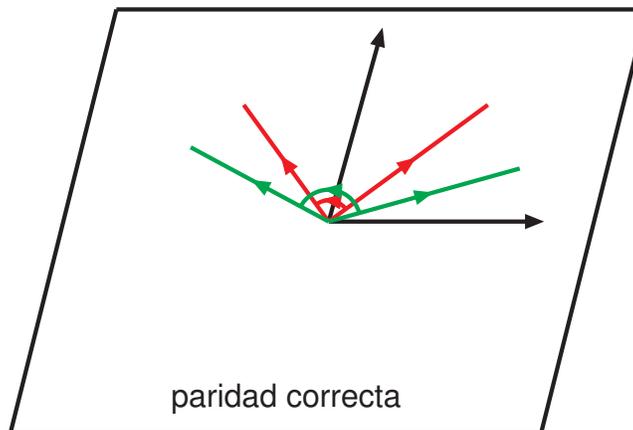
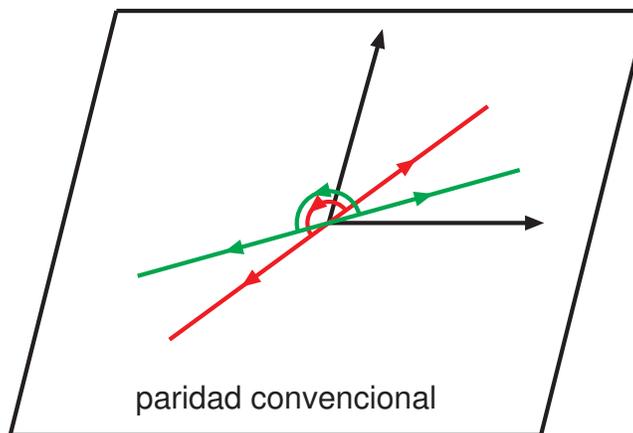
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED4} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Interacciones} \\ &= \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\not{A}\psi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Con esto concluimos nuestro estudio sobre la teoría Lagrangiana en $QED4$. Vayamos ahora al plano, donde veremos que algunas diferencias conceptuales en la transformación de paridad, lo que nos permitiera inferir una riqueza estructural que no existe en $QED4$.

4.2. (2 + 1) Dimensiones

Ahora vamos a restringir la dinámica de fermiones y fotones a un plano, es decir, ahora analizaremos QED_3 . En este caso construiremos el Lagrangiano más general posible. Debemos enfatizar que la transformación de paridad en el plano es distinta a la del espacio:

- Paridad en el espacio consiste en cambiar el signo de las tres coordenadas espaciales involucradas, es decir, que a cada transformación le asociamos un ángulo distinto.
- Paridad en el plano corresponde a invertir sólo un eje espacial y no ambos, porque si invertimos ambos, tendremos una rotación del plano por un ángulo π , de modo que ésta pierde su carácter de simetría discreta y se vuelve una simetría continua [16, 17].



Esta nueva definición de paridad es la que nosotros utilizaremos, la cual ilustramos en las figuras anteriores.

El resto de las simetrías discretas heredan su estructura del espacio al plano. La única que debemos de redefinir es la transformación de paridad para que esta tenga su mismo carácter.

4.2.1. Lagrangiano de Dirac “Heredado”

Supongamos que el Lagrangiano de Dirac en (2+1)-dimensiones es funcionalmente idéntico a (4.1),

$${}^{(3)}\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\rlap{-}\not{\partial} - m) \psi , \quad (4.5)$$

y consideremos la dimensionalidad más baja para las matrices γ^μ . En el plano, la dimensionalidad más baja es 2×2 , por lo que las matrices de Pauli pueden representar a las matrices de Dirac :

$$\gamma^0 = \sigma_3 , \quad \gamma^1 = i\sigma_1 , \quad \gamma^2 = i\sigma_2 .$$

Simetrías

Consideremos ahora las simetrías y asimetrías del Lagrangiano (4.5) [16, 17].

- *Simetría Quiral* : Es fácil ver que si heredáramos la definición de γ^5 ,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = iI ,$$

siendo proporcional a la identidad, parece que no tiene sentido hablar de una definición de la simetría quiral en esta representación.

- *Paridad* : Bajo una transformación de paridad

$$(t, x, y)^{\mathcal{P}} \rightarrow (t, -x, y) ,$$

es fácil ver que

$$(\bar{\psi}\psi)^{\mathcal{P}} \rightarrow -\bar{\psi}\psi ,$$

por lo que el término de masa, y consecuentemente el Lagrangiano, no son invariantes bajo \mathcal{P} .

Para restaurar las simetrías del Lagrangiano de Dirac en *QED3*, es necesario considerar un campo fermiónico extra, como veremos enseguida.

4.2.2. Lagrangiano de Dirac “Extendido”

Existen en el plano dos representaciones irreducibles de la dimensionalidad más baja para las matrices de Dirac. La segunda de ellas es :

$$\gamma^0 = \sigma_3 , \quad \gamma^1 = i\sigma_1 , \quad \gamma^2 = -i\sigma_2 .$$

Si llamamos ψ_A al campo fermiónico de la primera representación y ψ_B al de la segunda, tenemos que el Lagrangiano extendido es

$${}^{(3)}\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}_A (i\partial - m) \psi_A + \bar{\psi}_B (i\partial + m) \psi_B , \quad (4.6)$$

donde las matrices γ^μ pertenecen a la representación A . A continuación veremos las simetrías de este Lagrangiano.

Simetrías

Las simetrías del Lagrangiano (4.6), siguiendo las referencias [16, 17] son :

- *Simetría Quiral* : Este Lagrangiano permite definir en realidad dos tipos de transformaciones quirales:

$$\begin{aligned} \psi_A &\rightarrow \psi_A + \alpha\psi_B , & \psi_B &\rightarrow \psi_B - \alpha\psi_A & \text{y} \\ \psi_A &\rightarrow \psi_A + i\alpha\psi_B , & \psi_B &\rightarrow \psi_B + i\alpha\psi_A , \end{aligned}$$

que conducen, en el caso no masivo, a las siguientes corrientes quirales conservadas :

$$j_1^\mu = (\bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B - \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_A) \quad \text{y} \quad j_2^\mu = (\bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B + \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_A) .$$

- *Paridad* : Bajo Paridad,

$$(\psi_A)^\mathcal{P} \rightarrow -i\gamma^1 \psi_B e^{i\phi_1} \quad \text{y} \quad (\psi_B)^\mathcal{P} \rightarrow -i\gamma^1 \psi_A e^{i\phi_2} ,$$

es decir, esta transformación mezcla los espinores de ambas representaciones. Este Lagrangiano es invariante bajo \mathcal{P} .

La idea de extender el Lagrangiano de Dirac e incluir dos campos fermiónicos en la representación irreducible tiene la gran ventaja de hacerlo invariante bajo paridad y además nos permite introducir dos tipos de transformaciones quirales que en el caso no masivo son simetrías del Lagrangiano. Sin embargo, uno puede simplificar y hacer más compacta la notación considerando espinores de cuatro componentes con una representación reducible para las matrices de Dirac, como veremos enseguida.

4.2.3. Lagrangiano de Dirac “Reducible”

Podemos fusionar los espinores de dos componentes y así podremos trabajar con una representación reducible, 4×4 , de las matrices de Dirac. En este caso uno puede trabajar con las matrices ordinarias de $QED4$ y trabajar con el Lagrangiano (4.1). Sin embargo, debemos recordar que en el plano sólo 3 matrices de Dirac se necesitan para la dinámica. O sea, “sobra” γ^3 . Esto implica que se pueden definir dos tipos de transformaciones quirales

$$\psi \rightarrow e^{ie\gamma^3} \psi \quad \text{y} \quad \psi \rightarrow e^{ie\gamma^5} \psi, \quad (4.7)$$

lo que nos permite introducir dos tipos de masa para los fermiones

$$m\bar{\psi}\psi \quad \text{y} \quad m_\tau \bar{\psi} \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^5] \psi = m_\tau \bar{\psi} \tau \psi.$$

Esto quiere decir que el Lagrangiano de Dirac “reducible” más general es :

$${}^{(3)}\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m - m_\tau \tau) \psi. \quad (4.8)$$

Veamos las simetrías de este Lagrangiano, que son esencialmente las de los términos de masa [17].

Simetrías

Para estudiar las simetrías de los términos de masa en (4.8), nos referimos a ellos de la siguiente manera : al que acompaña a la bilineal $\bar{\psi}\psi$ lo llamamos “usual” y al que va con $\bar{\psi}\tau\psi$ lo llamaremos τ .

- *Simetría(s) Quiral(es)* : El término usual no es invariante bajo las transformaciones quirales (4.7), pero sí lo es el término τ .
- *Paridad* : El término usual es invariante bajo Paridad, mientras que el término τ viola esta simetría.

En el Cuadro 4.1 se despliegan algunos ejemplos de sistemas físicos y/o problemas relacionados donde los Lagrangianos de Dirac planares se emplean en su descripción.

La importancia de conocer las simetrías de los términos de masa de los Lagrangianos de Dirac heredado (4.5), extendido (4.6) y reducible (4.8), es que en algunos casos, estas masas modifican al Lagrangiano de Maxwell en el plano, pues inducen el llamado Término de Chern-Simons (TCS), y viceversa, como veremos a continuación.

Lagrangiano de Dirac	Sistema Físicos y/o Problemas Relacionados
Heredado	<ul style="list-style-type: none"> ■ Poliacetilenos unidimensionales [18] ■ Anomalía de Paridad [19] ■ EHC sin Niveles de Landau [20] ■ Ruptura Dinámica de Paridad [21]
Extendido	<ul style="list-style-type: none"> ■ Quiralidad en (2+1)-dimensiones [17] ■ Problema de Espin-Paridad en $D \neq 4$ [22]
Reducible	<ul style="list-style-type: none"> ■ Modelo de juguete para GDM en lattice y ESD [8, 9] ■ Cupratos superconductores de onda d [10] ■ Modelo de juguete de confinamiento [23] ■ Límite de alta temperatura de QED_4 [24] ■ Estados de densidad de onda d [25] ■ Grafito en capas [26] ■ Grafeno (caso no masivo) [27]

Cuadro 4.1: Ejemplos de sistemas físicos y/o problemas relacionados donde los Lagrangianos de Dirac planares se emplean en su descripción.

4.2.4. Lagrangiano de Maxwell

El Lagrangiano de Maxwell posee las mismas simetrías y estructura que su contraparte en $4D$. Sin embargo, como hemos visto, en $(2 + 1)$ -dimensiones existen términos de masa fermiónicos que violan paridad, por lo que inducen en el Lagrangiano un término adicional, llamado de Chern-Simons. Por su estructura topológica, esta modificación amerita ser tratada independientemente, así que consideraremos que el Lagrangiano de Maxwell queda intacto y consideraremos separadamente el Lagrangiano de Chern-Simons.

4.2.5. Lagrangiano de Chern-Simons

Cuando acoplamos electrones con fotones en el plano, debido a que existen términos de masa para los electrones que violan paridad, el Lagrangiano de Maxwell se modifica, generando un término de Chern-Simons (*TCS*)¹

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu F^{\nu\lambda} ,$$

del cual especificaremos algunos aspectos relevantes y simetrías. Primero veremos que bajo una transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

este Lagrangiano cambia como

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{\vartheta}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \Lambda F^{\nu\lambda} ,$$

por lo que no es el Lagrangiano, sino la acción correspondiente, la que es invariante bajo estas transformaciones. La siguiente observación es que el término ϑ tiene unidades de masa, por lo que cuando consideramos los fotones de Maxwell-Chern-Simons, i.e., fotones provenientes del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{CS}$$

éstos son masivos, de masa ϑ , de modo que el TCS actúa como un término de masa invariante de norma para el fotón. La importancia de este término en la física es basta, desde fenómenos de la Materia Condensada como la

¹El lector interesado puede encontrar excelentes recuentos de las propiedades del TCS en las Refs. [28, 29].

Superconductividad de Alta- T_c , pasando por el efecto Hall Cuántico fraccionario y los anyones, hasta gravedad cuántica y teoría de cuerdas. Hasta aquí llega el estudio del TCS en esta tesis. No nos ocuparemos más de él y sólo lo presentamos por completez de la exposición.

Con este análisis que hemos hecho de $QED4$ y $QED3$, donde hemos enfatizado las diferencias que hay entre ellos y hemos obtenido de esto una riqueza conceptual. Estamos ahora en posibilidad de hacer el análisis de los fermiones cargados planares de manera más precisa. Esto lo haremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Fermiones Relativistas en $(2 + 1)$ Dimensiones

En este capítulo, resolveremos la ecuación de Dirac en $(2 + 1)$ dimensiones en presencia de un campo magnético constante. Usaremos los diferentes Lagrangianos correspondientes a las diferentes representaciones de las matrices γ^μ que presentamos en el capítulo anterior.

5.1. Ecuación de Dirac Irreducible

En $(2 + 1)$ dimensiones, las representaciones irreducibles para las matrices γ^μ es de dimensionalidad 2×2 . Como existen dos representaciones inequivalentes de éstas [16, 17], dadas por :

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma_3 \\ \gamma^1 &= i\sigma_1 \\ \gamma^2 &= \pm i\sigma_2 ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli, estudiaremos la dinámica de los fermiones cargados en presencia de un campo magnético constante de fondo con cada una de ellas. Recordando que la ecuación de Dirac en la presencia del campo magnético es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 ,\tag{5.2}$$

con $A_\mu = (0, 0, xB, 0)$, busquemos su solución en cada representación.

Primera Representación

Tomamos como primera representación a la que llamaremos representación A a $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_1$ y $\gamma^2 = i\sigma_2$. A la solución ψ la podemos escribir en términos de sus componentes como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ \psi_2^A \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Sustituyendo (5.3) en (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} (-m + i\partial_0)\psi_1^A - (\partial_x - i\partial_y - exB)\psi_2^A &= 0 \\ (\partial_x + i\partial_y + exB)\psi_1^A + (i\partial_0 + m)\psi_2^A &= 0. \end{aligned}$$

Anticipando una solución del tipo de onda plana

$$\psi(t, x, y) \sim \psi(x)e^{-iEt+ipy}$$

y usando la variable $\bar{x} = x - p/eB$, las relaciones anteriores son ahora

$$\begin{aligned} (E - m)\psi_1^A &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \right) \psi_2^A \\ (E + m)\psi_2^A &= - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \right) \psi_1^A. \end{aligned}$$

Al desacoplar este sistema diferencial lineal para nuestras incógnitas, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - (eB\bar{x})^2 + (E^2 - m^2 + eB) \right) \psi_1^A &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - (eB\bar{x})^2 + (E^2 - m^2 - eB) \right) \psi_2^A &= 0. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el hecho de que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \mp eB\bar{x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \pm eB\bar{x} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - (eB\bar{x})^2 \pm eB \right).$$

Podemos ver que el sistema de ecuaciones se reduce a un sistema de osciladores armónicos desacoplados, por lo que es inmediato conocer sus energías. Para ψ_1^A su energía está dada por

$$E_n^{1A} = \pm\sqrt{2eBn + m^2} ,$$

mientras que para ψ_2^A su energía es

$$E_n^{2A} = \pm\sqrt{2eB(n+1) + m^2} .$$

Podemos obtener dos soluciones independientes y si requerimos la ortogonalidad de éstas. Así, las soluciones correspondientes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \psi_A^P &= N_n e^{-i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2eBn}I(n-1, p, x) \end{pmatrix} \\ \psi_A^N &= N_n e^{i(|E_n|t - py)} \begin{pmatrix} \sqrt{2eBn}I(n, -p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, -p, x) \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{5.4}$$

La primera corresponde a la solución de fermión y la segunda a la solución de anti-fermión. $I(n, p, x)$, N_n y $|E_n|$ están dados por

$$\begin{aligned} |E_n| &= \sqrt{2eBn + m^2} \\ N_n &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}} \\ I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB} \right) \right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB} \right)^2} \\ I(n = -1, p, x) &= 0 , \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde la última condición asegura la interpretación física correcta del nivel más bajo de Landau.

Niveles de Landau

Veamos ahora que sucede en el nivel más bajo de Landau. Si hacemos en nuestras soluciones $n = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_A^P &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i(mt-py) - \frac{eB}{2}\left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_A^N &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Esto quiere decir que en el nivel más bajo de Landau, sólo encontramos al fermión, el anti-fermión no vive en el nivel base. Veamos ahora que obtenemos para la segunda representación.

Segunda Representación

Para la segunda representación a la que llamaremos B , tenemos que $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_1$ y $\gamma^2 = -i\sigma_2$. Usamos nuevamente el hecho de que ψ la podemos escribir como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^B \\ \psi_2^B \end{pmatrix} .$$

Aplicando los pasos usados para la primera representación, tenemos que las ecuaciones obtenidas son

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - (eB\bar{x})^2 + (E^2 - m^2 - eB)\right) \psi_1^B &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - (eB\bar{x})^2 + (E^2 - m^2 + eB)\right) \psi_2^B &= 0 ,\end{aligned}$$

nuevamente del tipo oscilador armónico. Sus energías ahora son para ψ_1^B

$$E_n^{1B} = \pm \sqrt{2eBn + m^2} ,$$

y para ψ_2^B

$$E_n^{2B} = \pm \sqrt{2eB(n+1) + m^2} .$$

Nuevamente como en el caso anterior, tenemos dos soluciones independientes y si requerimos ortogonalidad éstas, tenemos ahora

$$\begin{aligned}\psi_B^P &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2eBn}I(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, p, x) \end{pmatrix} \\ \psi_B^N &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, -p, x) \\ \sqrt{2eBn}I(n-1, -p, x) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

La primera corresponde a la solución de fermión y la segunda a la del anti-fermión. Nuevamente

$$\begin{aligned}|E_n| &= \sqrt{2eBn + m^2} \\ N_n &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}} \\ I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \\ I(n = -1, p, x) &= 0.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Niveles de Landau

Veamos ahora que para estas soluciones en el nivel más bajo de Landau. Con $n = 0$ tenemos que las soluciones son

$$\begin{aligned}\psi_B^P &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_B^N &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} e^{i(mt-py) - \frac{eB}{2} \left(x + \frac{p}{eB}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Ahora tenemos sólo solución para anti-fermión, es decir, el fermión no vive en el nivel base. Esto es distinto a lo que obtuvimos en la primera representación donde teníamos solución de fermión. Recopilemos ahora toda la información obtenida hasta el momento e intentemos dar una interpretación física de estos resultados :

- La solución de la ecuación de Dirac en un campo magnético con la primera representación de las matrices γ^μ nos dice que en el nivel más bajo de Landau sólo tenemos a fermiones. Es en los demás niveles donde sí encontramos a fermiones y anti-fermiones.
- La solución de la ecuación de Dirac en un campo magnético con la segunda representación de las matrices γ^μ nos dice que en el nivel más bajo de Landau tenemos sólo a antifermiones. Es en los demás niveles es donde encontramos a fermiones y a anti-fermiones.

Estudiaremos ahora la ecuación de Dirac en campo magnético constante de fondo con una representación reducible de las matrices γ^μ .

5.2. Ecuación de Dirac Reducible

Se sabe que si consideramos sólo una de las representaciones irreducibles de las matrices γ^μ , el Lagrangiano no es invariante de paridad y tampoco podemos definir una transformación quiral. Por lo tanto, para incorporar éstas dos simetrías en nuestro Lagrangiano, debemos de trabajar con las dos representaciones irreducibles de γ^μ de manera simultánea, o equivalentemente a esto, con una representación reducible de γ^μ de dimensionalidad 4×4 . En esta sección seguimos este segundo camino. Vamos a utilizar la siguiente representación :

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} &= i \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Hay que notar que esta representación coincide con la representación que escogimos en el Capítulo 3 para el caso de $(3 + 1)$ dimensiones. Dada esta representación de las matrices γ^μ , podemos calcular de manera sencilla los

términos que están involucrados en la ecuación (5.2), a saber

$$\begin{aligned}
i\gamma^\mu\partial_\mu &= \begin{pmatrix} i\sigma_3\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \\ 0 & -(i\sigma_3\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\nabla) \end{pmatrix} \\
\gamma^\mu A_\mu &= \begin{pmatrix} ixB\sigma_2 & 0 \\ 0 & -ixB\sigma_2 \end{pmatrix} \\
m &= \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & mI \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación de Dirac, obtenemos

$$\begin{aligned}
(-\vec{\sigma}\cdot\nabla + iexB\sigma_2 + (i\sigma_3\partial_0 - mI))\psi_A &= 0 \\
(-\vec{\sigma}\cdot\nabla + iexB\sigma_2 + (i\sigma_3\partial_0 + mI))\psi_B &= 0.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que la primera de estas dos ecuaciones corresponde a la ecuación de Dirac para la representación irreducible A y la segunda corresponde a la representación irreducible B . Esto nos permite escribir las cuatro soluciones independientes como

$$\begin{aligned}
\psi_P^A &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2eBn}I(n-1, p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_N^A &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} \sqrt{2eBn}I(n, -p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, -p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\psi_P^B &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2eBn}I(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, p, x) \end{pmatrix} \\
\psi_N^B &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (|E_n| + m)I(n, -p, x) \\ \sqrt{2eBn}I(n-1, -p, x) \end{pmatrix}, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

donde, exactamente como antes

$$\begin{aligned}
|E_n| &= \sqrt{2eBn + m^2} \\
N_n &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}} \\
I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \\
I(n = -1, p, x) &= 0. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Niveles de Landau

Ya que tenemos nuestras soluciones, analicemos sus expresiones en los diferentes niveles de Landau. Para $n \neq 0$, los niveles de energía son doblemente degenerados, mientras que para $n = 0$ los dos estados son no degenerados y son de la forma

$$\psi_A^P = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} e^{i(mt-py) - \frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_B^N = \left(\frac{eB}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i(mt-py) - \frac{eB}{2} \left(x + \frac{p}{eB}\right)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Podemos ver entonces que en el nivel más bajo de Landau tenemos solución de fermión y de anti-fermión. Esto es lo que físicamente esperabamos encontrar. No existe razón alguna para suponer que los fermiones o anti-fermiones tienen un papel preponderante respecto a sus contrapartes si una o la otra representación irreducible de las matrices γ^μ se elige para describir su movimiento. En este sentido, es mejor trabajar siempre en una representación que contenga todo el espectro de soluciones a la ecuación de Dirac, y no sólo un sector.

Para finalizar nuestro capítulo, en la siguiente sección aplicaremos este mismo método para resolver ahora el caso donde aparece el término de masa m_τ que viola paridad, a esta ecuación la llamaremos ecuación τ - Dirac

5.3. Ecuación τ - Dirac

La descripción de la dinámica de los fermiones de Dirac en la representación 4×4 necesita sólo de 3 matrices γ^μ , que sin pérdida de generalidad podemos elegir como $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2\}$. Existen entonces dos matrices γ que conmutan con éstas, γ^3 y γ^5 , que podemos representar de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Esto nos permite definir un término de masa adicional en el Lagrangiano, cuya expresión presentamos en (4.8) y aquí sólo recordamos :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} (\not{\partial} - ieA) \psi - m\bar{\psi}\psi - m_\tau \bar{\psi} \tau \psi ,$$

donde

$$\tau = \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^5] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} .$$

Este término adicional en el Lagrangiano viola la paridad. La ecuación de Dirac correspondiente se puede escribir como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m - m_\tau \tau)\psi = 0 .$$

Vamos a resolver la ecuación de Dirac con el término de masa que viola paridad (ecuación τ - Dirac) primero sin la presencia del campo magnético, después la resolveremos en la presencia del campo magnético.

5.3.1. Sin Campo Magnético

La ecuación de Dirac a resolver es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - m_\tau \tau)\psi = 0 .$$

Sabemos que, en el espacio de momentos, ésta se escribe como

$$(\gamma^\mu p_\mu - m - m_\tau \tau)u(p) = 0 ,$$

donde ahora el espinor $u(p)$ lo podemos escribir como dos espinores de dimensionalidad dos

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_A(p) \\ u_B(p) \end{pmatrix} .$$

Dada la representación que estamos usando, podemos ver que

$$\gamma^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} \sigma_3 E - i\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & -\sigma_3 E + i\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} ,$$

por lo que obtenemos las siguientes relaciones

$$(\sigma_3 E - i\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - m_+) u_A(p) = 0 \quad (5.13)$$

$$(-\sigma_3 E + i\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - m_-) u_B(p) = 0 , \quad (5.14)$$

donde $m_\pm = m \pm m_\tau$. Hay que notar que u_A y u_B se han desacoplado. Cada uno satisface su propia ecuación de Dirac, si consideramos la representación

irreducible ¹. Por lo tanto, podemos manejar estas dos ecuaciones en una manera completamente independiente. Si escribimos ahora a u_A y u_B en términos de sus componentes, obtenemos

$$\begin{aligned}(E - m_+)u_A^1 &= (ip_x + p_y)u_A^2 \\ (E + m_+)u_A^2 &= (-ip_x + p_y)u_A^1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(E + m_-)u_B^1 &= (ip_x + p_y)u_B^2 \\ (E - m_-)u_B^2 &= (-ip_x + p_y)u_B^1.\end{aligned}$$

De este conjunto de ecuaciones obtenemos las siguientes cuatro soluciones independientes para $u(p)$. Las llamamos $u_1^A(p)$, $v_1^A(p)$, $u_2^B(p)$ y $v_2^B(p)$:

$$\begin{aligned}u_1^A(p) &= N^A \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(p_y - ip_x)}{(E + m_+)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_1^A(p) &= N^A \begin{pmatrix} \frac{(p_y + ip_x)}{(E + m_+)} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.15}$$

¹En la representación 2-dimensional, estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}(\not{p} - m_+)u_A(p) &= 0 \\ (\not{p} + m_-)u_B(p) &= 0.\end{aligned}$$

$$u_2^B(p) = N^B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{(p_y + ip_x)}{(E + m_-)} \end{pmatrix}$$

$$v_2^B(p) = N^B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-p_y + ip_x)}{(E + m_-)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$N^A = \sqrt{E + m_+} \quad \text{y} \quad N^B = \sqrt{E + m_-}.$$

Podemos ver claramente que en las soluciones los términos de masa cambian, debido al término de masa m_τ que viola paridad. Resolvamos ahora la ecuación τ - Dirac en presencia de este campo magnético.

5.3.2. Con Campo Magnético

La ecuación de Dirac a resolver es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m - m_\tau \tau)\psi = 0.$$

La descomposición de esta ecuación en la forma dos dimensional nos da las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (-\vec{\sigma} \cdot \nabla + iexB\sigma_2 + (i\sigma_3\partial_0 - m_+I))\psi_A &= 0 \\ (-\vec{\sigma} \cdot \nabla + iexB\sigma_2 + (i\sigma_3\partial_0 + m_-I))\psi_B &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si ahora nuevamente escribimos a ψ_A y ψ_B en términos de sus componentes,

tenemos

$$(-m_+ + i\partial_0)\psi_1^A - (\partial_x - i\partial_y - exB)\psi_2^A = 0$$

$$(\partial_x + i\partial_y + exB)\psi_1^A + (i\partial_0 + m_+)\psi_2^A = 0$$

$$(i\partial_0 + m_-)\psi_1^B - (\partial_x - i\partial_y - exB)\psi_2^B = 0$$

$$(\partial_x + i\partial_y + exB)\psi_1^B + (i\partial_0 - m_-)\psi_2^B = 0.$$

Para ψ_A , si tomamos $m_\tau = 0$ tenemos las mismas relaciones que en la sección anterior, por lo que podemos deducir las siguientes soluciones independientes

$$\psi_P^A = N_n^A e^{-i(|E_n^A|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n^A| + m_+)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2eBn}I(n-1, p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_N^A = N_n^A e^{i(|E_n^A|t-py)} \begin{pmatrix} \sqrt{2eBn}I(n, -p, x) \\ (|E_n^A| + m_+)I(n-1, -p, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
|E_n^A| &= \sqrt{2eBn + m_+^2} \\
N_n^A &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n^A|(|E_n^A| + m_+)}} \\
I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \\
I(n = -1, p, x) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

De manera análoga para ψ_B , tenemos que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned}
\psi_P^B &= N_n^B e^{-i(|E_n^B|t - py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2eBn} I(n, p, x) \\ (|E_n^B| + m_-) I(n - 1, p, x) \end{pmatrix} \\
\psi_N^B &= N_n^B e^{i(|E_n^B|t - py)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (|E_n^B| + m_-) I(n, -p, x) \\ \sqrt{2eBn} I(n - 1, -p, x) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

donde hemos buscado la normalización de ψ_B de modo que cuando escojamos $m_\tau = 0$ recuperemos los resultados obtenidos en secciones anteriores. Así, para ψ_B nuestras soluciones involucran las siguientes cantidades

$$\begin{aligned}
|E_n^B| &= \sqrt{2eBn + m_-^2} \\
N_n^B &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n^B|(|E_n^B| + m_-)}} \\
I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \\
I(n = -1, p, x) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Podemos ver de forma inmediata que si $m_\tau = 0$ obtenemos los resultados de la sección anterior.

En resumen, agregando un término de masa en el Lagrangiano que rompe paridad, la masa efectiva para las soluciones que viven en diferentes representaciones no es igual.

- Un fermión con espín que lo haga girar por ejemplo en sentido contrario de las manecillas del reloj tendrá una masa m_+ .
- Un fermión con espín que lo haga girar por ejemplo en sentido de las manecillas del reloj tendrá una masa m_- .
- La transformación de paridad lleva a un fermión que vive en una representación a la otra. Como estos fermiones ya no tienen masa igual, no se observa la invarianza de paridad.

Con esto hemos concluido nuestro estudio sobre los fermiones relativistas en el plano. Las soluciones a la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético constante de fondo con las diferentes representaciones para las matrices γ^μ y los distintos términos de masa, nos permiten calcular observables físicas donde los efectos del campo de fondo sean conmensurables. En particular, estamos interesados en calcular los condensados quirales fermiónicos obtenidos de estas soluciones. Este es el tema del siguiente Capítulo.

Capítulo 6

Condensado Quiral Fermiónico

6.1. Generalidades

Recordando lo que mencionamos en la introducción, los condensados o parámetros de orden juegan un papel muy importante en la física de partículas elementales y otras ramas de la física, pues están asociados a rupturas de simetría de los Lagrangianos correspondientes. Bien el condensado del Higgs, que acomoda las masas de las partículas del modelo estándar en una forma invariante de norma, o el condensado del quark quiral, cuya aparición explica el origen dinámico del 98 % de la masa de la materia visible en nuestro universo, ambos relacionados con la ruptura, espontánea y dinámica, respectivamente, de la simetría quiral del Lagrangiano Electrodébil o de Interacciones de Color. En este Capítulo estamos interesados en los efectos de un campo magnético constante de fondo en la formación de condensados quirales fermiónicos y su posible relación con la ruptura de la simetría quiral de QED4 y QED3. Para ello, usaremos las soluciones que obtuvimos en Capítulos previos.

6.2. $(3 + 1)$ Dimensiones

Para hacer el cálculo del condensado quiral en el caso $(3 + 1)$ dimensional, primero debemos realizar la segunda cuantización al Lagrangiano de QED

correspondiente. Las soluciones obtenidas anteriormente son:

$$\begin{aligned}
\psi_1^P &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ -ip_z I(n-1, p, x) \\ -\sqrt{2ne\overline{B}} I(n, p, x) \\ (|E_n| + m) I(n-1, p, x) \end{pmatrix}, \\
\psi_2^P &= N_n e^{-i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m) I(n, p, x) \\ -\sqrt{2ne\overline{B}} I(n-1, p, x) \\ -ip_z I(n, p, x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\psi_1^N &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} 0 \\ ip_z I(n-1, p, x) \\ -\sqrt{2ne\overline{B}} I(n, p, x) \\ (|E_n| + m) I(n-1, p, x) \end{pmatrix}, \\
\psi_2^N &= N_n e^{i(|E_n|t-py)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m) I(n, p, x) \\ -\sqrt{2ne\overline{B}} I(n-1, p, x) \\ ip_z I(n, p, x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1}
\end{aligned}$$

El prefijo N y P nos indican las soluciones de energía negativa y positiva respectivamente, además también recordemos que

$$\begin{aligned}
|E_n| &= \sqrt{2eBn + m^2 + p_z^2} \\
N_n &= \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}} \\
I(n, p, x) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p}{eB}\right)^2} \\
I(n = -1, p, x) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Expandimos ahora los campos cuánticos de Dirac en presencia del campo de fondo en sus modos de Fourier sobre la base completa que nos proporcionan el conjunto de soluciones clásicas $\{\psi_i^{P,N}\}$ de la forma

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n \sum_i' \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp_z}{\sqrt{2\pi}} \left(a_i(n, p, p_z) \psi_i^P + b_i^\dagger(n, p, p_z) \psi_i^N \right), \tag{6.3}$$

donde $i = 1, 2$, la suma sobre n se extiende sobre todos los niveles de Landau y la notación primada enfatiza el hecho de que esta segunda suma es sólo para los términos $n \neq 0$. Los parámetros continuos que consideramos son los momentos p y p_z . A los operadores a y a^\dagger los llamamos operadores de aniquilación y creación respectivamente para las partículas, b y b^\dagger tienen el mismo significado para anti-partículas. Estos operadores satisfacen las relaciones canónicas de anticonmutación

$$\begin{aligned}
\{a_i(n, p, p_z), a_j^\dagger(n', p', p'_z)\} &= \{b_i(n, p, p_z), b_j^\dagger(n', p', p'_z)\} \\
&= \delta_{ij} \delta_{nn'} \delta(p - p') \delta(p_z - p'_z),
\end{aligned}$$

y el resto de los antuconmutadores nulos.

Dada nuestra expansión (6.3), podemos ver que $\bar{\psi}$ es

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_{n'} \sum_j' \int \frac{dp'}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp'_z}{\sqrt{2\pi}} \left(a_j^\dagger(n', p', p'_z) \bar{\psi}_j^P + b_j(n', p', p'_z) \bar{\psi}_j^N \right). \tag{6.4}$$

Usando (6.3) y (6.4), tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n,n'} \sum'_{i,j} \int dp \int dp' \int dp_z \int dp'_z \times \\
&\langle 0 | \left(a_j^\dagger(n', p', p'_z) \bar{\psi}_j^P + b_j(n', p', p'_z) \bar{\psi}_j^N \right) \\
&\times \left(a_i(n, p, p_z) \psi_i^P + b_i^\dagger(n, p, p_z) \psi_i^N \right) | 0 \rangle, \tag{6.5}
\end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n,n'} \sum'_{i,j} \int dp \int dp' \int dp_z \int dp'_z \left\{ \right. \\
&\psi_i^P \psi_j^P \langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) a_j(n, p, p_z) | 0 \rangle \\
&+ \psi_i^P \psi_j^N \langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) b_j^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle \\
&+ \psi_i^N \psi_j^P \langle 0 | b_i(n', p', p'_z) a_j(n, p, p_z) | 0 \rangle \\
&\left. + \psi_i^N \psi_j^N \langle 0 | b_i^\dagger(n', p', p'_z) b_j(n, p, p_z) | 0 \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) a_j(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0 \tag{6.6} \\
\langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) b_j^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0 \\
\langle 0 | b_i(n', p', p'_z) a_j(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

El único término que es diferente de cero es $\langle 0 | b_i(n', p', p'_z) b_j^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle$, el cual arroja

$$\langle 0 | b_i(n', p', p'_z) b_j^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle = \delta_{ij} \delta_{nn'} \delta(p - p') \delta(p_z - p'_z),$$

entonces, tenemos que nuestro condensado quiral es

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_n \int dp \int dp_z (\bar{\psi}_1^N \psi_1^N + \bar{\psi}_2^N \psi_2^N). \tag{6.7}$$

Sustituyendo las soluciones clásicas, tenemos que el condensado es

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_n \int dp \int dp_z \left((|E_n| + m^2)^2 - p_z^2 - 2neB \right) \\
&[I^2(n-1, p, x) + I^2(n, p, x)],
\end{aligned}$$

de modo que si tomamos de (6.2) la relación de la energía relativista $|E_n|$ y la constante de normalización N_n

$$|E_n|^2 = m^2 + p_z^2 + 2neB, \quad N_n^2 = \frac{1}{2|E_n|(|E_n| + m)},$$

el condensado es :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp [I^2(n-1, p, x) + I^2(n, p, x)] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{1}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}}. \end{aligned}$$

La integral asociada a p es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, p, x) dp &= 0 \quad \text{si} \quad n = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, p, x) dp &= eB \quad \text{si} \quad n \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n, p, x) dp &= eB \quad \forall \quad n, \end{aligned} \quad (6.8)$$

mientras que asociada a p_z la podemos escribir como :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}} = 2 \int_0^{\Lambda} \frac{dp_z}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}},$$

donde Λ es un corte ultravioleta, que al final tomamos $\Lambda \rightarrow \infty$. Esta integral se puede realizar analíticamente, y su resultado es

$$\ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{m^2 + \Lambda^2 + 2neB}}{\sqrt{m^2 + 2neB}} \right),$$

que podemos escribir como

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} \right), \quad (6.9)$$

donde

$$x = \frac{m^2 + 2neB}{\Lambda^2} .$$

En (6.9) podemos ver que cuando

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} \right) \rightarrow 0 ,$$

por lo que tenemos que el término que domina en el condensado quiral corresponde al nivel más bajo de Landau, $n = 0$. En este caso, tomamos $x' = m^2/\Lambda^2$, que en el límite $x' \rightarrow 0$ (lo cual ocurre porque $\Lambda \rightarrow \infty$) implica

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x'}}{\sqrt{x'}} \right) \approx \frac{x'}{4} + \ln(2) - \frac{1}{2} \ln x' .$$

Podemos despreciar los dos primeros términos de esta aproximación, por lo que tenemos, al orden dominante,

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x'}}{\sqrt{x'}} \right) \approx -\frac{1}{2} \ln x' .$$

Así que el condensado quiral fermiónico es

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{meB}{4\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) . \quad (6.10)$$

Esta es la expresión que estábamos persiguiendo. Observemos que en el límite no masivo,

$$m \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rightarrow 0 ,$$

por lo que podemos concluir que no hay condensado quiral en el límite $m \rightarrow 0$ y por lo tanto, la presencia del campo de fondo no rompe la simetría quiral de QED4 [4].

Un posible escenario físico donde este condensado puede jugar un papel importante es durante la transición de fase electrodébil. El campo magnético al inicio de la transición de fase electrodébil ya ha sido calculado [30] y su valor encontrado es

$$B \approx 10^{23} \text{ Gauss} .$$

Consideremos ahora el valor del corte ultravioleta $\Lambda = 10^{10} \text{ GeV}$ y sabemos que $m = 0.51 * 10^{-3} \text{ GeV}$, si sustituimos estos valores en la expresión para el condensado, obtenemos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -5.67 \text{ GeV}^3 , \quad (6.11)$$

que en magnitud es semejante al condensado de Higgs en esta época de evolución del Universo. Esto es un aliciente para aplicar los razonamientos presentados en esta sección en el estudio del papel de los campos magnéticos en la transición de fase electrodébil [5].

A continuación repetiremos el mismo ejercicio en QED3 con las diferentes representaciones para las matrices de Dirac.

6.3. (2+1) Dimensiones con la Representación Irreducible

Para realizar la segunda cuantización de QED3 con esta representación, expandimos los campos fermiónicos de la forma

$$\begin{aligned}\psi_A(\vec{x}, t) &= \sum_n \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \left(a_A(n, p) \psi_A^P + b_A^\dagger(n, p) \psi_A^N \right) \\ \psi_B(\vec{x}, t) &= \sum_n \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \left(a_B(n, p) \psi_B^P + b_B^\dagger(n, p) \psi_B^N \right),\end{aligned}$$

donde a y a^\dagger son operadores de aniquilación y creación respectivamente para las partículas, mientras que b y b^\dagger tienen el mismo significado para anti-partículas. Esos operadores satisfacen las relaciones de anticonmutación canónicas

$$\{a_i(n, p), a_j^\dagger(n', p')\} = \{b_i(n, p), b_j^\dagger(n', p')\} = \delta_{ij} \delta_{nn'} \delta(p - p'),$$

con el resto de los conmutadores nulos. Aquí $i, j = A, B$ y la suma sobre el índice n corresponde a los niveles de Landau, mientras que el parámetro continuo corresponde al momentum p . Para conocer el condensado fermiónico asociado a ψ_A y ψ_B en la presencia de este campo magnético externo y constante debemos calcular $\langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle$ y $\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle$. Vamos a calcular primero el condensado para la representación A . Dada nuestra expansión para ψ_A , podemos ver que $\bar{\psi}_A$ es

$$\bar{\psi}_A(\vec{x}, t) = \sum_{n'} \int \frac{dp'}{\sqrt{2\pi}} \left(a_A^\dagger(n', p') \bar{\psi}_A^P + b_A(n', p') \bar{\psi}_A^N \right).$$

Sustituyendo estas expansiones, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n',n} \int dp dp' \langle 0 | \left(a_A^\dagger(n', p') \bar{\psi}_A^P + b_A(n', p') \bar{\psi}_A^N \right) \\ &\times \left(a_A(n, p) \psi_A^P + b_A^\dagger(n, p) \psi_A^N \right) | 0 \rangle , \end{aligned}$$

que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n',n} \int dp dp' \left\{ \bar{\psi}_A^P \psi_A^P \langle 0 | a_A^\dagger(n', p') a_A(n, p) | 0 \rangle \right. \\ &+ \bar{\psi}_A^P \psi_A^N \langle 0 | a_A^\dagger(n', p') b_A^\dagger(n, p) | 0 \rangle \\ &+ \bar{\psi}_A^N \psi_A^P \langle 0 | b_A(n', p') a_A(n, p) | 0 \rangle \\ &\left. + \bar{\psi}_A^N \psi_A^N \langle 0 | b_A(n', p') b_A^\dagger(n, p) | 0 \rangle \right\} . \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_A^\dagger(n', p') a_A(n, p) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | a_A^\dagger(n', p') b_A^\dagger(n, p) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | b_A(n', p') a_A(n, p) | 0 \rangle &= 0 . \end{aligned} \tag{6.12}$$

El único término que es diferente de cero es $\langle 0 | b_A(n', p') b_A^\dagger(n, p) | 0 \rangle$, el cual arroja

$$\langle 0 | b_A(n', p') b_A^\dagger(n, p) | 0 \rangle = \delta_{nn'} \delta(p - p') ,$$

de modo que

$$\langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int dp \bar{\psi}_A^N \psi_A^N .$$

Análogamente tenemos que para la representación B es

$$\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int dp \bar{\psi}_B^N \psi_B^N .$$

Ahora usamos las propiedades de las funciones $I(n, p, x)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, -p, x) dp &= 0 & \text{si } n &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, -p, x) dp &= eB & \text{si } n &\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n, -p, x) dp &= eB & \forall & n, \end{aligned}$$

de las cuales se derivan los siguientes resultados :

- Para la representación A vemos que

$$\langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle = -\frac{meB}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|E_n|}.$$

Esta suma es finita. Por lo tanto, vemos que si

$$m \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\psi}_A \psi_A \rangle \rightarrow 0.$$

- Para la segunda representación B tenemos que

$$\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle = \frac{eB}{2\pi} \frac{m}{|m|} + \frac{meB}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|E_n|}.$$

Vemos que

$$m \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle = \frac{eB}{2\pi}.$$

- No es satisfactorio que en una representación exista un condensado no cero en el límite $m \rightarrow 0$ y en la otra sea nulo. Esto nos habla de un resultado espúrio en la representación irreducible de las matrices γ^μ , por lo que concluimos que este condensado no tiene significado físico.

En la siguiente sección estaremos interesados en encontrar el condensado con la solución obtenida en la representación reducible de las matrices γ^μ . Ahí veremos que ahora el condensado sí adquiere una realidad e interpretación física satisfactoria.

6.4. (2+1) Dimensiones con la Representación Reducible

Empezamos nuevamente con la expansión en modos de Fourier de los campos fermiónicos en el fondo de un campo magnético constante sobre la base completa de funciones, $\{\psi_i^{P,N}\}$, que nos proveen las soluciones clásicas dadas en (5.10). Esta expansión es

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n \sum_i' \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \left(a_i(n, p) \psi_i^P + b_i^\dagger(n, p) \psi_i^N \right), \quad (6.13)$$

donde el índice $i = A, B$, n especifica el nivel de Landau respectivo, usamos la notación primada para enfatizar el hecho de que esta segunda suma es sólo para los términos $n \neq 0$ y el parámetro continuo lo proporciona el momentum p' . De esta expansión, podemos ver que $\bar{\psi}$ es

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_{n'} \sum_j' \int \frac{dp'}{\sqrt{2\pi}} \left(a_j^\dagger(n', p') \bar{\psi}_j^P + b_j(n', p') \bar{\psi}_j^N \right). \quad (6.14)$$

Usando (6.13) y (6.14), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n, n'} \sum_{i, j}' \int dp dp' \langle 0 | \left(a_j^\dagger(n', p') \bar{\psi}_j^P + b_j(n', p') \bar{\psi}_j^N \right) \\ &\times \left(a_i(n, p) \psi_i^P + b_i^\dagger(n, p) \psi_i^N \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Siguiendo los pasos detallados en la sección anterior, tenemos que

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int dp \left(\bar{\psi}_A^N \psi_A^N + \bar{\psi}_B^N \psi_B^N \right). \quad (6.16)$$

Recordando que $\bar{\psi}_i = \psi_i^\dagger \gamma^0$ y sustituyendo las soluciones dadas en (5.10) en esta expresión, obtenemos

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n N_n^2 (2eBn - (|E_n| + m)^2) \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[I^2(n-1, -p, x) - I^2(n, -p, x) \right].$$

Realizando las integraciones restantes, el condensado quirral fermiónico es

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{m}{|m|} \frac{eB}{2\pi} - \frac{meB}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|E_n|}. \quad (6.17)$$

Si suponemos que la masa es una cantidad positiva definida, entonces, para el caso no masivo

$$m \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{eB}{2\pi},$$

lo que nos sugiere que sólo los fermiones en el nivel más bajo de Landau forman condensados en presencia de un campo magnético de fondo aún si éstos no tienen masa. Notemos que la aparición del condensado en este caso no rompe la simetría quiral del $QED3$.

En la siguiente sección vamos a calcular el condensado con las soluciones que obtuvimos para el término de masa m_τ .

6.5. $(2 + 1)$ Dimensiones con la Ecuación de τ -Dirac

Dado que en este caso existen dos campos escalares compuestos $\bar{\psi}\psi$ y $\bar{\psi}\tau\psi$, podemos evaluar dos tipos de condensados $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ y $\langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle$ [31]. Estos condensados se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_n \sum_i' \int dp \bar{\psi}_i^N \psi_i^N \\ \langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_n \sum_i' \int dp \bar{\psi}_i^N \tau \psi_i^N. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vemos ahora que los términos a calcular para el condensado $\langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle$ tienen la siguiente forma

$$\bar{\psi}_i \tau \psi_i = \psi_i^\dagger \gamma^0 \tau \psi_i.$$

Recordando que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\gamma^0 \tau = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Esto resultará en una diferencia en signos para los dos tipos de condensados :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{eB}{2\pi} \frac{m_-}{|m_-|} - \frac{eB}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_+}{|E_n^A|} + \frac{m_-}{|E_n^B|} \right) \quad (6.19)$$

$$\langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle = \frac{eB}{2\pi} \frac{m_-}{|m_-|} - \frac{eB}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_+}{|E_n^A|} - \frac{m_-}{|E_n^B|} \right) . \quad (6.20)$$

Notamos que cuando $m_\tau = 0$ tenemos $m_+ = m_-$ y $|E_n^A| = |E_n^B|$, por lo tanto la expresión para $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ se reduce a la ecuación (6.17). La naturaleza puede escoger alguna combinación de $\langle (\bar{\psi}\psi)_+ \rangle$ y $\langle (\bar{\psi}\psi)_- \rangle$, que nosotros construimos como

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\psi}\psi)_+ \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle \\ \langle (\bar{\psi}\psi)_- \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\tau\psi \rangle . \end{aligned}$$

Usando las expresiones anteriores, conseguimos

$$\langle (\bar{\psi}\psi)_+ \rangle = -\frac{eB}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_+}{|E_n^A|} \quad (6.21)$$

$$\langle (\bar{\psi}\psi)_- \rangle = -\frac{eB}{\pi} \frac{m_-}{|m_-|} - \frac{eB}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_-}{|E_n^B|} . \quad (6.22)$$

Entonces, uno de los condensados, $\langle (\bar{\psi}\psi)_+ \rangle$, se hace cero cuando las masas m y m_τ se hacen cero, mientras el otro sigue existiendo, con un valor

$$\langle (\bar{\psi}\psi)_- \rangle = -\frac{eB}{\pi} .$$

Al igual que antes, el hecho de la no nulidad de el condensado no significa que la simetría quiral de QED3 se haya roto, simplemente señala que el campo magnético externo facilita la formación de condensados de fermiones.

De esta manera concluimos nuestro estudio de los condensados fermiónicos en QED3 que surgen en cada una de las posibles representaciones de las matrices γ^μ . Los resultados (6.19), (6.20), (6.21), (6.22) son originales de esta tesis, al igual que el desarrollo para obtener (6.10).

A continuación, en el Capítulo final, colectamos los resultados que obtuvimos a lo largo de este trabajo y presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 7

Conclusiones

El principal interés de nuestro estudio en esta tesis ha sido resolver la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético constante de fondo para sistemas en $(3+1)$ y $(2+1)$ dimensiones. Entonces cuantizamos los campos fermiónicos y calculamos en condensado quiral. Este condensado está íntimamente relacionado con la masa de los fermiones, así que hemos analizado esta relación en cada caso.

$(3+1)$ Dimensiones

En $(3+1)$ dimensiones, utilizamos el Lagrangiano de Dirac usual. El cálculo del condensado fermión–anti-fermión en este caso fue previamente realizado por Miransky *et. al.* [4]. Sin embargo, ellos emplearon el método del tiempo propio de Schwinger. Como hemos señalado anteriormente, nosotros resolvimos la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético externo y usamos los espinores resultantes de la descripción en la segunda cuantización de los campos fermiónicos. Esto nos permite realizar el cálculo del condensado de primeros principios sin fijar la intensidad del campo magnético. Como resultado, fuimos capaces de calcular el condensado como una suma sobre todos los niveles de Landau. En la aproximación del nivel de Landau más bajo, recuperamos los resultados de Miransky *et. al.*

Nuestros resultados pueden tener relevancia en el problema de la transición de fase electrodébil. La presencia de un condensado adicional al del Higgs puede ser relevante para modificar la intensidad de la transición de fase de primer orden [5]. Sin embargo, debemos notar que el condensado que nosotros calculamos no tiene un origen dinámico. Se anula si la masa desnuda tiende a cero. Por lo tanto, no jugará ningún papel en las regiones de falso

vacío. Pese a esto, un condensado de origen dinámico no requiere una masa desnuda no nula, así que este tipo de condensado es mucho más interesante de calcular. Incluso más, se deben tomar en cuenta efectos de la temperatura para un cálculo realista.

(2+1) Dimensiones

El Lagrangiano fermiónico invariante bajo paridad en (2+1) dimensiones ha sido estudiado por Miransky *et. al.* [4] y A. Das [6] empleando diferentes técnicas. A lo largo de esta tesis hemos seguido la técnica de Das. Como primer paso de nuestro cálculo, recuperamos los resultados de Miransky y Das. Luego centramos nuestra atención en los Lagrangianos que violan paridad. Ahí podemos trabajar con representaciones 2×2 y 4×4 para las matrices γ^μ . Al trabajar con la representación de más baja dimensionalidad, nos encontramos con resultados ambiguos que dependen de la representación elegida para las matrices, de modo que permanecemos dubitativos de asociar cualquier realidad física con esos resultados.

El tratamiento de los fermiones planares con matrices γ^μ de dimensionalidad 4×4 permite la presencia de términos de masa que violan o respetan paridad. Esto además abre la posibilidad de obtener dos condensados linealmente independientes. Uno de ellos, $\langle(\bar{\psi}\psi)_+\rangle$, no recibe contribución del nivel más bajo de Landau. De igual manera que en el caso (3+1) dimensional invariante bajo paridad, y *contrario* al caso (2+1) dimensional correspondiente, este condensado se anula cuando la masa desnuda tiende a cero. El otro condensado, $\langle(\bar{\psi}\psi)_-\rangle$ es una suma sobre todos los niveles de Landau, incluido el más bajo. Éste es no nulo incluso si la masa desnuda lo es. Sin embargo, se anula si las masas que respetan y violan paridad son iguales.

Desde hace tiempo ha sido establecido que los modelos en (2+1) dimensiones que violan paridad pueden posiblemente jugar un papel para explicar la superconductividad de alta temperatura [10, 12]. Nuestro trabajo en el caso planar puede ser relevante para estos estudios.

Bibliografía

- [1] R. Williams, C. S. Fischer y M. R. Pennington, Phys. Lett. **B645** 167 (2007).
- [2] V. P. Gusynin, V. A. Miransky e I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73** 3499 (1994); Phys. Lett. **B349** 477 (1995); Phys. Rev. **D52** 4747 (1995); Nucl. Phys. **B462** 249 (1996); Nucl. Phys. **B563** 361 (1999).
- [3] C. N. Leung, Y. J. Ng y A. W. Ackley, Phys. Rev. **D54** 4181 (1996); D.-S. Lee, C. N. Leung y Y. J. Ng, Phys. Rev. **D55** 6504 (1997).
- [4] V. P. Gusynin, V. A. Miransky y I. A. Shovkovy, Phys. Rev. **D52** 4718 (1995).
- [5] A. Ayala, G. Piccinelli y A. Sánchez, Phys. Rev. **D71** 023004, (2005); Phys. Rev. **D75** 043004 (2007).
- [6] A. Das, “*Finite Temperature Field Theory*” World Scientific Publishing Company, (1997).
- [7] A. Ayala, A. Bashir, A. Raya y E. Rojas, Phys. Rev. **D73** 105009 (2006).
- [8] T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali y L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. **D33**, 3704 (1986); M. R. Pennington y D. Walsh, Phys. Lett. **B253**, 246 (1991); C. J. Burden y C. D. Roberts, Phys. Rev. **D44**, 540 (1991); D. C. Curtis, M. R. Pennington y D. Walsh, Phys. Lett. **B295**, 313 (1992); A. Bashir, A. Huet y A. Raya. Phys. Rev. **D66**, 025029 (2002); V. P. Gusynin y M. Reenders, Phys. Rev. **D68**, 025017 (2003); C. S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm y P. Maris, Phys. Rev. **D70**, 073007 (2004); Y. Hoshino. JHEP **0409**, 048 (2004); A. Bashir y A. Raya, Nucl.

- Phys. **B709**, 307 (2005); A. Bashir y A. Raya, “*Truncated Schwinger-Dyson equations and gauge covariance in QED3*” Aceptado en Few-Body systems; A. Bashir y A. Raya, en *Trends in Boson Research*, edited by A. V. Ling, 1st. edition (Nova Science Publishers, Inc. N.Y., 2006), ISBN 1-59454-521-9, hep-ph/0411310.
- [9] K. Farakos, G. Koutsoumbas y A. Momen, Phys. Rev. D **61** 045005 (2000); J. Alexandre, K. Farakos, S. J. Hands, G. Koutsoumbas y S. E. Marrison, Phys. Rev. D **64**, 034502 (2001); S. J. Hands, J. B. Kogut y C. G. Strouthos, Nucl. Phys. **B645**, 321 (2002); C. G. Strouthos, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 974 (2003); S. J. Hands, J. B. Kogut, L. Scorzato y C. G. Strouthos, Phys. Rev. **B70**, 104501 (2004);
- [10] M. Franz y Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. **87** 257003 (2001); M. Franz, Z. Tesanovic y O. Vafek, Phys. Rev. **B66** 054535 (2002); O. Vafek, Z. Tesanovic y M. Franz, Phys. Rev. Lett. **89** 157003 (2002); I.F. Herbut, Phys. Rev. **B66** 094504 (2002); I.F. Herbut, Phys. Rev. Lett. **88** 047006 (2002).
- [11] A. Bashir y M. R. Pennington, “*Dynamical Mass Generation*” (in progress) to be published by the World Scientific Publishing Company.
- [12] N. Dorey y N. E. Mavromatos, Nucl. Phys. **B386** 614 (1992); G. Triantaphyllou, Phys. Rev. **D58** 065006 (1998).
- [13] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Non Relativistic Theory (Course on Theoretical Physics Vol. 3)*. Pergamon Press, (1997).
- [14] A. A. Sokolov e I. M. Ternov, “*Radiation from Relativistic Electrons*” American Institute of Physics, (1986).
- [15] K. Bhattacharya, “*Solution of the Dirac equation in presence of an uniform magnetic field*”, arXiv:0705.4275 [hep-th].
- [16] K. Shimizu, Prog. Theor. Phys. **74** 610 (1985).
- [17] A. Bashir y Ma. de J. Anguiano Galicia, Few Body **37**, 71 (2005).
- [18] R. Jackiw y C. Rebbi, Phys. Rev. **D13**, 3398 (1976); W. P. Su, J. R. Scieffer y A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698 (1979); R. Jackiw y J. R. Scieffer, Nucl. Phys. **B190**, 253(1981).

- [19] R. Jackiw, Phys. Rev. **D29**, 2375 (1984).
- [20] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988); A. Raya y E. Reyes, “*Massive Dirac Fermions and the zero field quantum Hall effect*”, enviado a Phys. Rev. B.
- [21] Y. Hoshino y T. Matsuyama, Phys. Lett. **B222** 493 (1989).
- [22] S. Weinberg, Phys. Lett. **B143** 97 (1984).
- [23] M. Gopfert y G. Mack, Comm. Math. Phys. **82** 545 (1981); C. J. Burden y C. D. Roberts Phys. Rev. **D44** 540 (1991); C. J. Burden, J. Praschifka y C. D. Roberts, Phys. Rev. **D46** 2695 (1992); P. Maris, Phys. Rev. **D52** 6087 (1995).
- [24] D. J. Gross, R. D. Pisarski y L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53** 43 (1981);
- [25] A. A. Nersesyan y G. E. Vachanadze, J. Low Temp. Phys. **77**, 293 (1989); X. Yang y C. Nayak, Phys. Rev. **B65**, 064523 (2002).
- [26] G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984); J. González, F. Guinea y M. A. H. Vozmediano, Nucl. Phys. **B406**, 771 (1993); J. González, F. Guinea y M. A. H. Vozmediano, Phys. Rev. **63**, 134421 (2001).
- [27] V. P. Gusynin y S. G. Sharapov, Phys. Rev. Lett. **95**, 146801 (2005); K. S. Novoselov *et. al.*, Nature **438**, 197 (2005); Y. Zhang *et. al.*, Nature **438**, 201 (2005).
- [28] A. Zee, “*Quantum field theory in a nutshell*”, Ed. Princeton University Press, 2003. ISBN 0-691-01019-6.
- [29] A. Khare, “*Fractional Statistics and Quantum Theory*”, 2a. Edición, World Scientific, 2005. ISBN 981-256-160-9
- [30] D. Grasso y H. Rubinstein, Phys. Rept. **348** 163 (2001).
- [31] K.-I. Kondo y P. Maris, Phys. Rev. **D52** 2 (1995).