# UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

## INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

*"MUNDOS MEMBRANA GENERADOS POR UN CAMPO TAQUIÓNICO"*

# T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

REFUGIO RIGEL MORA LUNA

ASESOR:

ALFREDO HERRERA AGUILAR

AGOSTO DEL 2007

# Índice general

# Agradecimientos

Agradezco en especial y dedico este trabajo a mis padres Socorro Luna y Juan Mora por todo su apoyo y ayuda.

Agradezco en especial a mi asesor Alfredo Herrera Aguilar por todo su apoyo, ayuda, dedicación y paciencia en la realización de este trabajo.

A mis amigos María Elena, Diana, Verónica, Elisa, Nandinii, Edgar, Raya, Antonio, Iván Manso, Andrés Valdemar, Waldo, Gustavo Corona, Oswald, Nava, Ares, por haberme apoyado siempre con su sincera amistad.

# Capítulo 1

# Introducción

El presente trabajo tiene dos motivaciones. La primera consiste en un conocido resultado en la teoría de cuerdas: cuando se desarrolla la teoría, después de cuantizar la cuerda, se predice de forma natural la existencia de partículas con masa imaginaria, lo cual da origen a los denominados taquiones; la segunda motivación está dada por el auge que ha tenido en la física la localización de la gravedad 4D en membranas inmersas en un espacio tiempo 5–dimensional.

Tomando estos dos marcos de referencia, en este trabajo se plantea una teoría con gravedad 5D más un campo escalar taquiónico. De este modo nos dimos a la tarea de buscar membranas anchas 5D generadas por el campo taquiónico en dicha teoría.

A continuación se hace una breve introducción al marco teórico en el que el taquión surge como un resultado de la cuantización en la teoría de cuerdas abiertas.

Tomando el resultado que se predice en la teoría de cuerdas para una cuerda abierta después de cuantizarla, se tiene la siguiente expresión para el operador de masa [1]

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I), \tag{1.1}$$

donde la suma se refiere a cada oscilador armónico en la cuerda; si se toma el valor de esta suma igual a uno tendríamos el operador de masa al cuadrado con un valor propio igual a cero, lo cual sugiere la masa para fotones; otro caso interesante es tomar la suma igual a cero, esto nos da como resultado masas al cuadrado negativas lo cual no tiene mucho sentido físico y ha sido un misterio desde el surgimiento de la teoría de cuerdas. De esta forma se tiene la siguiente expresión para estados taquiónicos en cuerdas abiertas

$$M^2 \mid \overrightarrow{P^+}, \overrightarrow{P_T}\rangle = -\frac{1}{\alpha'} \mid \overrightarrow{P^+}, \overrightarrow{P_T}\rangle. \tag{1.2}$$

A ésta se le dio el nombre de "estado del taquiónz tiene asociado un campo escalar. Para entender más sobre la física del taquión, a continuación vamos a tomar la densidad lagrangiana de un campo escalar y veremos qué pasa al considerar que el cuadrado de la masa es negativo, es decir, cuando tenemos el campo de un taquión. Posteriormente compararemos este caso con el del campo escalar clásico ya conocido, en el que la masa al cuadrado es positiva. La densidad lagrangiana de un campo escalar real tiene la siguiente forma [1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2} \mid \nabla\phi \mid^2 - V(\phi). \tag{1.3}$$

Considerando que la configuración de campo es homogénea en el espacio, tenemos $\nabla\phi = 0$ y la correspondiente ecuación de campo es

$$\partial^2\phi - V'(\phi) = 0. \tag{1.4}$$

Consideremos dos casos: en el primero tendremos un potencial con la masa al cuadrado positiva, mientras en el segundo estudiaremos un potencial con la masa cuadrada negativa, que es el caso que nos interesa:

Para el primer caso vemos que cuando el argumento del potencial es cero, se tiene un punto de equilibrio estable, mientras que para el segundo caso se tiene un punto de equilibrio inestable. Esto quiere decir que el campo del taquión es inestable. Para entender mejor esto analizaremos las ecuaciones de campo para ambos casos. Suponiendo que el campo sólo depende del tiempo, la ecuación de movimiento para el primer caso es

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + M^2\phi(t) = 0. \tag{1.5}$$

La solución en este caso representa oscilaciones y tiene la forma siguiente

$$\phi(t) = sen(Mt + \alpha_0). \tag{1.6}$$

Esta solución es para un campo escalar que puede situarse por siempre en $\phi = 0$ porque es un punto de equilibrio estable y si se desplazara infinitesimalmente, comenzará a oscilar alrededor del punto de equilibrio.

Por otro lado, si se considera el caso donde el cuadrado de la masa es negativa $M^2 = -\beta^2$ tenemos,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \beta^2 = 0, \tag{1.7}$$

con la siguiente solución,

$$\phi(t) = Acosh(\beta t) + Bsenh(\beta t) \tag{1.8}$$

Si tomamos la solución como $\phi(t) = Bsenh(\beta t)$, tenemos para el tiempo $t = 0$, que $\phi(t) = 0$, pero si lo desplazamos infinitesimalmente, a medida que $t$ tiende a infinito, $\phi(t)$ también se va a infinito. La única forma para que $\phi(t)$ quede en equilibrio es teniendo la solución trivial, cuando no hay campo. Esto nos dice que no podemos esperar que el campo del taquión se quede mucho tiempo en el punto crítico y como resultado tenemos una teoría inestable para el taquión.

Desde entonces la presencia del taquión es señal de inestabilidad para la teoría de cuerdas. Más concretamente es una inestabilidad en la teoría de cuerdas abiertas, que se alojan en $D25$–membranas. Debido a esto, inicialmente se le restó importancia a dicha teoría, posteriormente se mostró que los taquiones pueden aparecer cuando se construyen modelos realistas basados en supercuerdas [2]–[4].

Vamos a considerar la acción efectiva para un campo taquiónico $\phi$ sobre una $D25$–membrana bosónica dada por la siguiente expresión [5]

$$S = \tau_{25} \int d^{26}x \sqrt{|\det g|} \left[ -\frac{1}{2} f(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + ... - V_{tach}(\phi) \right], \tag{1.9}$$

donde $f(\phi)$ es una función que es cero en $\phi = \phi^*$ y tiene un máximo relativo $f_0$ en $\phi = 0$. De este modo tenemos una membrana que rellena todas las dimensiones espaciales. Recordando que la membrana es un objeto físico con densidad de energía constante que tiene alojadas cuerdas abiertas cuyos estados pueden ser estados del taquión, entonces podemos decir que un estado del taquión representa una excitación que puede bajar la energía de la $D25$-membrana (véase Fig. 1.2). La figura representa la energía para una cuerda abierta sobre una D25–membrana: cuando $\phi = 0$, tenemos una D–membrana inestable y cuando $\phi = \phi^*$, se tiene energía cero.

Como el taquión describe la física de la D25-membrana, la densidad de energía de la membrana contribuye a la energía potencial del sistema del modo siguiente

$$V_{tach} = T_{25} - \frac{1}{2\alpha'}\phi^2 + \beta\phi^3 + .... \tag{1.10}$$

Aquí se ha incluido un término cúbico y otras contribuciones posibles denotados por los puntos suspensivos. Estos términos extra representan efectos por interacciones. Este potencial representa muy bien nuestro sistema teniendo para $\phi = 0$ nuestra D25–membrana con una densidad de engría $T_{25}$ y si quisiéramos ver qué pasa cuando el taquión comienza a evolucionar tendríamos que incluir todos los términos de las interacciones.

Sin embargo, se puede ver sin calcular el potencial completo que la D25-membrana es inestable, decaerá, y en el punto crítico estable no habrá D25–membrana alguna. Cuando la D25–membrana desaparece, también desaparecen las cuerdas abiertas, pues están pegadas a la membrana; presumiblemente la energía de la membrana se transforma en cuerdas abiertas, hecho que aún no se a probado. También cabe notar que cuando el potencial se encuentra en el punto crítico estable, podría parecer que se tratase de un campo escalar con alguna masa cuadrada positiva, lo cual no puede ser cierto. Además, todas las partículas que aparecen como excitaciones de cuerdas abiertas deben desaparecer, incluyendo al taquión mismo. Esto nos lleva a tratar el punto de equilibrio estable con mucho cuidado.

Últimamente ha habido mucho interés en taquiones y en los mundos D$p$–membrana con $p < 25$, donde dichas membranas son excitaciones de un campo taquiónico en una D25–membrana, es decir, las D–membranas están hechas de taquiones.

Nuestro modelo se basará en una conocida acción para un campo escalar que representa un condensado de taquiones en un espacio $5d$ acoplado a la gravedad. Esta acción es un caso muy particular de la acción (1.9). Este resultado es discutido en [5] con detalle y no será tratado en este trabajo. La acción efectiva para el condensado taquiónico en un espacio tiempo $5d$ es

$$S_T = \alpha_T \int d^5x \sqrt{\det |g|} F(T, \partial T, ...) \tag{1.11}$$

La densidad lagrangiana $F(T, \partial T, ...)$ es una función que depende del campo del taquión $T$ y de sus derivadas a diferentes órdenes; nosotros consideraremos la siguiente acción, propuesta por A. Sen en [2]–[4] (como se mencionó anteriormente, este resultado no será derivado en este trabajo)

$$S_T = \alpha_T \int d^5x V(T) \sqrt{\det |(g_{MN} + \partial_M T \partial_N T)|}. \tag{1.12}$$

Esta acción se puede reescribir mediante una aproximación de la forma siguiente

$$S_T = \alpha_T \int d^5x \sqrt{|g|} V(T) \sqrt{1 + g^{MN} \partial_M T \partial_N T}. \tag{1.13}$$

La acción anterior puede recuperar la forma de la acción (1.11) expandiendo los términos de la raíz.

Por otro lado, la segunda motivación para este trabajo se basa también en teorías multidimensionales tales como la teoría de cuerdas. En estas teorías las dimensiones extra se pueden encontrar compactificadas como es el caso de las reducciones à la Kaluza–Klein, donde las dimensiones extra son compactas, del tamaño de la escala de Planck. En este esquema, los campos involucrados no dependen de las coordenadas extra, quedando así imperceptibles para nosotros en nuestro universo $4D$. Desgraciadamente este marco teórico ha sido muy cuestionado en el aspecto experimental, pues hasta la fecha no se cuenta con la tecnología adecuada para hacer mediciones a la escala de Planck. Sin embargo, con la formulación de varias teorías conocidas como "mundos membrana", se ha logrado encontrar una alternativa al mecanismo de Kaluza y Klein para recuperar el espacio tiempo $4D$ a partir de espacios tiempo multidimensionales. En estos mundos membrana las dimensiones pueden ser compactas o extendidas, los campos del modelo estándar están confinados a una subvariedad tetradimensional del espacio formada por la membrana. Además, la gravedad se propaga a través de la membrana y en todas las direcciones del espacio tiempo, pues describe la dinamica del mismo. Cabe mencionar que hoy en día es posible recuperar la gravedad tetradimensional en la membrana a partir de la gravedad multidimensional de una forma consistente con el marco experimental de la física moderna.

En el mundo membrana hay dos escenarios importantes, uno es el escenario de la membranas delgadas y el otro es el de las membranas anchas. Este último vendría siendo una generalización del primero en el que se suavizan las singularidades existentes en el mundo membrana generado por funciones delta (membranas delgadas). En el caso de las membranas delgadas se tiene el famoso resultado de Randall–Sundrum [6]–[7]. En este escenario se propone el siguiente ansatz para la métrica pentadimensional

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + dy^2. \tag{1.14}$$

Esta métrica no es factorizable y el factor exponencial, llamado factor de deformación, sólo depende de la coordenada extra; además, se introducen dos D3–membranas y una de ellas contiene todos los campos del modelo estándar. En este modelo es posible recuperar la gravedad tetradimensional y solucionar el problema de la jerarquía de masas. Es posible recuperar gravedad 4d debido a que la métrica de fondo contiene un estado acotado del gravitón 5d que se encuentra localizado en la dimensión extra. Para poder comprender cómo se comporta el gravitón se tiene que hacer un análisis de las fluctuaciones de la métrica, la cual está determinada por una ecuación de onda tipo Schrödinger con un potencial mecánico cuántico no trivial dado por la curvatura de la métrica de fondo. Si se resuelve esta ecuación para el caso no masivo se debe obtener una función de onda acotada y estable, debido a que los modos masivos pueden tener modos taquiónicos. Por otro lado tenemos las membranas anchas, para las cuales podemos usar la misma métrica de fondo (1.14), o un ansatz diferente, como el utilizado en los trabajos de investigación [8]–[9]:

$$ds^2 = e^{2A(y)+\omega(y)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + e^{\omega(y)}dy^2, \tag{1.15}$$

La diferencia más notoria de las membranas anchas con respecto a las delgadas es que las primeras están localizadas a lo largo de una quinta dimensión no compacta y pueden ser generadas por un campo escalar o por la geometría misma de la teoría de la gravedad en 5D. En ambos casos se procede de una forma similar que en el modelo de RS para localizar la gravedad $4D$.

Figura 1.1: (a) potencial clásico, (b) potencial taquiónico.

Figura 1.2: Potencial de la D25 membrana.

# Capítulo 2

# Condensado taquiónico y Modelo de Randall–Sundrum en un espacio tiempo 5D.

En este Capítulo se expondrá una teoría que pretende exponer los efectos de un condensado taquiónico dado por un campo $T$, acoplado a la gravedad $5D$ para tratar de encontrar$D3$ membranas anchas con la finalidad de localizar la gravedad $4D$. Consideremos un espacio tiempo $5D$ cuya acción esté dada por

$$S = S_G + S_T, \tag{2.1}$$

$$S_G = 2M^3 \int d^5x\sqrt{g}R, \tag{2.2}$$

$$S_T = \alpha_T \int d^5x\sqrt{|g|}V(T)\sqrt{1 + g^{MN}\partial_M T\partial_N T}, \tag{2.3}$$

donde $R$ es el escalar de curvatura en $5D$, el campo escalar $T$ representa el condensado taquiónico (y se pretende que esté en el bulto junto con la gravedad), el potencial $V(T)$ es una función arbitraria del campo $T$. A continuación se muestra el resultado de la variación en la parte de materia para obtener el tensor de energía momento; después se calcularán las ecuaciones de Einstein y por último se calculará la variación de la acción del taquión para obtener las ecuaciones de campo correspondientes.

Al variar la acción del taquión con especto a la métrica del bulto, obtenemos la siguiente expresión para el tensor de energía momento

$$T_{MN}^{(T)} = \frac{\alpha_T}{2}\left[g_{MN}V(T)\sqrt{1+(\nabla T)^2} - \frac{V(T)\partial_M T\partial_N T}{\sqrt{1+(\nabla T)^2}}\right]; \tag{2.4}$$

la parte tetradimensional tiene la forma

$$T_{mn}^{(T)} = \frac{\alpha_T}{2}\left[V(T)\sqrt{1+(\nabla T)^2}\right]\eta_{mn}, \text{ con } m,n = 0,...,3 \tag{2.5}$$

y la parte pentadimensional está dada por

$$T_{55}^{(T)} = \frac{\alpha_T}{2}\left[V(T)\sqrt{1+(\nabla T)^2} - \frac{V(T)(\nabla T)^2}{\sqrt{1+(\nabla T)^2}}\right]. \tag{2.6}$$

Otro resultado que nos será de utilidad para calcular las ecuaciones de Einstein es

$$T^{(T)} = g^{MN}T_{(MN)}^{(T)} = \frac{\alpha_T}{2}\left[5V(T)\sqrt{1+(\nabla T)^2} - \frac{V(T)(\nabla T)^2}{\sqrt{1+(\nabla T)^2}}\right], \tag{2.7}$$

donde se considerará que $T$ sólo depende de la quinta coordenada (al igual que el factor de deformación en la métrica), esto por motivos de simplicidad.

También cabe mencionar que la constante $\alpha_T$ debe ser negativa en el marco teórico en el que $T$ describe un campo taquiónico.

Ahora vamos a obtener los las ecuaciones de Einstein para nuestra teoría. Tomando en cuenta el ansatz (1.14), tenemos que los símbolos de Christoffel tienen la siguiente forma

$$\Gamma^5_{mn} = -e^{2A(y)} \left[ \frac{d}{dy} A(y) \right] \eta_{mn}, \tag{2.8}$$

$$\Gamma^m_{m5} = \frac{d}{dy} A(y), \text{ con } m, n = 0, .,3; \tag{2.9}$$

todos los demás símbolos son cero.

El escalar de curvatura correspondiente está dado por la siguiente expresión

$$R = -20 \left[ \frac{d}{dy} A(y) \right]^2 - 8 \left[ \frac{d^2}{dy^2} A(y) \right]. \tag{2.10}$$

Una vez hecho esto vamos a proceder a calcular las componentes del tensor de Ricci. Cuando calculamos el tensor de Ricci, obtenemos la misma ecuación usando las 4 primeras entradas, y una diferente a las demás correspondiente a la quinta entrada; así, se tiene:

$$R_{mn} = 3 \left\{ 2 \left[ \frac{d}{dy} A(y) \right]^2 + \left[ \frac{d^2}{dy^2} A(y) \right] \right\} e^{2A(y)} \eta_{mn}, \tag{2.11}$$

$$R_{55} = 6 \left[ \frac{d}{dy} A(y) \right]^2. \tag{2.12}$$

Una vez teniendo estas expresiones vamos a obtener las ecuaciones de Einstein en la forma siguiente

$$R_{MN} = T^{(T)}_{MN} - \frac{1}{3} g_{MN} T^{(T)}, \tag{2.13}$$

esto nos aporta dos ecuaciones para la parte geométrica que son

$$A'' = \frac{\alpha_T}{6} \frac{V(T)(T')^2}{\sqrt{1+(T')^2}}, \tag{2.14}$$

$$A'^2 = \frac{\alpha_T}{12} \frac{V(T)}{\sqrt{1+(T')^2}}. \tag{2.15}$$

Bueno, ahora sólo falta un ingrediente más en este Capítulo para proceder a encontrar una solución a esta teoría, ese ingrediente son las ecuaciones del campo del taquión, que vamos a obtener haciendo la variación de la acción $S_T$ dada por la ecuación (1.11 ); dicha variación nos arroja la siguiente igualdad

$$T'' + 4A'T' = \left[1+(T')^2\right] \frac{dV(T)}{dT} \frac{1}{V(T)}. \tag{2.16}$$

Este resultado, a primera impresión, nos deja ver finalmente un sistema de tres ecuaciones altamente no lineales acopladas. Además, sumándole el hecho de que el potencial $V(T)$ es una función arbitraria del campo $T$ nos hace suponer que hay muchas soluciones. Esto nos hace pensar que efectivamente la forma del potencial juega un papel determinante en la obtención de las soluciones.

## 2.1. La solución con taquión constante

La realidad resulta ser más que una primera impresión, en un principio el trato con las ecuaciones nos llevo a pensar en varios ansatz para la solución de las ecuaciones, teniendo en cuenta sólo la condición resultante de las ecuaciones(2.14) y (2.15)

$$\frac{A''}{A'^2} = 2(T')^2 \tag{2.17}$$

esto para encontrar $D3$ membranas anchas localizadas en nuestro espacio tiempo, sin embargo, esto nos llevo a caminos sin fin. Luego lo que se hizo para obtener más información acerca de nuestro sistema de ecuaciones fue despejar $A'$ de la ecuación (2.15), derivarla con respecto a la quinta dimensión $y$ e igualarla con (2.14); de este modo, se obtiene el siguiente resultado para $T''$

$$T'' = \frac{1}{V(T)}\frac{dV(T)}{dT}(1+(T')^2) - 4\sqrt{\frac{\alpha_T}{12}}\sqrt{V(T)}T'(1+(T')^2)^{\frac{3}{4}}. \tag{2.18}$$

Después procedemos a sustituir las ecuaciones (2.15) y (2.18) en la ecuación del taquión (2.16) para obtener más información acerca de $T$, y lo que se obtuvo fue la siguiente relación

$$T'' = \frac{1}{V(T)}\frac{dV(T)}{dT}(1+(T')^2) - 4\sqrt{\frac{\alpha_T}{12}}\sqrt{V(T)}T'(1+(T')^2)^{\frac{-1}{4}}. \tag{2.19}$$

Al comparar las ecuaciones (2.18) y (2.19) se ve que éstas son iguales si y sólo si

$$\left[1+(T')^2\right]^{\frac{3}{4}} = \left[1+(T')^2\right]^{\frac{-1}{4}}, \tag{2.20}$$

lo cual implica que necesariamente debemos tener

$$T' = 0, \qquad\qquad T = \text{const.} \tag{2.21}$$

Esta es una restricción muy fuerte para nuestro modelo porque muestra que el potencial no tiene ningún papel relevante, simplemente se cancela en el último paso de álgebra. Además, esta restricción deja el campo del taquión constante y fácilmente checamos que la ecuación (2.16) también deja al potencial constante

$$\frac{dV(T)}{dT} = 0, \tag{2.22}$$

teniendo así como resultado una acción constante. Con este resultado se descarta la posibilidad de encontrar membranas anchas en el bulto debido a que la geometría del sistema queda restringida a la acción del conocido modelo de Randall–Sundrum que describe gravedad con una constante cosmológica negativa en $5D$ en la presencia de membranas delgadas (funciones delta) a lo largo de la quinta dimensión.

De este modo, este hecho cambia drásticamente nuestro panorama geométrico de la teoría porque podemos recuperar el denominado modelo RSII a partir de nuestra acción taquiónica debido a la compatibilidad de las ecuaciones de campo. El modelo RSII nos sitúa en un espacio tiempo $5D$ en el que el modelo estándar se confina a una $D3$–membrana y deja la gravedad libre en las 5 dimensiones, pues representa la dinámica del espacio tiempo mismo. La diferencia con el modelo RSI radica en el hecho de que éste considera una sola membrana en lugar de dos. Este modelo se obtiene del anterior mandando una de las dos membranas al infinito.

La acción efectiva del modelo RSII es la siguiente

$$S = S_{G'} + S_{mem} + S'_{mem}, \tag{2.23}$$

$$S_G = \int d^5x\sqrt{|g|}(-\Lambda + 2M^3 R) \tag{2.24}$$

$$S_{mem} = \int d^4x\sqrt{|g'|}(V_{mem} + \mathcal{L}_{mem}), \tag{2.25}$$

donde la constante $\Lambda$ y el potencial $V_{mem}$ son términos cosmológicos que están en el volumen del espacio tiempo $5D$ y en la frontera de la membrana respectivamente, $R$ sigue siendo el escalar de curvatura en $5D$.

La $g'$ es el determinante de la métrica $4D$ inducida sobre la membrana; la membrana delgada se obtiene imponiendo la simetría $Z_2$ a nuestras ecuaciones de Einstein (2.14); además, la membrana $S'$ se refiere a la membrana que vamos a situar en el infinito. Cabe mencionar que en el caso del modelo RSI, la coordenada $y$ es igual a $r_c\phi$, en la notación del trabajo de L. Randall y C. Sundrum [6].

De este modo, la solución para el factor de deformación tiene la siguiente forma

$$e^(2A) = e^( - k|y|) \tag{2.26}$$

y la métrica de fondo $5D$ es

$$ds^2 = e^{-2k|y|}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + dy^2, \tag{2.27}$$

donde $0 \leq y \leq r_c\pi$ es la dimensión extra y $r_c$ es un radio de compactificación. Esto puede identificarse como una "rebanada"del espacio $AdS_5$. La solución de las ecuaciones de Einstein sólo tiene sentido si respeta la invariancia de

Poincaré en la membrana 4D. Para esto es necesario que los términos- cosmológicos en el volumen del espacio y en la frontera de la membrana, es decir $\Lambda$ y $V_{mem}$ estén relacionados de la forma siguiente

$$V_{mem} = -V_{mem'} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2. \tag{2.28}$$

Este modelo nos plantea que es posible que vivamos en un espacio tiempo $4D$ inmerso en un universo con $n$ coordenadas extra no compactas de extensión infinita, dejándonos un escenario totalmente compatible con la gravedad experimental de hoy en día. En nuestro caso $n = 1$ y todo el espacio tiempo de fondo curvo puede soportar un estado base para el gravitón multidimensional que está localizado en una región pequeña de la dimensión extra.

La existencia del estado base del gravitón se entiende haciendo un análisis de las fluctuaciones de la métrica de fondo

$$ds^2 = e^{2A}((\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu) + dy^2. \tag{2.29}$$

La dinámica de las perturbaciones transversas de traza nula de la métrica de fondo, Minkowski en este caso, están generadas por una ecuación de onda con la forma

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - \partial_j \partial^j + V(z_j))\right] \overset{\wedge}{h}(x^\mu, z_j) = 0, \tag{2.30}$$

donde $\mu = 0, \ldots, 3$, y $j$ representa las condenadas extra. Las fluctuaciones transversas de traza nula $\overset{\wedge}{h}_(\mu\nu)$ pueden ser representadas como superposiciones de modos en la forma siguiente

$$\overset{\wedge}{h} = e^{ip.x} \overset{\wedge}{\Psi}(z), \tag{2.31}$$

donde $\overset{\wedge}{\Psi}$ es un modo propio para la ecuación de la coordenada extra.

De esta manera la ecuación (2.30) adopta la siguiente forma

$$\left[-\partial_j\partial^j + V(z_j)\right]\overset{\wedge}{\Psi}(z) = m^2\overset{\wedge}{\Psi}(z), \tag{2.32}$$

con $p^2 = -m^2$. Esto implementa la reducción à la Kaluza–Klein de las fluctuaciones gravitacionales en dimensiones mayores que 4, y las expresa en términos de estados Kaluza–Klein que viven en $4D$. El término $m^2$ es el valor propio de la ecuación (2.32). Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de Schrödinger. Siendo éste un modo cero normalizable de la ecuación (2.30, representa la función de onda asociada con el gravitón en cuatro dimensiones. Este estado es el estado base que decae rápidamente cuando nos alejamos de la membrana. De este modo, el estado base reproduce la gravedad convencional en $4D$ y los demás modos de Kaluza–Klein son sólo correcciones pequeñas a la teoría provenientes de la dimensión extra. El desarrollo de este tema será expuesto en el siguiente Capítulo.

# Capítulo 3

# Localización de la gravedad 4D en RSII

## 3.1. Fluctuaciones de la métrica

Para poder localizar la gravedad debemos conocer el potencial de la membrana $V_{mem}$ y tenemos que saber cuál es el espectro del las fluctuaciones lineales generalizadas del tensor métrico

$$e^{-2k|y|}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}); \tag{3.1}$$

para entender, a su vez, si éste es consistente con la graveadad experimental que observamos en $4D$. Esto requiere la comprensión de todos los modos que aparecen en la teoría efectiva cuadridimensional asumida. Antes de analizar las fluctuaciones de la métrica vamos a realizar un cambio de coordenadas sobre nuestra métrica de fondo, específicamente en la quinta coordenada, para llevarla a la forma conformemente plana. Después aplicaremos un método generalizado para obtener la dinámica y la estructura de las fluctuaciones de la métrica. La transformación es la siguiente

$$dy = e^{A} dz \tag{3.2}$$

lo cual implica que

$$z \equiv sgn(y)(e^{k|y|} - 1)/k. \tag{3.3}$$

Este cambio de variable nos permite expresar la métrica con el término de la perturbación de la forma siguiente

$$ds^2 = e^{-2A}[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu} + dz^2]. \tag{3.4}$$

Es conveniente para nosotros escoger sólo las componentes físicas de la perturbación $h_{\mu\nu}$; con este fin utilizaremos únicamente los modos transversos y la norma de traza nula para las fluctuaciones, es decir, aquéllas que obedecen las siguientes condiciones

$$\partial_{\mu} h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad h_{\mu\mu} = 0. \tag{3.5}$$

Como la métrica es conformemente plana, se puede tomar la forma general del tensor de Einstein de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu} = e^{-2A}\widetilde{g}_{\mu\nu}. \tag{3.6}$$

Así,

$$G_{\mu\nu}=\widetilde{G}_{\mu\nu}+(d-2)[\widetilde{\nabla}_{\mu}A\widetilde{\nabla}_{\nu}A+\widetilde{\nabla}_{\mu}\widetilde{\nabla}_{\nu}A-\widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{\nabla}_{\rho}\widetilde{\nabla}^{\rho}A-\frac{(d-3)}{2}\widetilde{\nabla}_{\rho}A\widetilde{\nabla}^{\rho}A)]. \tag{3.7}$$

Ahora, usando la forma del tensor de Einstein para perturbaciones lineales en un espacio tiempo plano tenemos

$$\delta \tilde{G}_{\mu\nu} = \partial^\rho \partial(_\nu h_\mu)_\rho - \frac{1}{2}\partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h^\rho_\rho - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho \partial^\kappa h_{\rho\kappa} - \partial^\rho \partial_\rho h^\kappa_\kappa). \quad (3.8)$$

Con esto la perturbación linealizada del tensor de Einstein queda de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} &= \partial^\rho \partial(_\nu h_\mu)_\rho - \frac{1}{2}\partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h^\rho_\rho - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho \partial^\kappa h_{\rho\kappa} - \partial^\rho \partial_\rho h^\kappa_\kappa) \\ &\quad -(d-2)[\frac{1}{2}\eta^{\rho\kappa}(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu})\partial_\kappa A \qquad (3.9) \\ &\quad +h_{\mu\nu}\partial_\rho \partial^\rho A + \eta_{\mu\nu}(-\partial_\rho h^{\rho\kappa}\partial_\kappa A + \frac{1}{2}\partial_\rho h^\kappa_\kappa \partial^\rho A - h^{\rho\kappa}\partial_\rho \partial_\kappa A) \\ &\quad -\frac{d-3}{2}(h_{\mu\nu}\partial_\rho A \partial^\rho A - \eta_{\mu\nu}h^{\rho\kappa}\partial_\rho A \partial_\kappa A)]. \end{aligned}$$

De esta ecuación sólo sobreviven los términos de los modos transversos de traza nula. El siguiente paso consiste en la variación del tensor de energía momento, y se tiene que para cualquier acción de la forma (2.23)

$$\delta T_{\mu\nu} = T^\kappa_\mu h_{\kappa v}; \quad (3.10)$$

entonces, tomando las ecuaciones de Einstein sin peturbar obtenemos

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} &= (d-2)(-2M^3)(\partial_\mu A \partial^\kappa A + \partial_\mu \partial^\kappa A)h_{\kappa\nu} + \\ &\quad +(d-2)(-2M^3)(\partial_\rho \partial^\rho A + \frac{d-3}{2}(\partial_\rho A \partial^\rho A)), \qquad (3.11) \end{aligned}$$

donde nuevamente sólo los modos transversos de traza nula sobreviven. Con esto planteamos la ecuación de movimiento para el gravitón, la cual resulta de la siguiente relación

$$\delta G_{\mu\nu} + \frac{1}{2M^3}\delta T_{\mu\nu} = 0; \quad (3.12)$$

esto nos cancela dos términos de $\delta G_{\mu\nu}$ con otros dos de $\delta T_{\mu\nu}$ y nos lleva a la siguiente igualdad

$$-\frac{1}{2}\partial^{\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu} + \frac{d-2}{2}\partial^{\rho}A\partial_{\rho}h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.13}$$

Si hacemos una separación de variables en la perturbación, poniendo $h_{\mu\nu} = \Psi(y)e^{ip.x}$ donde $p^2 = -m^2$, esto implica que vamos a tener la siguiente ecuación para el gravitón

$$[\frac{-m^2}{2}e^{2k|y|} - \frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2]\Psi(y) = 0; \tag{3.14}$$

recordando el cambio de variable (3.3), $\overset{\wedge}{\Psi}(z) = \Psi(z)e^{k|y|/2}$, $\overset{\wedge}{h}(x,z) \equiv h(x,y)e^{k|y|/2}$ y sustituyendo en la ecuacion (3.14), la ecuación de movimiento toma la forma siguiente

$$[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z)]\overset{\wedge}{\Psi}(z) = m^2\overset{\wedge}{\Psi}, \tag{3.15}$$

donde

$$V(z) = \frac{15k^2}{8(k|z|+1)^2} - \frac{3}{2}k\delta(z). \tag{3.16}$$

Analizando la ecuación (3.15) podemos ver que posee un solo valor propio no continuo correspondiente al estado base normalizable y los demás valores propios corresponden a estados continuos. El estado base corresponde al modo no masivo del gravitón en la teoría tetradimensional. Si nos alejamos hacia el infinito tomando $z \longrightarrow \infty$, vemos que el potencial (3.16) tiende a cero asintóticamente y, por lo tanto, no vemos ningún salto en los modos masivos continuos, simplemente se convierten en ondas planas en el infinito; en $z = 0$ hay una barrera de potencial debida a la parte delta del potencial (3.16), esto quiere decir que los modos masivos continuos desaparecen alrededor del origen, pues necesitan tunelar dicha barrera y por eso tienen rstringida dicha posición.

Los modos continuos están representados por combinaciones lineales de las funciones de Bessel siguientes

$$\sqrt{|z| + 1/k}Y_2(m(|z| + 1/k)), \sqrt{|z| + 1/k}J_2(m(|z| + 1/k)) \tag{3.17}$$

y la función de onda correspondiente al modo cero (al gravitón) es,

$$\overset{\wedge}{\Psi}_0(z) = \frac{1}{k(k|z| + 1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.18}$$

A partir del resultado resultado (3.17) podemos ver qué pasa con las condiciones de frontera sobre los modos continuos cuando nos alejamos del origen o cuando estamos muy cerca. Si consideramos el argumento de las funciones de Bessel muy pequeño, las funciones de Bessel se reducén a la forma siguiente

$$J_2(m(|z| + 1/k)) \sim \frac{m^2(|z| + 1/k)^2}{8}, Y_2(m(|z| + 1/k)) \sim -\frac{4}{\pi m^2(|z| + 1/k)^2} - \frac{1}{\pi}. \tag{3.19}$$

Esto lleva a escribir la solución para los modos de Kaluza–Klein como una combinación lineal de las funciones anteriores que nos permita satisfacer la condición en la frontera debido al potencial de la delta sobre la membrana en $z = 0$; escogiendo m pequeño se puede escoger la siguiente combinación lineal para los modos

$$\overset{\wedge}{\Psi} \sim N_m(\sqrt{|z| + 1/k})[Y_2(m(|z| + 1/k)) + \frac{4k^2}{\pi m^2} J_2(m(|z| + 1/k)], \tag{3.20}$$

aquí la la $N_m$ es una constante de normalización. Este resultado nos muestra qué pasa cuando nos alejamos del origen: vamos a tener sólo ondas planas al tomar $mz$ muy grande; las funciones de Bessel se aproximan al siguiente resultado mostrando lo que se acaba de mencionar,

$$\sqrt{z}J_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m}}Cos(mz-\frac{5}{4}\pi), \ \sqrt{z}J_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m}}Sen(mz-\frac{5}{4}\pi). \tag{3.21}$$

Al encontrar el espectro de modos Kaluza–Klein de la teoría efectiva en cuatro dimensiones se puede calcular el potencial gravitacional no relativista entre dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$ sobre la membrana en $z = 0$; este potencial está generado por el intercambio de los propagadores del modo cero y los modos continuos de KK, quedando el potencial de la siguiente manera

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty dm \frac{G_N}{k} \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{k}. \tag{3.22}$$

Hay que hacer notar que hay una supresión exponencial de Yukawa en la función de Green masiva para $m > 1/r$, y el término extra de $m/k$ viene de la supresión de funciones de onda continuas en $z = 0$ de la ecuación (3.19). El término $\frac{G_N}{k}$ es el acoplador fundamental de la gravedad, $1/M^3$. Haciendo la integración en el segundo término, el potencial toma la forma siguiente

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r}(1 + \frac{1}{r^2 k^2}). \tag{3.23}$$

Esta es la razón por la cual esta teoría produce una teoría cuadridimensional eficaz de la gravedad. El término principal debido al modo cero es el potencial newtoniano usual; los modos de KK generan un término que se puede suprimir en una corrección porque $k$ toma un valor del orden de la escala de Planck. Hasta aquí se ha mostrado un panorama con una quinta dimensión infinita en la presencia de un membrana que puede recuperar una teoría de la gravedad puramente tetradimensional.

# Capítulo 4

# Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado una búsqueda sistemática de membranas anchas taquíonicas en $5D$ que pudiesen localizar la gravedad $4D$ que observamos en nuestro Univeso. Dichas membranas se buscaron en el marco de una teoría de la gravedad en $5D$ acoplada a un campo escalar taquiónico, cuya acción fue derivada por A. Sen hace unos años.

Sin embargo, un análisis cuidadoso del sistema de ecuaciones generado al variar la teoría, muestra que éstas son compatibles si y sólo si el campo taquiónico es constante. De este modo, nuestro sistema se reduce automáticamente al modelo de L. Randall y C. Sundrum que describe gravedad en $5D$ acoplada a una constante cosmológica y, necesariamente, a una o varias membranas delgadas (funciones delta localizadas a lo largo de la quinta dimensión).

En este modelo se ha demostrado que se puede recuperar la gravedad 4D que observamos en nuestro mundo a partir de la acción de la teoría en $5D$ mencionada con anterioridad, sin contradicción alguna con los experimentos gravitatorios realizados hasta el momento.

El resultado principal de este trabajo radica en la justificación del modelo de Randall–Sundrum con membranas delgadas a partir del sistema taquiónico autogravitante, implicando simultáneamente la inexistencia de membranas anchas en dicha teoría, así como la necesaria introducción de las membranas delgadas a mano.

# Bibliografía


[1] Barton Zwiebach, "A first course in string theory", (Cambridge University Press, England, 2004) pp. 558.

[2] Ashoke Sen, "Rolling tachyon", JHEP 0204 (2002) 048.

[3] Ashoke Sen, "Tachyon matter", JHEP 0207 (2002) 065.

[4] Ashoke Sen, "Tachyon condensation in string field theory", JHEP 0003 (2000) 002.

[5] Kazuki Ohmori, "A review on tachyon condensation in open string field theories", Master Thesis, University of Tokio, Japan, February 2001.

[6] Lisa Randall and Cumrum Sundrum, "An alternative to compactification", Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4690.

[7] Lisa Randall and Cumrum Sundrum, "A large mass hierarchy fron a small extra dimension", Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370.

[8] Nandinii Barbosa–Cendejas and Alfredo Herrera–Aguilar, "4$D$ gravity localized in non $Z_2$–symmetric thick branes", JHEP 0510 (2005) 101.

[9] Nandinii Barbosa–Cendejas and Alfredo Herrera–Aguilar, “Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes”, Phys. Rev. D73 (2006) 084022.