

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

«ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE SCHWINGER-
DYSON EN QED3 EN LA APROXIMACIÓN $1/N$ »

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

LIC. SAÚL SÁNCHEZ MADRIGAL

ASESOR: DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO

MORELIA, MICH., AGOSTO 2007

Índice

Índice	5
1 Introducción	7
2 Electrodinámica Cuántica	11
2.1 Electrones	11
2.1.1 Preliminares	11
2.1.2 Ecuación de Klein-Gordon	13
2.1.3 Ecuación de Dirac	15
2.2 Ecuaciones de Maxwell	20
2.3 Lagrangiano de QED	23
2.4 Interacciones	24
2.4.1 Propagador de Klein-Gordon	24
2.4.2 Propagador de Dirac	26
2.4.3 Propagador del Fotón	27
3	31
Ecuaciones de Schwinger-Dyson	
3.1 Estructura de las Funciones de Green	34
3.1.1 Propagador del Fermión	34
3.1.2 Estructura del Propagador del Fotón	35
3.1.3 Estructura del Vértice	35
3.2 Generación Dinámica de Masas	36
4 Aproximación 1/N	43
4.1 Generalidades	43
4.2 Criticalidad	44
4.3 ¿Dónde Existe la Criticalidad?	48
5 Métodos Numéricos	51
5.1 Método de Bashir-Huet-Raya	51
5.2 Nuestro Método	53
5.3 Resultados	55
6 Discusión y Conclusiones	65
Apéndice A Cuadratura Gaussiana	69
Apéndice B Programa de Mathematica	71
Bibliografía	73

Capítulo 1

Introducción

Las teorías de los campos cuánticos de norma, amén de su elegancia matemática, son piedra angular en la descripción de las interacciones entre los bloques constituyentes del universo. Dejando un tando de lado a la gravedad, que le da forma al universo a gran escala, las interacciones cuánticas entre las partículas fundamentales: *electromagnéticas*, de nuestra cotidiana experiencia; *débiles*, que se manifiestan en el decaimiento radiactivo de algunos elementos químicos; y *fuertes*, que mantienen los núcleos atómicos unidos, encuentran todas ellas en estas teorías su más acertada descripción. La electrodinámica cuántica o QED de sus siglas en inglés, la teoría de las interacciones débiles y la cromodinámica cuántica o QCD, dan cuenta perfecta de la fenomenología de estas interacciones con una precisión inusitada, al menos en el régimen perturbativo. Adicionalmente, su estructura de norma permite incluso unificar su descripción. Esta es la clave del éxito del Modelo Estándar (ME) de las Interacciones Electrodébiles de Glashow, Weinberg y Salam [1], que a la fecha ha sorteado las encrucijadas experimentales que se le han presentado, al grado que la búsqueda incesante de nueva física más allá de este modelo continúa eludiéndonos.

Sin embargo, hay algunos aspectos del ME que aún esperan una solución satisfactoria. Un ejemplo es el origen de las masas de las partículas fundamentales. En el Lagrangiano del ME, las partículas fundamentales son no masivas, de modo que éste es invariante bajo transformaciones quirales. Las observaciones experimentales, por su lado, indican que esta simetría quiral debió romperse de alguna manera, puesto que las masas de los leptones, quarks y bosones de norma se han medido, con bastante precisión en algunos casos. Aunque el ME permite explicar cómo es que las partículas fundamentales adquieren su masa, de una manera invariante de norma que no empaña su poder predictivo, es incapaz de proporcionar un valor para éstas, que permanecen como parámetros libres que deben fijarse experimentalmente.

La manera en la que el ME explica el origen de las masas es mediante el Mecanismo de Higgs [2]. En este mecanismo, el campo escalar de Higgs, ϕ , espontáneamente adquiere un valor de expectación en el vacío (condensado) $\langle \phi \rangle = \langle 0 | \phi | 0 \rangle \neq 0$, que es el parámetro de orden de la ruptura de simetría quiral y que forma un medio «pegajoso» en el cual se propagan las partículas del ME, sintiéndose pesadas, pues han adquirido su masa. De esta manera, por ejemplo, los quarks adquieren su masa de corriente de unos 3-6 MeV . Es sabido, sin embargo, que a escalas de distancia del orden del tamaño de un protón, los quarks se comportan como si sus masas fueran de unos 300 MeV , mucho mayores que sus casi nulas masas de corriente, de modo que el mecanismo de Higgs *no puede* explicar el origen del 98% de la masa de la materia ordinaria, compuesta básicamente de protones y neutrones.

La explicación sobre el origen de esta masa la provee otra teoría de norma, QCD. Esta es una teoría no Abeliána, de acoplamiento fuerte, que exhibe fenómenos interesantes como Ruptura Dinámica de Simetría Quiral, también conocida como Generación Dinámica de Masas (GDM) y Confinamiento. QCD explica el origen de las masas de los hadrones como un fenómeno no perturbativo, donde nuevamente la simetría quiral se rompe por la formación de un condensado, que surge de manera dinámica. Cuando se juntan los quarks (de valencia) para formar hadrones, los quarks virtuales en sus respectivas nubes de color, debido a la intensidad de la interacción, comienzan a aparearse, formando el condensado compuesto, llamado condensado de quark quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle \neq 0$, que a su vez provee el medio «pegajoso» en el cual los quarks de valencia se propagan y se sienten pesados, adquiriendo de manera dinámica sus masas constituyentes de 300 MeV , de modo que tres de estos quarks constituyentes tienen la masa correspondiente a un protón o neutrón. Se ha comprobado que incluso sin el mecanismo de Higgs, es decir, sin que los quarks tengan una masa de corriente, este mecanismo dinámico permite que adquieran casi toda su masa constituyente [3]. Este escenario es confirmado por simulaciones de lattice [4], pero «...simplemente tener una computadora que después de extensivos cálculos arroje estos resultados, no es un asunto satisfactorio...» (F. Wilczek), así que en esta tesis nos proponemos estudiar la GDM desde otra perspectiva.

Las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [5] proveen una plataforma natural para realizar estudios en el continuo de GDM. Estas ecuaciones son una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de una teoría de campos cuánticos dada, cuya naturaleza es no perturbativa, de modo que son un escenario ideal para estudiar este fenómeno. La intrincada estructura de QCD, por su naturaleza no Abeliána, presenta un reto teórico que hace difícil estudiar las ESD en todo su esplendor. Por ello es que elegimos un modelo simplificado que comparte con QCD los fenómenos de Confinamiento y GDM, la electrodinámica cuántica en el plano, o QED3. Siendo que esta teoría adolece de divergencias ultravioleta, los estudios sobre la estructura de sus ESD se vuelven más limpios.

QED3 es una teoría que además de servir de campo de entrenamiento para abordar problemas en teorías más complicadas, es interesante por méritos propios debido a sus múltiples aplicaciones. Modela, por ejemplo, el comportamiento a alta temperatura de QED ordinaria [6]. La física planar posee características intrínsecas muy interesantes que no se observan en el espacio, como la existencia de partículas de espín y estadística arbitrarios, llamadas anyones (una excelente revisión puede encontrarse en [7]), así como novedosas características concernientes a paridad y quiralidad [8]. Las aplicaciones de QED3 en sistemas de materia condensada incluyen superconductividad de alta temperatura, efecto Hall cuántico, aislantes de Mott dopados, antiferromagnétos de Heisenberg y líquidos de espín. Muy recientemente se ha descubierto un nuevo material, llamado *grafeno* [9], que es la encarnación de QED3 en la materia condensada. Este material, cuyo atractivo rebasa el ser simplemente un modelo académico debido a sus potenciales aplicaciones tecnológicas, ha abierto la puerta al nuevo paradigma de la *materia condensada relativista*. QED3 también ha sido sugerida como la teoría que describe la transición de fase superconductor-aislante a $T = 0$ y la fase de pseudobrecha en cupratos de bajo dopaje. Al parecer, existe una simetría quiral a energías suficientemente bajas en superconductores de onda- d estándar. La destrucción de la fase superconductora que conlleva a la aparición del antiferromagnetismo corresponde a la ruptura espontánea de esta simetría quiral. El

mecanismo responsable de esta ruptura, se ha observado, es formalmente idéntico al mecanismo de la GDM de QED3 [10].

La estructura de QED3 es más rica que la de su contraparte tetradimensional con respecto a la paridad, pues la ruptura de esta simetría discreta tiene implicaciones y aplicaciones muy relevantes en la materia condensada. Podemos mencionar, por ejemplo, que en el Lagrangiano correspondiente de QED3 se puede agregar un término de masa a los fermiones que viola paridad, y que en turno, induce un término de masa invariante de norma de origen topológica al fotón mediante el llamado término de Chern-Simons y viceversa (ver [11] para una revisión reciente del Lagrangiano más general de QED3). La violación de paridad es un factor para la superconductividad de alta T_c anyónica [12]. Asimismo, la versión que viola paridad de QED3, llamada τ -QED3 ha sido propuesta como un modelo que describe la superconductividad de alta T_c [13]. En esta tesis, sin embargo, nos enfocaremos sólo a los aspectos de QED3 que respetan paridad.

Los estudios de la GDM en QED3, tanto en la lattice [14, 15, 16] como en el continuo [17], representan un gran reto y han servido como verdaderos campos de batalla entre distintos grupos de investigación por lo controversiales de algunos resultados. El grupo de Appelquist y colaboradores, por ejemplo, desde 1986 estudiaron las soluciones a la ESD para el propagador del fermión en la aproximación $1/N$ para el propagador del fotón en la norma de Landau [18], encontrando que dichas soluciones poseen una estructura que sustenta la GDM, pero que el estado base del sistema posee una sensibilidad al número de familias de fermiones presentes, de tal modo que la GDM deja de tener lugar si este número excede un valor crítico $N_c = 32/\pi^2$. Pronto hubo críticas a estos resultados, encabezados por el grupo de Pennington [19], quienes criticaban el uso de una aproximación como la $1/N$, de enfoque perturbativo, en el estudio de un fenómeno genuinamente no perturbativo. Ellos encontraron que, también en la norma de Landau pero incluyendo propiamente los efectos de la renormalización de la función de onda y el vértice, la GDM toma lugar siempre, independientemente del número de familias involucradas en el modelo, aunque la cantidad de masa generada dinámicamente está exponencialmente suprimida al incrementar N . Estos estudios están soportados también por los resultados de Pisarski [20], quien estudiando la GDM mediante el Grupo de Renormalización, encuentra que la GDM ocurre para valores arbitrarios de N . Pese a la aparición de trabajos que mejoraron las suposiciones iniciales de Appelquist *et al.*, [21], o que recurren a otros esquemas de aproximación [22], que no cambiaron sus conclusiones y sólo refinaron el valor de N_c , los resultados tanto de uno y otro grupo no han podido descartarse por las simulaciones de lattice [14, 15, 16] dada la dificultad que representa estudiar la simetría quiral en este esquema. Estos trabajos, sin embargo, parecen favorecer las conclusiones de Appelquist *et al.*

En esta tesis nos proponemos estudiar la GDM en QED3 mediante las ESD en la aproximación $1/N$, siguiendo el razonamiento de Appelquist *et al.*, [18], pero trabajando en diferentes normas covariantes. Si sus resultados son genuinos, N_c no debe cambiar bajo una transformación de norma. Por el contrario, si el comportamiento de N_c depende de la norma, esto implicaría que se debe realizar una seria revaloración de estos resultados. La tesis está organizada de la siguiente manera. En el siguiente Capítulo estudiamos los ingredientes básicos de la electrodinámica cuántica, su Lagrangiano y los propagadores que de éste se desprenden. El Capítulo 3 está dedicado al estudio de las ESD en QED, la

estructura de las funciones de Green involucradas en el estudio de la GDM y las generalidades de este fenómeno vistas desde la bien conocida aproximación arcoiris. Revisamos el razonamiento de Appelquist *et al.* y lo extendemos al caso de una norma covariante arbitraria, hasta donde el tratamiento analítico lo permite, en el Capítulo 4. El análisis completo lo realizamos numéricamente en el Capítulo 5, donde presentamos además los detalles de los métodos numéricos desarrollados para este fin. Finalmente, discutimos nuestros resultados y presentamos nuestras conclusiones en el Capítulo 6.

Capítulo 2

Electrodinámica Cuántica

La electrodinámica cuántica o QED, de sus siglas en inglés, es la teoría cuántica del campo electromagnético. QED estudia la interacción entre las partículas cargadas, fermiones de espín $1/2$, que se supone mediada por un campo electromagnético subdividido en partículas idénticas, indivisibles y de espín 1 llamadas fotones. Matemáticamente, QED tiene la estructura de una teoría cuántica de campos de norma Abeliana con grupo de simetría $U(1)$.

En este Capítulo estudiaremos los ingredientes de QED. Comenzaremos con las partículas cargadas, los electrones, cuya dinámica se describe mediante la ecuación de Dirac. A continuación estudiaremos el campo electromagnético y luego las interacciones entre ellos, las cuales especificaremos en el lenguaje de diagramas de Feynman, que obtenemos del Lagrangiano correspondiente.

2.1 Electrones

2.1.1 Preliminares

Los electrones son partículas de espín semientero, descritas mediante la ecuación de Dirac. Esta ecuación surge de conciliar exitosamente los postulados de la relatividad especial y la mecánica cuántica. Históricamente, se realizaron varios intentos por escribir una ecuación de onda que describiera a los electrones. El punto de partida es la ecuación de Schrödinger que, desafortunadamente no describe la naturaleza relativista de estas partículas, ni su espín.

El paso natural es considerar la generalización relativista de la ecuación de Schrödinger, es decir, la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación, sin embargo, trajo consigo dos problemas conceptuales que hicieron que fuera abandonada por un tiempo. Estos problemas son la aparición de estados con energías negativas, que a su vez implican densidades de probabilidad negativas. Dirac, tratando de salvaguardar el principio de conservación de la energía, buscó una ecuación de onda relativista que se acoplara a los postulados de la mecánica cuántica. El problema de la interpretación probabilística de la ecuación de Klein-Gordon se puede evitar a expensas de introducir el concepto de antipartículas en la teoría. Éstas juegan un papel muy importante también en la ecuación de Dirac, pues se identifican con los positrones. A continuación desarrollaremos en detalle estas etapas históricas de la descripción de los electrones.

Partimos de la relación energía-momento de una partícula libre no relativista de masa m ,

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{p} es el momento de la partícula (hemos escogido un sistema de unidades tal que $c = \hbar = 1$) e identificamos la energía y el momento con los operadores

$$E \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \longrightarrow -i \nabla. \quad (2.2)$$

Tenemos que si aplicamos esta relación a una función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ obtenemos la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.3)$$

Esta ecuación diferencial tiene por solución

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)},$$

donde A es una constante de normalización.

La interpretación probabilística de Born sobre la función de onda nos permite identificar a la cantidad $\rho = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ como una densidad de probabilidad, *i.e.*, $|\psi|^2 dx$ nos da la probabilidad de encontrar a una partícula en el volumen \mathbf{r} a $(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ al tiempo t [23]. Cuando consideramos haces de partículas, esta probabilidad satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

con la corriente de probabilidad asociada

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

La ecuación de Schrödinger, sin embargo, no puede describir la naturaleza relativista de los electrones, por lo que se hace necesario considerar, como primer paso, la ecuación de Klein-Gordon.

2.1.2 Ecuación de Klein-Gordon

Si consideramos ahora la relación energía-momento relativista,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (2.4)$$

e identificamos con los operadores correspondientes, al aplicar sobre una función de onda $\psi(\vec{r}, t)$, obtenemos la ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = m^2 \psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

que es la ecuación de Klein-Gordon. Una forma más habitual de escribir esta ecuación consiste en introducir los cuadvectores $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$, $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$, de manera que el operador D'Alambertiano toma la forma

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2. \quad (2.6)$$

La ecuación de Klein-Gordon se puede escribir covariantemente como:

$$[\square^2 + m^2]\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.7)$$

cuyas soluciones libres son de la forma $\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$. Esta ecuación, sin embargo, nos lleva a que los eigenvalores de la energía son

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (2.8)$$

lo cual tiene un serio problema conceptual ya que existen soluciones con energía negativa. Además, la densidad de corriente y de probabilidad, que satisfacen $\partial_\mu j^\mu = 0$, están dadas por

$$j^\mu = A(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \quad \Longrightarrow \quad \rho = A \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad (2.9)$$

donde $A = -i/2m$. Observemos que ρ no es positiva definida, y entonces no se puede interpretar como una densidad de probabilidad. Estos dos obstáculos hicieron que la ecuación de Klein-Gordon no fuera considerada una ecuación de onda relativista apta para describir a los electrones, lo que hizo que fuera abandonada por un tiempo y en su lugar surgiera la ecuación de Dirac.

El problema con la interpretación probabilística de la ecuación de Klein-Gordon puede evitarse si consideramos lo siguiente: Obtenemos una densidad de carga y corriente si multiplicamos (2.9) con la carga elemental,

$$j_\mu \longrightarrow j'_\mu = \frac{ie}{2m} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*). \quad (2.10)$$

Ahora ρ' es una densidad de carga, que puede ser positiva, negativa o cero. Esto sin embargo, implica la existencia de partículas y antipartículas en la teoría [24].

Una interpretación de las soluciones de energía negativa fue dada a conocer por Feynman-Stückelberg, quienes establecen que las antipartículas son en realidad partículas con energía negativa, que evolucionan retrocediendo en el tiempo y que nosotros las "detectamos" como antipartículas con energía positiva que evolucionan hacia el futuro. Veamos a continuación una forma de aclararlo.

Si consideramos a un electrón de energía E , con momento \mathbf{p} y carga $-e$, su cuadricorriente electromagnética, de acuerdo a la ec. (2.10), es de la forma

$$j_\mu'(e^-) = -\frac{e}{m} N^2(E, \mathbf{p}).$$

Si tenemos ahora en lugar de un electrón un un positrón con carga $+e$,

$$j_\mu'(e^+) = +\frac{e}{m} N^2(E, \mathbf{p}).$$

Para un electrón con energía negativa $-E$ y momento negativo $-\mathbf{p}$, es la misma corriente:

$$j_\mu'(e^-) = +\frac{e}{m} N^2(-E, -\mathbf{p}) \equiv j_\mu'(e^+)$$

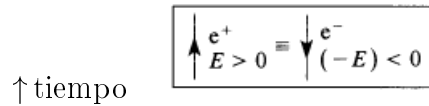


Figura 2.1. La emisión de un positrón con energía E es equivalente a la absorción de un electrón con energía $-E$.

En la figura anterior se muestra cómo la solución para partícula con energía negativa que retrocede en el tiempo es equivalente a la solución correspondiente para antipartícula con energía positiva que avanza en el tiempo. La importancia de la existencia de antipartículas se ilustra en el siguiente ejemplo:

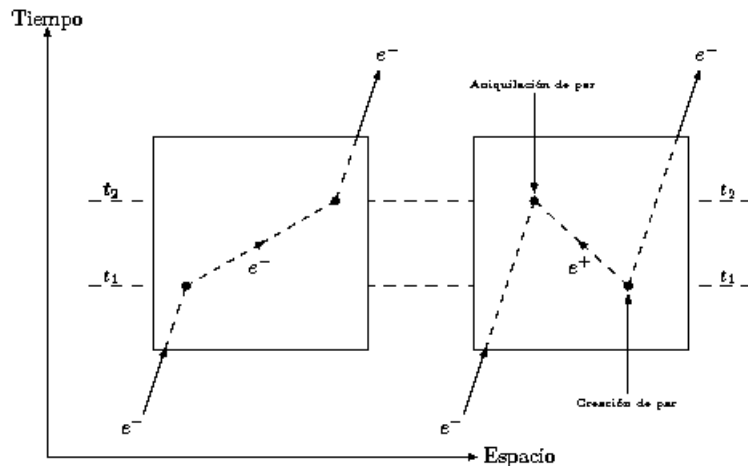


Figura 2.2. Diferentes ordenamientos temporales de la dispersión doble de un electrón.

Consideremos la dispersión doble de un electrón en un potencial, que describimos en términos de diagramas de Feynman. Los dos diagramas, donde existen dos ordenamientos temporales de la dispersión doble de un electrón, llevan al mismo evento observable. Vemos que la trayectoria del electrón de los dos diagramas es la misma antes y después de la doble dispersión. El primer diagrama se interpreta directamente. El electrón ingresa en la zona donde tiene influencia el potencial y se dispersa dentro de esta zona una vez, avanza y sufre una segunda dispersión antes de ser detectado fuera de la región de influencia del potencial. En el segundo diagrama, la trayectoria del electrón es tal que retrocede en el tiempo en forma de una antipartícula. Al tiempo t_2 , electrón se dispersa y retrocede en el tiempo con energía $E < 0$, este electrón se interpreta como un positrón que avanza en el tiempo. Los eventos pueden ser vistos así: Primero, en el tiempo t_1 se crea un par e^+e^- ; en un tiempo posterior t_2 , el e^+ se aniquila con el e^- incidente, mientras el e^- del par creado abandona la región de potencial. En el segundo diagrama, la trayectoria entre t_1 y t_2 aparecen tres partículas, los electrones inicial y final y el positrón, todos de energía positiva. Esto sólo se puede interpretar por la presencia de antipartículas en la teoría, [25].

Esta interpretación sugirió luego de que Dirac formulara su ecuación. Aunque esta descripción nos permite evitar los problemas con la interpretación probabilística a expensas de introducir las antipartículas en la teoría, todavía no nos dice nada del espín del electrón. Este surge de manera natural en la ecuación de Dirac, como veremos ahora.

2.1.3 Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac es una forma de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, covariante bajo transformaciones de Lorentz, la cual interpreta de manera satisfactoria la soluciones de energía negativa encontradas en la ecuación de Klein-Gordon y que no exhibe problemas con la interpretación probabilística de la función de onda. La observación de Dirac para construir esta ecuación es la siguiente: Si el Hamiltoniano es lineal en E , debe serlo también en \mathbf{p} , debido a la covariancia de Lorentz. De igual forma, si la ecuación es lineal en la derivada temporal, tendrá que serlo también en las derivadas espaciales, *i.e.*,

$$i \partial_t \psi(x, t) = -i \sum_{i=1}^3 \left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m \right) \psi(x, t). \quad (2.11)$$

Los coeficientes α_i y β son determinados por condiciones físicas. Cada una de las soluciones de la ecuación debe ser también solución de la ecuación de Klein-Gordon, para seguir siendo una ecuación relativista, es decir, cada una satisface la relación $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, lo cual lleva a que aparezcan cierto tipo de restricciones sobre los coeficientes α_i y β .

Sea

$$i \frac{\partial}{\partial t} = \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m \right]$$

$$\implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) - \beta m \right] \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m \right] \psi$$

$$= \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + im(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \beta^2 m^2 \psi. \quad (2.12)$$

Si comparamos con la ecuación de Klein-Gordon (2.10), requerimos que

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad i \neq j, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0. \quad (2.13)$$

Estas relaciones no pueden satisfacerse con números ordinarios. Se pueden representar con matrices. Por ejemplo, en términos de las matrices de Pauli σ_i , consideremos.

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_{i2 \times 2} \\ \sigma_{i2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Con estas matrices, verificaremos las relaciones en (2.13):

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_j \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix} = 2\delta_{ij}, \\ \alpha_i^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \beta^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

de modo que esta representación es útil para escribir la ecuación de Dirac.

Definamos ahora la forma covariante de la ecuación de Dirac. Comenzamos escribiendo

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi.$$

Multiplicando por β y usando la propiedades (2.13), encontramos que

$$i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta^2 m) \psi \equiv (-i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi,$$

esto es

$$i \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi - m \psi = 0. \quad (2.16)$$

La formulación covariante de la ecuación de Dirac se hace definiendo un conjunto de matrices que mezclan α_i y β , que poseen una propia relación de anticonmutación. Sea el cuadrivector, $\gamma^\mu = (\beta, \beta \boldsymbol{\alpha}) \equiv (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}^i)$, que verifica las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 0 & \mu \neq \nu & \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \\ (\gamma^0)^2 &= 1 \\ (\boldsymbol{\gamma}^i)^2 &= -1 & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aquí hemos hecho las convenciones de que los índices griegos corren de 0 a 3, y los latinos de 1 a 3. En forma compacta, estas relaciones se escriben como

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. La forma covariante de la ecuación de Dirac para una partícula libre nos queda entonces

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (2.19)$$

Su corriente de probabilidad asociada es $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. La corriente se conserva, $\partial_\mu j^\mu = 0$, y en este caso,

$$\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \quad (2.20)$$

es positiva definida. Esto salva el problema de las probabilidades negativas de la ecuación de Klein-Gordon. Es común seguir la prescripción $j_\mu \rightarrow j'_\mu = -e j_\mu$ e interpretar a j_μ como la cuadri-corriente eléctrica asociada al electrón. Nosotros adoptaremos esta convención.

La solución a la ecuación de Dirac puede escribirse como

$$\psi(x) = e^{-ip_\mu x^\mu} u(p), \quad (2.21)$$

donde $u(p)$ es un *espinor de Dirac* de 4 componentes

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix},$$

con u_A y u_B las dos componentes espinoriales. Ya que $\partial_\mu \psi(x) = -i p_\mu \psi(x)$, es más fácil resolver la ecuación de Dirac en espacio de momentos, donde toma la forma

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0.$$

El problema que persiste es que existen aún soluciones con energía negativa o positiva, como veremos a continuación. Para encontrar los eigenvalores de la energía, lo que hacemos es escribir la ecuación (2.11) en espacio de momentos,

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu. \quad (2.22)$$

En el sistema en reposo de la partícula, $\mathbf{p} = 0$, tenemos simplemente que

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & -m\mathbf{I} \end{pmatrix} u = Eu, \quad (2.23)$$

donde los eigenvalores de energía son $E = m, m, -m, -m$, dos positivos y dos negativos. Sus eigenvectores correspondiente están dados por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las primeras dos soluciones describen al electrón con energía positiva, y las otras dos soluciones, donde la partícula tiene energía negativa son interpretadas como antipartícula (positrón) con energía positiva.

Para resolver la ecuación en un sistema de referencias arbitrario, debemos resolver

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{I} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B &= (E - m)u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A &= (E + m)u_B. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para las soluciones con energía positiva, tomamos $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ donde

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

con $s = 1, 2$. Dadas estas condiciones, la segunda ecuación en (2.25) implica

$$u_B^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)}. \quad (2.27)$$

Así, la solución del espinor de Dirac de 4 componentes, u , la podemos escribir como

$$u = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0. \quad (2.28)$$

Para las soluciones con energía negativa, tomamos ahora $u_B^{(s)} = \chi^{(s)}$, de modo que tenemos

$$u_A^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} u_B^{(s)} = -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^{(s)}. \quad (2.29)$$

Así, escribimos

$$u_B^{(s+2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0. \quad (2.30)$$

Para el electrón, tenemos entonces cuatro soluciones. Las primeras dos soluciones de la ecuación de Dirac

$$\psi^{(1,2)}(x) = u^{(1,2)}(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu}, \quad (2.31)$$

describen a un electrón libre con energía $E > 0$ y momento \mathbf{p} con energía positiva, cuyo espinor es $u^{(1,2)}$. Las otras dos soluciones con energía negativa, $u^{(3,4)}$, están asociadas a las antipartículas. El positrón con energía E y momento \mathbf{p} se puede describir con las soluciones para el electrón con energía $-E$ y momento $-\mathbf{p}$ identificando

$$u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) e^{-i(-p_\mu)x^\mu} \equiv v^{(2,1)}(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu},$$

de modo que el positrón tiene asociados los espinores $v^{(2,1)}$. La ecuación de Dirac que satisfacen estos espinores se obtienen de la siguiente forma: en espacio de momentos, tenemos

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0.$$

para la energía negativa $-E$ y momento $-\mathbf{p}$, esta ecuación toma la forma

$$(-\not{p} - m)u(-\mathbf{p}) = 0,$$

o bien, para el positrón con energía E y momento \mathbf{p} con espinor v , la ecuación de Dirac es

$$(\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0.$$

Ahora describiremos el momento angular intrínseco (espín) de estas soluciones. Observemos que el momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

no conmuta con el Hamiltoniano:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{L}] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}),$$

lo que implica que \mathbf{L} no es conservado. Esto señala que debemos buscar otro tipo de momento angular que se conserve. Sea

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Las componentes de esta matriz, por su estructura, obedecen las relaciones de conmutación canónicas de momento angular, así que ésta representa un momento angular intrínseco, cuyos eigenvalores son $\pm 1/2$. Es fácil ver que

$$[\mathbf{H}, \boldsymbol{\Sigma}] = 2i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}),$$

por lo que separadamente ni \mathbf{L} ni $\boldsymbol{\Sigma}$ se conservan. Si hacemos una combinación lineal

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma},$$

el momento angular total \mathbf{J} sí se conserva:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{J}] = 0.$$

Así concluimos que las soluciones a la ecuación de Dirac representan fermiones de espín semientero. El número cuántico que nos permitirá etiquetar estas soluciones es la helicidad S , que es la proyección del espín a los largo de la dirección del momento, $S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$, cuyos eigenvalores llamamos λ y pueden tomar los valores $\pm 1/2$. Vemos que un positrón con energía $E > 0$, momento \mathbf{p} y helicidad λ se puede visualizar como un electrón con $E < 0$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, pero helicidad λ .

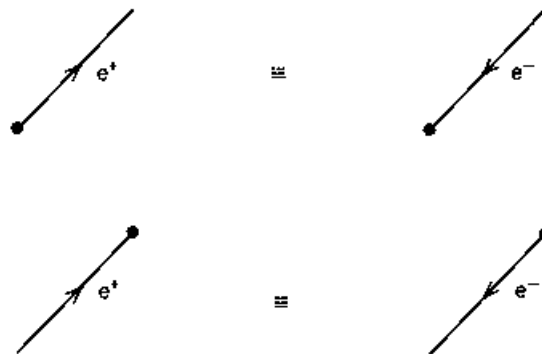


Figura 2.3. Equivalencia entre soluciones con energía positiva y negativa del electrón (energía positiva del positrón)

En la discusión anterior vimos cómo el problema de las densidades de probabilidad negativas de la ecuación de Klein-Gordon quedó resuelto en la ecuación de Dirac. También entendimos cómo relacionar las soluciones para una partícula de energía negativa con soluciones para antipartícula de energía positiva. Del mismo modo, observamos que en esta ecuación surge de manera natural el espín del electrón, por lo que es la ecuación de Dirac la que describe exitosamente a los electrones. En la siguiente sección estudiaremos la dinámica del campo electromagnético, que se describe mediante las ecuaciones de Maxwell.

2.2 Ecuaciones de Maxwell

Los fenómenos electromagnéticos clásicos en el vacío se pueden describir a partir de cuatro ecuaciones, llamadas ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t), & (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, & (\text{Ley de Gauss magnética}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & (\text{Ley de Faraday}) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), & (\text{Ley de Àmpere})\end{aligned}\quad (2.32)$$

donde los campos vectoriales involucrados son campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Estos campos forman el campo electromagnético. Las dos ecuaciones con rotacional (Faraday y Àmpere), aseguran que hay dependencia mutua entre campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo. Sólo en el caso de campos estáticos (que no varían con el tiempo) campo eléctrico y magnético son independientes entre sí. Llamamos fuentes de campos a los sistemas físicos que crean campos en el espacio. En el caso electromagnético, cargas y corrientes eléctricas crean campos. En las ecuaciones de Maxwell, las fuentes de campo son $\rho(\mathbf{r}, t)$, la densidad de carga eléctrica y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, la densidad de corriente eléctrica. Todas las cantidades que intervienen en las ecuaciones de Maxwell son, en general, funciones de la posición y del tiempo. Para este es un conjunto de ecuaciones diferenciales vectoriales lineales acopladas inhomogéneas, en general, su solución es bastante complicada encontrar.

En el vacío es posible hayar una solución general de la ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales electrodinámicos, el potencial vectorial \mathbf{A} y escalar ϕ , que definimos a partir \mathbf{E} y \mathbf{B} como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.34)$$

En términos de los potenciales, las ecuaciones homogéneas de Maxwell se pueden reescribir de la forma

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.35)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.36)$$

que pueden desacoplarse eligiendo en forma conveniente los potenciales. Hay que notar que si hacemos las transformaciones, llamadas transformaciones de norma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t), \quad \phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.37)$$

los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (2.33) y (2.34) no cambian:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \left[\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A} + \nabla \Lambda] = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \mathbf{B}.$$

Esto indica que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma.

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) pueden escribirse en forma covariante, al igual que las transformaciones de norma (2.37), introduciendo los cuadvectores $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ y $A^\nu = (\phi, \mathbf{A})$. Las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37) se escriben covariantemente como

$$\square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu, \quad (2.38)$$

$$A'^\nu = A^\nu + \partial^\nu \Lambda. \quad (2.39)$$

Para las ecuaciones de Maxwell no homogéneas, observamos que su forma covariante es

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, \quad (2.40)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico de intensidad del campo, que podemos escribir de la forma

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu. \quad (2.41)$$

Nos damos cuenta que los potenciales $\mathbf{A}(x, t)$ y $\phi(x, t)$ no son independientes entre sí, sino que están relacionados con al llamada condición de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r, t) + \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.42)$$

o, covariantemente,

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (2.43)$$

Con la condición de Lorentz impuesta a los potenciales electrodinámicos, las ecuaciones de Maxwell llevan a las siguientes ecuaciones de onda vectoriales desacopladas, inhomogéneas para éstos,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.44)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(r, t) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}(r, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.45)$$

que en su forma covariante se escriben como

$$\square^2 A^\nu = j^\nu. \quad (2.46)$$

Si aplicamos una transformación de norma del tipo (2.37) a las ecuaciones vectoriales (2.44) y (2.45) y demandamos su covariancia, llegamos a una restricción para la función de norma, que toma la forma de una ecuación de onda homogénea

$$\square^2 \Lambda = 0. \quad (2.47)$$

La clase de funciones de norma que satisfacen esta ecuación garantiza la invariancia de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} bajo transformaciones de norma.

En la teoría cuántica, A^ν se identifica con la función de onda del fotón, que en ausencia de fuentes satisface

$$\square^2 A^\nu = 0. \quad (2.48)$$

Su solución es de la forma

$$A^\nu = \varepsilon^\nu(p_\nu) e^{-i p_\nu x^\nu} \quad (2.49)$$

donde ε^μ es el cuadrivector de polarización de el fotón. Ya que A^ν satisface la ecuación de onda homogénea (2.48), la forma de esta solución implica que

$$p^2 = 0 \quad \implies \quad m_\gamma = 0. \quad (2.50)$$

Una función de onda vectorial, es decir, de 4 grados de libertad, se antoja demasiado «grande» para describir a una partícula de espín 1. Nuestra meta es reducir los grados de libertad independientes del vector de polarización del fotón para que ajuste a su descripción. Si consideramos la condición de Lorentz, descrita en $\partial_\nu A^\nu = 0$, llegamos a la restricción de que

$$p_\nu \varepsilon^\nu = 0,$$

lo que reduce el número de componentes independientes de ε^ν a tres. Realizamos ahora una transformación de norma eligiendo en (2.47)

$$\Lambda = i a e^{-i p_\nu x^\nu},$$

donde a es constante. Al considerar esta transformación de norma, el vector de polarización resultante se transforma como

$$\varepsilon_\nu \longrightarrow \varepsilon'_\nu = \varepsilon_\nu + a p_\nu.$$

Ahora, tenemos que ε_μ y ε'_μ cambian entre sí por un término extra proporcional a p_μ . Ambos describen al mismo fotón, de modo que podemos usar esta libertad y tomar $\varepsilon^0 = 0$. Entonces la condición de Lorenz antes mencionada (2.43) nos da simplemente

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p} = 0,$$

relación que reduce a 2 vectores de polarización independientes para el fotón. Estos dos grados de libertad se asocian con las dos posibles polarizaciones que puede tener una onda electromagnética. Por ejemplo, para un fotón viajando a lo largo del eje z , podemos tomar

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0),$$

para describir un fotón libre con polarización a lo largo de $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, de espín 1 y momento \boldsymbol{p} . Podemos, igualmente, considerar la base de polarización circular, observando que las combinaciones lineales

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + i\boldsymbol{\varepsilon}_2), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_L = \sqrt{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - i\boldsymbol{\varepsilon}_2),$$

son invariantes bajo rotaciones θ alrededor del eje z . Los vectores $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ describen a un fotón del helicidad $+1$ o -1 , respectivamente.

A nivel fundamental, consideramos la interacción entre electrones como un intercambio de fotones. Dichos intercambios se describen en términos de los propagadores para las partículas involucradas. En la siguiente sección discutiremos los propagadores de Klein-Gordon, Dirac y del Fotón y el Lagrangiano del cual derivamos estos propagadores.

2.3 Lagrangiano de QED

Así como en el Lagrangiano clásico, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange encontramos las ecuaciones de movimiento clásico, podemos encontrar con el Lagrangiano de QED, con sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento correspondientes.

El Lagrangiano de Dirac toma la forma

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi.$$

En este Lagrangiano se pueden incluir las interacciones de los electrones con los campos eletromagnéticos haciendo la sustitución mínima

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

Por otro lado, el Lagrangiano del campo electromagnético que nos permite encontrar un propagador invertible es

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

donde ξ es el parámetro que fija la norma. Entonces el Lagrangiano de QED es

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i(\not{\partial} + e\not{A}) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.51)$$

Notemos que éste es invariante bajo las transformaciones simultáneas

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{ie\Lambda(x)}, \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)}, \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x), \end{aligned}$$

es decir, tiene una simetría de norma Abeliana $U(1)$. Aunque estamos trabajando en (2+1) dimensiones, donde surgen algunas peculiaridades relacionadas con las simetrías discretas de Paridad e Inversión temporal, como la posibilidad de considerar en este Lagrangiano términos de masa para el fermión que violan estas simetrías y el término Chern-Simons que induce término de masa invariante de norma para el fotón, con todas sus implicaciones y aplicaciones [11]

, en esta tesis nos enfocaremos en solamente en el Lagrangiano con la forma dada en (2.51), que es invariante bajo Paridad. Estamos particularmente interesados en la ruptura dinámica de la simetría quiral de este Lagrangiano. Para entender el origen de la simetría quiral, definamos

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

que verifica las siguientes propiedades:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = I.$$

Si realizamos la transformación, llamada transformación quiral,

$$\psi \longrightarrow \psi e^{i\theta\gamma^5}, \quad (2.52)$$

asociada a ella tenemos la corriente quiral $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, que satisface

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi,$$

es decir, en el caso no masivo, $m = 0$, esta corriente quiral se conserva y la transformación (2.52) implica que la simetría quiral es una simetría del Lagrangiano. En Capítulos posteriores describiremos la manera en que, comenzando con fermiones no masivos, las autointeracciones estas partículas permiten romper de manera dinámica la simetría quiral, otorgándoles masa a los fermiones.

La herramienta necesaria para estudiar esta ruptura de simetría son las funciones de Green de QED, particularmente los propagadores. A continuación estudiaremos cómo obtener dichos propagadores a partir del Lagrangiano (2.51).

2.4 Interacciones

Supongamos que queremos describir un sistema físico mediante una teoría cuántica de campos. Por ejemplo, un sistema de fermiones con interacciones, que se pueden describir por medio de uno o varios campos ϕ y una serie de parámetros. El objeto fundamental de estudio es el propagador correspondiente. Las funciones de Green de las ecuaciones de onda relativista, llamadas también propagadores, sirven para resolver dichas ecuaciones en presencia de potenciales de interacción mediante el método de Green. Utilizaremos este método para encontrar los propagadores correspondientes en QED.

2.4.1 Propagador de Klein-Gordon

Si consideramos la ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético descrito por el cuadripotencial A_μ , ahora el operador momento p_μ debe reemplazarse, mediante la sustitución mínima, de la forma $p_\mu \rightarrow p_\mu - e A_\mu$, de modo que obtenemos

$$[(p^\mu - e A^\mu)(p_\mu - e A_\mu) - m^2]\phi = 0, \quad (2.53)$$

o, análogamente,

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2]\phi = -V\phi, \quad (2.54)$$

con

$$V\phi = i e (\partial^\mu A_\mu + \partial_\mu A^\mu)\phi - e^2 A^\mu A_\mu \phi. \quad (2.55)$$

Si tratamos de resolver esta ecuación con el método de Green, debemos construir $G_{KG}(x, y)$ tal que

$$(\square^2 + m^2)G_{KG}(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (2.56)$$

y resolver la ecuación de Klein-Gordon en su forma integral

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y G_{KG}(x, y)V(y)\phi(y), \quad (2.57)$$

donde ϕ_0 satisface la ecuación homogénea de Klein-Gordon. Para verificar específicamente que G_{KG} nos resuelve la ecuación en presencia del campo, aplicamos el operador de Klein-Gordon a ϕ ,

$$\begin{aligned} (\square^2 + m^2)\phi &= - \int d^4y (\square^2 + m^2)G_{KG}(x, y)V(y)\phi(y) \\ &= \int d^4y \delta^4(x - y)V(y)\phi(y) = -V(x)\phi(x), \end{aligned}$$

lo que lo demuestra. Para encontrar entonces $G_{KG}(x, y)$, la representación del espacio de momentos será totalmente adecuada. Tomamos la transformada de Fourier $S_{KG}(p)$ de $G_{KG}(x, y)$

$$G_{KG}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_{KG}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.58)$$

Aplicando el operador de Klein-Gordon, tenemos

$$\begin{aligned} (\square^2 + m^2)G_{KG}(x, y) &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_{KG}(p) (\square^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_{KG}(p) (p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} = \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (2.59)$$

así que si $S_{KG}(p)(p^2 - m^2) = 1$, tenemos en la última igualdad la representación integral de δ^4 . Por lo tanto,

$$S_{KG}(p)(p^2 - m^2) = 1 \quad \implies \quad S_{KG}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad p^2 \neq m^2. \quad (2.60)$$

$S_{KG}(p)$ es el propagador de Klein-Gordon. Vemos que cuando $p^2 = m^2$, encontramos una singularidad, tipo polo. Decimos entonces que la masa de la partícula está determinada por el polo del propagador.

Encontrar el propagador, o la función de Green en la ecuación diferencial de la dinámica, nos permite conocer las propiedades de propagación de las partículas cargadas, considerando sus interacciones con un campo electromagnético. En la siguiente sección aplicaremos el mismo método para ver cuál es el propagador de la ecuación de Dirac.

2.4.2 Propagador de Dirac

Si ahora tomamos la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético, obtenemos

$$((i\not{\partial} + e\not{A}) - m)\psi = 0, \quad (i\not{\partial} - m)\psi = -e\not{A}\psi. \quad (2.61)$$

donde hemos utilizado la notación $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$. Construimos $G(x, y)$ tal que

$$(i\not{\partial} - m)G(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (2.62)$$

y resolvemos la ecuación de Dirac en forma integral. Tomando una ψ_0 que satisfaga la ecuación homogénea, esta ecuación es

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y G(x, y) e\not{A}\psi(y). \quad (2.63)$$

Verificamos que $G(x, y)$ resuelve la ecuación de Dirac en este caso:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = \int d^4y (i\not{\partial} - m)G(x, y) e\not{A}\psi(y) = \int d^4y \delta^4(x - y) e\not{A}\psi(y) = -e\not{A}\psi. \quad (2.64)$$

Establecido esto, al igual que antes, tomamos la transformada de Fourier de $G(x, y)$

$$G(x, y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.65)$$

Aplicamos el operador de Dirac a $G(x, y)$ y encontramos que

$$(i\not{\partial} - m)G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\not{p} - m]S(p) e^{-ip \cdot (x-y)} = \delta^4(x - y). \quad (2.66)$$

Como en el caso anterior, si $(\not{p} - m)S(p) = 1$, tendríamos la representación integral de δ^4 en la última igualdad. Por lo tanto,

$$S(p)[\not{p} - m] = 1; \quad \implies \quad S(p) = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (2.67)$$

Esto último es un abuso de notación, ya que \not{p} es una matriz y no podemos tenerla en el denominador. Lo que sí tiene sentido y está bien representado es:

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad \text{para} \quad p^2 \neq m^2, \quad (2.68)$$

ya que $\not{p}^2 = p^2$. De aquí en adelante cuando haya términos de la forma (2.47) estaremos pensando en que se tiene que operar de la forma que se hizo en (2.48). Nuevamente, el polo del propagador determina la masa de la partícula que éste describe. Finalmente veremos cómo obtener el propagador del fotón.

2.4.3 Propagador del Fotón

Antes de encontrar el propagador fotón y entender la necesidad de incluir en el Lagrangiano correspondiente un término que fija la norma, veremos como encontrar el propagador de Klein-Gordon y Dirac de un modo más simple a partir de sus Lagrangianos correspondientes.

Tomemos el Lagrangiano de de Klein-Gordon

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

El propagador de Klein-Gordon se puede leer directamente del Lagrangiano, cuando este se escribe de manera conveniente [Greiner]. Si consideramos la acción

$$\begin{aligned} S &= \int dt \int d^3x \mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi \\ &\implies \mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = \frac{1}{2} \phi S_{\text{KG}}^{-1}(x) \phi, \end{aligned}$$

entonces, el propagador inverso es

$$S_{\text{KG}}^{-1}(x) = \partial_\mu \partial^\mu - m^2,$$

De este modo, la transformada de Fourier de $S_{\text{KG}}^{-1}(x)$ es precisamente el inverso del propagador de Klein-Gordon en el espacio de momentos

$$S_{\text{KG}}^{-1}(p) = p^2 - m^2 \quad \implies \quad S_{\text{KG}}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}.$$

Lo mismo hacemos para obtener el propagador de Dirac. Tomamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi.$$

El propagador de Dirac lo podemos leer directamente de este Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi = \bar{\psi} S_D^{-1}(x) \psi, \\ &\implies S_D^{-1}(x) = (i\not{\partial} - m), \end{aligned}$$

cuya transformada de Fourier es

$$S_D^{-1}(p) = \not{p} - m \quad \implies \quad S_D(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}.$$

Para obtener el propagador del fotón, comenzamos con el Lagrangiano de Maxwell ordinario

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{4}[\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu] \\
&= \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0,$$

pueden reescribirse de la forma

$$[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]A^\mu = 0. \tag{2.70}$$

Si queremos la función de Green de esta expresión, para encontrar el propagador del fotón $\Delta_{\mu\nu}$ correspondiente, debemos resolver

$$[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]\Delta^{(-1)\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda\delta(x-y). \tag{2.71}$$

Notemos que al operar con ∂^μ sobre esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial^\mu[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]\Delta^{(-1)\nu\lambda}(x-y) &= \partial^\lambda\delta(x-y) \\
[(\square\partial_\nu - \partial_\nu\square)\Delta^{(-1)\nu\lambda}(x-y)] &= (0 \cdot \partial_\nu)\Delta^{\nu\lambda} = \partial^\lambda\delta(x-y),
\end{aligned} \tag{2.72}$$

lo que implica que $\Delta^{\nu\lambda}(x-y)$ no tiene inverso. Esto es porque el operador $[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]$ no tiene inverso. Para resolver este problema, debemos incluir un término adicional en el Lagrangiano, el término que fija la norma. Algunas elecciones comunes para fijar la norma son

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \quad \text{Norma de Coulomb,} \\
A^0 &= 0 \quad \text{Norma Temporal,} \\
A^3 &= 0 \quad \text{Norma Axial.}
\end{aligned}$$

Si imponemos la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, podemos escribir el Lagrangiano de Maxwell como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu g_{\mu\nu}\square A^\nu.$$

El operador $g_{\mu\nu}\square$ sí tiene inverso, lo conocemos como propagador de Feynman

$$\Delta_F(x, y)_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\Delta_F(x, y, m=0). \tag{2.73}$$

Ahora, incluimos un término que fija la norma al Lagrangiano, esto es, consideramos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu \tag{2.74}$$

donde ξ es el parámetro que fija la norma. Cuando $\xi = 1$, decimos que estamos trabajando en la norma de Feynman, y si $\xi = 0$, en la norma de Landau. El inverso propagador completo está definido por

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu,$$

cuya transformada de Fourier es

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = -p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)p_\mu p_\nu. \quad (2.75)$$

Ahora, el propagador tiene la forma

$$\Delta^{\nu\gamma} = A(p^2) g^{\nu\gamma} + B(p^2) p^\nu p^\gamma, \quad (2.76)$$

donde A y B son funciones desconocidas. Junto con su inverso, satisfacen

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(\Delta^{\nu\gamma}) = g^\gamma{}_\mu. \quad (2.77)$$

Si hacemos la contracción, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{-1}(\Delta^{\nu\gamma}) &= \left\{ -p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)p_\mu p_\nu \right\} \{A(p^2) g^{\nu\gamma} + B(p^2) p^\nu p^\gamma\} \\ &= -p^2 A(p^2) g^\gamma{}_\mu - p^2 B(p^2) p^\mu p^\gamma + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)A(p^2) p_\mu p^\gamma + B(p^2) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)p^2 p_\mu p^\gamma \\ &= -p^2 A(p^2) g^\gamma{}_\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)A(p^2) p_\mu p^\gamma + \frac{1}{\xi}B(p^2) p^2 p_\mu p^\gamma = g^\gamma{}_\mu, \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} -p^2 A(p^2) = 1 &\implies A(p^2) = -\frac{1}{p^2} \\ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)A(p^2) + \frac{1}{\xi}B(p^2)p^2 = 0 &\implies B(p^2) = \frac{(1-\xi)}{p^4}. \end{aligned}$$

Sutituyendo estos coeficientes, en el propagador del fotón en una norma covariante arbitraria es

$$\Delta^{\nu\gamma}(p) = A(p^2) g^{\nu\gamma} + B(p^2) p^\nu p^\gamma = -\frac{1}{p^2} \left[g^{\nu\gamma} - \frac{(1-\xi)}{p^2} p^\nu p^\gamma \right]. \quad (2.78)$$

Esto completa nuestro estudio de los propagadores. En el siguiente capítulo veremos las ecuaciones de Schwinger-Dyson y aprenderemos las características generales del fenómeno de la Generación Dinámica de Masas a través de las soluciones a estas ecuaciones.

Capítulo 3

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

En esta tesis estudiamos fenómenos no perturbativos como la Generación Dinámica de Masas (GDM) mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [17]. En este capítulo veremos cómo surgen las ESD y cómo podemos estudiar con ellas el fenómeno de nuestro interés.

El Lagrangiano que describe las interacciones en QED es invariante bajo ciertas transformaciones llamadas de norma y depende de cierto parámetro de norma. Esta simetría se refleja por medio de las identidades de Ward-Green-Takahashi [26], que relacionan a las funciones de Green entre sí, y las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin [27] que relacionan a una función de Green en una norma particular y en otra norma covariante arbitraria. El esquema más conveniente para resolver teorías cuánticas de campos (TCC) es la teoría de perturbaciones, donde dichas identidades se satisfacen en cada orden de aproximación. El problema que surge es que no todos los fenómenos aparecen en el régimen perturbativo. El confinamiento, el problema de estados ligados y el origen de las masas son ejemplos de fenómenos no perturbativos. Una plataforma conveniente para estudiar estos fenómenos, además de las simulaciones de lattice, son las ESD, una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de la teoría en estudio, que deben truncarse a fin de obtener información física relevante. Uno de los problemas del truncamiento no perturbativo de las ESD es la pérdida de invarianza de norma, que empaña entonces el poder predictivo de estas ecuaciones: *Algunos fenómenos interesantes pueden surgir en una norma, pero están ausentes en todas las demás.* Aunque las ESD se derivan formalmente en la TCC, en esta tesis consideramos un enfoque más familiar para entender el contenido físico de estas ecuaciones en QED.

Los propagadores se modifican, a través de autointeracciones. Al propagador que representa la suma de todas las autointeracciones se le llama *propagador completo* y posee todas las propiedades de propagación del fermión. En el caso en que el propagador no emite ni absorbe fotones se le llama *propagador desnudo*. Existe una serie infinita de correcciones radiativas al propagador que, en términos de diagramas, se muestran a a continuación

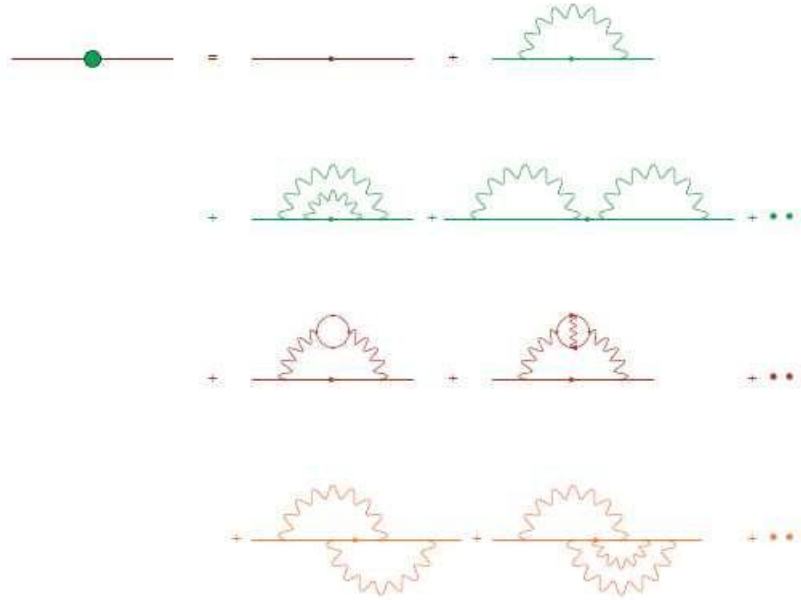


Figura 3.1. Correcciones radiativas al propagador del fermión

Estas correcciones radiativas al propagador del fermión en la teoría de perturbaciones se pueden agrupar en tres tipos de correcciones, al propagador del fermión, al del fotón y al vértice. Tal como aparecen, estas correcciones no se pueden sumar. Para este fin, definimos la autoenergía, representada por $\Sigma(p)$ y diagramáticamente

$$\Sigma(p) = \text{diagrama de autoenergía}$$

La autoenergía involucra todas las correcciones a las funciones de Green involucradas, como lo indican los puntos sobre las partes correspondientes en el diagrama. En términos de $\Sigma(p)$, expansión perturbativa para el propagador del fermión es

$$\text{diagrama de propagador} = \text{diagrama de propagador libre} + \text{diagrama de autoenergía} + \text{diagrama de autoenergía}^2 + \dots$$

Figura 3.2. Propagador del fermión en la teoría de perturbaciones en términos de la autoenergía

La figura 3.2 corresponde a la expansión

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \\ &= S_F^0(p)[1 + \Sigma(p)S_F^0(p) + \Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots], \end{aligned}$$

donde $S_F(p)$ representa al propagador completo y $S_F^{(0)}(p)$ su contraparte desnuda. La expresión entre corchetes es una serie geométrica, que se suma a

$$S_F(p) = S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right]. \quad (3.1)$$

Ahora, si dejamos $S_F^0(p)$ aparte y factorizamos a partir del siguiente término, tenemos

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) [1 + \Sigma(p)S_F^0 + \Sigma(p)S_F^0\Sigma(p)S_F^0(p)\dots] \\ &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) \left\{ S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right] \right\} \\ &= S_F^0(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde hemos usado la ecuación (3.1) en la última línea. Esta es la ESD para el propagador del fermión. Es conveniente escribir la ecuación correspondiente al inverso de este propagador. Multiplicando a la izquierda por $S_F^{-1}(p)$, obtenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p).$$

Ahora, multiplicamos por $(S_F^0(p))^{-1}$ a la derecha, de modo que

$$S_F^{0-1}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p)$$

lo que implica

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0-1}(p) - \Sigma(p) \quad (3.3)$$

Esta es la ESD que corresponde a la función de Green de dos puntos del fermión y se representa en la Figura (3.3).



Figura 3.3. ESD para el propagador del fermión inverso

Las funciones de Green que aparecen en $\Sigma(p)$ obedece cada una a su ESD. Las correspondientes al propagador del fotón y al vértice se muestran en las Figuras (3.4) y (3.5).



Figura 3.4. ESD para el propagador del fotón



Figura 3.5. ESD para el vértice fermión-fotón

Vemos que las funciones de Green de dos puntos están relacionadas con las de tres puntos, la de tres puntos con las de dos y la de cuatro puntos y así sucesivamente, hasta formar una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green.

Para poder extraer información física de las ESD, debemos truncar esta torre infinita de ecuaciones suponiendo alguna forma para las funciones de Green de varios puntos. Uno puede realizar este truncamiento en el régimen de acoplamiento débil, pero entonces no podemos estudiar GDM. Para estudiar este fenómeno, usualmente uno trunca la torre de ESD al nivel de los propagadores. En la próxima sección nos ocuparemos del estudio de las ESD para el propagador del fermión y las funciones de Green con las que está relacionado.

3.1 Estructura de las Funciones de Green

Veremos a continuación la estructura no perturbativa del propagador del fermión, del fotón y el vértice (S_F , $\Delta_{\mu\nu}$, y Γ^μ) y las ESD para el propagador del fermión que los relaciona.

3.1.1 Propagador del Fermión

El propagador completo del fermión, $S_F^{-1}(p)$, podemos expresarlo mediante una combinación lineal de matrices las matrices (4×4) 1 y \not{p} de la forma

$$S_F^{-1}(p) = A(p)\not{p} + B(p). \quad (3.4)$$

En esta tesis preferimos escribir este propagador como

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - M(p)} = \frac{F(p)(\not{p} + M(p))}{p^2 - M^2(p)}, \quad (3.5)$$

y llamamos a $F(p)$ la renormalización de la función de onda y a $M(p)$ es la función de masa. Obsérvese que cuando $M(p) = m$ y $F(p) = 1$, nos quedamos con el propagador desnudo (propagador de Dirac).

La ESD para el propagador del fermión en el espacio de Minkowski, usando reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned}
S_F^{-1}(p) &= S_F^{0-1}(p) - \Sigma(p) \\
&= S_F^{0-1}(p) - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k, p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $q = k - p$, e es el acoplamiento electromagnético, que en QED3 tiene dimensiones de masa, y $S_F^0(p)$ es el propagador desnudo

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \tag{3.7}$$

Cuando $m=0$, tenemos que $S_F^0(p)$ tiene un polo en $p=0$, al igual que $S_F(p)$ con $M(p)=0$. El fenómeno de la GDM toma lugar cuando la posición de este polo cambia de lugar debido a las autointeracciones.

3.1.2 Estructura del Propagador del Fotón

El propagador completo del fotón está dado por

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = - \left[\frac{\mathcal{G}(q)}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right], \tag{3.8}$$

donde $\mathcal{G}(p)$ es la renormalización de la función de onda del fotón y ξ es el parámetro de norma covariante. $\mathcal{G}(q) = 1$ corresponde al propagador desnudo $\Delta_{\mu\nu}^0(q)$, cuya expresión es

$$\Delta_{\mu\nu}^0(q) = - \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \tag{3.9}$$

Vemos que este propagador diverge en el infrarrojo como $1/q^2$, enfatizando que el fotón no tiene masa.

3.1.3 Estructura del Vértice

El vértice $\Gamma^\mu(k, p)$ de la interacción de fermiones con fotones se puede construir de una combinación lineal de la forma

$$\Gamma^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_i^\mu, \tag{3.10}$$

de los siguientes vectores base

$$\begin{aligned}
V_1^\mu &= \gamma^\mu & , & & V_2^\mu &= k^\mu & , & & V_3^\mu &= p^\mu & , \\
V_4^\mu &= \not{k} \gamma^\mu & , & & V_5^\mu &= \not{k} k^\mu & , & & V_6^\mu &= \not{k} p^\mu & , \\
V_7^\mu &= \not{p} \gamma^\mu & , & & V_8^\mu &= \not{p} k^\mu & , & & V_9^\mu &= \not{p} p^\mu & ,
\end{aligned}$$

En esta aproximación, con una forma educada del vértice, podemos resolver la ESD para el propagador del fermión de forma autoconsistente. Quizás la forma más simple para el vértice consiste en tomar

$$\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu, \quad (3.14)$$

lo que se conoce como *aproximación arcoiris*. Esto debido a que en el régimen acoplamiento débil, el propagador completo toma la forma



Figura 3.7. Propagador del Fermión en la aproximación arcoiris

La ESD para la aproximación arcoiris es pictóricamente



Figura 3.8. ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris

que es equivalente a las expresiones

$$\frac{M(p)}{F(p)} = -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}^0(q) \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{ie^2}{3p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\not{p} \gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}^0(q). \quad (3.16)$$

Para proseguir con el análisis, debemos tomar en cuenta algunas de las propiedades de las trazas de las matrices γ^μ que usaremos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta] = \text{Tr}[\# \text{ impar}] = 0, \\ \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] &= 3g^{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\nu] &= 3[g^{\alpha\beta} g^{\delta\nu} - g^{\alpha\delta} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\delta}]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Entonces, tomando la traza correspondiente en (3.15), vemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}^0(q) &= 3g^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}^0 M(k) \\ &= g^{\mu\nu} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right] M(k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q^2}(-3 + (1 - \xi))M(k) = -\frac{(\xi + 2)}{q^2}M(k), \quad (3.18)$$

así que tenemos que esta expresión se reduce a

$$\frac{M(p)}{F(p)} = -ie(\xi + 2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{q^2(k^2 - M^2(k))}. \quad (3.19)$$

Tomamos ahora la traza correspondiente a (3.16), de modo que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{p}\gamma^\mu(\not{k} + M(k))\gamma^\nu] &= \text{Tr}[p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu k_\beta\gamma^\beta\gamma^\nu] \\ &= p_\alpha k_\beta \text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] \\ &= 3p_\alpha k_\beta [g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}], \end{aligned}$$

que al contraer con el propagador del fotón se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{p}\gamma^\mu(\not{k} + M(k))\gamma^\nu]\Delta_{\mu\nu}^0(q) &= 3p_\alpha k_\beta (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}) \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right) \\ &= \frac{3p_\alpha k_\beta}{q^2} [-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}g_{\mu\nu}] \\ &\quad + \frac{3p_\alpha k_\beta}{q^4} [g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}q_\mu q_\nu - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}q_\mu q_\nu + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}q_\mu q_\nu](1 - \xi) \\ &= \frac{3}{q^2}(2 + \xi)(k \cdot p) + \frac{2(\xi - 1)}{q^2}(k \cdot q)(p \cdot q), \end{aligned}$$

y al sustituir en la expresión correspondiente nos da

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{ie^2}{3p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{q^2(k^2 - M^2(k))} \left[(k \cdot p)\xi - \frac{2}{q^2}(k \cdot q)(p \cdot q)(1 - \xi) \right]. \quad (3.20)$$

Ahora, debemos hacer una rotación de Wick al espacio Euclideo, con las prescripciones

$$\begin{aligned} k_0 &\longrightarrow i k_0, & p_0 &\longrightarrow i p_0, & p^2 &\longrightarrow -p^2, \\ k^2 &\longrightarrow -k^2, & q^2 &\longrightarrow -q^2, & k \cdot p &\longrightarrow -k \cdot p, \\ \int d^3k &\longrightarrow i \int d^3k. \end{aligned}$$

Así, tenemos que en el espacio Euclideo,

$$\frac{M(p)}{F(p)} = e^2(\xi + 2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{q^2(k^2 + M^2(k))}. \quad (3.21)$$

Utilizando coordenadas esféricas tales que el elemento de volumen es $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$, elegimos $k^\mu = (k \sin\theta \cos\varphi, k \sin\theta \sin\varphi, k \cos\theta)$ de modo que θ es el ángulo azimutal, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{F(p)} &= \frac{e^2(\xi+2)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{e^2(\xi+2)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos\theta} \\ &= e^2 \frac{(\xi+2)}{4\pi^2 p} \int_0^\infty dk \frac{k F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Análogamente, para $F(p)$ encontramos

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{e^2 \xi}{4\pi^2 p} \int_0^\infty dk \frac{k^2 F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[1 - \frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \right]. \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) son el resultado de truncar la ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris en una norma covariante arbitraria. Observemos que en la norma de Landau ($\xi = 0$) estas ecuaciones de desacoplan, pues $F(p) = 1$. En este caso, el sistema se reduce a una sola ecuación:

$$M(p) = \frac{e^2}{2\pi^2 p} \int_0^\infty dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|.$$

Vemos trivialmente que $M(p) = 0$ es solución de esta ecuación, lo que implicaría que el polo del propagador sigue estando en $p = 0$. Cualquier solución no trivial para $M(p)$ implicaría que la posición del polo se ha movido, indicándonos que se ha generado masa dinámicamente. Para tratar de encontrar esta solución no trivial, haremos algunas simplificaciones que nos permitan realizar un tratamiento analítico. Haciendo la aproximación

$$\ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \simeq \frac{2p}{k} \Theta(k-p) + \frac{2k}{p} \Theta(p-k),$$

que es válida para $k \gg p$ y $k \ll p$, tenemos

$$M(p) = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^p dk \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} + \frac{e^2}{\pi^2 p^2} \int_p^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \quad (3.24)$$

expresión que se puede convertir en una ecuación diferencial con condiciones de frontera. Derivando,

$$\frac{dM(p)}{dp} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{M(p)}{p^2 + M^2(p)} - \frac{e^2}{\pi^2} \frac{M(p)}{p^2 + M^2(p)} - \frac{2e^2}{\pi^2 p^2} \int_p^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}$$

$$= -\frac{2e^2}{\pi^2 p^3} \int_p^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)},$$

Que nos conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{2e^2}{\pi^2} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (3.25)$$

con las condiciones de frontera

$$p^3 \frac{dM(p)}{dp} \Big|_{p=0} \longrightarrow 0, \quad M(p) \Big|_{p=\infty} \longrightarrow 0. \quad (3.26)$$

Para $p^2 \gg M^2(p)$, la ecuación linealizada se simplifica de la forma

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{2e^2}{\pi^2} M(p), \quad (3.27)$$

que es una ecuación diferencial de tipo Bessel, cuya solución más general es

$$M(p) = \frac{4e^2}{\pi^2 p} \left[C_1 J_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right) + C_2 Y_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right) \right] \quad (3.28)$$

donde J_2 y Y_2 son las funciones de Bessel de orden 2 del primero y segundo tipo. Las condiciones de frontera implican $C_2=0$, de modo que la función de masa se reduce a

$$M(p) = C_1 \frac{4e^2}{\pi^2 p} J_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right), \quad (3.29)$$

donde la constante C_1 no se puede determinar de la ecuación diferencial. En el límite $p \rightarrow \infty$, vemos que

$$M(p) = C_1 \frac{4e^4}{p^2 \pi^4}. \quad (3.30)$$

Esto nos permite hacer una conexión con los resultados provenientes de la expansión de productos de operadores (OPE), que señala que cuando una partícula se propaga en presencia de un condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, la función de masa correspondiente, cuando $p \rightarrow \infty$, se relaciona con este condensado de la forma [28]

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{p^2 M(p)}{2 + \xi}.$$

En la norma de Landau, tenemos

$$M(p)|_{p=\infty} \sim 2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{p^2} \implies C_1 \frac{4e^4}{p^2 \pi^4} = 2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{p^2},$$

de donde

$$C_1 = \frac{\pi^4 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{2e^4}, \quad (3.31)$$

así que la función de masa es

$$M(p) = \frac{2\pi^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{p e^2} J_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right). \quad (3.32)$$

De esta expresión observamos que tendríamos una solución no trivial siempre y cuando el condensado quiral sea no nulo. Este condensado proporcionan el medio «pegajoso» en el cual se propagan las partículas y adquieren masa. El condensado se forma por las autointeracciones de las partículas. Vemos además que cuando $p \rightarrow 0$, la función de masa se vuelve constante, y cae como $1/p^2$ cuando $p \rightarrow \infty$. Este comportamiento se ha estudiado en diferentes normas covariantes por varios autores [29, 30, 31]. Algunos aspectos del método numérico empleado en [30, 31] para este fin se presentan en el Capítulo 5. Todos estos trabajos demuestran que el comportamiento de la función de masa es el mismo en un cualquier norma covariante, Figuaras (3.9) y (3.10).

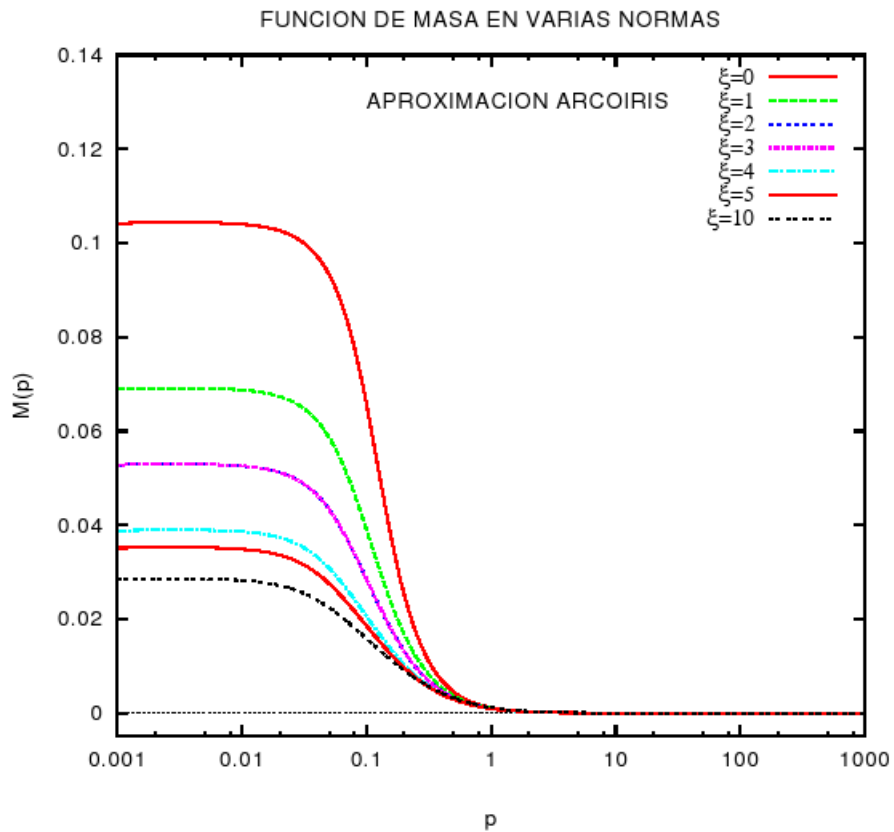


Figura 3.9. Función de masa $M(p)$ en la aproximación arcoiris en varias normas

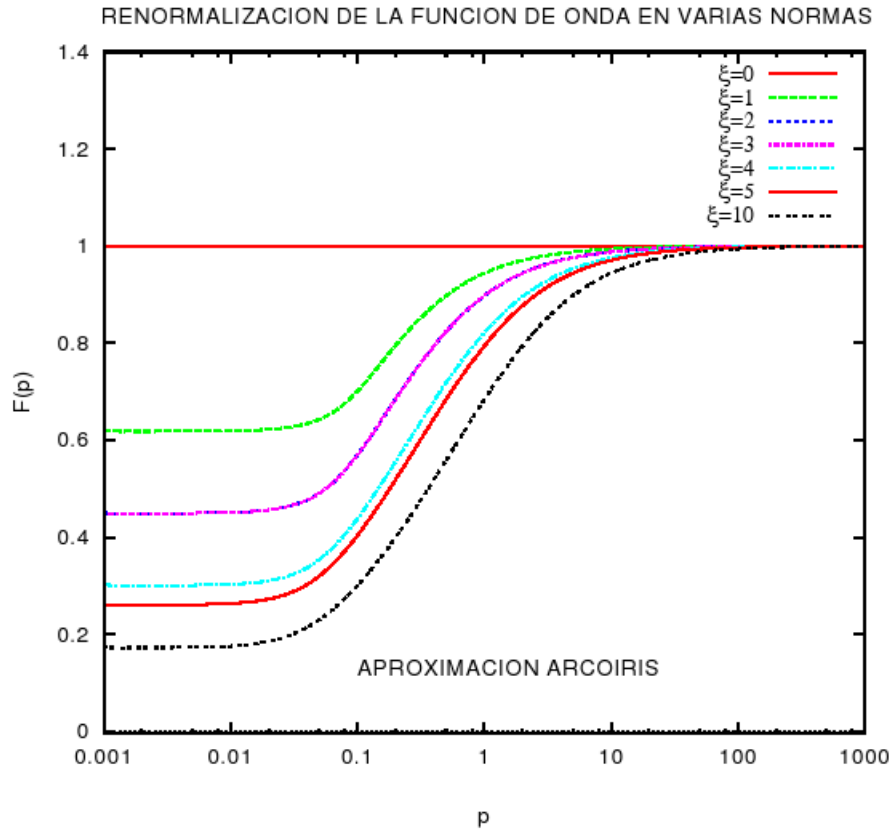


Figura 3.10. Renormalización de la función de onda $F(p)$ en la aproximación arcoiris en varias normas

Esto señala que en esta aproximación arcoiris, se generan masas dinámicamente para cualquier valor del acoplamiento y en cualquier norma covariante arbitraria. En la siguiente sección estudiaremos las ESD considerando efectos de la polarización del vacío en la aproximación $1/N$, donde veremos que no siempre se generan masas dinámicamente.

Capítulo 4

Aproximación $1/N$

La teoría de perturbaciones ordinaria en términos de acoplamiento parece romperse debido a las divergencias infrarrojas de las funciones de Green de QED3. Una manera de evitar esta situación es usando otro parámetro de expansión. Estudiaremos la GDM en QED3 en la aproximación no apagada, considerando un número grande N de fermiones no masivos que pueden existir circular en los lazos, modificando el comportamiento infrarrojo del propagador del fotón, que se suaviza. Consideramos el límite de N grande, manteniendo $\alpha = Ne^2$ fijo. Seguiremos el análisis de Appelquist *et al.* [32] hecho en la norma de Landau para establecer la existencia de un número crítico N_c de familias de fermiones, arriba del cual la GDM deja de tener lugar y extenderemos el razonamiento al caso de una norma covariante arbitraria.

4.1 Generalidades

Usualmente, cuando introducimos más parámetros en nuestros modelos teóricos, agregamos una mayor complejidad para su descripción. Sin embargo, existen familias de teorías con grupos de simetría grandes, como $SU(N)$, que de hecho se vuelven más simples cuando N es grande. Estas teorías aceptan una expansión $1/N$ [33]. QED3 con N familias de fermiones es un ejemplo de estas teorías. Ya que los fermiones son idénticos, podemos mezclar su «sabor» en una manera unitaria

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) \longrightarrow U\Psi(x), \quad U \in SU(N),$$

mientras que preservamos el Lagrangiano correspondiente. Contrario a la simetría de norma, esta simetría no está asociada con ninguna fuerza. Se le llama simetría de sabor $SU(N)$ y expresa simplemente la naturaleza idéntica de los fermiones de nuestro modelo.

Para definir una aproximación $1/N$ sensible, el nuevo parámetro de expansión que consideramos es $\alpha = e^2 N$, en el límite $N \rightarrow \infty$ dejando α fijo. Aunque α es un parámetro pequeño que tiene propósitos de guardar el orden de aproximación, la aproximación $1/N$ como tal es una técnica genuinamente no perturbativa, pues en cada orden de aproximación, consideramos un número infinito de diagramas correspondientes a la teoría de perturbaciones ordinaria en potencias del acoplamiento electromagnético e . Aunque esta técnica, desarrollada por t'Hooft para QCD [34] se puede estudiar formalmente desde la teoría de los campos cuánticos, en esta tesis nos centramos sólo en la idea principal detrás de ella: Los diagramas no planares están suprimidos por potencias de $1/N$, de modo que son los diagramas planares los que dominan en cualquier proceso. En nuestro caso, esto corresponde a considerar sólo los diagramas que son inserciones de autoenergías a un lazo en la teoría de perturbaciones ordinaria.

4.2 Criticalidad

Para resolver las ESD en la aproximación en $1/N$, debemos de considerar simultáneamente las ecuaciones correspondientes al propagador del fotón y del fermión. Primero resolvemos la ecuación para el fotón considerando la serie infinita de diagramas planares de burbujas

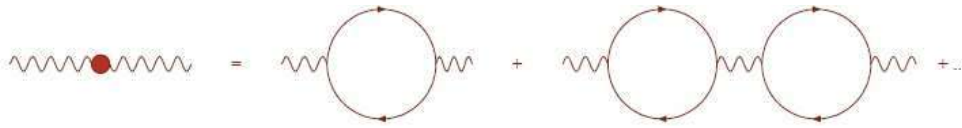


Figura 4.1. Propagador del fotón en la aproximación $1/N$

donde en las burbujas (lazos) circulan los N fermiones no masivos que estamos considerando. El propagador correspondiente a esa expansión es de la forma [20]

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = - \left[\frac{1}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right], \quad (4.1)$$

donde $\alpha = e^2 N$. Este propagador lo insertamos en la ESD para el propagador del fermión, considerando además que $\Gamma^\mu(k, p) \rightarrow \gamma^\mu$, como se muestra en el diagrama



Figura 4.2. Propagador del fermión en la aproximación $1/N$

Esta es la aproximación $1/N$ para las ESD, en la cual estudiaremos la GDM. Trabajando en una norma covariante arbitraria, tenemos que resolver la ecuación

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0-1}(p) - i \frac{\alpha}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q).$$

Procedemos de manera estándar, multiplicando por \not{p} y \mathbb{I} y tomando traza,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 - \frac{i \alpha}{p^2 N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - (k \cdot p) g^{\mu\nu}) \Delta_{\mu\nu}(q), \\ \frac{M(p)}{F(p)} &= i \frac{\alpha}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k) M(k)}{k^2 - M^2(k)} g^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}(q). \end{aligned}$$

Realizando las contracciones con el propagador del fotón, tenemos que

$$\begin{aligned} (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - (k \cdot p) g^{\mu\nu}) \Delta_{\mu\nu}(q) &= 2 \left(\frac{\xi}{q^2} - \frac{1}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \right) \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)}{q^2} - \left(\frac{\xi}{q^2} + \frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \right) (k \cdot p), \\ g^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}(q) &= \left(\frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} + \frac{\xi}{q^2} \right), \end{aligned}$$

de donde obtenemos las expresiones para las funciones desconocidas F y M :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 \\ &- \frac{i \alpha}{p^2 N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \left\{ 2 \left(\frac{\xi}{q^2} - \frac{1}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \right) \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)}{q^2} - \left(\frac{\xi}{q^2} + \frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \right) (k \cdot p) \right\} \\ \frac{M(p)}{F(p)} &= i \frac{\alpha}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k) M(k)}{k^2 - M^2(k)} \left(\frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} + \frac{\xi}{q^2} \right), \end{aligned}$$

Vemos que la renormalización de la función de onda

$$F(p) \approx 1 + \mathcal{O}(1/N),$$

por lo que sus efectos en la función de masa son de orden $1/N^2$, que se encuentran altamente suprimidos en el límite de $N \rightarrow \infty$, así que podemos tomar simplemente $F(p) = 1$ y resolver la ecuación (4.2) sólo para $M(p)$, es decir,

$$M(p) = i \frac{\alpha}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{M(k)}{k^2 - M^2(k)} \left(\frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} + \frac{\xi}{q^2} \right). \quad (4.2)$$

Siguiendo los razonamientos de Appelquist *et al.* [18], trabajamos en la norma de Landau, $\xi = 0$, y luego de realizar una rotación de Wick hacia el espacio Euclideo, tenemos

$$\begin{aligned}
M(p) &= \frac{2\alpha}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{1}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi^2 N} \int_0^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{d\theta \sin\theta}{k^2 + p^2 - 2k p \cos\theta + \frac{\alpha}{8} \sqrt{k^2 + p^2 - 2k p \cos\theta}} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi^2 N p} \int_0^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{\alpha/8 + 8|k+p|}{\alpha/8 + 8|k-p|} \right|. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Expandiendo el logaritmo en las regiones $k \gg p$ y $k \ll p$, finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
M(p) &= \frac{\alpha}{\pi^2 N p} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{k}{p + \alpha/8} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\pi^2 N p} \int_p^\infty dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{p}{k + \alpha/8} \right). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Esta expresión está escrita convenientemente para convertirla en una ecuación diferencial con condiciones de frontera. Derivando una vez, tenemos

$$\frac{dM(p)}{dp} = - \frac{\alpha}{\pi^2 N} \frac{2p + \alpha/8}{p^2(p + \alpha/8)^2} \int_0^p dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \tag{4.5}$$

de modo que la ecuación diferencial resultante nos queda de la forma

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p^2(p + \alpha/8)^2}{2p + \alpha/8} \frac{dM(p)}{dp} \right] = - \frac{\alpha}{\pi^2 N} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)}, \tag{4.6}$$

con las condiciones de frontera

$$0 \leq M(0) < \infty, \quad \left[p \frac{dM(p)}{dp} + M(p) \right]_{p=\alpha} = 0. \tag{4.7}$$

En el límite cuando $p \ll \alpha$, la ecuación diferencial se simplifica como

$$\frac{d}{dp} \left[p^2 \frac{dM(p)}{dp} \right] = - \frac{8}{\pi^2 N} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)}. \tag{4.8}$$

Además, en el límite cuando $p^2 \gg M^2(p)$, la ecuación diferencial completamente linealizada es

$$\frac{d}{dp} \left[p^2 \frac{dM(p)}{dp} \right] = - \frac{8}{\pi^2 N} M(p), \tag{4.9}$$

que admite una solución en forma de ley de potencias,

$$M(p) = p^s,$$

con $s = - [1 \pm \sqrt{1 - 32/(\pi^2 N)}] / 2$. La solución de la ecuación linealizada es entonces de la forma [appel2]

$$M(p) \sim p^{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}}. \tag{4.10}$$

Vemos que existe un número crítico $N_c = 32/\pi^2$, que distingue entre un comportamiento oscilatorio y una genuina ley de potencias. Cuando $N_c > 32/\pi^2$, la solución no es compatible con las condiciones de frontera, así que sólo existe una solución compatible cuando $N_c < 32/\pi^2$. Recordemos que el comportamiento de una función de masa es tal que ésta se comporta como una constante para p pequeño y cae como $1/p^2$ para $p \rightarrow \infty$. La cantidad de masa generada dinámicamente puede cuantificarse como $M(0)$. La solución a la ecuación linealizada puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned}
M(p) &= p^{-\frac{1}{2}} \left[A \left(\frac{M(0)}{M(0)} p \right)^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} + B \left(\frac{M(0)}{M(0)} p \right)^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right] \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \left[C e^{e^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right|}} + D e^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right|} \right] \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \left[E \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) + F \cos \left(\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) \right] \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \beta \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) + \operatorname{sen} \beta \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) \right] \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \frac{\beta}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right\} \right) \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \delta \right\} \right),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde δ es la fase que puede depende de N . Para encontrar $M(0)$, imponemos la condición de frontera ultravioleta (4.7) en el límite $N \rightarrow 32/\pi^2$. Tomamos

$$M(p) = p^{-\frac{1}{2}} \left[A p^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} + B p^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
[p M(p)]'_{p=\alpha} &= \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \left[A \left(i \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} + 1 \right) p^{\frac{i}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}} \right. \\
&\quad \left. - B \left(i \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} - 1 \right) p^{-\frac{i}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}} \right]_{p=\alpha} \\
&= \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \left[C p^{\frac{i}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}} + D p^{-\frac{i}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}} \right]_{p=\alpha}
\end{aligned}$$

$$= \left[p^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \delta \right\} \right) \right]_{p=\alpha} = 0,$$

lo que implica que

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{\alpha}{M(0)} \right| + \delta \right\} = n\pi,$$

y por lo tanto, tenemos que

$$M(0) = \alpha e^\delta \exp \left[\frac{-2n\pi}{\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right], \quad (4.12)$$

donde $n = 1, 2, 3$, etc. La solución para $n = 1$ nos da la configuración de energía mínima del sistema [32]. De este análisis concluimos que existe criticalidad para la GDM en esta aproximación. Si $N = N_c$, entonces $M(0) \rightarrow \infty$. Además, N no puede exceder a N_c , pues la solución en este caso es incompatible con las condiciones de frontera.

Estos resultados han sido criticados por varios grupos [19]. Ellos afirman que el hecho de haber despreciado la renormalización de la función de onda, pudo haber llevado a Appelquist y su grupo a resultados erróneos. Nosotros abordamos el debate desde otra perspectiva. Para validar o refutar este razonamiento, apelamos al principio de invariancia de norma de QED3. Decidimos seguir los pasos de Appelquist *et al.*, despreciando la renormalización de la función de onda, pero ahora resolviendo la ecuación para la función de masa en una norma covariante arbitraria, para ver si sus resultados son invariantes de norma. Este es el tema de la siguiente sección.

4.3 ¿Dónde Existe la Criticalidad?

Ahora nos encargamos de resolver $M(p)$ en normas covariantes diferentes siguiendo los mismos razonamientos. Partimos de

$$M(p) = i \frac{\alpha}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k) M(k)}{k^2 - M^2(k)} \left(\frac{2}{q^2 + \frac{\alpha q}{8}} + \frac{\xi}{q^2} \right)$$

y, luego de hacer la rotación de Wick al espacio Euclidean, llegamos a

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{\alpha}{N} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(2\pi)^3} \frac{F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi d\theta \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta + \frac{\alpha}{8} \sqrt{k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &+ \frac{\alpha}{N} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(2\pi)^3} \frac{F(k) M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi d\theta \frac{\xi \operatorname{sen} \theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2 N p} \int_0^\infty dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\ln \left| \frac{\alpha/8 + |k+p|}{\alpha/8 + |k-p|} \right| + \xi \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora, expandimos lo logaritmos en cada región, como lo hicimos anteriormente, llegando a

$$M(p) = \frac{\alpha}{2\pi^2 N p} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{k}{p + \alpha/8} + \frac{k}{p} \xi \right] \\ + \frac{\alpha}{2\pi^2 N p} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{p}{k + \alpha/8} + \frac{p}{k} \xi \right].$$

Convertimos esta expresión en una ecuación diferencial de la forma usual. Derivando, tenemos

$$\frac{dM(p)}{dp} = -\frac{\alpha}{\pi^2 N} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{2p + \alpha/8}{(p^2 + \alpha p/8)^2} + \frac{\xi}{p^3} \right] \\ = -\frac{\alpha}{\pi^2 N} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{p(2p + \alpha/8) + \xi(p + \alpha/8)^2}{p^3(p^2 + \alpha/8)^2} \right],$$

lo que implica que

$$\left[\frac{p(2p + \alpha/8) + \xi(p + \alpha/8)^2}{p^3(p^2 + \alpha/8)^2} \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{\alpha}{\pi^2 N} \int_0^p dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \quad (4.14)$$

por lo que la ecuación diferencial que buscamos toma la forma

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p(2p + \alpha/8) + \xi(p + \alpha/8)^2}{p^3(p^2 + \alpha/8)^2} \frac{dM(p)}{dp} \right] = \frac{\alpha}{\pi^2 N} \frac{pM(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (4.15)$$

con las mismas condiciones de fronteras impuestas en (4.7). Para $p \ll \alpha$, la expresión se reduce a

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p^3}{8p/\alpha + \xi} \frac{dM(p)}{dp} \right] = \frac{\alpha}{\pi^2 N} \frac{pM(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (4.16)$$

que en el límite $p^2 \gg M^2(p)$, se escribe de forma completamente linealizada como

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p^3}{8p/\alpha + \xi} \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{\alpha}{\pi^2 N} M(p). \quad (4.17)$$

Esta ecuación, cuando $\xi = 0$ se reduce a la expresión (4.9) que teníamos antes. Desarrollando esta ecuación completamente, obtenemos la ecuación diferencial

$$p^3 \frac{d^2 M(p)}{dp^2} + p^2 \left(3 - \frac{8p}{8p + \alpha\xi} \right) \frac{dM(p)}{dp} + \frac{1}{\pi^2 N} (8p + \alpha\xi) M(p) = 0, \quad (4.18)$$

que no nos permite un tratamiento analítico tan limpio como en el caso anterior. Sin embargo, podemos ver que para $\xi \rightarrow \infty$, la ecuación diferencial se simplifica como

$$p^3 \frac{d^2 M(p)}{dp^2} + 3p^2 \frac{dM(p)}{dp} + \frac{1}{\pi^2 N} (8p + \alpha\xi) M(p) = 0 \quad (4.19)$$

cuya solución es del tipo

$$M(p) \sim \frac{2\alpha\xi}{N\pi p} J_2\left(2\sqrt{\frac{\alpha\xi}{Np}}\right) = \frac{2e^2\xi}{\pi p} J_2\left(2\sqrt{\frac{e^2\xi}{p}}\right), \quad (4.20)$$

es decir, *independiente de N*. Vemos además que este comportamiento es igual al que encontramos para la solución de la función de masa en la aproximación arcoiris, ec. (3.30). Entonces, nos encontramos con un resultado un tanto inesperado. El razonamiento de Appelquist *et al.* en la norma de Landau, conduce a un comportamiento crítico para la función de masa que indica que si N excede un valor crítico, deja de haber GDM. El mismo razonamiento, ahora en normas covariantes arbitrarias, descritas por un parámetro $\xi \rightarrow \infty$, señalan que siempre hay GDM. Aún más, indican que la función de masa es independiente del número de familias de fermiones involucrados.

Esta observación, por un lado indica que los resultados de Appelquist no son invariantes de norma, por lo que sus razonamientos deben revisarse con mayor profundidad. Por otro lado, nos plantea lo siguiente: Si nos alejamos de la norma de Landau variando ξ alrededor de $\xi = 0$, ¿Existe ξ_c tal que para $\xi \in (0, \xi_c)$ hay un $N_c(\xi)$ tal que la GDM deja de tener lugar si el número de familias consideradas excede este valor?, ¿Cómo varía N_c con ξ ? Ya que el tratamiento analítico no nos permite abordar los casos en que ξ tiene valores de moderados a pequeños, nos planteamos resolver numéricamente la ecuación (4.14) para valores arbitrarios del parámetro de norma. En el siguiente Capítulo desarrollaremos los métodos numéricos apropiados para este fin.

Capítulo 5

Métodos Numéricos

En este Capítulo resolveremos numéricamente la ecuación (4.13) en varias normas covariantes. Para ello, revisaremos los métodos desarrollados en el pasado [30, 31] para abordar problemas similares y comentaremos las limitaciones de los mismos. Luego, desarrollaremos nuestro propio esquema numérico, más robusto que los anteriores, para resolver ESD en forma general, tomando la ec. (4.13) como campo de entrenamiento. Daremos entonces una respuesta numérica a los cuestionamientos del Capítulo anterior.

5.1 Método de Bashir-Huet-Raya

Este método fue desarrollado para resolver simultáneamente sistemas de ecuaciones como (3.22) y (3.23). A fin de ilustrar su funcionamiento, consideremos sólo una ecuación, que genéricamente podemos escribir como

$$M(p) = \int_0^{\infty} dk \text{Kern}_M(k, M(k); p, M(p)) dk. \quad (5.1)$$

Numéricamente, no podemos resolver la ecuación integral hasta el límite superior infinito, por lo que debemos elegir un intervalo $[k_{\min}, k_{\max}]$ en el cual resolverla. El corte k_{\min} debe ser lo suficientemente pequeño y k_{\max} lo suficientemente grande, de modo que resolvemos

$$M(p) = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk \text{Kern}_M(k, M(k); p, M(p)) dk.$$

Para realizar la integración, utilizamos la regla de los trapecios, por lo que hacemos una partición del intervalo $[k_{\min}, k_{\max}]$, en $n - 1$ subintervalos definiendo un conjunto de n nodos de integración $\{k_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Con estos nodos, definimos las tiras de integración de la forma

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)$$

$$\Delta S_N = \frac{1}{2}(k_N - k_{N-1})$$

$$\Delta S_j = \frac{1}{2}(k_j - k_{j-1})$$

para $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Entonces, la aproximación numérica nos permite aproximar

$$M(p) \approx \sum_{i=1}^n \text{Ker}_M(k_i, M(k_i); p, M(p)) \Delta S_i.$$

Siguiendo la filosofía de los métodos de colocación, en lugar de buscar una solución a esta ecuación integral en todo el intervalo, colocamos la solución en una malla preseleccionada de puntos $\{p_j\}$, para $j = 1, \dots, m$. En este caso escogemos la misma malla de la integración, $p_j = k_j$, para colocar nuestra solución, de modo que planteamos un sistema de n ecuaciones para las n incógnitas $M(p_j)$:

$$M(p_j) = \sum_{i=1}^n \text{Ker}_M(k_i, M(k_i); p_j, M(p_j)) \Delta S_i \quad (5.2)$$

para $j = 1, \dots, n$. Este sistema de ecuaciones se puede resolver en algún lenguaje de manipulación algebraica, como **MATHEMATICA 5.1**. En el caso concreto de las ecuaciones (3.22) y (3.23), elegimos $k_{\min} = 10^{-3}$ y $k_{\max} = 10^3$. Los nodos de integración se eligieron distribuidos de manera uniforme sobre el intervalo de integración, de modo que hubiera el mismo número de puntos, digamos m , en cada década, es decir, que entre 10^{-3} y 10^{-2} , por ejemplo, hubiera m puntos, al igual que entre 1 y 10, de modo que el total de puntos se eligió de la forma

$$n = [\text{Log}_{10}(k_{\max}) - \text{Log}_{10}(k_{\min})]m + 1.$$

Definiendo

$$Y_j = k_{\min} e^{(j-1)\lambda} (e^\lambda - 1),$$

con $\lambda = \ln(10)/m$, los puntos de la partición se generaron recurrentemente con la regla

$$k_{j+1} = k_j + Y_j,$$

donde los extremos de la malla se fijan de acuerdo a $k_{\min} = k_1$ y $k_{\max} = k_n$.

Las Figuras (3.9) y (3.10) presentadas anteriormente se generaron con $m = 30$, lo que implicó a **MATHEMATICA 5.1** resolver un sistema de $n = 2 \times 181$ ecuaciones algebraicas no lineales acopladas para cada valor de ξ . El sistema de ecuaciones se resolvió utilizando el comando **FindRoot**, mediante el método de la secante, es decir, dando de entrada dos condiciones iniciales para cada incógnita.

La ventaja de este método es que se puede estudiar, de manera muy conveniente, la GDM en la aproximación apagada de QED (en 3 y 4 dimensiones) con varios *ansätze* para el vértice [30, 31]. Un par de desventajas, sin embargo, aquejan a este método. La primera es más una situación del lenguaje de **MATHEMATICA 5.1**: para que el comando **FindRoot** sea eficiente, se deben introducir condiciones iniciales muy cercanas a la respuesta buscada, por lo que no se puede resolver el sistema para un valor arbitrario de ξ a partir de una condición inicial arbitraria. Se deben conocer las soluciones en una vecindad de este

parámetro para usarlas de entrada en `FindRoot`. Entonces, el procedimiento de estudiar la posible dependencia de norma de las cantidades de interés se vuelve lento y tedioso. La mayor desventaja de este método es que es aplicable *siempre y cuando todas las integrales angulares puedan realizarse analíticamente*. El caso que estamos considerando, ec. (4.14), cumple con este requisito. Sin embargo, ya que en la mayoría de los truncamientos de las ESD, especialmente más allá de la aproximación apagada, las integrales angulares no se pueden realizar analíticamente, nos propusimos desarrollar nuestro propio método para resolver ESD en su forma más general. Partimos de la premisa de que este método debe ser robusto y fácilmente adaptable para estudiar distintos truncamientos en varias teorías. A continuación describiremos los detalles de nuestro método.

5.2 Nuestro Método

En esta sección presentamos el método numérico que desarrollamos para resolver la ecuación (4.13) para valores arbitrarios del parámetro de norma ξ . Ya que estamos interesados en que nuestro método sea fácilmente adaptado para resolver otros problemas donde las ESD sean relevantes, nos proponemos resolver las ecuaciones involucradas en su forma más general. Aunque el método puede extenderse fácilmente al caso en que dos o más funciones desconocidas deban resolverse simultáneamente, lo ilustraremos considerando sólo una ecuación. Como mencionamos anteriormente, no siempre es posible realizar analíticamente todas las integrales angulares involucradas, de modo que la expresión más general con la que trabajamos es

$$M(p) = \int_0^\infty dk \text{Kern}_M(k, M(k); p, M(p)) \int_0^\pi d\theta \text{ang}(k, p, \theta). \quad (5.3)$$

Nuevamente, elegimos un intervalo finito en el cual resolver nuestra ecuación, reduciendo nuestro problema a

$$M(p) = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk \text{Kern}_M(k, M(k); p, M(p)) \int_0^\pi d\theta \text{ang}(k, p, \theta).$$

Como estamos considerando la situación en que k_{\max} es muy grande y k_{\min} muy pequeño, es conveniente mapear este intervalo $[k_{\min}, k_{\max}] \mapsto [a, b] \in (-1, 1)$, de modo que la malla de integración que escojamos incluya números de la misma magnitud, y no órdenes de magnitud muy distintos. Motivados por el éxito del método de Bashir-Huet-Raya, elegimos un mapeo que distribuye homogéneamente los puntos en este intervalo, dado por

$$k = k_{\min} e^x (1 - e^{-\lambda}), \quad \lambda = \frac{\ln(10)}{m}.$$

Tenemos así que

$$M(p) = \int_{\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\right)}^{\ln\left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}(1-e^{-\lambda})}\right)} dx k(x) \text{Ker}_M(k(x), M(k(x)); p, M(p)) \int_0^\pi d\theta \text{ang}(k(x), p, \theta). \quad (5.4)$$

Para resolver esta ecuación, necesitamos hacer una aproximación numérica conveniente que nos permita, con el método de colocación en mente, realizar las integraciones involucradas minimizando el error. La cuadratura Gaussiana [35] nos ajusta perfectamente para nuestros propósitos (ver apéndice A). Esta cuadratura nos permite aproximar

$$M(p) \approx \sum_{i=1}^{\text{nr}} w_i^r \text{Ker}_M(k(x_i), M(k(x_i)); p, M(p)) \sum_{l=1}^{\text{na}} w_l^a \text{ang}(k(x_i), p, \theta_l),$$

donde los (w_i^r, x_i) y (w_l^a, θ_l) son los pesos y nodos de las cuadraturas Gaussianas para las integrales radial y angular, respectivamente.

Ahora, colocaremos nuestra solución sólo sobre una malla de puntos que elijamos para resolver esta ecuación. La malla dada por los nodos en la integración radial nos sirve para este propósito. Colocamos nuestra solución sobre cada punto de la malla, de modo que planteamos un sistema de nr ecuaciones con las nr incógnitas $M(p(x_j))$, dado por

$$M(p(x_j)) \approx \sum_{i=1}^{\text{nr}} w_i^r \text{Ker}_M(k(x_i), M(k(x_i)); p(x_j), M(p(x_j))) \sum_{l=1}^{\text{na}} w_l^a \text{ang}(k(x_i), p(x_j), \theta_l),$$

para $j = 1, 2, 3, \dots, \text{nr}$. En nuestro caso en particular, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Ker}_M(k, M(k); p, M(p)) &= \frac{\alpha}{4N\pi^2} \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \\ \text{ang}(k, p, \theta) &= \frac{\xi \text{sen}\theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos\theta} + \frac{2 \text{sen}\theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos\theta + \frac{\alpha}{8} \sqrt{k^2 + p^2 - 2kp \cos\theta}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Este sistema de ecuaciones lo resolvemos mediante un protocolo iterativo, en el que damos una condición inicial arbitraria para nuestras incógnitas $M(p(x_j))$. Establecemos entonces un criterio de convergencia comparando el lado derecho y el izquierdo de cada ecuación. Si el máximo valor en la lista de diferencias entre lado izquierdo y lado derecho para cada ecuación es menor que cierto parámetro de tolerancia (nosotros elegimos 10^{-4}), decimos que hemos alcanzado la respuesta; de lo contrario, tomamos el valor resultante del lado derecho y lo insertamos nuevamente como condición inicial, repitiendo el proceso tantas veces como sea necesario. Este protocolo tiene la ventaja sobre `FindRoot` del método de Bashir-Huet-Raya de que podemos siempre empezar con una condición inicial arbitraria. El precio máximo que debemos pagar es que al método le tomará más iteraciones para llegar a la respuesta, pero eventualmente llegará.

En esta tesis, para resolver el sistema de ecuaciones anterior elegimos $k_{\min} = 10^{-12}$ y $k_{\max} = 10^3$ como límites de integración. Elegimos además $m = 30$, y el número de nodos en cada cuadratura dado por $nr = 128$ y $na = 32$. En código del programa en MATHEMATICA 5.1 que escribimos para este fin se muestra en el Apéndice B. Comenzamos con la misma condición inicial para cada incógnita $M(p(x_j)) = M_0$, donde

$$M_0 = \alpha \exp \left[\frac{2 - 2\pi}{\left(\frac{32}{\pi^2 N} - 1\right)^{1/2}} \right],$$

para cada valor de N con el objetivo de verificar primeramente los resultados de Appelquist *et al.* [32] en la norma de Landau. En el caso de una norma covariante arbitraria, para un N dado, simplemente usamos de entrada el valor encontrado para la altura de la función de masa con en N anterior en la serie de valores que elegimos. A continuación presentamos los resultados que obtuvimos.

5.3 Resultados

Resolvimos primeramente la ecuación (4.13) en la norma de Landau para verificar los resultados de Appelquist *et al.* [32]. Para un N dado, encontramos la función de masa $M(p)$ sobre el rango completo de valores para p , como se muestra en la Figura (5.1).

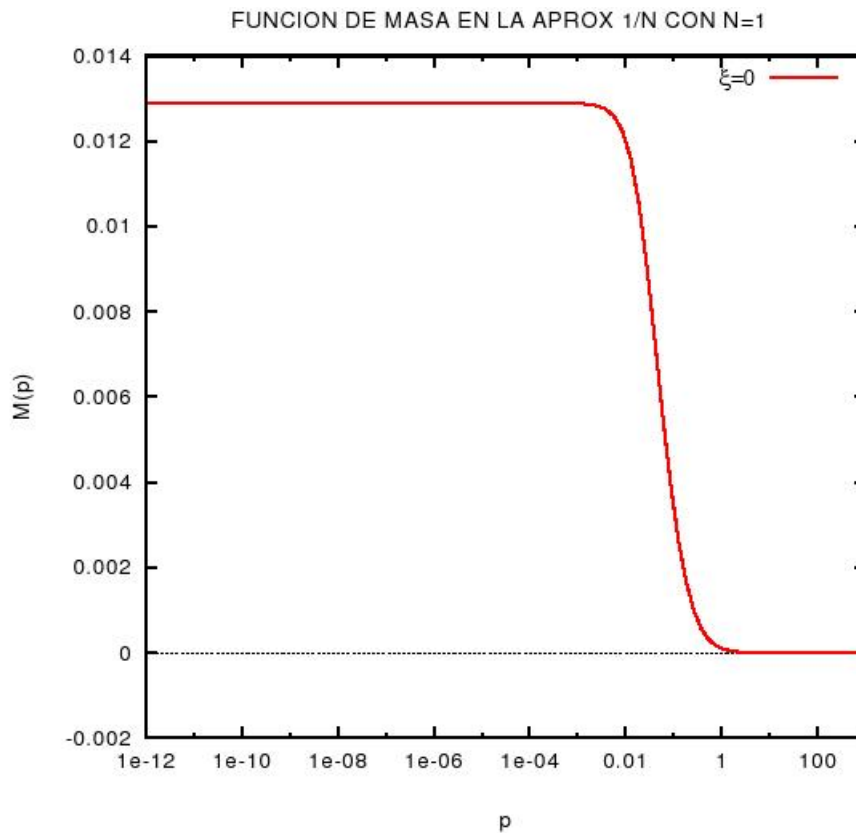


Figura 5.1. Función de Masa en la norma de Landau para $N = 1$

Podemos ver de la figura que $M(p)$ se comporta como una constante para p pequeño. Para $p \rightarrow \infty$, podemos corroborar que la función de masa cae como $1/p^2$, como se observa en la Figura (5.2), donde graficamos $p^2M(p)$ como función del momento. El comportamiento se infiere porque para p grande este producto es una constante. Este comportamiento es el mismo para todos los valores de N seleccionados.

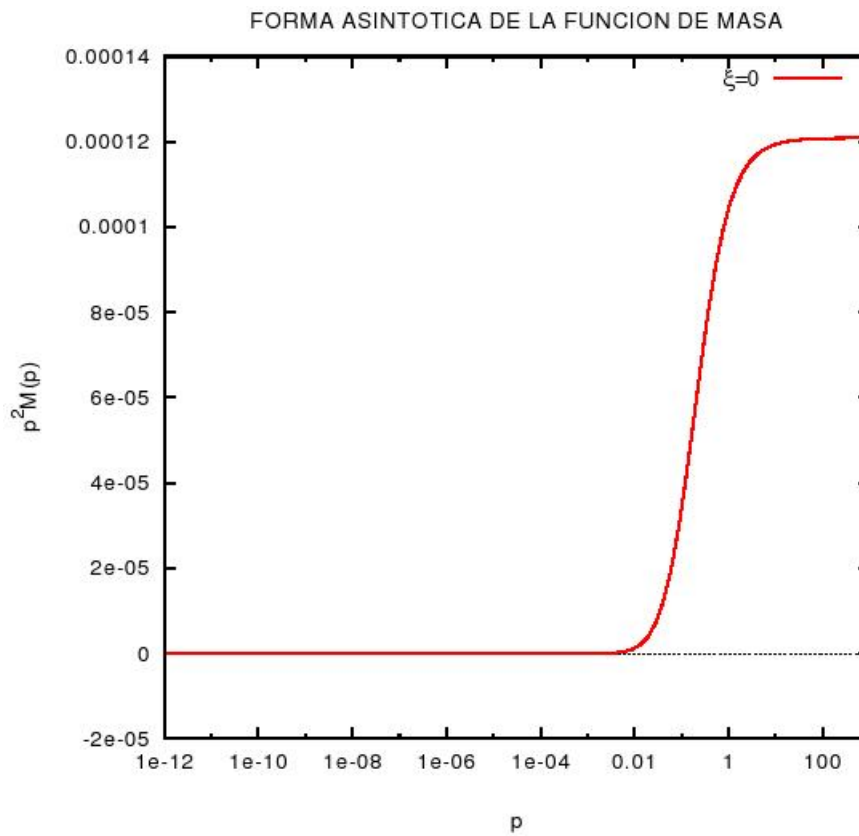


Figura 5.2. Forma asintótica de la función de masa

La cantidad de masa generada dinámicamente la obtuvimos de la altura de la función de masa, $M(0)$. Siguiendo las convenciones de Appelquist *et al.*, calculamos

$$-\text{Log}\left[\frac{M(0)}{\alpha/8}\right]$$

para cada valor de N . La tabla a continuación muestra una comparación de nuestros resultados con los de este grupo.

N	$-\text{Log}[M(0)/(\alpha/8)]$ <i>Appelquist et al.</i>	$-\text{Log}[M(0)/(\alpha/8)]$ <i>Nosotros</i>
1	2.3	2.27176
1.2	2.9	2.93054
1.4	3.6	3.60420
1.6	4.3	4.33178
1.8	5.1	5.14264
2	6.1	6.06110
2.2	7.2	7.23005
2.4	8.6	8.68578
2.6	10.7	10.6910
2.8	13.8	13.7874
3	19.5	19.8052
3.1	—	38.0847
3.2	—	50.0931

Existe un completo acuerdo entre los resultados de Appelquist *et al.* y los nuestros en la norma de Landau. Ambos podemos observar que, efectivamente, existe un valor crítico $N_c \approx 3.2$ a partir del cual las masas dejan de generarse dinámicamente. Numéricamente, fue imposible encontrar una solución más allá de este valor. Esto puede observarse de mejor manera en la Figura (5.3), donde podemos ver que la altura de la función de masa disminuye cuando incrementamos N hasta casi desvanecerse para $N > 3$.

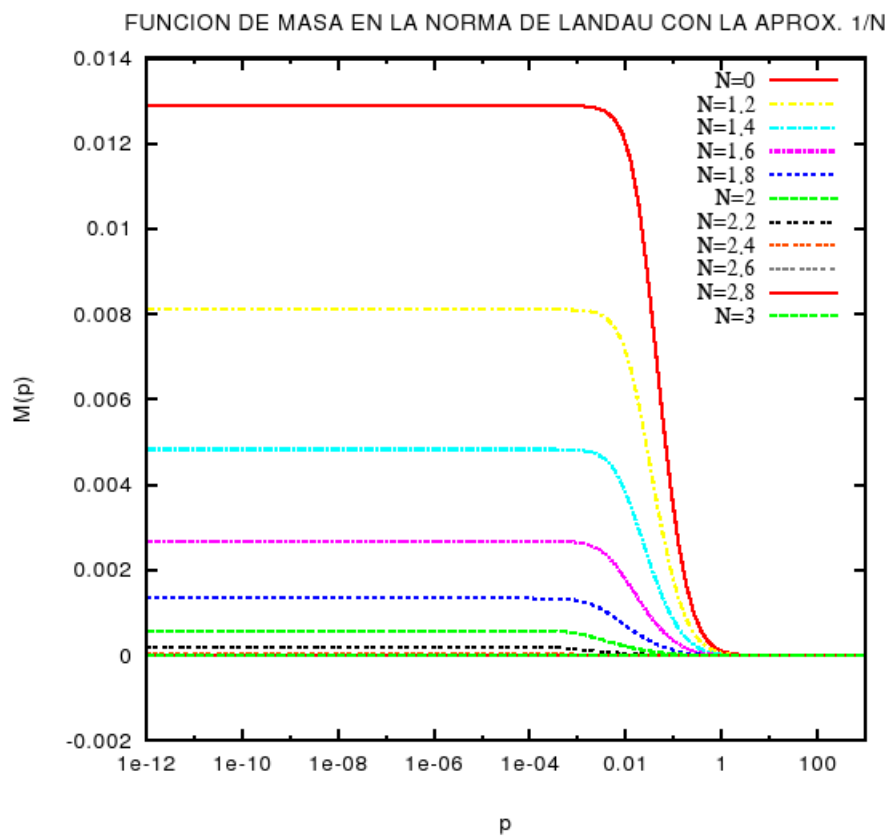


Figura 5.3. Función de masa en la norma de Landau para varios valores de N

El siguiente paso fue resolver la ecuación (4.13) en diferentes normas. El comportamiento de la función de masa como función del momento para $\xi \neq 0$ no cambia al variar ξ ni N , como puede verse en las Figuras (5.4) y (5.5), que muestran el caso $\xi = 1$ y $N = 1$; sigue siendo una constante (que depende de ξ y N) para p pequeño y cae como $1/p^2$ para p grande.

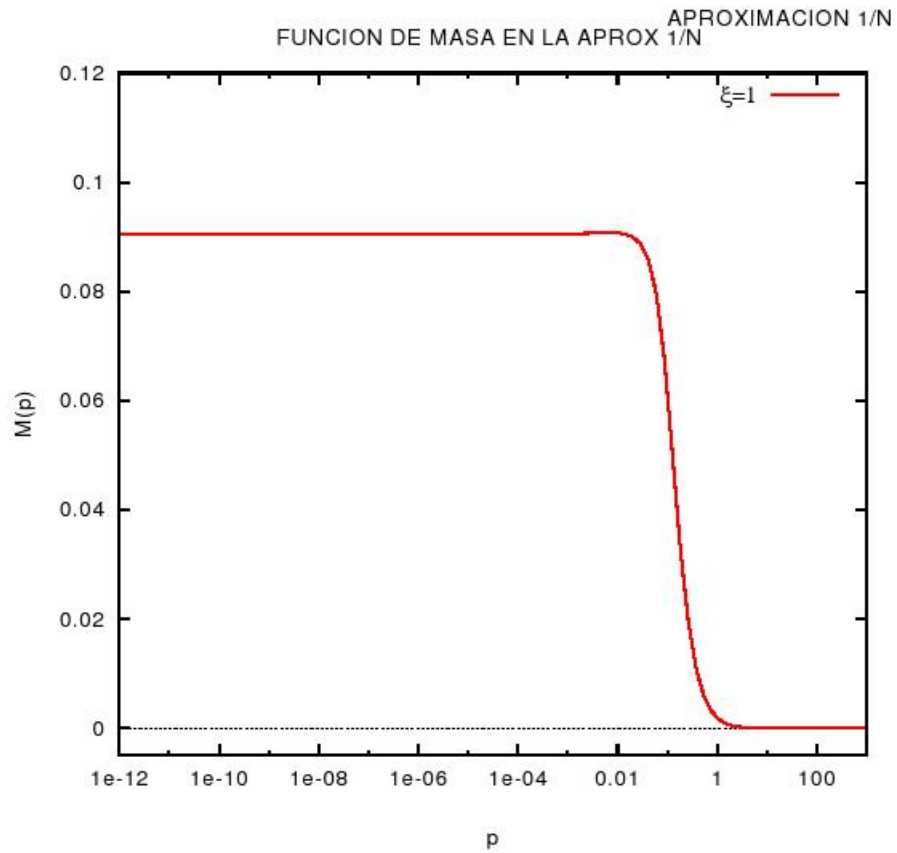


Figura 5.4. Función de masa en la norma de Feynman

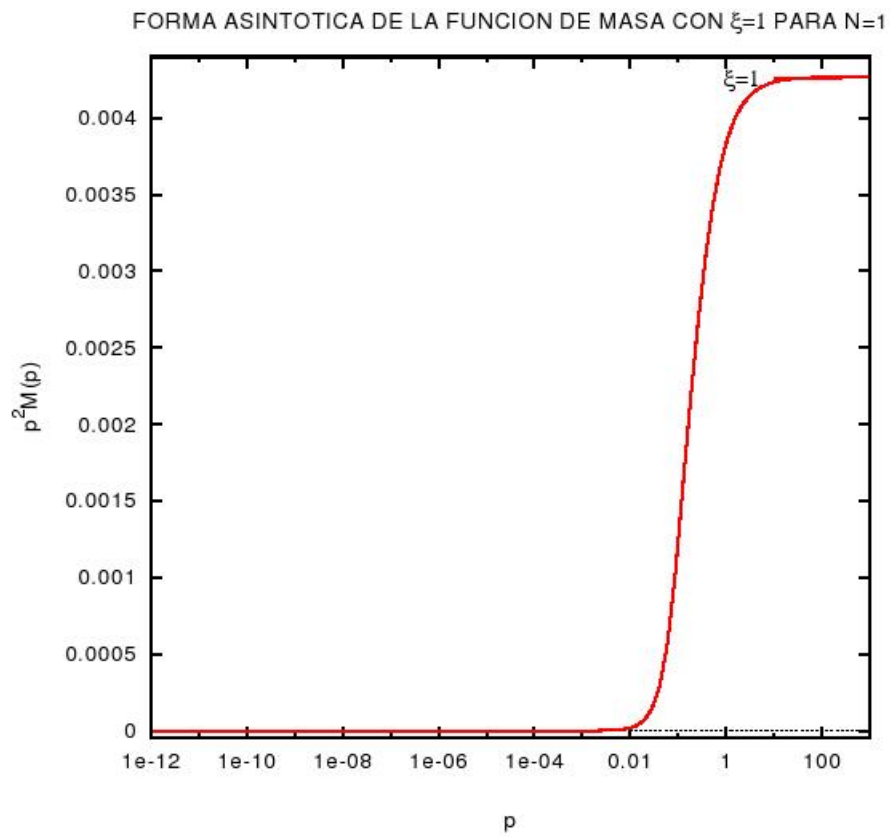


Figura 5.5. Forma asintótica de la función de masa en la norma de Feynman

Ahora, tratando de dar respuesta a los planteamientos del Capítulo anterior, buscamos identificar el rango de valores donde ξ puede considerarse grande, es decir, donde la función de masa se vuelva independiente de N . Los resultados se muestran en la Figura (5.6). Observamos que, como confirmación de nuestro tratamiento analítico, la función de masa tiene una solución no trivial para N arbitrariamente grande para los valores seleccionados del parámetro de norma, lo que implica que la altura de la función de masa no exhibe criticalidad, en contraste con el comportamiento crítico que aparece en la norma de Landau. Es de resaltar que para $\xi = 1$ ya se ha establecido el comportamiento de ξ grande, de modo que de existir un rango de valores del parámetro de norma donde aparezca la criticalidad, éste debe ser una vecindad de la norma de Landau.

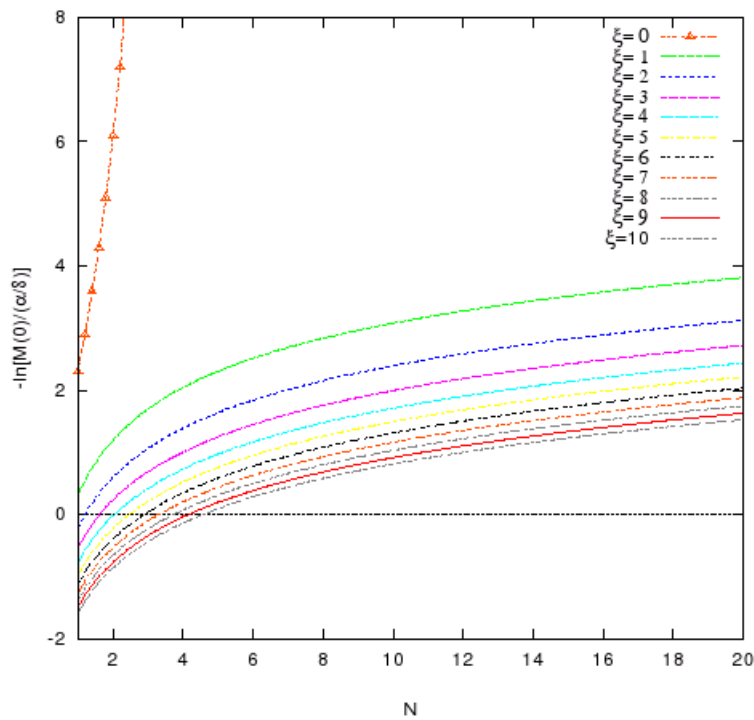


Figura 5.6. Masa generada dinámicamente para ξ grande y N grande

Nos dimos entonces a la tarea de buscar una vecindad de la norma de Landau en la cual todavía se observe un comportamiento crítico. Para ello, resolvimos nuevamente nuestra ecuación (4.13) para valores de ξ muy cercanos a 0. Los resultados se muestran en la Figura (5.8). Vemos que incluso para valores tan cercanos de la norma de Landau como $\xi = 10^{-8}$, la masa se genera dinámicamente para valores arbitrarios de N . Además, el comportamiento de la función de masa es tal que para $N < \pi^2/32$, su altura se comporta de la manera predicha por Appelquist *et al.*, pero que incrementando el valor de N , la curva

inevitablemente se aleja de la curva crítica. Aún más, vemos que el comportamiento de esta altura para N grande se asemeja al caso de ξ grande incluso para $\xi \rightarrow 0$.

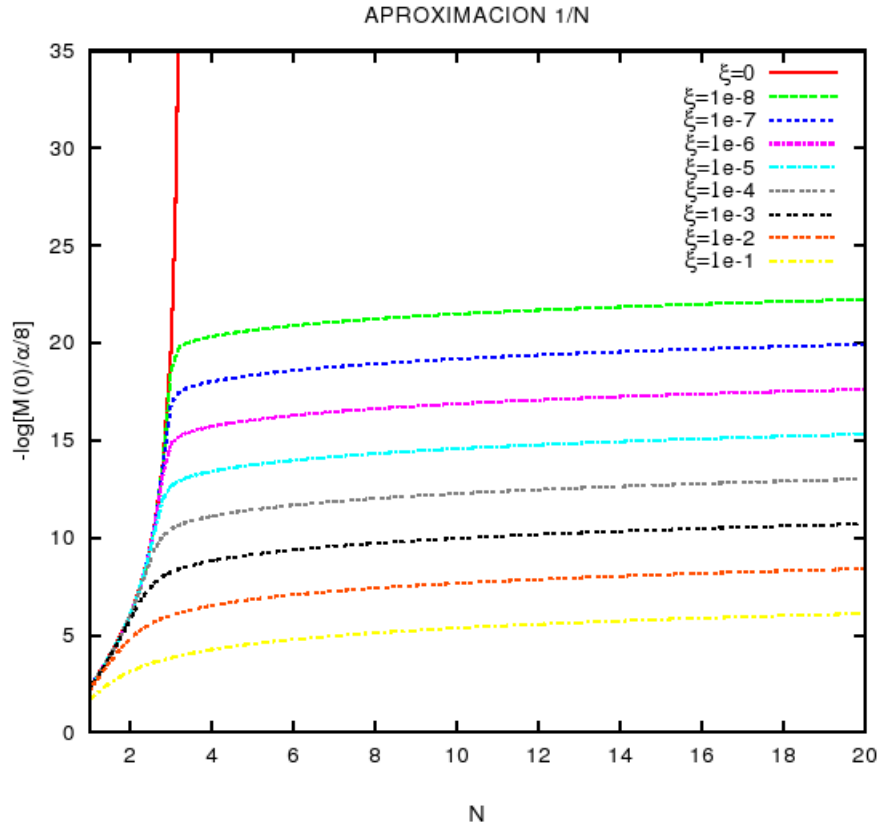


Figura 5.7. Comportamiento Crítico para $\xi = 0$ y $\xi \rightarrow 0$

Ya que nuestro tratamiento analítico del Capítulo anterior implicaba que la función de masa es independiente de N cuando $\xi \rightarrow \infty$, verificamos este hecho notando que la altura de la función de masa se puede escribir como

$$-\ln \left[\frac{M(0)}{a/8} \right] = \ln \left[\frac{M(0)}{e^2 N/8} \right] \sim \ln[Na].$$

Encontramos que esto es cierto incluso para ξ infinitesimal, siempre y cuando consideremos $N \gg N_c$. Para $N < N_c$, el comportamiento crítico de Appelquist *et al.* domina. Esto es lo que se muestra en las Figuras (5.8) y (5.9).

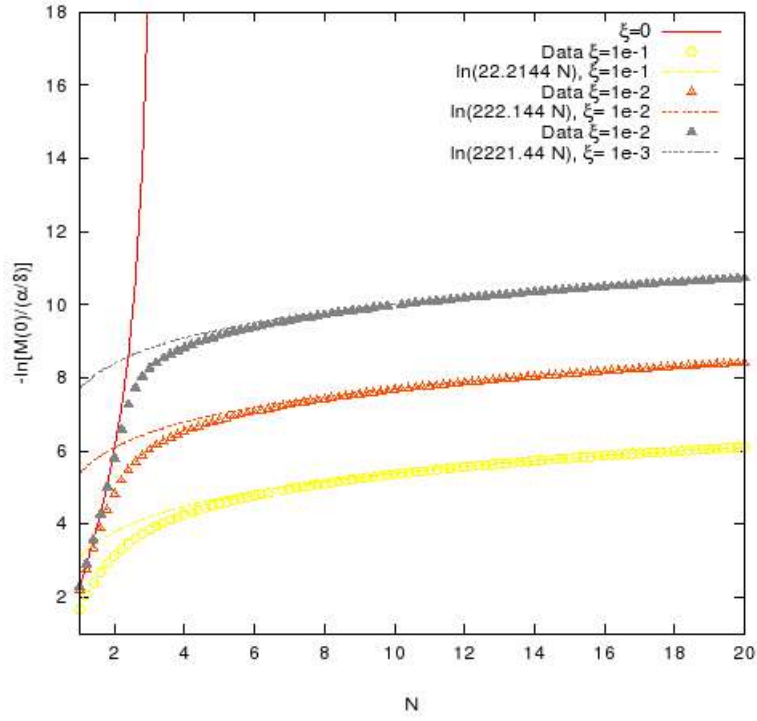


Figura 5.8. Comportamiento para N grande y ξ pequeña

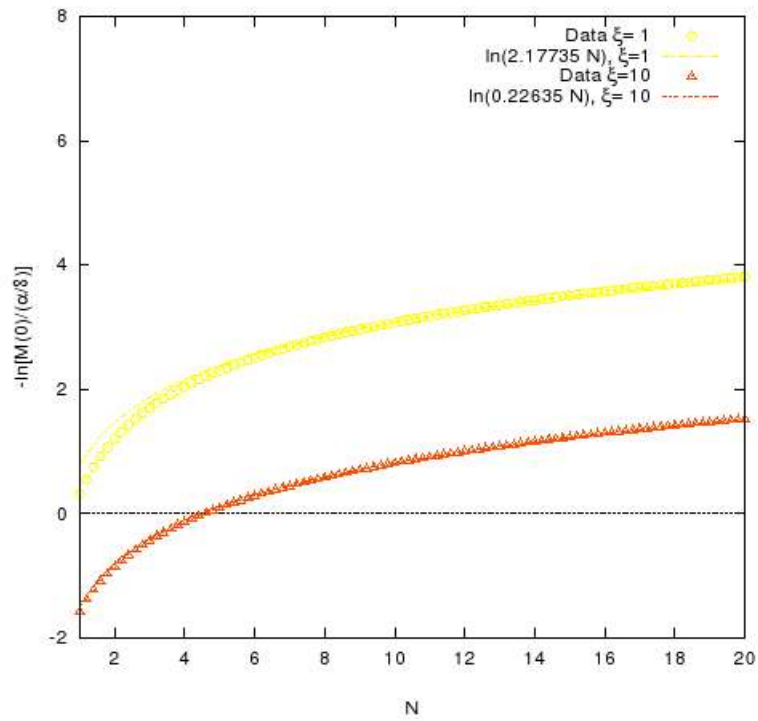


Figura 5.9. Comportamiento para N grande y ξ grande

Procedimos entonces a estudiar la dependencia del parámetro a con ξ . La Figura (5.11) muestra el comportamiento que encontramos. Los datos pueden ajustarse de la forma

$$a = \frac{b}{\xi}$$

donde $b = 2.19034 \sim \pi/\sqrt{2}$, como se ve en la figura 5.10.

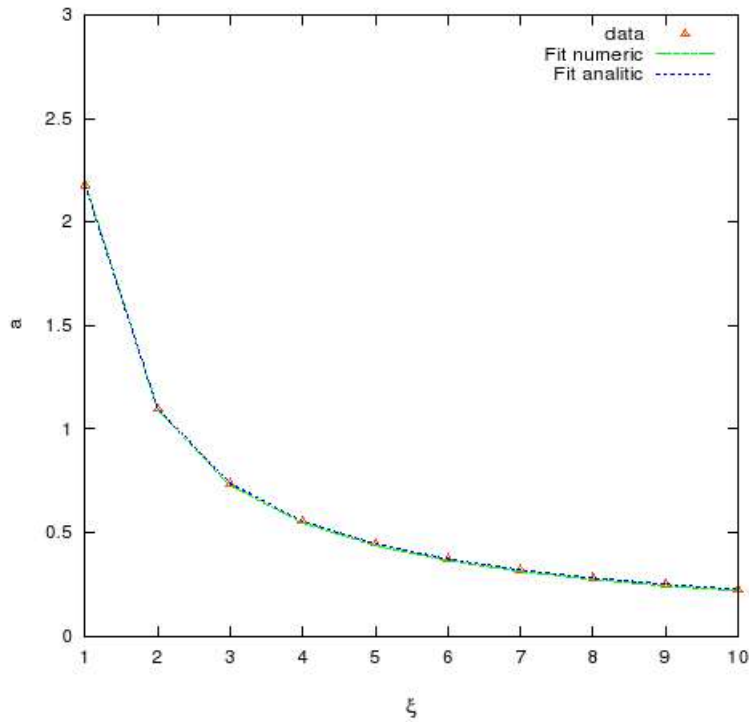


Figura 5.10. Ajuste del parámetro a en cualquier norma covariante arbitraria

Vemos que cuando $\xi = 0$, existe singularidad en el parámetro a , lo que nos da a entender que la norma de Landau es un punto singular en el espacio de valores de ξ , y por esta razón aparece solamente aquí el comportamiento crítico de la función de masa que señala que no hay masa generada dinámicamente para $N > N_c = 32/\pi^2$. La masa generada dinámicamente en una norma covariante arbitraria es entonces

$$M(0) = \frac{2\xi e^2}{8\pi}, \quad (5.6)$$

que es independiente de N , lo que confirma numéricamente nuestros resultados analíticos.

A continuación, en el siguiente Capítulo, discutiremos estos resultados en el contexto del debate de la GDM en la aproximación $1/N$ de QED3.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

El principio de la *Invariancia de Norma* es piedra angular en la física moderna. En él yace la clave de nuestro entendimiento sobre el origen y naturaleza de las interacciones fundamentales, que orquestan la danza de eventos en el escenario del fluir del tiempo. En esta tesis hemos arguido a este principio tratando de dar solución a un viejo debate surgido en el estudio de la GDM en QED3: la existencia de un número crítico de familias de fermiones necesario para que la GDM deje de tener lugar.

Los trabajos pioneros de Appelquist *et al.* [18], que estudian el fenómeno mediante un truncamiento particular a las ESD, considerando efectos de la polarización del vacío al orden dominante en la aproximación $1/N$, despreciando los efectos de la renormalización de la función de onda y utilizando el vértice desnudo. Trabajando en la norma de Landau, ellos concluyen que no se puede encontrar una solución quiralmente asimétrica a las ESD si N excede el valor crítico $N_c = 32/\pi^2$ en este orden de aproximación. Resultados posteriores de Nash [21], que incluyen correcciones hasta el orden $1/N^2$, y Kondo *et al.*, que recurre a esquemas de aproximación distintos, considerando normas no locales [22], que son compatibles con las suposiciones de Appelquist *et al.*, encuentran el mismo comportamiento crítico, salvo por el hecho que $N_c \simeq 3.28$ para Nash y $N_c = 128/3\pi^2$ para Kondo.

Estos resultados han sido, sin embargo, criticados en una serie de trabajos por el grupo de trabajo de Pennington *et al.* [19], quienes sostienen que una vez que se toman en cuenta propiamente los efectos de la renormalización de la función de onda y las correcciones al vértice, este comportamiento crítico desaparece, de modo tal que las masas se pueden generar dinámicamente para cualquier valor de N , aunque estas masas están suprimidas exponencialmente para N grande, es decir, $m \propto e^{-aN}$ con $a > 0$. Es prudente en este momento señalar el trabajo de Pisarski [20], quien utilizando métodos del Grupo de Renormalización, esquema invariante de norma para estudiar GDM, encuentra que la GDM tiene lugar para valores arbitrariamente grandes de N . Estos resultados fueron nuevamente criticados por Appelquist *et al.* [32], quienes posteriormente, haciendo alusión al llamado límite termodinámico, han impuesto la cota de $N_c < 3/2$, [36]. Cabe señalar que existen trabajos [3, 38] que, incluyendo propiamente correcciones para el vértice, encuentran criticalidad, en la norma de Landau, con N_c dentro de este límite y el límite impuesto por las incertidumbres de las simulaciones de lattice.

Estas simulaciones de lattice [14], que es otro esquema invariante de norma, sin embargo, han arrojado sólo controversia en el debate, pues si bien es cierto, parecen favorecer los resultados de Appelquist *et al.*, encontrando que $N_c \cong 3.5$ (Dagotto). Más recientemente, estos estudios no han encontrado señal decisiva de GDM para $N = 2$, pero sí encuentran una señal clara para $N = 1$ [16]. Trabajos más recientes de Kaveh y Herbut [39], utilizando el Grupo de Renormalización, pero considerando interacciones irrelevantes, concluyen que en QED3, existe criticalidad, sólo que para ellos $N_c = 6$. Ante este escenario tan controversial, el enunciado más cierto que uno puede ofrecer en el tema es que *si existe un número crítico de familias para que la GDM deje de tener lugar en QED3, este número está en el intervalo $(0, \infty)$.*

En esta tesis nos propusimos estudiar la invariancia de norma de los resultados de Appelquist *et al.* [18]. Resolvimos numéricamente las ESD haciendo las mismas suposiciones para el truncamiento, despreciando efectos de la renormalización de la función de onda y utilizando el vértice desnudo, pero trabajando en varias normas covariantes, desarrollando para este propósito un método numérico capaz de resolver las ESD en su forma más general posible, que implica resolver sistemas acoplados de ecuaciones integrales no lineales donde las funciones desconocidas aparecen bajo un doble signo de integración. Partimos de la premisa de que el método debía ser fácilmente implementado en otras teorías, como QED y QCD, de modo que fuera más robusto que los métodos desarrollados anteriormente por el grupo de investigación de GDM mediante las ESD del IFM-UMSNH [30, 31]. Este método, basado en la clase general de métodos de colocación para la resolución de ecuaciones integrales, utiliza cuadraturas Gaussianas para realizar las integrales involucradas, traduciendo el problema de ecuaciones integrales a otro de ecuaciones algebraicas (no lineales, acopladas), que se resuelve mediante un protocolo de iteraciones, que puede implementarse fácilmente en cualquier lenguaje de programación. Nosotros elegimos trabajar en el lenguaje de MATHEMATICA 5.1. La robustez de nuestro método ha sido ya probada, no sólo en este problema, pues está recientemente siendo usado para estudiar la GDM en QED4 en presencia de campos magnéticos [37].

Comenzamos haciendo un tratamiento analítico de la ESD resultante de nuestro tuncamiento en una norma covariante arbitraria, cuya complejidad nos limitó a estudiar el régimen en el que el parámetro de norma covariante $\xi \rightarrow \infty$. En esta región, observamos que *la función de masa es insensitiva al número de familias de fermiones consideradas, de modo que en este régimen no existe criticalidad.* Este es el primer indicio de que los resultados de Appelquist *et al.* [18] no son invariantes de norma.

Numéricamente, verificamos primeramente el comportamiento crítico de la función de masa, en términos de su altura, resolviendo la ecuación correspondiente en la norma de Landau. Para $N > N_c = 32/\pi^2 \simeq 3.28$ no es posible encontrar una solución a la ESD. Confirmamos así los resultados de Appelquist *et al.*, [18], y a la vez verificamos la estabilidad de nuestro método numérico. Resolvimos enseguida la ESD para un conjunto de valores de $\xi \in [1, 10]$, tratando de identificar el rango de valores del parámetro de norma para los cuales el comportamiento analítico de ξ grande se haya presentado. Este comportamiento lo identificamos cuando fuimos capaces de resolver la ecuación correspondiente para un N arbitrariamente grande. El valor máximo para el cual resolvimos las ecuaciones fue $N = 20$. Sorprendentemente, para ya para $\xi = 1$, el comportamiento esperado toma lugar,

Figura (5.7). Esto nos condujo a resolver el planteamiento de la posible existencia de criticalidad sólo en una vecindad de la norma de Landau.

Resolvimos entonces la ESD para valores infinitesimales de ξ , encontrando que aunque para $N < N_c$ el comportamiento de la función de masa se asemeja al comportamiento crítico de la norma de Landau, todavía se puede resolver la ESD para valores arbitrarios de N , Figura (5.8). Además, como el tratamiento analítico lo señala, para $N \gg N_c$ y $\xi \rightarrow 0$, o, en el caso de $\xi > 1$, para cualquier valor de N , la función de masa y consecuentemente su altura, son independientes de N . Esto señala que *sólo existe criticalidad en la norma de Landau*, lo que hace de esta norma, una norma singular. Este resultado ha sido encontrado recientemente por otros autores [38], quienes incorporaron en el truncamiento a las ESD correcciones al vértice y sólo encuentran criticalidad en la norma de Landau. Sin embargo, al parecer, ellos no repararon en la importancia de este hecho. Para nosotros, este hecho es muy importante, no sólo porque señala la no invariancia de norma de los resultados de Appelquist *et al.*, sino porque indican que *en QED3, la norma de Landau no es una buena norma para trabajar, pues siendo una norma aislada, no es posible conectarla, mediante transformaciones de norma infinitesimales, al resto de las normas covariantes*.

Finalmente, ya que encontramos que la masa generada dinámicamente depende explícitamente del parámetro de norma, ecuación (5.6), el truncamiento $1/N$ de las ESD en QED3 necesita una exhaustiva revisión, pues conduce a resultados que no verifican el principio de Invariancia de Norma. Falta considerar el papel que juegan la renormalización de la función de onda $F(p)$ y las correcciones al vértice en la criticalidad, como lo señalaron Pennington y su grupo. Además, el tratamiento más completo implicaría resolver simultáneamente las ecuaciones resultantes para $M(p)$, $F(p)$ y $\mathcal{G}(p)$, con una elección apropiada para el vértice, así como incluir campos magnéticos y baños térmicos en el tratamiento. Todo esto es para el futuro.

Apéndice A

Cuadratura Gaussiana

Veamos de que trata la cuadratura Gaussiana [35]. El método consiste en seleccionar los nodos x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y los coeficientes w_1, w_2, \dots, w_n , llamados pesos, que minimicen el error $E_n(f)$ de la aproximación. La cuadratura Gaussiana de n puntos evalúa la integral

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) + E_n(f), \quad (\text{A.1})$$

tal que el grado de precisión es $2n - 1$. El máximo grado de precisión es alcanzado si los n nodos x_j son los ceros de $P_n(x)$, el n -ésimo de los polinomios ortogonales en $[a, b]$ con respecto a cierto peso $w(x)$. Estos polinomios obedecen la relación

$$\int_a^b w(x)f(x)P_i(x)P_j(x)dx = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \quad (\text{A.2})$$

La cuadratura Gaussiana con peso $w(x) = 1$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ es conocida como la regla de cuadratura Gauss-Legendre, que podemos escribir como

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) + E_n(f), \quad (\text{A.3})$$

donde los polinomios ortogonales con respecto al peso $w(x) = 1$ sobre $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$. Estos polinomios pueden ser construidos imponiendo las relaciones de ortogonalidad y normalización

$$\begin{aligned} \int P_i(x)P_j(x)dx &= 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ \int_{-1}^1 P_i^2(x)dx &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Los polinomios de Legendre pueden calcularse con la ayuda de la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (\text{A.5})$$

o usando la relación de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Los pesos w_j de la cuadratura Gauss-Legendre (A.3) se calculan como

$$w_j = \frac{2}{(1-x^2)[P'_n(x)]^2}. \quad (\text{A.6})$$

Uno puede probar que los coeficientes w_j en la fórmula de la cuadratura Gauss-Legendre son siempre positivos. Esto es importante para la precisión numérica del método, pues el error de redondo no se amplifica en este caso. El error de la cuadratura Gauss-Legendre sobre $[-1, 1]$ es

$$E_n\{f\} = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[2n!]^3 f^{2n}(\varepsilon)}, \quad -1 < \varepsilon < 1. \quad (\text{A.7})$$

Si queremos resolver la integral sobre un intervalo arbitrario, la cuadratura de Gauss-Legendre puede ser adaptada como

$$\int_a^b f(y)dy = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n w_j f\left(\frac{(b+a)}{2} + \frac{b-a}{2}x_j\right) + E_n(f), \quad (\text{A.8})$$

donde los pesos y nodos se calculan en el intervalo $[-1,1]$. Por lo tanto, el término de error se representa de la forma

$$E_n(f) = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[2n!]^3 f^{2n}(\varepsilon)}, \quad -a < \varepsilon < b. \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Programa de Mathematica

El método numérico que desarrollamos lo implementamos en MATHEMATICA 5.1 mediante el código que se despliega a continuación.

```
m = 30;
pmin = 10^(-12);
pmax= 10^3;
y =pmin;
lambda = Log[10]/m;
na = 32; b = -1;
c = 1; d = Log[Abs[1/(1 - Exp[(-lambda)])]];
z = Log[Abs[pmax/(pmin ((1 - Exp[(-lambda)])))]];
tole = 10^(-4);
nr = 128;
e=1;
nf= 1;
epsilon=0.1
alfa = e^2*nf;
Do[M[j]=(alfa/8)*Exp[2]*Exp[(-2*Pi)/Sqrt[(32/(Pi^2)*N)-1]], {j, 1,
nr}];
f[k_, p_, x_] := 1/(k^2 + p^2 - 2k*p*x + (alfa/8) Sqrt[k^2 + p^2-
2k*p*x])+(epsilon/2)/(k^2 + p^2 - 2k*p*x);
«NumericalMath`GaussianQuadrature`
lista=GaussianQuadratureWeights[na, b, c];
Clear[x]
Do[x[l1] = lista[[l1, 1]], {l1, 1, na}]
Clear[w]
Do[w[l1] = lista[[l1, 2]], {l1, 1, na}] g[k_, M_] := k^3*M/(k^2 + M^2)
lista1 = GaussianQuadratureWeights[nr, d, z];
Clear[p]
Do[p[ii] = pmin*Exp[lista1[[ii, 1]]]*(1 - Exp[(-lambda)]), {ii, 1, nr}]
Clear[R]
Do[R[ii] = lista1[[ii, 2]], {ii, 1, nr}]
Do[angular[i, j] =Sum[ w[l1]*f[p[i], p[j], x[l1]],{l1, 1, na}],
{i, 1,nr}, {j, 1, nr}];
```

```

wildcard = 0;
it = 0;
While[wildcard < 1,
Label[iter];
it += 1;
Do[ ker[i, j] = (alfa/(2*(Pi^2)*nf))p[i]^3*M[i]/(p[i]^2 +
M[i]^2)*angular[i, j], {i, 1, nr}, {j, 1, nr}];
Do[kernint[j]=Sum[ker[i, j]*R[i],{i, 1, nr}], {j, 1, nr}];
Do[chsqr[d[j] = Abs[((kernint[j] - M[j]))/(M[j]))], {j, 1, nr}];
If[Max[Table[chsqr[d[j], {j, 1, nr}]] < tole Goto[exiter],
Do[M[j] =kernint[j], {j, 1, nr}]; Goto[iter]];
Label[exiter];
Do[Mfin[j] = kernint[j], {j, 1, nr}]; wildcard = wildcard + 1]
ColumnForm[Table[{FortranForm[p[j]], FortranForm[Mfin[j]]},
{j, 1, nr}]]{j, 1, nr}]]»tabla.dat
FortranForm[N[-Log[Abs[Mfin[1]/(alfa/8)]]]]»altura.dat

```

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, *Tesis Doctoral, Universidad de Harvard (1958)*.
S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961).
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
A. Salam, en «*Elementary Particle Physics*» *Nobel Symposium No. 8*, 367 (1968).
- [2] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).
P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
P. W. Higgs, *Phys. Rev.* **145**, 1156 (1966).
T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155**, 1554 (1967).
- [3] P. Maris y C. D Roberts, *Phys. Rev.* **C58**, 3659 (1998).
R. Williams, C. S. Fischer y M. R. Pennington, *Phys. Lett.* **B654**, 167 (2007).
- [4] S. Aoki, *para la colaboración CP-PACS Phys. Rev.* **D67**, 034503 (2003)
- [5] J. S. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **37**, 452 (1951).
F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949).
- [6] D. J. Gross, R.D. Pisarski y L.G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43 (1981).
- [7] A. Khare, «*Fractional Statistics Quantum Theory*» *World Scientific (2005)*. ISBN 981-256-160-9.
- [8] K. Shimizu, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 610 (1985).
A. Bashir y Ma. de Jesús Anguiano Galicia, *Few Body Systems* **37**, 71 (2005).
Ma. de Jesús Anguiano Galicia, *Tesis de Licenciatura, FCFM-UMSNH (2004)*.
Ma. de Jesús Anguiano Galicia, *Tesis de Maestría, IFM-UMSNH (2007)*.
- [9] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang M. I. Katnelson,
I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos y A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormet y P. Kim, *Nature* **438**, 201 (2005).
V.P. Gusynin y S.G Sharapov, *Phys Rev. Lett.* **95**, 146801 (2005).
V.P. Gusynin y S.G Sharapov, *Phys Rev.* **73**, 245411 (2006).

- [10] M. Franz y Z. Tesanovic, *Phys Rev. Lett.* **87**, 257003 (2001).
 M. Franz, Z. Tesanovic y O. Vafek, (2002), *Phys. Rev.* **B66**, 054535 (2002).
 O. Vafek, Z. Tesanovic y Franz, *Phys. Rev. Lett* **89**, 157003 (2002).
 I.F. Herbut, *Phys. Rev.* **B66**, 094504 (2002).
 I.F. Herbut, *Phys. Rev.* **88**, 047006 (2002).
- [11] E. Reyes Ramírez, *Tesis de Licenciatura FC-UNAM* (2007).
- [12] E. Fradkin, «*Field Theories of Condensed Matter System*» World Scientific (1998).
 ISBN 0-201-52253-5.
 F. Wilczek, «*Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*» World Scientific
 (1998). ISBN 981-02-049-8.
- [13] N. Dorey y N.E Mavromatos, *Nucl. Phys.* **B386**, 614 (1992)
 G. Triantaphylloy, *Phys. Rev.* **D58**, 065006 (1998).
- [14] E. Dagotto, J. B. Kogut y A. Kocic, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1083 (1989).
 E. Dagotto, J. B. Kogut y A. Kocic, *Nucl. Phys.* **B334**, 279 (1990).
- [15] K. Farakos, G. Koutsoumbas y A. Momen, *Phys. Rev.* **D61**, 045005 (2000).
 J. Alexandre, K. Farakos, S.J. Hands, G. Koutsoumbas y S.E. Marrison, *Phys.
 Rev.* **D64**, 0345005 (2001).
- [16] S. J. Hands, J.B. K. Kogut y C.G. Strouthos, *Nucl. Phys.* **B645**, 321 (2002).
 C.G. Strouthos, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119**, 974 (2003).
 S. J. Hands, J.B. K. Kogut, L. Scorzato y C. G. Strouthos, *Phys. Rev.* **B70**,
 104501 (2004).
- [17] C.J Burden y C.D. Roberts, *Phys. Rev.* **D44**, 540 (1991),
 M.R Pennington y D.Walsh, *Phys. Lett.* **B253**, 246 (1991).
 A. Bashir, *Phys. Lett.* **B492**, 280 (2000).
 A. Bashir, A. Kizilersu y M.R. Pennington, *Phys. Rev.* **D62**, 085002 (2000).
 V.P. Gusynin y M. Reenders, *Phys. Rev.* **D68**, 025017 (2003).
 Y. Hoshino, *JHEP* **0409**, 048 (2004).
 A. Bashir y A. Raya, *Nucl. Phys.* **B709**, 307 (2005).
 A. Bashir y A. Raya, «*Truncated Schwinger-Dyson equation and gauge covariance in
 QED3*» *Aceptado en Few Body Systems*.
 A. Bashir y A. Raya, «*Trends in Boson Research*» editor A.V. Ling, 1a. Edición
 (Nova Science Publishers, Inc. N.Y., 2006) ISBN 1-59454-521-9, hep-ph/0411310.
- [18] T. Appelquist, M. J. Bowick, E. Cohler y L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.*
55, 1715 (1985).

- T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali y L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D33**, 3704 (1986).
- T. Appelquist, D. Nash y L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2575 (1988).
- [19] M. R. Pennington y S. P Webb. «Hierarchy of scales in three dimensional QED» BNL-40886 Enero (1988) (No publicado).
D. Atkinson, P. W. Johnson y M. R. Pennington, «Dynamical mass generation in three-dimensional QED» BNL-41615, Agosto (1988) (No publicado).
D. C. Curtis, M. R. Pennington y D. Walsh, *Phys. Lett.* **B295**, 313 (1992).
S. P. Webb, Tesis Doctoral
- [20] R. Pisarski, *Phys. Rev.* **D44**, 1866 (1991).
- [21] Nash. D. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 06511 (1989).
- [22] K.-I. Kondo, T. Ebihara, T. Iizuka y E. Tanaka, *Nucl. Phys.* **B434**, 85 (1995).
- [23] D. J Griffiths, «Introduction to Quantum Mechanics», Prentice Hall Inc. (1995). ISBN 0-13-124105-1.
- [24] W. Greiner, «Relativistic Quantum Mechanics: Wave equations», Ed. Springer, 3a ed. ISBN 3-540-67457-8.
- [25] F. Halzen . and A. D Martin «Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics» (1984).
- [26] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950).
E. S. Fradkin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **29**, 258 (1955).
E. S. Fradkin, *Sov. Phys. JETP* **2**, 361 (1956).
H. S. Green, *Procc. Phys. Soc. (London)* **A66**, 873 (1953).
Y. Takahashi, *Nouvo Cimento* **6**, 371 (1957).
- [27] L. D. Landau e I. M. Khalatnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **29**, 89 (1956).
L. D. Landau e I. M. Khalatnikov, *Sov. Phys. JETP* **2**, 69 (1956).
E. S. Fradkin, *Sov. Phys. JETP* **2**, 361 (1956).
K. Johnson y B. Zumino, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 351 (1959).
B. Zumino, *J. Math. Phys.* **1**, 1 (1960).
S. Okubo, *Nouvo Cimento* **15**, 949 (1960).
I. Bialynicki-Birula, *Nouvo Cimento* **17**, 951 (1960).
H. Sonoda, *Phys. Lett.* **B499**, 253 (2001).
- [28] C. D. Roberts y A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477 (1994).

- [29] C. J. Burden y C. D. Roberts *Phys. Rev.* **D44** 540 (1991).
- [30] A. Bashir, A. Huet y A. Raya. *Phys. Rev.* **D66**, 025029 (2002).
- [31] A. Huet, «*Generación Dinámica de Masas en QED3*» Tesis de Licenciatura, FCFM-UMSNH (2001).
A. Huet, «*Estudio Numérico de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson en QED3*» Tesis de Maestría, IFM-UMSNH (2003).
A. Bashir Tesis Doctoral Universidad de Durham (1995).
A. Raya Tesis Doctora IFM-UMSNH (2003).
- [32] T. Appelquist, J. Terning y L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2081 (1988).
- [33] S. Coleman, «*Aspects of Symmetry*» Cambridge University Press (1985). ISBN 0-521-31827-0
- [34] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B75**, 461 (1974).
- [35] J. C. R. Bloch, Tesis Doctoral, Universidad de Durham (1995).
- [36] T. Appelquist, A. G. Cohen y M. Schmaltz, *Phys. Rev.* **D60**, 045003 (1999).
- [37] E. Rojas, Tesis Doctoral ICN-UNAM en progreso.
A. Ayala, A. Bashir, A. Raya y E. Rojas, *Phys. Rev.* **D73**, 105009 (2006).
- [38] C. S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm y P. Maris, *Phys. Rev.* **D70**, 073007 (2004).
- [39] K. Kaveh e I. F. Herbut, *Phys. Rev.* **B71**, 184518 (2005).