UNIVERSIDAD MICHOACANA

DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas

David Villa Hernández

Presenta

T E S I S

LA FUNCIÓN ZETA DEL ANILLO DE BURNSIDE PARA GRUPOS CÍCLICOS DE ORDEN UN PRIMO AL CUADRADO

Asesor:

Dr. Gerardo Raggi Cárdenas

Morelia, Michoacán. Diciembre 2007

con todo mi cariño papá y mamá

Índice general

Introducción

El propósito de este trabajo es determinar el anillo de Burnside $B(C_{p^2})$, en donde C_{p^2} es el grupo cíclico de orden p^2, para $p-$primo y una vez definido el anillo $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ obtendremos $B_{\{p\}}(C_{p^2})$, el cual es un orden sobre este y cuyo orden maximal denotaremos por $\tilde{B}_{\{p\}}(C_{p^2})$. De acuerdo con el teorema 2.2.23 se hará el cálculo de la funciones zeta de $B_{\{p\}}(C_{p^2})$ y de $\tilde{B}_{\{p\}}(C_{p^2})$, con el fin de obtener por último $f_{C_{p^2}}(p^{-z})$, el cual es un polinomio en $\mathbb{Z}[p^{-z}]$ y que relaciona a las dos funciones zeta anteriores como se puede ver en dicho teorema.

En la primera sección del capítulo 1 se verán conceptos básicos de la teoría de grupos. Definiremos el concepto de $G-$conjuntos así como el de una $G-$órbita. Se darán algunos ejemplos de G-conjuntos e isomorfismos entre ellos, los cuales serán importantes para la construcción de $B(G)$ el anillo de Burnside de un grupo G finito.

En la segunda sección de este capítulo veremos el concepto de la marca de un subgrupo H en un G-conjunto X, el cual será útil para dar un morfismo de $B(G)$ en $\prod \mathbb{Z}$, el producto de varias copias del anillo de los enteros.

En la primera sección del capítulo 2, se verán conceptos básicos de la teoría de anillos, y dado un grupo G construiremos el anillo de Burnside de G. Veremos además que $B(G)$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre como grupo abeliano, generado por los elementos de la forma G/H, donde H pertenece al conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G. Daremos también una regla para obtener el producto entre los generadores.

En la segunda sección de este capítulo se verá el concepto de un orden sobre un anillo, se definirá el anillo $\mathbb{Z}_\pi$. Definiremos la función zeta para un orden de $\mathbb{Z}_\pi$, y por último enunciaremos algunos teoremas relacionados con la función zeta de un orden.

En la tercera sección de este capítulo, veremos un ejemplo en donde se hará el calculo de $f_{C_p}(p^{-z})$, el cual pertenece a $\mathbb{Z}[p^{-z}]$ y relaciona a $\zeta_{B_{\{p\}}(C_p)}(z)$ con $\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}(C_p)}(z)$, las funciones zeta de $B_{\{p\}}\left(C_p\right)$ y $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_p\right)$ respectivamente.

En la primera sección del capítulo 3, se estudiarán a fondo todos los ideales de índice finito en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$.

En la segunda sección de este capítulo, se hará un resumen de todos los ideales de índice finito en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$, con el propósito de encontrar la función zeta de este orden, además se hará el calculo de la función zeta del orden maximal $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$. Por último y de acuerdo con el teorema (2.2.23), se hará el cálculo del polinomio $f_{\left(C_{p^2}\right)}(p^{-z})$, el cual pertenece a $\mathbb{Z}[p^{-z}]$ y relaciona a $\zeta_{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)$ con $\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)$, las funciones zeta de $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ y $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ respectivamente.

Capítulo 1

PRELIMINARES.

OBSERVACIÓN: En este trabajo sólo se considerarán grupos finitos, y en caso contrario se especificará que el grupo no es necesariamente finito.

En la sección 1.1 de este capítulo definiremos el concepto de $G-$conjunto, así como el de una $G-$órbita. Se verán algunos ejemplos de G-conjuntos e isomorfismos entre ellos, los cuales serán importantes para la construcción de $B(G)$ el anillo de Burnside de un grupo G .

En la sección 1.2 de este capítulo veremos el concepto de $\varphi_H(X)$ la marca de un subgrupo H en un G-conjunto X, el cual será útil para dar un morfismo de $B(G)$ en $\prod \mathbb{Z}$, el producto de varias copias del anillo de los enteros.

1.1. G-CONJUNTOS.

1.1.1 Definición.

Un grupo es un conjunto G, junto con una regla de composición de

$$G \times G \to G,$$

tal que:
(i).- Es asociativa, es decir $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$, $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$.

(ii).- Existe $e \in G$ el elemento identidad, tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.

(iii).- Para todo elemento $g \in G$, Existe $g^{-1} \in G$ el inverso de g, tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
Ejemplos de grupos:
$(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{Q}, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{R}, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +)$; $(\mathbb{C}, \cdot)$.

1.1.2 Definición.

Sea G un grupo y X un conjunto, entonces X es un G-conjunto si existe una regla de composición

$$\cdot : G \times X \to X$$

$$(g, x) \to g \cdot x$$

tal que cumple lo siguiente:
(i).- $e \cdot x = x$, $\forall\ x \in X$ y $e \in G$ el elemento identidad.

(ii).- $(g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, $\forall\ x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.
De esta definición, diremos que G actúa en X con la acción $(\cdot)$.

1.1.3 Proposición.

Sea X un G-conjunto, tenemos la siguiente relación de equivalencia en X:

Sean $x, y \in X$, entonces $x \sim y$ son equivalentes si $\exists\ g \in G$, tal que $x = g \cdot y$.

Demostración.

(i).- Tenemos que $x = e \cdot x$, por lo que $x \sim x$.

(ii).- Si $x \sim y$, entonces $x = g \cdot y$, por lo que $y = g^{-1} \cdot x$, de donde $y \sim x$.

(iii).- Si $x \sim y$ y $y \sim z$, tenemos que $x = g \cdot y$ y $y = f \cdot z$ para algún $g, f \in G$, por lo que

$$x = g \cdot y = g \cdot (f \cdot z) = (gf) \cdot z,$$

por lo que $x \sim z$.

Concluimos entonces que $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

1.1.4 Definición.

La órbita en G de un elemento $x \in X$, es la clase de equivalencia de x, y la denotaremos como sigue

$$O_G(x) := \{y \in X \mid y = g \cdot x, \text{ para algún } g \in G\ \} = G \cdot x.$$

1.1.5 Proposición.

Las órbitas de X un G-conjunto son ajenas.

Demostración:

Sean $x, y \in X$, tales que

$$O_G(x) \cap O_G(y) \neq \emptyset,$$

entonces tenemos que existen $g, f \in G$ tales que $g \cdot x = f \cdot y$, de donde $x = (g^{-1}f) \cdot y$, por lo que

$$O_G(x) = G \cdot x = G \cdot ((g^{-1}f) \cdot y) = G \cdot y = O_G(y).$$

1.1.6 Observación.

Sea $(X_i, \cdot_i)_{i\in I}$, una familia de G-conjuntos, tenemos que:
(i).- $\uplus_{i\in I} X_i$, la unión ajena de los X_i, es decir la unión de los X_i tales que $X_i \cap X_j = \emptyset\ \forall$ i $\neq j$, es un G-conjunto con la siguiente acción

$$g \cdot x := g \cdot_i x,\ \forall\ g \in G,\ i \in I \text{ y } x \in X_i.$$

(ii).- $\Pi_{i\in I} X_i$, el producto cartesiano de los X_i, es un G -conjunto con la siguiente acción

$$g \cdot (x_i)_{i\in I} := (g \cdot_i x_i)_{i\in I},\ \forall\ g \in G \text{ y } (x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} X_i.$$

1.1.7 Definición.

Un subconjunto $H \subseteq G$, es un subgrupo de G, si H cumple lo siguiente:
(i).- $e \in H$, donde e es el elemento identidad en G.
(ii).- Si $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 h_2 \in H$.
(iii).- Si $h \in H$, entonces $h^{-1} \in H$.
Si $H \subseteq G$ es un subgrupo de G, lo denotaremos por $H \leq G$.

1.1.8 Definición.

Sea $H \leq G$, entonces el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G es

$$G\diagup H := \{gH \mid g \in G\},$$

en donde $gH := \{gh \mid h \in H\}$, y $gH = g'H$ sí y solo sí $g^{-1}g' \in H$.

1.1.9 Observación.

Sea $H \leq G$, tenemos que $G\diagup H$ es un G-conjunto con la siguiente acción:

$$f \cdot gH := fgH,$$

$\forall\ f \in G$, y $gH \in G\diagup H$.
Demostremos que la acción está bien definida:
Sea $g_1 H = g_2 H$, entonces tenemos que $g_1^{-1} g_2 \in H$, por lo que $g_1^{-1} g_2 = h$, para algún $h \in H$, y entonces $f \cdot g_2 H = f \cdot g_1 h H = f \cdot g_1 H$.

1.1.10 Definición.

Sea X un $G-$ conjunto, y $x \in X$ un elemento, definimos el estabilizador de x en G como

$$\mathrm{stab}_G(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \leq G,$$

el cual es un subgrupo de G.

1.1.11 Definición.

Un G-conjunto es transitivo si solo tiene una sola órbita.

(Se pueden ver ejemplos de $G-$conjuntos transitivos en [1] Monoids And Groups:" Groups acting on sets").

1.1.12 Definición.

Sean X, Y dos G-conjuntos con acciones $\cdot_x, \cdot_y$ respectivamente, y sea $f : X \to Y$ una función, tenemos que f es un morfismo de G-conjuntos si

$$f(g \cdot_x x) = g \cdot_y f(x), \ \forall \ g \in G \text{ y } x \in X.$$

(Se pueden ver ejemplos de $G-$ morfismos en [1] Monoids And Groups:" Groups acting on sets").

1.1.13 Observación.

Sean X, Y, Z G-conjuntos con acciones $\cdot_x, \cdot_y, \cdot_z$ respectivamente, y sean

$$f_x : X \to Y,$$

$$f_y : Y \to Z,$$

morfismos de G-conjuntos, entonces si $g \in G$ tenemos que

$$f_y \cdot f_x(g \cdot_x x) = f_y(f_x(g \cdot_x x)) = f_y(g \cdot_y f_x(x)) =$$

$$g \cdot_z f_y(f_x(x)) = g \cdot_z (f_y \cdot f_x(x)),$$

por lo que $f_y \cdot f_x : X \to Z$ es morfismo de G-conjuntos.

1.1.14 Observación.

Si H, K son dos subgrupos de G, tal que $K \subseteq H$, es claro que la proyección canónica

$$\Pi := G\diagup K \to G\diagup H,$$

$$gK \to gH,$$

es un morfismo de G-conjuntos. Sólo veamos que esta bien definida:

Sea $g_1K = g_2K$, entonces tenemos que $g_1^{-1}g_2 \in K \subseteq H$, por lo que $g_1^{-1}g_2H = H$, y entonces

$$g_1H = g_2H.$$

1.1.15 Definición.

Dos G-conjuntos X, Y son isomorfos si existe $f : X \to Y$ un morfismo de G-conjuntos biyectivo y lo denotamos como

$$X \cong_G Y.$$

1.1.16 Proposición.

Dados X, Y dos G-conjuntos finitos, tenemos la siguiente relación de equivalencia

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cong_G Y$$

Demostración.

i).- Tenemos que $X \cong_G X$, por lo que

$$X \sim X.$$

ii).- Si $X \sim Y$, entonces $X \cong_G Y$ por lo que existe $f : X \to Y$ un isomofismo de G-conjuntos, y entonces $f^{-1} : Y \to X$ es también un isomorfismo de G-conjuntos por lo que $Y \cong_G X$, y entonces

$$Y \sim X.$$

iii).- Si $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, tenemos que existen $f_x : X \to Y$ y $f_y : Y \to Z$ isomorfismos de G-conjuntos, de donde $f_y \cdot f_x : X \to Z$ es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que $X \cong_G Z$, y entonces

$$X \sim Z.$$

1.1.17 Proposición.

Sea Xun G-conjunto, $x \in X$, y $g \in G$:
i).- $\operatorname{stab}_G(g_0 \cdot x) = g_0 \operatorname{stab}_G(x) g_0^{-1}$.
ii).- $O_G(x) \cong_G G\diagup \operatorname{stab}_G(x)$.
iii).- $G\diagup H$ es transitivo $\forall\ H \leq G$ subgrupo de G.
iv).- Si Xes transitivo, entonces $X \cong_G G\diagup H$, para algún H subgrupo de G.

Demostración.

i).- $g \in \operatorname{stab}_G(g_0 \cdot x)$, sí y solo sí $gg_0 \cdot x = g_0 \cdot x$, sí y solo sí $g_0^{-1} gg_0 \cdot x = x$, sí y solo sí $g_0^{-1} gg_0 \in \operatorname{stab}_G(x)$, sí y solo sí $g \in g_0 \operatorname{stab}_G(x) g_0^{-1}$.
ii).- Demostremos que el siguiente es un morfismo de G-conjuntos

$$f : O_G(x) \to G\diagup \operatorname{stab}_G(x).$$

$$g \cdot x \to g\operatorname{stab}_G(x)$$

Sea $g_1, g_2 \in G$, si $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, tenemos que $g_1^{-1} g_2 \in \operatorname{stab}_G(x)$ y entonces $g_1^{-1} g_2 \operatorname{stab}_G(x) = \operatorname{stab}_G(x)$, de donde

$$g_1 \operatorname{stab}_G(x) = g_2 \in \operatorname{stab}_G(x),$$

por lo que f está bien definida.
Tenemos que $h \in H$ y $g \cdot x \in O_G(x)$, entonces

$$f(h \cdot (g \cdot x)) = f(hg \cdot x)) = hg \operatorname{stab}_G(x) =$$

$$h(g \operatorname{stab}_G(x)) = hf(g \cdot x),$$

por lo que f es morfismo de G-conjuntos.
Sea $f(g_1 \cdot x) = f(g_2 \cdot x)$, tenemos que $g_1 \operatorname{stab}_G(x) = g_2 \operatorname{stab}_G(x)$, por lo que $g_1^{-1} g_2 \in \operatorname{stab}_G(x)$, y entonces tenemos que $g_1^{-1} g_2 \cdot x = x$, de donde

$$g_2 \cdot x = g_1 \cdot x,$$

por lo que f es inyectiva.
Sea $g \operatorname{stab}_G(x) \in G\diagup \operatorname{stab}_G(x)$, tenemos que

$$g \operatorname{stab}_G(x) = f(g \cdot x),$$

por lo que f es suprayectiva.

iii).- Sea $gH \in G/H$, tenemos que

$$O_G(gH) = G \cdot gH = G \cdot H = G/H.$$

iv).- Tenemos que $X = O_G(x_0)$, para algún $x_0 \in X$ y por el inciso ii, tomamos

$$H = \text{ stab}_G(x_0).$$

1.1.18 Definición.

Sean $H, K \leq G$ dos subgrupos de un grupo G no necesariamente conmutativo, decimos que H es conjugado de K si existe $g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$.

1.1.19 Observación.

Sea

$$S(G) = \{H \leq G \mid H - \text{subgrupo de } G\},$$

tenemos que G actúa en $S(G)$ por conjugación, es decir, la acción está dada por

$$g \cdot H = gHg^{-1}, \ \forall \ g \in G \text{ y } H \in S(G).$$

Es claro que esta es una acción, por lo que solo hay que ver que está bien definida.

Sea $H \in S(G)$, demostremos que $gHg^{-1} \in S(G)$:

i).- Sea $e \in G$ la identidad, tenemos que $e = gg^{-1} = geg^{-1} \in gHg^{-1}$.

ii).- Sean $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$, tenemos que

$$gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

iii).-tenemos que

$$1). - (ghg^{-1})(gh^{-1}g^{-1}) = ghh^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = e,$$

$$2). - (gh^{-1}g^{-1})(ghg^{-1}) = gh^{-1}hg^{-1} = gg^{-1} = e,$$

por lo que

$$(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1}.$$

Bajo esta acción denotaremos por $O_G(H) := \bar{H}$, a la clase de conjugación de H y

$$C(G) := \left\{\bar{H} \mid H \in S(G)\right\},$$

al conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G.

1.1.20 Afirmación.

Sean $H, K \in S(G)$, entonces $G/H \cong_G G/K$, sí y solo sí $\bar{H} = \bar{K}$.

Demostración.

- Si $\bar{H} = \bar{K}$, tenemos que $H = g_0 K g_0^{-1}$, para algún $g_0 \in G$, y sea

$$f : G/K \to G/H$$

$$gK \to g g_0^{-1} H,$$

Demostremos que f es un isomorfismo de G-conjuntos.

Si $g_1 K = g_2 K$, tenemos que $g_1^{-1} g_2 \in K$, por lo que $g_0 g_1^{-1} g_2 g_0^{-1} \in H$, de donde $g_0 g_1^{-1} g_2 g_0^{-1} H = H$ y entonces

$$g_2 g_0^{-1} H = g_1 g_0^{-1} H,$$

por lo que f está bien definida.

Sea $a \in G$, tenemos que

$$f(a \cdot gK) = f(agK) = agg_0^{-1}H = a \cdot gg_0^{-1}H = a \cdot f(gK),$$

por lo que f es morfismo de G-conjuntos.

Sea $f(g_1K) = f(g_2K)$, tenemos que $g_1 g_0^{-1} H = g_2 g_0^{-1} H$, por lo que $g_1 g_0^{-1}(g_0 K g_0^{-1}) = g_2 g_0^{-1}(g_0 K g_0^{-1})$, de donde

$$g_1 K g_0^{-1} = g_2 K g_0^{-1},$$

lo cual implica que

$$g_1 K = g_2 K,$$

y entonces f es inyectiva.

Sea $gH \in G/H$, tenemos que

$$gH = f(gg_0K),$$

por lo que f es suprayectiva.

- Si $G/H \cong_G G/K$, tenemos que existe

$$f_0 : G/H \to G/K$$

$$H \to g_0 K$$

un isomorfismo. Sea $h \in H$, tenemos que $g_0K = f_0(H) = f_0(hH) = hf_0(H) = hg_0K$, por lo que $g_0K = Hg_0K$, y entonces $g_0^{-1}Hg_0K = K$, por lo que $g_0^{-1}Hg_0 \subseteq K$, y entonces

$$H \subseteq g_0Kg_0^{-1},$$

además tenemos que

$$f_0^{-1} : G\diagup K \to G\diagup H$$

$$K \to g_0^{-1}H,$$

de donde si $k \in K$, tenemos que $g_0^{-1}H = f_0^{-1}(K) = f_0^{-1}(kK) = kf_0^{-1}(K) = kg_0^{-1}H$, por lo que $g_0^{-1}H = Kg_0^{-1}H$, y entonces $g_0Kg_0^{-1}H = H$, por lo que

$$g_0Kg_0^{-1} \subseteq H,$$

y entonces $H = g_0Kg_0^{-1}$.

1.1.21 Proposición.

Sea $f : X \to Y$, un morfismo de G-conjuntos y sea $x \in X$, entonces $f(O_G(x)) = O_G(f(x))$.

Demostración.

- Sea $g \cdot x \in O_G(x)$, tenemos que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$, por lo que

$$f(O_G(x)) \subseteq O_G(f(x)).$$

- Sea $g \cdot f(x) \in O_G(f(x))$, tenemos que $g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$, por lo que

$$O_G(f(x)) \subseteq f(O_G(x)).$$

1.1.22 Proposición.

Sea X un G-conjunto, entonces

$$X \cong_G \biguplus_{i \in I} G\diagup H_i$$

Demostración.

Tenemos que $X = \biguplus_{i\in I} O_G(x_i)$, y además $O_G(x_i) \cong_G^{f_i} G \diagup \mathrm{stab}_G(x_i)$. Sea

$$f : \biguplus_{i\in I} O_G(x_i) \to \biguplus_{i\in I} G\diagup(x_i)$$
$$x \to f(x),$$

donde $f(x) := f_i(x)$ sí y solo sí $x \in O_G(x_i)$. Tenemos que f es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que la proposición queda demostrada.

1.1.23 Definición.

Sean $H, K \in S(G)$, decimos que H es subconjugado de K, si $gHg^{-1} \subseteq K$ para algún $g \in G$.

1.1.24 Proposición.

Sea

$$\mathrm{Hom}_G(G\diagup H, G\diagup K) =$$
$$\{f : G\diagup H \to G\diagup K \mid f - \text{morfismo de G-conjuntos}\},$$

entonces

$$\mathrm{Hom}_G(G\diagup H, G\diagup K) \neq \emptyset \Leftrightarrow H \text{ es subconjugado de } K.$$

Demostración.

- Si $\mathrm{Hom}_G(G\diagup H, G\diagup K) \neq \emptyset$, entonces existe

$$f : G\diagup H \to G\diagup K$$
$$H \to g_0K,$$

un morfismo. Tenemos que si $h \in H$, entonces $g_0K = f(H) = f(hH) = hf(H) = hg_0K$, por lo que $g_0K = Hg_0K$, y entonces $g_0^{-1}Hg_0K = K$, por lo que

$$g_0^{-1}Hg_0 \subseteq K.$$

- Si H es subconjugado de K, entonces existe $g_0 \in G$ tal que $g_oHg_0^{-1} \subseteq K$, tenemos que $G\diagup H \cong_G^f G\diagup g_0Hg_0^{-1}$, y sea

$$\Pi := G\diagup g_oHg_0^{-1} \to G\diagup K,$$

la proyección canónica, entonces tenemos que $\Pi \cdot f \in \mathrm{Hom}_G(G\diagup H, G\diagup K)$.

1.1.25 Observación.

Sea H un subconjugado de K, entonces si H_1 es un conjugado de H, tenemos que H_1 es subconjugado de cualquier conjugado de K.

1.1.26 Proposición.

Sen $\bar{H}, \bar{K} \in C(G)$, dos clases de conjugación, tenemos el siguiente orden parcial en $C(G)$:
$\bar{H} \leq \bar{K} \Leftrightarrow H$ es subconjugado de K.

Demostración.

i).- Tenemos que $eHe = H$, por lo que

$$\bar{H} \leq \bar{H}.$$

ii).- Si $\bar{H} \leq \bar{K}$ y $\bar{K} \leq \bar{H}$, tenemos que $g_1 H g_1^{-1} \subseteq K$ y $g_2 K g_2^{-1} \subseteq H$, de donde

$$g_2 g_1 H g_1^{-1} g_2^{-1} \subseteq g_2 K g_2^{-1} \subseteq H,$$

y puesto que el número de elementos de H es igual al número de elementos de $g_2 g_1 H g_1^{-1} g_2^{-1}$, tenemos que el número de elementos de $g_2 K g_2^{-1}$ es igual al número de elementos de H, por lo que $g_2 K g_2^{-1} = H$, y entonces

$$\bar{H} = \bar{K}.$$

iii).- Si $\bar{H} \leq \bar{K}$ y $\bar{K} \leq \bar{L}$, tenemos que $g_1 H g_1^{-1} \subseteq K$ y $g_2 K g_2^{-1} \subseteq L$, de donde

$$g_2 g_1 H g_1^{-1} g_2^{-1} \subseteq g_2 K g_2^{-1} \subseteq L,$$

con lo cual $g_2 g_1 H (g_2 g_1)^{-1} \subseteq L$ y por lo que

$$\bar{H} \leq \bar{L}.$$

1.2. LA MARCA DE H EN X.

1.2.1 Definición.

Dado un G-conjunto X, y un subgrupo H de G, definimos X^H como el conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo la acción de H, es decir

$$X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x, \forall h \in H\}.$$

1.2.2 Definición.

Definimos la marca de H en X, como el número de elementos de X^H y la denotaremos como sigue:

$$\varphi_H(X) = \mid X^H \mid .$$

1.2.3 Proposición.

Sean X, Y dos G-conjuntos, tenemos que:
i).- $\varphi_H(X \uplus Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.
ii).- $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

Demostración.

i).-

$$(X \uplus Y)^H = \{z \in X \uplus Y \mid h \cdot z = z, \forall h \in H\} =$$
$$\{z \in X \mid h \cdot z = z, \forall h \in H\} \uplus \{z \in Y \mid h \cdot z = z, \forall h \in H\},$$

por lo que $(X \uplus Y)^H = X^H \uplus Y^H$ y entonces

$$\varphi_H(X \uplus Y) = \mid X^H \uplus Y^H \mid = \mid X^H \mid + \mid Y^H \mid = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y).$$

ii).-

$$(X \times Y)^H = \{(x, y) \in X \times Y \mid h \cdot (x, y) = (x, y), \forall h \in H\} =$$
$$\{(x, y) \in X \times Y \mid (h \cdot x, h \cdot y) = (x, y), \forall h \in H\} =$$
$$\left\{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X^H, y \in Y^H\right\},$$

por lo que

$$(X \times Y)^H = X^H \times Y^H$$

y entonces $\varphi_H(X \times Y) = \mid X^H \times Y^H \mid = \mid X^H \mid\mid Y^H \mid = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

1.2.4 Proposición.

Sean $\bar{H}, \bar{K} \in C(G)$ dos clases de conjugación, tales que $\bar{H} = \bar{K}$, entonces tenemos que $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$, para todo G- conjunto X.

Demostración.

Sea X un G-conjunto, puesto que $\bar{H} = \bar{K}$, tenemos que $H = g_0 K g_0^{-1}$ para algún $g_0 \in G$, de donde

$$X^H = X^{(g_0 K g_0^{-1})} = \left\{x \in X \mid g_0 k g_0^{-1} \cdot x = x, \forall k \in K\right\} =$$

$$\left\{x \in X \mid k g_0^{-1} \cdot x = g_0^{-1} x, \forall k \in K\right\} = \left\{x \in X \mid g_0^{-1} x \in X^K\right\} =$$

$$\left\{x \in X \mid x \in g_0 X^K\right\} = g_0 X^K,$$

por lo que $\varphi_H(X) =\mid g_0 X^K \mid = \mid X^K \mid = \varphi_K(X)$.

1.2.5 Proposición.

Sean $H, K \in S(G)$ dos subgrupos de G, entonces existe una biyección de

$$(G/H)^K \to \mathrm{Hom}_G(G/K, G/H).$$

Demostración.

- Si $\bar{K} \nleq \bar{H}$, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_G(G/K, G/H) = \emptyset,$$

además

$$(G/H)^K = \{gH \in G/H \mid k \cdot gH = gH, \forall k \in K\} =$$

$$\left\{gH \in G/H \mid g^{-1} k g H = H, \forall k \in K\right\} =$$

$$\left\{gH \in G/H \mid g^{-1} K g \subseteq H\right\} = \emptyset.$$

- Si $\bar{K} \leq \bar{H}$, Sea

$$F : (G/H)^K \to \mathrm{Hom}_G(G/K, G/H),$$

$$gH \to F(gH) := f_g,$$

en donde

$$f_g = G/K \to G/H$$

$$aK \to agH,$$

demostremos que F es una biyección:

- Si $a_1K = a_2K$, tenemos que $a_1^{-1}a_2 \in K$, y sea $gH \in (G/H)^K$, entonces

$$f_g(a_1K) = a_1gH = a_1(a_1^{-1}a_2 \cdot gH) = a_2gH = f_g(a_2K),$$

por lo que f_g está bien definida, además si $b \in G$ tenemos que

$$f_g(b \cdot aK) = f_g(baK) = bagH = b \cdot agH = b \cdot f_g(aK),$$

por lo que f_g es un morfismo de G-conjuntos.

- Sean $a_1H, a_2H \in (G/H)^K$, tales que $a_1H = a_2H$, tenemos que $H = a_1^{-1}a_2H$, y sea $bK \in G/K$, entonces

$$f_{a_1}(bK) = ba_1H = ba_1(a_1^{-1}a_2H) = ba_2H = f_{a_2}(bK),$$

y entonces $F(a_1H) = f_{a_1} = f_{a_2} = F(a_2H)$, por lo que F está bien definida. Veamos ahora que la siguiente función es el inverso de F.

$$F' : \mathrm{Hom}_G(G/K, G/H) \to (G/H)^K,$$

$$\alpha \to \alpha(K) = g_\alpha H.$$

Sea $k \in K$, tenemos que $k \cdot g_\alpha H = k \cdot \alpha(K) = \alpha(k \cdot K) = \alpha(K) = g_\alpha H$, por lo que F' está bien definida. Ahora sólo falta demostrar que $F' = F^{-1}$:

Tenemos que

$$F \cdot F'(\alpha)(aK) = F(g_\alpha H)(aK) = f_{g_\alpha}(aK) =$$

$$ag_\alpha H = a\alpha(K) = \alpha(aK),$$

y además

$$F' \cdot F(gH) = F'(f_g) = f_g(K) = gH.$$

1.2.6 Definición.

Si $H \in S(G)$ es un subgrupo de G, entonces H es normal si $gH = Hg$ para toda $g \in G$. Lo denotaremos por $H \trianglelefteq G$.

1.2.7 Observación.

Sea $H \in S(G)$, tal que $H \trianglelefteq G$, tenemos que G/H es un grupo, en donde

$$\cdot : G/H \times G/H \to G/H$$
$$(g_1H, g_2H) \to g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H.$$

Demostración.

i).- Sea $gH \in G/H$, tenemos que $HgH = gHH = gH$, por lo que H es la identidad en G/H.

ii).- Sean $a, b \in G$, tenemos que

$$aHbH = a(Hb)H = a(bH)H = (abH)H = abH \in G/H.$$

iii).- Sea $gH \in G/H$, tenemos que $gHg^{-1}H = gg^{-1}HH = H$, por lo que

$$(gH)^{-1} = g^{-1}H.$$

1.2.8 Definición.

Sea $H \leq G$ un subgrupo, definimos el normalizador de H en G como

$$N_G(H) := \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\}.$$

Puesto que H es normal en $N_G(H)$, tenemos el grupo cociente

$$W(H) := N_G(H)/H,$$

el cual recibe el nombre de grupo de Weyl de H.

1.2.9 Proposición.

Sea $H \leq G$ un subgrupo, tenemos que

$$(G/H)^H \cong_{N_G(H)} W(H).$$

Demostración.

Sea $gH \in (G/H)^H$, y $f \in N_G(H)$, tenemos que G/H es un G-conjunto, por lo que para demostrar que $(G/H)^H$ es un $N_G(H)-$ conjunto, sólo basta con demostrar que $f \cdot gH \in (G/H)^H$. Sabemos que $fH = Hf$, por lo que $fh' = hf$, y entonces

$$h \cdot f \cdot gH = hfgH = fh'gH = fgH = f \cdot gH,$$

Sea

$$F : (G/H)^H \to W(H)$$

$$gH \to gH$$

claramente F es un morfismo de $N_G(H)-$ conjunto biyectivo, por lo que sólo falta ver que F está bien definido. Sea $gH \in (G/H)^H$, tenemos que $h(gH) = gH$ para toda H, y entonces

$$g^{-1}Hg \subseteq H,$$

y puesto que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, tenemos que

$$g^{-1}Hg = H,$$

por lo que $g \in N_G(H)$.

1.2.10 Corolario.

i).- $\varphi_H(G/H) = \mid W(H) \mid$.
ii).- $\varphi_K(G/H) = 0 \Leftrightarrow \bar{K} \nleq \bar{H}$.

1.2.11 Teorema.

Sea G un grupo , y X un G-conjunto, definamos

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\},$$

y sea N el número de órbitas de X bajo la acción de G, entonces

$$N = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \mid X^g \mid .$$

Demostración.

Consideremos el siguiente conjunto

$$C = \{(x, g) \in X \times G \mid g \cdot x = x\},$$

por un lado tenemos que

$$\mid C \mid = \mid \uplus_{g\in G} X^g \mid = \sum_{g\in G} \mid X^g \mid,$$

y por otro lado tenemos

$$\mid C \mid = \mid \uplus_{x\in X} \mathrm{stab}_G(x) \mid = \sum_{x\in X} \mid \mathrm{stab}_G(x) \mid,$$

por lo que

$$\sum_{g\in G} \mid X^g \mid = \sum_{x\in X} \mid \mathrm{stab}_G(x) \mid = \sum_{x\in X} \frac{\mid G \mid}{\mid O_G(x) \mid} =$$

$$\mid G \mid \sum_{x\in \uplus_{i=1}^{N} O_G(x_i)} \frac{1}{\mid O_G(x) \mid} = \mid G \mid \sum_{i=1}^{N} \sum_{x\in O_G(x_i)} \frac{1}{\mid O_G(x) \mid} =$$

$$\mid G \mid \sum_{i=1}^{N} \sum_{x\in O_G(x_i)} \frac{1}{\mid O_G(x_i) \mid} = \mid G \mid \sum_{i=1}^{N} \frac{\mid O_G(x_i) \mid}{\mid O_G(x_i) \mid} =$$

$$\mid G \mid \sum_{i=1}^{N} 1 = \mid G \mid N.$$

Capítulo 2

ANILLO DE BURNSIDE Y LA FUNCION ζ.

En la sección 2.1 de este capítulo, dado un grupo G construiremos su anillo de Burnside $B(G)$. Veremos además que $B(G)$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre como grupo abeliano, generado por los elementos de la forma $G\diagup H$, donde $H \in C(G)$ es el conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G. Daremos también una regla para obtener el producto entre los generadores y por último veremos un ejemplo útil para el desarrollo de este trabajo.

En la sección 2.2 de este capítulo se verá el concepto de un orden sobre un anillo, se definirá el anillo $\mathbb{Z}_\pi$. Definiremos la función zeta para un orden de $\mathbb{Z}_\pi$, y por último enunciaremos algunos teoremas relacionados con la función zeta de un orden.

En la sección 2.3 de este capítulo, veremos un ejemplo en donde se hará el calculo de $f_{C_p}(p^{-z})$, el cual pertenece a $\mathbb{Z}[p^{-z}]$ y relaciona a $\zeta_{B_{\{p\}}(C_p)}(z)$ con $\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}(C_p)}(z)$, las funciones zeta de $B_{\{p\}}\left(C_p\right)$ y $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_p\right)$ respectivamente.

2.1. EL ANILLO DE BURNSIDE.

2.1.1 Definición.

Sea R un conjunto no vacío con las operaciones binarias de suma y producto, entonces R es un anillo si satisface que:
i).- $(R,+)$ es un grupo abeliano.
ii).- $(R,\cdot)$ satisface que:
- $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in R$.
- Existe $1_R \in R$, tal que $1_R a = a1_R = a$ para toda $a \in R$.
- $a(b + c) = ab + ac$, para todo $a, b, c \in R$.
- $(b + c)a = ba + ca$, para todo $a, b, c \in R$.

2.1.2 Observación.

Sea R un conjunto no vacío, tenemos que R es un semianillo, si para que sea un anillo sólo le falta que cada uno de sus elementos tenga inverso aditivo en R.

2.1.3 Definición.

Un anillo R es conmutativo si $ab = ba$ para todo $a, b \in R$.

2.1.4 Definición.

Un anillo R es un dominio entero si R es un anillo conmutativo tal que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

2.1.5 Definición.

Un anillo conmutativo R es un campo si para toda $0 \neq a \in R$ existe $a^{-1} \in R$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_R$, es decir si $(R \setminus \{\emptyset\}, \cdot)$ es un grupo.

2.1.6 Definición.

Sean R_1 y R_2 dos anillos y $f : R_1 \to R_2$ una función, entonces f es un morfismo de anillos si:
i).- $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in R$.
ii).- $f(ab) = f(a)f(b)$, para todo $a, b \in R$.
iii).- $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$.

2.1.7 Observación.

Sean R_1 y R_2 dos anillos y $f : R_1 \to R_2$ un morfismo de anillos, tenemos que f es inyectiva sí y solo sí la imagen inversa del cero bajo f es el cero.

- Suponiendo que la imagen inversa del cero bajo f es el cero, tendremos que si $f(a) = f(b)$, entonces $f(a-b) = 0$, por lo que $a - b = 0$ y entonces

$$a = b.$$

- Suponiendo que f es inyectiva. Sea $f(a) = 0$, tenemos que $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, por lo que $f(0) = 0$, y entonces $f(a) = f(0)$ por lo que

$$a = 0.$$

2.1.8 Teorema.

Sea X un G-conjunto finito y $\overline{X}$ su clase de G-isomorfismo, tenemos que

$$B^+(G) := \left\{\overline{X} \mid X - G \text{ conjunto finito}\right\}$$

es un semianillo conmutativo con unidad, con las operaciones binarias de unión ajena y producto cartesiano, a las cuales las denotaremos por :

$\overline{X} + \overline{Y} := \overline{X \uplus Y},$
$\overline{X} \cdot \overline{Y} := \overline{X \times Y}.$

Demostración.

Veamos que la suma y el producto están bien definidos.

Sean $\overline{X}_i, \overline{Y}_i \in B^+(G)$, con $i = 1, 2$, tales que $\overline{X}_1 = \overline{X}_2$, y $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2$, por lo que tenemos que existen

$$f_x : X_1 \to X_2,$$

$$f_y : Y_1 \to Y_2,$$

isomorfismos de G-conjuntos .

Sea

$$f : X_1 \uplus Y_1 \to X_2 \uplus Y_2$$

$$z \to \begin{cases} f_x(z), & \text{si } z \in X_1 \\ f_y(z), & \text{si } z \in Y_1 \end{cases}$$

es claro que f es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que $\overline{X_1 \uplus Y_1} = \overline{X_2 \uplus Y_2}$, de donde $\overline{X}_1 + \overline{Y}_1 = \overline{X}_2 + \overline{Y}_2$ y entonces la suma está bien definida.

Sea

$$f : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$$

$$(x, y) \to (f_x(x), f_y(y))$$

claramente f es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que $\overline{X_1 \times Y_1} = \overline{X_2 \times Y_2}$, de donde $\overline{X}_1 \cdot \overline{Y}_1 = \overline{X}_2 \cdot \overline{Y}_2$ y entonces el producto está bien definido.

Veamos ahora que $B^+(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad.

Sean $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in B^+(G)$, tenemos lo siguiente:

i).- Sabemos que $(X \uplus Y) \uplus Z \cong_G X \uplus (Y \uplus Z)$, por lo que

$$(\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z} = \overline{X \uplus Y} + \overline{Z} = \overline{(X \uplus Y) \uplus Z} =$$

$$\overline{X \uplus (Y \uplus Z)} = \overline{X} + \overline{Y \uplus Z} = \overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})$$

y entonces la suma es asociativa.

ii).- Sabemos que $X \uplus Y \cong_G Y \uplus X$, de donde

$$\overline{X} + \overline{Y} = \overline{X \uplus Y} = \overline{Y \uplus X} = \overline{Y} + \overline{X},$$

por lo que la suma es conmutativa.

iii).- Tenemos que $\overline{X} + \overline{\emptyset} = \overline{X \uplus \emptyset} = \overline{X}$, por lo que $\overline{\emptyset} \in B^+(G)$ es el neutro para la suma.

iv).- Sabemos que $(X \times Y) \times Z \cong_G X \times (Y \times Z)$, por lo que

$$(\overline{X} \cdot \overline{Y}) \cdot \overline{Z} = \overline{X \times Y} \cdot \overline{Z} = \overline{(X \times Y) \times Z} =$$

$$\overline{X \times (Y \times Z)} = \overline{X} \cdot \overline{Y \times Z} = \overline{X} \cdot (\overline{Y} \cdot \overline{Z})$$

y entonces el producto es asociativo.

v).- Sabemos que $X \times Y \cong_G Y \times X$, de donde

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X \times Y} = \overline{Y \times X} = \overline{Y} \cdot \overline{X},$$

por lo que el producto es conmutativo.

vi).- Tenemos que $X \times G/G \cong_G X$ para todo $\overline{X} \in B^+(G)$, de donde

$$\overline{X} \cdot \overline{G/G} = \overline{X \times G/G} = \overline{X},$$

por lo que $\overline{G/G} \in B^+(G)$ es el neutro para el producto.

vii).- tenemos que

$$f : X \times (Y \uplus Z) \rightarrow (X \times Y) \uplus (X \times Z)$$

$$(x, w) \rightarrow \begin{cases} (x, w) \in X \times Y \text{ si } w \in Y \\ (x, w) \in X \times Z \text{ si } w \in Z \end{cases}$$

es un isomorfismo de G-conjuntos, de donde

$$\overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{Z}) = \overline{X} \cdot (\overline{Y \uplus Z}) = \overline{X \times (Y \uplus Z)}$$

$$\overline{(X \times Y) \uplus (X \times Z)} = \overline{(X \times Y)} + \overline{(X \times Z)} = \overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot \overline{Z},$$

por lo que el producto se distribuye sobre la suma.

2.1.9 Proposición.

Sean $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in B^+(G)$, tenemos que si $\overline{X} + \overline{Z} = \overline{Y} + \overline{Z}$, entonces $\overline{X} = \overline{Y}$.

Demostración.

Sabemos que $\overline{X \uplus Z} = \overline{Y \uplus Z}$ y entonces existe

$$f : X \uplus Z \rightarrow Y \uplus Z$$

un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que toda órbita de $X \uplus Z$ es isomorfa a una órbita en $Y \uplus Z$ bajo f, puesto que f manda órbitas en órbitas y entonces $X \uplus Z$ y $Y \uplus Z$ tienen órbitas isomorfas, y puesto que las órbitas de Z son las mismas para ambas sumas, entonces las órbitas de X son isomorfas a las órbitas de Y y por lo tanto $X \cong_G Y$, por lo que $\overline{X} = \overline{Y}$.

2.1.10 Proposición.

La siguiente es una relación de equivalencia en $B^+(G) \times B^+(G)$.

Sean $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1), (\overline{X}_2, \overline{Y}_2) \in B^+(G) \times B^+(G)$, entonces

$$(\overline{X}_1, \overline{Y}_1) \sim (\overline{X}_2, \overline{Y}_2)$$

son equivalentes sí y solo sí $\overline{X}_1 + \overline{Y}_2 = \overline{X}_2 + \overline{Y}_1$.

Demostración.

i).- Sea $(\overline{X},\overline{Y}) \in B^+(G) \times B^+(G)$, tenemos que $\overline{X}+\overline{Y}=\overline{X}+\overline{Y}$, de donde

$$(\overline{X},\overline{Y}) \sim (\overline{X},\overline{Y}).$$

ii).- Si $(\overline{X}_1,\overline{Y}_1) \sim (\overline{X}_2,\overline{Y}_2)$ tenemos que $\overline{X}_1+\overline{Y}_2=\overline{X}_2+\overline{Y}_1$, de donde

$$\overline{X_1 \uplus Y_2} = \overline{X_2 \uplus Y_1},$$

por lo que $X_1 \uplus Y_2 \cong_G X_2 \uplus Y_1$ y entonces $X_2 \uplus Y_1 \cong_G X_1 \uplus Y_2$, por lo que $\overline{X_2 \uplus Y_1} = \overline{X_1 \uplus Y_2}$, por lo que $\overline{X}_2+\overline{Y}_1=\overline{X}_1+\overline{Y}_2$ y por lo tanto

$$(\overline{X}_2,\overline{Y}_2) \sim (\overline{X}_1,\overline{Y}_1).$$

iii).- Si $(\overline{X}_1,\overline{Y}_1) \sim (\overline{X}_2,\overline{Y}_2)$ y $(\overline{X}_2,\overline{Y}_2) \sim (\overline{X}_3,\overline{Y}_3)$, tenemos que

$$(1) : \overline{X}_1+\overline{Y}_2=\overline{X}_2+\overline{Y}_1.$$

$$(2) : \overline{X}_2+\overline{Y}_3=\overline{X}_3+\overline{Y}_2.$$

De (1) tenemos que $X_1 \uplus Y_2 \cong_G^f X_2 \uplus Y_1$, entonces tenemos que

$$g : (X_1 \uplus Y_2) \uplus Y_3 \to (X_2 \uplus Y_1) \uplus Y_3$$

$$w \to \begin{array}{c} f(w) \text{ si } w \in X_1 \uplus Y_2 \\ w \text{ si } w \in Y_3 \end{array}$$

es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que

$$\overline{X}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3=\overline{X}_2+\overline{Y}_1+\overline{Y}_3,$$

de donde $\overline{X}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3=\overline{X}_2+\overline{Y}_3+\overline{Y}_1$ y por (2) tenemos que $\overline{X}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3=\overline{X}_3+\overline{Y}_2+\overline{Y}_1$, de donde $\overline{X}_1+\overline{Y}_3+\overline{Y}_2=\overline{X}_3+\overline{Y}_1+\overline{Y}_2$, por lo que $\overline{X}_1+\overline{Y}_3=\overline{X}_3+\overline{Y}_1$ y entonces

$$(\overline{X}_1,\overline{Y}_1) \sim (\overline{X}_3,\overline{Y}_3).$$

2.1.11 Nota:

Denotaremos $\overline{X}-\overline{Y} := \overline{(\overline{X},\overline{Y})}$, a la clase de equivalencia del elemento $(\overline{X},\overline{Y}) \in B^+(G) \times B^+(G)$

2.1.12 Definición.

Sea G un grupo , definimos el anillo de Burnside de G como

$$B(G) := [(B^{+}(G) \times B^{+}(G)) / \sim] =$$

$$\left\{\overline{X} - \overline{Y} \mid (\overline{X}, \overline{Y}) \in B^{+}(G) \times B^{+}(G)\right\},$$

en donde

$$(\overline{X}_1 - \overline{Y}_1) + (\overline{X}_2 - \overline{Y}_2) = (\overline{X}_1 + \overline{X}_2) - (\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2),$$

$$(\overline{X}_1 - \overline{Y}_1) \cdot (\overline{X}_2 - \overline{Y}_2) = (\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 + \overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2) - (\overline{X}_1 \cdot \overline{Y}_2 + \overline{Y}_1 \cdot \overline{X}_2),$$

2.1.13 Observación.

Sea

$$i : B^{+}(G) \to B(G)$$

$$\overline{X} \to \overline{X} - \overline{\emptyset},$$

tenemos que i es un morfismo de semianillos.

2.1.14 Observación.

Si G es un grupo no necesariamente finito, entonces $B(G)$ recibe el nombre de anillo de Grothendrieck de $B^{+}(G)$.

Recordemos que el anillo de Grothendrieck de $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) es $\mathbb{Z}$ (el conjunto de los números enteros).

2.1.15 Definición.

Sea R un anillo, un R-módulo izquierdo es un $(M, +, \cdot)$, tal que:
$(M, +)$ es un grupo abeliano.
$(M, \cdot)$

$$R \times M \to M$$

$$(a, m) \to a \cdot m$$

satisface:
i).- $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$, $\forall\ r_{1,2} \in R$ y $m \in M$.
ii).- $1_R \cdot m = m$, $\forall\ m \in M$ y $1_R \in R$ la unidad.
iii).- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ $\forall\ m_{1,2} \in M$ y $r \in R$.
iv).- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ $\forall\ r_{1,2} \in R$ y $m \in M$.

2.1.16 Definición.

Sean M_1 y M_2 dos R-módulos izquierdos, entonces una función

$$f : M_1 \to M_2$$

es un morfismo R-módulos si:
i).- $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)\ \forall\ m_{1,2} \in M$.
ii).- $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$, $\forall\ r \in R$ y $m \in M$.

2.1.17 Definición.

Sea M un R-módulo izquierdo, tenemos que M es libre si existe $N \subseteq M$, un subconjunto talque N es base de M como R-módulo y entonces:
i).- N es linealmente independiente, es decir, si $\sum_{n_i \in N} a_i \cdot n_i = 0$, para $a_i \in R$, entonces $a_i = 0\ \forall\ i$.
ii).- $\forall\ m \in M$, $m = \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot n_i$, con s en los números naturales.
(Se pueden ver ejemplos de módulos libres en [1] Modules Over A Principal Ideal Domain:"Free modules and matrices").

2.1.18 Definición.

Sea M un $R-$módulo izquierdo y sea $m \in M$, tenemos que m es un elemento de torsión si existe $0 \neq r \in R$, tal que $rm = 0$. M es de torsión si todos sus elementos son de torsión.

2.1.19 Proposición.

$B(G)$ el anillo de Burnside de G es libre como $\mathbb{Z}-$módulo generado por G/H_i, donde $H_i \in C(G)$, el conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G.

Demostración.

Sea X un G-conjunto, tenemos que $X \cong_G \uplus_{i \in I}(G/H_i)$ donde $H_i \in S(G)$ y puesto que $G/H \cong_G G/K$, sí y solo sí H y K son conjugados, entonces tenemos que

$$\overline{X} = \sum_{\overline{H} \in C(G)} a_H (G/H),$$

donde $a_H \in \mathbb{N}$, por lo que como semigrupo abeliano (para ser grupo solo le falta el inverso aditivo) tenemos que

$$B^+(G) = \bigoplus_{\overline{H} \in C(G)} \mathbb{N}(G\diagup\overline{H}),$$

por lo que tenemos que como grupo abeliano

$$B(G) = \bigoplus_{\overline{H} \in C(G)} \mathbb{Z}(G\diagup\overline{H}).$$

2.1.20 Proposición.

Existen biyecciones entre los siguientes tres conjuntos:
i).- El conjunto de las H-órbitas de $G\diagup K$.
ii).- El conjunto de las clases laterales dobles en G, de la forma HgK, donde $g \in G$.
iii).- El conjunto de las G-órbitas de $G\diagup H \times G\diagup K$.

Demostración.

- Tenemos que la asignación

$$O_H(gK) \to HgK$$

es claramente una biyección entre (i) y (ii), la cual está bien definida puesto que $O_H(gK) = O_H(g'K)$ sí y solo sí $HgK = Hg'K$.
- Ahora tenemos la siguiente asignación:

$$O_G(fH, lK) \to O_H(f^{-1}lK).$$

Si $O_G(fH, lK) = O_G(f'H, l'K)$, tenemos que existe $g \in G$, tal que $(fH, lK) = g(f'H, l'K)$, por lo que $fH = gf'H$ y $lK = gl'K$, de donde $f^{-1}gf' \in H$ y $f^{-1}lK = f^{-1}gl'K$, y entonces

$$Hf^{-1}lK = Hf^{-1}gl'K = H(f^{-1}gf')f'^{-1}l'K = Hf'^{-1}l'K,$$

por lo que la asignación está bien definida.

Sea $(fH, lK) \in G\diagup H \times G\diagup K$, tenemos que (fH, lK) pertenece a $O_G(eH, f^{-1}lK)$, por lo que las G-órbitas de $G\diagup H \times G\diagup K$ tienen representantes de la forma (eH, gK), para los cuales si

$$(eH, gK) = f(eH, g'K),$$

tenemos que $f \in H$, por lo que

$$O_H(gK) = O_H(fg'K) = O_H(g'K)$$

y entonces nuestra asignación es biyectiva.

2.1.21 Proposición.

Sean H , $K \in S(G)$ dos subgrupos de G y sea $(aH, bK) \in G/H \times G/K$, tenemos que

$$\mathrm{stab}_G(aH, bK) = aHa^{-1} \cap bKb^{-1}.$$

Demostración.

- Si $g \in \mathrm{stab}_G(aH, bK)$, entonces $g(aH, bK) = (aH, bK)$, de donde $gaH = aH$ y $gbK = bK$, por lo que $a^{-1}gaH = H$ y $b^{-1}gbK = K$, lo cual implica que $a^{-1}ga \in H$ y $b^{-1}gb \in K$ y entonces

$$g \in aHa^{-1} \cap bKb^{-1}.$$

- Si $g \in aHa^{-1} \cap bKb^{-1}$, tenemos que $g = aha^{-1} = bkb^{-1}$, por lo que

$$g(aH, bK) = (aha^{-1}aH, bkb^{-1}bK) = (aH, bK),$$

de donde $g \in \mathrm{stab}_G(aH, bK)$.

2.1.22 Corolario.

Sean $H, K \in S(G)$ dos subgrupos de G y sea ${}_HL_K$ el conjunto de los representantes de la partición inducida en G por las clases laterales dobles de la forma HgK, tenemos que

$$\overline{G/H} \cdot \overline{G/K} = \sum_{g \in {}_HL_K} \overline{G/(H \cap gKg^{-1})},$$

Demostración.

Tenemos que

$$G/H \times G/K =$$
$$\biguplus_{g \in {}_HL_K} O_G(H, gK) \cong_G \biguplus_{g \in {}_HL_K} G/\mathrm{stab}_G(H, gK) =$$
$$\biguplus_{g \in {}_HL_K} G/(H \cap gKg^{-1}).$$

2.1.23 Corolario.

Sean $H, K \in S(G)$ dos subgrupos de G, y sea ${}_HL_K$ el conjunto de los representantes de la partición inducida en G por las clases laterales dobles de la forma HgK, tal que $K \trianglelefteq G$, entonces tenemos que

$$\overline{G\diagup H}\cdot\overline{G\diagup K}=\sum_{g\in{}_HL_K}\overline{G\diagup(H\cap K)}=\frac{\mid H\cap K\mid\mid G\mid}{\mid H\mid\mid K\mid}(G\diagup(H\cap K)).$$

2.1.24 Lema.

Sea R un anillo con unidad y G un grupo, dado un morfismo de semianillos

$$f: B^{+}(G)\to R,$$

tenemos que f se extiende de manera única a un morfismo de anillos

$$F: B(G)\to R.$$

Demostración.

Definimos F para los elementos de $B(G)$, como sigue

$$F(\overline{X}-\overline{Y})=f(\overline{X})-f(\overline{Y}).$$

i).- Tenemos que $\overline{G\diagup G}-\overline{\emptyset}=1_{B(G)}$, además $f(\overline{\emptyset})=0$ y $f(\overline{G\diagup G})=1_R$, por lo que

$$F(\overline{G\diagup G}-\overline{\emptyset})=f(\overline{G\diagup G})-f(\overline{\emptyset})=1_R$$

y entonces $F(1_{B(G)})=1_R$.
ii).-

$$F[(\overline{X}_1-\overline{Y}_1)+(\overline{X}_2-\overline{Y}_2)]=F[(\overline{X}_1+\overline{X}_2)-(\overline{Y}_1+\overline{Y}_2)]=$$
$$f(\overline{X}_1+\overline{X}_2)-f(\overline{Y}_1+\overline{Y}_2)=f(\overline{X}_1)+f(\overline{X}_2)-f(\overline{Y}_1)-f(\overline{Y}_2)=$$
$$f(\overline{X}_1)-f(\overline{Y}_1)+f(\overline{X}_2)-f(\overline{Y}_2)=F(\overline{X}_1-\overline{Y}_1)+F(\overline{X}_2-\overline{Y}_2),$$

por lo que F es aditiva.
iii).-

$$F[(\overline{X}_1-\overline{Y}_1)\cdot(\overline{X}_2-\overline{Y}_2)]=$$
$$F[(\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2+\overline{Y}_1\cdot\overline{Y}_2)-(\overline{X}_1\cdot\overline{Y}_2+\overline{Y}_1\cdot\overline{X}_2)]=$$

$$f(\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 + \overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2) - f(\overline{X}_1 \cdot \overline{Y}_2 + \overline{Y}_1 \cdot \overline{X}_2) =$$
$$f(\overline{X}_1) \cdot f(\overline{X}_2) + f(\overline{Y}_1) \cdot f(\overline{Y}_2) - f(\overline{X}_1) \cdot f(\overline{Y}_2) - f(\overline{Y}_1) \cdot f(\overline{X}_2) =$$
$$[f(\overline{X}_1) - f(\overline{Y}_1)] \cdot [f(\overline{X}_2) - f(\overline{Y}_2)] =$$
$$F[(\overline{X}_1) - (\overline{Y}_1)] \cdot F[(\overline{X}_2) - (\overline{Y}_2)],$$

por lo que F es multiplicativa.

Ahora sólo falta ver que F es único:

Si F' es un morfismo de anillos que extiende a f, tenemos que

$$F'(\overline{X} - \overline{Y}) = f(\overline{X}) - f(\overline{Y}) = F(\overline{X} - \overline{Y}),$$

por lo que $F' = F$.

2.1.25 Observación.

Sea $\tilde{B}(G) := \prod_{\overline{H} \in C(G)} \mathbb{Z}$, tenemos que el siguiente es un morfismo de semianillos

$$\varphi : B^+(G) \to \tilde{B}(G)$$
$$\overline{X} \to (\varphi_H(X))_{\overline{H} \in C(G)},$$

por lo que φ se extiende de manera única a un morfismo de anillos, al cual denotaremos también con φ

$$\varphi : B(G) \to \tilde{B}(G)$$

2.1.26 Proposición.

Si G es un grupo , tenemos que φ es un morfismo inyectivo.

Demostración.

Sea $x \in B(G)$, tal que $x \neq 0$, sabemos que

$$x = \sum_{\overline{H} \in C(G)} a_H G/H,$$

ahora tomemos $\overline{K} \in C(G)$, maximal con respecto al orden parcial "$\leq$", introducido en (1.1.26), tal que $a_K \neq 0$, tenemos que

$$\varphi_K(x) = \sum_{\overline{H} \in C(G)} a_H \varphi_K(G/H) = a_K \varphi_K(G/K) \neq 0,$$

por lo que la imagen inversa de $(0)_{\overline{H} \in C(G)}$ bajo φ, es el cero.

2.1.27 Corolario.

Sean X y Y dos G-conjuntos, tenemos que

$$X \cong_G Y \Leftrightarrow \varphi_H(X) = \varphi_H(Y) \; \forall \; \overline{H} \in C(G).$$

2.1.28 Ejemplo.

Sea $n \in \mathbb{N}$ en los naturales, denotemos

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z} \diagup n\mathbb{Z},$$

el grupo de los enteros módulo n, el cual es un grupo abeliano con la suma . En este ejemplo calcularemos $B(\mathbb{Z}_n)$.

Tenemos que los subgrupos de $(\mathbb{Z}_n, +)$, son de la forma $m\mathbb{Z}_n$, donde m es un divisor de de n, por lo que

$$B(\mathbb{Z}_n) = \bigoplus_{m|n} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n \diagup m\mathbb{Z}_n)$$

Sean m, l dos divisores de n y $r \in \mathbb{Z}_n$, tenemos que el conjunto de las clases bilaterales de $m\mathbb{Z}_n$ y $l\mathbb{Z}_n$, es

$$\{m\mathbb{Z}_n + r + \; l\mathbb{Z}_n \mid r \in \mathbb{Z}_n\} = \{r + m\mathbb{Z}_n + \; l\mathbb{Z}_n \mid r \in \mathbb{Z}_n\},$$

por lo que el número de clases bilaterales de $m\mathbb{Z}_n$ y $l\mathbb{Z}_n$, en $[\mathbb{Z}_n : m\mathbb{Z}_n + l\mathbb{Z}_n]$, además tenemos que

$$m\mathbb{Z}_n + \; l\mathbb{Z}_n = (m, l)\mathbb{Z}_n \;\text{ y } m\mathbb{Z}_n \cap \; l\mathbb{Z}_n = [m, l]\mathbb{Z}_n \;,$$

en donde (m, l) es el máximo común divisor de m y l, y $[m, l]$ es el mínimo común múltiplo de m y l, por lo que

$$\overline{(\mathbb{Z}_n \diagup m\mathbb{Z}_n)} \cdot \overline{(\mathbb{Z}_n \diagup l\mathbb{Z}_n)} = (m, l)\overline{(\mathbb{Z}_n \diagup [m, l]\mathbb{Z}_n)}.$$

2.2. LA FUNCIÓN ζ

2.2.1 Definición.

Sean M, N, P tres R-módulos izquierdos, tenemos que

$$f : M \times N \rightarrow P$$

es R-bilineal si
i).- $f(am + bm', n) = af(m, n) + bf(m', n)$
ii).- $f(m, an + bn') = af(m, n) + bf(m, n')$.

2.2.2 Definición.

Sean M, N dos R-módulos izquierdos, tenemos que el producto tensorial $M \bigotimes N$ de M, N es un R-módulo, en donde $\bigotimes$ es una función bilineal

$$\bigotimes : M \times N \rightarrow M \bigotimes N$$

$$\otimes(m, n) \rightarrow m \otimes n,$$

tal que satisface la siguiente propiedad universal:
"Para salir de $M \bigotimes N$ hay que salir de $M \times N$ bilinealmente", es decir, para todo P R-modulo izquierdo y para toda $f \in \mathrm{Bil}(M \times N, P)$, existe un único $\overline{f}$, tal que

$$\overline{f} \cdot \bigotimes = f.$$

2.2.3 Observación.

Sean M, N, P tres R-módulos izquierdos, tenemos que
i).-

$$(M \bigoplus N) \bigotimes P \cong (M \bigotimes P) \bigoplus (N \bigotimes P),$$

puesto que

$$(m, n) \otimes p \rightarrow (m \otimes p, n \otimes p)$$

$$(m, 0) \otimes p_1 + (0, n) \otimes p_2 \leftarrow (m \otimes p_1, n \otimes p_2),$$

son dos funciones bilineales inversas.

ii).-

$$M \bigotimes R \cong M,$$

puesto que

$$m \otimes r \rightarrow r \cdot m,$$

$$m \otimes 1 \leftarrow m,$$

son dos funciones bilineales inversas.

2.2.4 Definición.

Sea π un conjunto de números primos de $\mathbb{Z}$, definimos

$$\mathbb{Z}_\pi = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \text{ no divide a b}, \forall p \in \pi \right\} \subseteq \mathbb{Q},$$

el cual es un subconjunto de los los números racionales.

2.2.5 Notación.

Sea $B(G)$ el anillo de Burnside del grupo G, denotemos por $B_\pi(G)$ y $\tilde{B}_\pi(G)$, a los productos tensoriales $\mathbb{Z}_\pi \bigotimes B(G)$ y $\mathbb{Z}_\pi \bigotimes \tilde{B}(G)$, respectivamente, por lo que de las propiedades del producto tensorial (Ver [2] Modules:" Tensor products of modules".) tenemos que

$$B_\pi(G) \cong \bigoplus_{\bar{H} \in C(G)} \mathbb{Z}_\pi(G/H),$$

$$\tilde{B}_\pi(G) \cong \prod_{\bar{H} \in C(G)} \mathbb{Z}_\pi.$$

2.2.6 Proposición.

Sea R un anillo tal que $\mathbb{Z} \nleq R$, contiene propiamente a los enteros y $R \nleq \mathbb{Q}$ está contenido propiamente el los racionales, entonces tenemos que $R = \mathbb{Z}_\pi$, para algún π, en donde π es un conjunto de números primos distinto del vacío y distinto del conjunto de todos los números primos.

Demostración.

Tenemos que existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus R$. Sea $b = (p_1)^{e_1 \cdots}(p_r)^{e_r}$, la descomposición de b en primos, suponiendo que $\frac{1}{p_i} \in R \; \forall i$, y puesto que $a \in R$, tendríamos que $\frac{a}{b} \in R$, lo cual es una contradicción, por lo que tenemos que existe i tal que $\frac{1}{p_i} \notin R$ y entonces sea

$$\pi = \left\{ p \in R \mid \frac{1}{p} \notin R, \text{ con } p \text{ un primo} \right\},$$

demostremos que $R = Z_\pi$.

Supongamos que existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_\pi \setminus R$, tenemos que existe p un primo tal que $p \mid b$ y $\frac{1}{p} \notin R$, de donde tenemos que $p \in \pi$, por lo que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}_\pi$, lo cual es una contradicción, por lo que

$$Z_\pi \subseteq R.$$

Supongamos que $\mathbb{Z}_\pi \subsetneq R$, tenemos que existe $\frac{a}{b} \in R$ tal que $p \mid b$, para algún $p \in \pi$, por lo que $\frac{b}{p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{p} \in R$, lo cual por la definición de π es un error, por lo que concluimos que

$$Z_\pi = R.$$

2.2.7 Definición.

Sea R un anillo, tenemos que un subconjunto $\emptyset \neq I \leq R$ es un ideal izquierdo, si satisface lo siguiente:

i).- Si $a, b \in I$, entonces $ab \in I$.

ii).- Si $a \in I$, y $r \in R$, entonces $ra \in I$.

2.2.8 Observación.

Si I es un ideal izquierdo del anillo R, tenemos que

$$R/I := \{a + I \mid a \in R\},$$

en donde $a + I = \{a + b \mid b \in I\}$ y $a + I = a' + I \Leftrightarrow a - a' \in I$, tenemos que R/I es un anillo en donde

$$(a + I) + (b + I) := (a + b) + I,$$

$$(a + I)(b + I) := ab + I.$$

Definimos $[R : I]$ como el índice de I en R, es decir es el número de elementos de R/I

2.2.9 Definición.

Dado $M \leq R$ un ideal tenemos que M es maximal si $M \nleq R$ y si I es un ideal de R tal que $M \leq I \leq R$, entonces $I = R$ o $I = M$.

2.2.10 Proposición.

$M \leq R$, es un ideal maximal (izquierdo) sí y solo sí R/M es un campo.

Demostración.

- Tenemos que $R/M \neq 0$, por lo que existe $a + M \neq 0 + M$, por lo que $a \notin M$, consideremos entonces el siguiente ideal,

$$M + Ra = \{m + ra \mid m \in M, r \in R\},$$

es claro que $M \nleq M + Ra$, por lo que $M + Ra = R$ y entonces $1 = m + ra$, para algún $m \in M$ y $r \in R$, de donde

$$(a + M)(r + M) = ar + M = ar + m + M = 1 + M,$$

por lo que R/M es un campo.

- Si R/M es un campo, supongamos que existe un ideal I (izquierdo) tal que $M \nleq I \leq R$ y sea entonces $a \in I \setminus M$, tenemos que $a+M \neq O+M$, por lo que existe $b+M$, tal que $(a+M)(b+M) = 1+M$, por lo que

$$ab - 1 \in M$$

y entonces $ab-1 = m$, para algún $m \in M$, de donde $1 = ab-m \in I$, por lo que $I = R$.

2.2.11 Definición.

Un anillo R conmutativo es un DIP (dominio de ideales principales) si:

i).- R es un dominio entero.

ii).- Para todo ideal I de R, existe $a \in R$, tal que $I = Ra$.

2.2.12 Definición.

Dado un anillo R, tenemos que una $R-$álgebra, es un R-módulo A, tal que:

i).- A es un anillo.

ii).- $r(ab) = (ra)b = a(rb)$, para toda $r \in R$ y $a, b \in A$.

2.2.13 Definición.

Sea R un DIP, Λ es un orden sobre R, si:

i).- Λ es una R álgebra, talque $R \hookrightarrow \Lambda$.

ii).- Como $R-$ módulo, Λ es libre y finita mente generada.

(Ver [3] Chapter 2: "Orders").

2.2.14 Observación.

Sea R un anillo y K su campo de cocientes, si Λ es un orden sobre R, tenemos que

$$\Lambda_K := K \bigotimes_R \Lambda,$$

es un álgebra de dimensión finita sobre K.

2.2.15 Definición.

Sea R un anillo, tenemos que Λ es un orden maximal si dado Λ' otro orden de R, tal que

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & \Lambda_K \\ | & & \cup\,| \\ | & & \Lambda' \\ | & & \cup\,| \\ R & \hookrightarrow & \Lambda \end{array}$$

entonces tenemos que $\Lambda' = \Lambda$.

2.2.16 Teorema.

Sea R un anillo, dado Λ un orden sobre R, existe Λ' un orden maximal sobre R, tal que

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & \Lambda_K \\ | & & \cup\, | \\ | & & \Lambda' \\ | & & \cup\, | \\ R & \hookrightarrow & \Lambda \end{array}$$

Demostración.

Para la demostración de este teorema se utiliza el lema de Zorn (Ver [3] Chapter 3: "Maximal orders in skew fields").

2.2.17 Observación.

Sea G un grupo finito, tenemos que $B_{\{p\}}(G)$ es un orden sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$, para el cual $\tilde{B}_{\{p\}}(G)$ es su orden maximal,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \hookrightarrow & B_{\mathbb{Q}}(G) \\ | & & \cup\, | \\ | & & \tilde{B}_{\{p\}}(G) \\ | & & \cup\, | \\ \mathbb{Z}_{\{p\}} & \hookrightarrow & B_{\{p\}}(G) \end{array}$$

donde $B_{\mathbb{Q}}(G) = \mathbb{Q} \bigotimes B(G)$.

2.2.18 Teorema.

Sea R un DIP local con maximal $m = pR$, tal que $\mid R\diagup m \mid < \infty$, donde p es un primo y sea Λ un orden conmutativo, tenemos que si $I \leq \Lambda$ es un ideal tal que $\mid \Lambda\diagup I \mid < \infty$, entonces existe k tal que $p^k\Lambda \subseteq I$.

Demostración.

Suponiendo que Λ / I no es de torsión, tenemos que

$$\Lambda / I \cong R^n \bigoplus \cdots \bigoplus \cdots,$$

pero R^n no es finito, lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que Λ / I es de torsión y entonces existe r tal que

$$r(\Lambda / I) = 0,$$

ahora cosiderando la descomposición de r en primos tenemos que

$$r = qp^k,$$

y entonces tenemos que $p^k \Lambda \subseteq I$.

2.2.19 Nota.

En lo siguiente de este capítulo consideraremos a π como un conjunto de números primos y a Λ como un orden sobre Z_π.

2.2.20 Definición.

Definimos $\zeta_\Lambda(z)$ la función de zeta del orden Λ, como sigue

$$\zeta_\Lambda(z) := \sum_{I \leq \Lambda, [\Lambda:I] < \infty} \mid \Lambda / I \mid^{-z} .$$

2.2.21 Teorema.

Si $\Lambda = \prod_{i=1}^n \Lambda_i$, tenemos que
i).- $\zeta_\Lambda(z) = \prod_{i=1}^n \zeta_{\Lambda_i}(z)$.
ii).- $\zeta_\Lambda(z) = \prod_{p \in \pi} \zeta_{\Lambda_{\{p\}}}(z)$, donde $\Lambda_{\{p\}} := \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigotimes_{\mathbb{Z}_\pi} \Lambda$, el cual es un orden sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$.
iii).- $\zeta_\Lambda(z) = \prod_{q-\text{primo}} \zeta_{\Lambda_{\{q\}}}(z)$.

Demostración.

Ver [4]

2.2.22 Teorema.

Tenemos que las funciones de zeta del orden $\Lambda_{\{p\}}$ y su orden maximal $\tilde{\Lambda}_{\{p\}}$ en $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ están relacionados por un factor que depende de p^{-z}, de la siguiente manera:

$$\zeta_{\Lambda_{\{p\}}}(z) = f(p^{-z})\zeta_{\tilde{\Lambda}_{\{p\}}}(z).$$

Demostración.

Ver [4].

2.2.23 Teorema.

Sea G un grupo finito y $B(G)$ su anillo de Burnside, si p es un primo, tenemos que

$$\zeta_{B_{\{p\}}(G)}(z) = f_G(p^{-z})\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}(G)}(z),$$

en donde $f_G(p^{-z})$ es un polinomio en $\mathbb{Z}[p^{-z}]$.

Demostración.

Ver [4].

2.3. CALCULO DE $f_{(C_p)}\left(p^{-z}\right)$

Observación.

Tenemos que el conjunto de clases de conjugación de subgrupos de C_p es $C = \left\{C_p, pC_p\right\}$, de donde una base para $B(C_p)$ el anillo de Burnside de C_p es

$$B = \left\{1 = \frac{C_p}{C_p}, a = \frac{C_p}{pC_p}\right\}$$

por lo que $B(C_p) = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}a$ en donde

$$a^2 = \frac{C_p}{pC_p} \times \frac{C_p}{pC_p} = (p,p)\,\frac{C_p}{[p,p]\,C_p} = pa.$$

Recordemos que

$$B_{\{p\}}(C_p) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigotimes B(C_p) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}}a,$$

el cual es un orden sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$, para el cual

$$\widetilde{B}_{\{p\}}(C_p) = \mathbb{Z}^2_{\{p\}}$$

es un orden maximal sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$. De acuerdo con el teorema 2.2.21, parte i, tenemos que

$$\zeta_{\widetilde{B}_{\{p\}}(C_p)}(z) = \zeta_{\mathbb{Z}^2_{\{p\}}}(z) = \zeta^2_{\mathbb{Z}_{\{p\}}}(z) = \left[\sum_{I \leq \mathbb{Z}_{\{p\}}} \left|\frac{\mathbb{Z}_{\{p\}}}{I}\right|^{-z}\right]^2$$

en donde I es un ideal de $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ de índice finito, por lo que por el teorema 2.2.18 tenemos que $I = p^t\mathbb{Z}_{\{p\}}$, de donde

$$\zeta_{\widetilde{B}_{\{p\}}(C_p)}(z) = \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(p^{-z}\right)^t\right]^2 = \frac{1}{\left(1-p^{-z}\right)^2}.$$

Nota.

Para calcular la función zeta de $B_{\{p\}}(C_p)$, de acuerdo con la definición 2.2.20, requerimos calcular todos sus ideales de índice finito.

Observación.

Sea r una unidad en $\mathbb{Z}_{\{p\}}$, es decir p no divide a r, entonces tenemos que el elemento

$$r + wa \in B_{\{p\}}(C_p)$$

es unidad.

Ahora sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ (teorema 2.2.18) tal que

$$I_k := p^k B_{\{p\}}(C_p) < I < B_{\{p\}}(C_p)$$

es un ideal contenido propiamente en I. Considerando que $0 < k$-mínimo entero, tal que $p^k \in I$ y sea $p^t + p^\mu sa \in I \setminus I_k$, de la observación anterior tenemos que $\mu < t$, por lo que $\mu < k$, de donde es fácil ver que $p^{k+\mu-t}a \in I$, para $\mu - t < 0$ y entonces:

$$I_k < I_{k,\mu} := p^k \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus p^\mu \mathbb{Z}_{\{p\}} a$$

$$\text{para: } \ \mu < k.$$

Ahora, sean k, μ mínimos enteros, tales que $p^k, p^\mu a \in I$ y $\mu < k$, sea $X \in I \setminus I_{k,\mu}$, por la minimalidad k y μ, tenemos que $X = p^{k-l} + p^{\mu-l}sa$ para $0 < l$, de donde:

$$I_{k,\mu} < I_{k,\mu} \langle X_1 \rangle = \left\langle p^{k-1} + p^{\mu-1}sa \right\rangle + I_{k,\mu}$$

$$\text{para: } \ \mu \leq k-1; \ \ s = 1, ..., p-1.$$

Por último si $X = p^{k-l} + p^{\mu-l}sa \in I \setminus I_{k,\mu} \langle X_1 \rangle$, para $1 < l$, al multiplicar este elemento por a, obtenemos que $X = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-1}sa$, de donde es fácil demostrar por inducción que:

$$I_{k,\mu} \langle X_1 \rangle < I_{k,\mu} \langle X_l \rangle = \left\langle p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-1}sa \right\rangle + I_{k,\mu}$$

$$\text{para: } \ \mu = k-1; \ s = 1, ..., p-1; \ 2 \leq l \leq 1.$$

Sabemos que

$$\zeta_{B_{\{p\}}(C_p)}(z) = \sum_{\substack{I \leq B_{\{p\}}(C_p), \text{ideales} \\ \left[\ B_{\{p\}}(C_p) \ : \ I \ \right] < \infty}} \left| \frac{B_{\{p\}}(C_p)}{I} \right|^{-z},$$

por lo que:

$$\zeta_{B_{\{p\}}(C_p)}(z) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{k}\left|\frac{B_{\{p\}}(C_p)}{I_{k,\mu}}\right|^{-z}+(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{k-1}\left|\frac{B_{\{p\}}(C_p)}{I_{k,\mu}\left\langle X_1\right\rangle}\right|^{-z}+p\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=2}^{k-1}\left|\frac{B_{\{p\}}(C_p)}{I_{k,\mu}\left\langle X_l\right\rangle}\right|^{-z}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{k}\left|p^{k+\mu}\right|^{-z}+(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{k-1}\left|p^{k+\mu-1}\right|^{-z}+p\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=2}^{k-1}\left|p^{2k-l-1}\right|^{-z}=$$

$$\frac{1}{(1-p^{-z})^2(1+p^{-z})}+\frac{(-1+p)p^{-2z}}{(1-p^{-z})^2(1+p^{-z})}+\frac{pp^{-3z}}{(1-p^{-z})^2(1+p^{-z})}=$$

$$\frac{1}{(1-p^{-z})^2}[1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2],$$

Por lo que del teorema 2.2.23 obtenemos que:

$$f_{(C_p)}(p^{-z})=1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2.$$

Por último, por el teorema 2.221, parte iii, sabemos que:

$$\zeta_{B(C_p)}(z)=\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{B_{\{q\}}(C_p)}(z)=\zeta_{B_{\{p\}}(C_p)}(z)\prod_{\substack{q\neq p\\ q-\text{primo}}}\zeta_{B_{\{q\}}(C_p)}(z)=$$

Ahora, del teorema 2.2.22 y puesto que $f_{(C_p)}(q^{-z})=1$, siempre que $q\neq p$, obtenemos que:

$$\zeta_{B(C_p)}(z)=\left[1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2\right]\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}(C_p)}(z)\prod_{\substack{q\neq p\\ q-\text{primo}}}\zeta_{\tilde{B}_{\{q\}}(C_p)}(z)=$$

$$\left[1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2\right]\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{\tilde{B}_{\{q\}}(C_p)}(z)=\left[1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2\right]\zeta_{\tilde{B}(C_p)}(z)=$$

Observemos que $\tilde{B}\left(C_p\right)=\mathbb{Z}^2$, por lo que del teorema 2.2.21, parte i, concluimos que:

$$\zeta_{B(C_p)}(z)=\left[1-(p^{-z})+p(p^{-z})^2\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}n^{-z}\right]^2.$$

.

Capítulo 3

LA FUNCION ZETA DE $B_{\{p\}}(C_{p^2})$.

En la primera sección del capítulo 3, se estudiarán a fondo todos los ideales de índice finito en el anillo de Burnside $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$, en donde C_{p^2} es el grupo cíclico de orden p^2.

En la segunda sección de este capítulo, se hará un resumen de todos los ideales de índice finito en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$, con el propósito de encontrar la función zeta de este orden, además se hará el calculo de la función zeta del orden maximal $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$. Por último y de acuerdo con el teorema (2.2.23) se hará el cálculo del polinomio $f_{\left(C_{p^2}\right)}(p^{-z})$, el cual pertenece a $\mathbb{Z}[p^{-z}]$ y relaciona a $\zeta_{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)$ con $\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)$, las funciones zeta de $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ y $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ respectivamente.

3.1. IDEALES DE ÍNDICE FINITO EN $B_{\{p\}}\left(C_{p^2},\right)$

En esta sección determinaremos a todos los ideales propios, contenidos en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2},\right)$ de índice finito sobre este, para lo cual utilizaremos el hecho de que existe $k \in \mathbb{N}$ (teorema 2.2.18) tal que si $I < B_{\{p\}}\left(C_{p^2},\right)$ es un ideal propio de índice finito, entonces $I_k = p^k B_{\{p\}}\left(C_{p^2},\right) < I$ es un ideal propio en I.

Tenemos que el conjunto de las clases de conjugación de los subgrupos de (C_{p^2}) es

$$C = \left\{C_{p^2},\ pC_{p^2},\ p^2 C_{p^2}\right\},$$

de donde una base para $B\left(C_{p^2}\right)$ el anillo de Burnside de C_{p^2} es

$$B = \left\{1 = \frac{C_{p^2}}{C_{p^2}},\ a = \frac{C_{p^2}}{pC_{p^2}}, b = \frac{C_{p^2}}{p^2 C_{p^2}}\right\},$$

por lo que $B\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}} a \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}} b$ en donde

$$b^2 = \frac{C_{p^2}}{p^2 C_{p^2}} \times \frac{C_{p^2}}{p^2 C_{p^2}} = \left(p^2, p^2\right) \frac{C_{p^2}}{\left[p^2, p^2\right] C_{p^2}} = p^2 b,$$

$$a^2 = \frac{C_{p^2}}{pC_{p^2}} \times \frac{C_{p^2}}{pC_{p^2}} = (p, p) \frac{C_{p^2}}{[p, p]\, C_{p^2}} = pa,$$

$$ab = ba = \frac{C_{p^2}}{p^2 C_{p^2}} \times \frac{C_{p^2}}{pC_{p^2}} = \left(p, p^2\right) \frac{C_{p^2}}{\left[p, p^2\right] C_{p^2}} = pb.$$

Recordemos que

$$B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigotimes B\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}} a \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}} b,$$

el cual es un orden sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$, para el cual

$$\widetilde{B}_{\{p\}}(C_{p^2}) = \mathbb{Z}^3_{\{p\}}$$

es un orden maximal sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$.

3.1.1 Observación:

Sea $s \in \mathbb{Z}_{\{p\}}$ una unidad, entonces los elementos de la forma $s+s_1a+s_2b \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ con $s_{1,2}\in \mathbb{Z}_{\{p\}}$, son unidades ya que s.p.g. el el elemento $1+s_1a+s_2b \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ tiene inverso $1+u_1a+u_2b \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$, en donde la ecuación $(1+s_1a+s_2b)(1+u_1a+u_2b)=1$ implica que

$$u_1 = \frac{-s_1}{1+s_1p}, u_2 = \frac{s_2\left(1+pu_1\right)}{1+s_1p+s_2p^2} \in \mathbb{Z}_{\{p\}}.$$

3.1.2 Observación:

Sea k el mínimo entero positivo tal que $p^k \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ talque $w \in I \diagdown I_k$ y entonces s.p.g. podemos escribir

$$w = p^{l_1} + p^{l_2}u_1a + p^{l_3}u_2b,$$

en donde $u_{1,2} \in \mathbb{Z}_{\{p\}}$ son unidades, por lo que de 3.1.1 si $l_1 \leq l_{2,3}$ entonces $p^{l_1} \in I \diagdown I_k$, pero por la minimalidad de k tenemos que $k \leq l_1$ y entonces $p^{l_1} \in I_k$, lo cual contradice a la contención propia, por lo que concluimos que $l_2 < l_1$ ó $l_3 < l_1$.

3.1.3 Proposición:

Sea $I < B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ un ideal de índice finito y k el mínimo entero positivo tal que $p^k \in I$, entonces I_k esta contenido propiamente en las siguientes familias de ideales:

$$I_k < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu} := p^k\mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus p^{\mu} Z_{\{p\}}a \bigoplus p^{\nu}\mathbb{Z}_{\{p\}}b \\ \qquad \text{caso1 :} 1 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k; 0 \leq \nu \leq k-1 \\ \qquad \text{caso2 :} 1 \leq k < \infty; \mu = \nu; 0 \leq \nu \leq k-1 \\ \qquad \text{caso3 :} 1 \leq k < \infty; \mu = \nu-1; 1 \leq \nu \leq k \\ \\ I_k' := \left\langle p^{k-1}\left(a+sb\right)\right\rangle + I_k \\ \qquad \text{casos :} \leq k < \infty; s = 1, ..., p-1. \end{cases}$$

Demostración:

Sea

$$w = p^t + p^{t_1}s_1a + p^{t_2}s_2b \in I \diagdown I_k,$$

en donde $p \nmid s_{1,2}$ de 3.1.2 podemos considerar los casos: $t_1 < t \leq t_2$; $t_2 < t \leq t_1$; $t_{1,2} < t$.

Considerando estos tres casos junto con la condición de que $k \leq t$ obtenemos que:

a) Si el elemento

$$p^{t_1}a \in I \diagdown I_k,$$

lo cual implica que $t_1 < k$ y al multiplicar el elemento por b , obtenemos que $p^{t_1+1}b \in I$ donde $t_1 + 1 \leq k$, por lo que $I_k < I_{k,\mu,\nu}$ para los casos $\mu = \nu - 1 < k$ y $\nu < k, \nu \leq \mu \leq k$.

b) Si el elemento

$$p^{t_2}b \in I \diagdown I_k,$$

lo cual implica que $t_2 < k$, por lo que $I_k < I_{k,k,\nu}$ para $\nu < k$.

c) Si el elemento

$$p^{t_1}a + p^{t_2}sb \in I \diagdown I_k,$$

para $s = s_1^{-1}s_2$, lo cual implica que $p \nmid s$ y $t_{1,2} < k$.

En el caso de que $t_1 < t_2$ podemos multiplicar el elemento por p^{k-t_2} , obteniendo que $p^{k+t_1-t_2}a \in I \diagdown I_k$, en donde $t_1 - t_2 < 0$, por lo que caemos en el inciso a de esta demostración.

Ahora si $t_2 < t_1$ podemos multiplicar el elemento por p^{k-t_1}, con lo que obtenemos que $p^{k+t_2-t_1}b \in I \diagdown I_k$, en donde $t_2 - t_1 < 0$, por lo que caemos en el inciso b de esta demostración, por lo cual sólo nos queda estudiar el caso

$$p^{t_1}a + p^{t_1}sb \in I \diagdown I_k,$$

caso para el cual tenemos que si $t_1 = k - 1$, entonces I_k esta contenido propiamente en

$$\left\langle p^{k-1}\left(a + sb\right)\right\rangle + I_k,$$

$$\text{casos} : 1 \leq k; s = 1, 2, ..., (p-1)\,.$$

Ahora si $t_1 \leq k-2$, al multiplicar por b obtenemos que el elemento $p^{t_1+1}\left(1 + ps\right)b \in I$, lo cual implica que $p^{t_1+1}b \in I \diagdown I_k$ y $p^{t_1+1}a \in I \diagdown I_k$ por lo que $I_k < I_{k,\mu,\mu}$ para $\mu < k$.

Por último, si $t < k$ tenemos que

$$wa = p^t a + p^{t_1+1} s_1 a + p^{t_2+1} s_2 b \in I$$

y

$$pw = p^{t+1} + p^{t_1+1} s_1 a + p^{t_2+1} s_2 b \in I,$$

por lo que al restar estos dos últimos elementos, obtenemos que

$$x = p^t \left(p - a\right) \in I,$$

elemento que satisface las condiciones $xa = xb = 0$, además de que $p^{k-1} a \in I$ y entonces $I_k < I_{k,k-1,k}$.

3.1.4 Observación:

Si consideramos el elemento $w' \in I \diagdown I_k^{'}$, puesto que $I_k < I_k^{'}$ entonces $w \in I \diagdown I_k$, por lo que de la demostración de 3.1.3 tenemos que

$$I_k^{'} < I_{k,\mu,\nu}$$

para algunos casos de μ y ν, o en su defecto el elemento $p^{k-1}\left(a + s'b\right)$ pertenece a $I \diagdown I_k^{'}$, pero al restarle el elemento $p^{k-1}\left(a + sb\right)$ obtenemos que $p^{k-1}\left(s' - s\right) b \in I$, en donde $p \nmid \left(s' - s\right)$, por lo que $p^{k-1} b \in I$ y entonces $p^{k-1} a \in I$, obteniendo que

$$I_k^{'} < I_{k,k-1,k-1},$$

por lo que en lo siguiente sólo hay que estudiar a los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}$ en sus distintos casos.

3.1.5 Observación:

Sean k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ tal que

$$w = p^t + p^{t_1} s_1 a + p^{t_2} s_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$

- Si $k \leq t$, tenemos que $p^{t_1} a + p^{t_2} s_1^{-1} s_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ por lo cual $t_1 < \mu$ y $t_2 < \nu$ y entonces $p^{\mu - l_1} a + p^{\nu - l_2} s_1^{-1} s_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, obteniendo que

$$0 < l_1 = l_2.$$

- Si $\mu \leq t_1$, tenemos que $p^t + p^{t_2}s_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ por lo que $t < k$ y $t_2 < \nu$, con lo cual $p^{k-l} + p^{\nu-l_2}s_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, obteniendo que
$$0 < l = l_2.$$
- Si $\nu \leq t_2$, tenemos que $p^t + p^{t_1}s_1a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ por lo que $t_1 < \mu$ y $t < k$, con lo cual $p^{k-l} + p^{\mu-l_1}s_1a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, obteniendo que
$$0 < l = l_1.$$
- Por último tenemos el elemento
$$p^{k-l} + p^{\mu-l_1}s_1a + p^{\nu-l_2}s_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l, l_{1,2}$, por lo que si $l, l_{1,2}$ son distintos entre sí, al multiplicar el elemento por la potencia adecuada de p, obtenemos que $p^{k-1} \in I$ ó $p^{\mu-1}a \in I$ ó $p^{\nu-1}b \in I$, lo cual contradice a la minimalidad de k, μ, ν, por lo que concluimos que el el elemento w únicamente puede ser de las siguientes siete formas:

1. $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l$ y
$$x = 1, ..., p-1.$$
2. $X'_l = p^{k-l_1}s + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l_1 < l$ y
$$x, s = 1, ..., p-1.$$
3. $Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}yb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l$ y
$$y = 1, ..., p-1.$$
4. $Y'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}yb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l_1 < l$ y
$$y, s = 1, ..., p-1.$$
5. $Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l$ y
$$z = 1, ..., p-1.$$
6. $Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za + p^{\nu-l_1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l_1 < l$ y
$$z, s = 1, ..., p-1.$$
7. $W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_1a + p^{\nu-l}w_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ para $0 < l$ y
$$w_{1,2} = 1, ..., p-1.$$

3.1.6 Proposición:

Sea k,μ,ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$, entonces tenemos que $I_{k,\mu,\nu}$ esta contenido propiamente en las siguientes familias de ideales:

$$I_{k,\mu,\nu} < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle := \left\langle p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 2 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k; 1 \le \nu \le k-1; \\ \qquad\quad x = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 2 \le k < \infty; \mu = \nu; 1 \le \nu \le k-1; x = 1,2,...,p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 3 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k-1; 1 \le \nu \le k-2; \\ \qquad\quad y = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 2 \le k < \infty; \mu = \nu; 1 \le \nu \le k-1; y = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso3 :} 2 \le k < \infty; \mu = \nu-1; 1 \le \nu \le k-1; y = 1,2,...,p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle W_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}w_2b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 3 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k-1; 1 \le \nu \le k-2; \\ \qquad\quad w_{1,2} = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 2 \le k < \infty; \mu = \nu; 1 \le \nu \le k-1; w_{1,2} = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso3 :} 2 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; w_1 = -1; w_2 = 1,2,...,p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\mu-1}za\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 2 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k-1; 0 \le \nu \le k-2; \\ \qquad\quad z = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 2 \le k < \infty; \mu = \nu; 1 \le \nu \le k-1; z = 1,2,...,p-1 \\ \quad \text{caso3 :} 2 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; z = -1 \end{cases}$$

Demostración:

De 3.1.5 estudiaremos los siete posibles casos para w :

1. Si
$$X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l$ y $x = 1,2,...,p-1$, por lo que $p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al multiplicar por b implica que $p^\mu b \in I$, por lo que $\nu \le \mu$.

2. Si
$$X'_l = p^{k-l_1}s + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l_1 < l$ y $x, s = 1, 2, ..., p-1$, tenemos que el elemento $p^{l_1}X'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ implica que $p^{\mu+l_1-l}a + p^{\nu+l_1-l}xb$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, en donde $l_1 - l < 0$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

3. Si
$$Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}yb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l$ y $y = 1, 2, ..., p-1$, por lo que $p^{k-1} + p^{\nu-1}yb$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-1}a \in I$, por lo que $\mu \leq k-1$, además al multiplicar por b implica que $p^{k-1}b \in I$, por lo que $\nu \leq k-1$ y entonces
$$\nu < k, \mu < k.$$

4. Si
$$Y'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}yb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l_1 < l$ y $y, s = 1, 2, ..., p-1$, tenemos que el elemento $p^{l_1}Y'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ implica que el elemento $p^{k+l_1-l} + p^{\nu+l_1-l}yb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, en donde $l_1 - l < 0$, por lo que caemos en el caso 3 de esta demostración.

5. Si
$$Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l$ y $z = 1, 2, ..., p-1$, por lo que $p^{k-1} + p^{\mu-1}za$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al multiplicar por a, implica que $p^{k-1}a \in I$ y entonces $\mu \leq k-1$, además al multiplicar este elemento por b obtenemos que $\left(p^{k-1} + p^{\mu}z\right) b \in I$, por lo que: Si $\mu \leq k-2$, entonces $p^{\mu}\left(p^{k-1-\mu} + z\right) b \in I$ o bien $p^{\mu}b \in I$, por lo que $\nu \leq \mu \leq k-2$. Ahora si $\mu = k-1$, entonces $p^{k-1}(1+z) b \in I$, por lo que si $p \nmid 1+z$, entonces $\nu \leq k-1$ y si $z = -1$, entonces $\nu \leq k$, por lo que tenemos los casos:
$$\nu \leq \mu \leq k-1; z = 1, 2, ..., p-1$$
y
$$\nu = k; \mu = k-1; z = -1.$$

6. Si
$$Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za + p^{\nu-l_1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l_1 < l$ y $z, s = 1, 2, ..., p-1$, tenemos que el elemento $p^{l_1}Z'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, implica que $p^{k+l_1-l} + p^{\mu+l_1-l}za$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, en donde $l_1 - l < 0$, por lo que caemos en el caso 5 de esta demostración.

7. Por ultimo si
$$W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_1a + p^{\nu-l}w_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$$
para $0 < l$ y $w_{1,2} = 1, 2, ..., p-1$, entonces obtenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}w_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-1}a \in I$, por lo que $\mu \leq k-1$, además al multiplicar por b tenemos que $\left(p^{k-1} + p^{\mu}w_1\right) b \in I$, por lo que: Si $\mu \leq k-2$, entonces $p^{\mu}\left(p^{k-1-\mu} + w_1\right) b \in I$ y entonces $p^{\mu}b \in I$, por lo que $\nu \leq \mu \leq k-2$. Ahora si $\mu = k-1$, entonces $p^{k-1}(1 + w_1) b \in I$, por lo que si $p \nmid 1 + w_1$, entonces $\nu \leq k-1$ y si $w_1 = -1$, entonces $\nu \leq k$, por lo que tenemos los casos:
$$\nu \leq \mu \leq k-1; w_{1,2} = 1, 2, ..., p-1.$$
$$\nu = k; \mu = k-1; w_1 = -1; w_2 = 1, 2, ..., p-1.$$

3.1.7 Observación:

En el estudio de $I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, tenemos que si el elemento Y_1 pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, entonces este caso lo veremos al estudiar los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, también tendremos que si $W_1 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, ya que $W_1 - X_1w_1 = p^{k-1} + p^{\nu-1}(w_2 - w_1x) b \in I$, en donde $p \nmid w_2 - w_1x$ y de igual forma si $Z_1 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, ya que $Z_1 - X_1z_1 = p^{k-1} + p^{\nu-1}(z_2 - z_1x) b \in I$, en donde $p \nmid z_2 - z_1x$, por lo que será suficiente estudiar el elemento $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, para los casos 1 y 2, es decir los casos
$$X_l, X'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle.$$

Análogamente, será suficiente estudiar a los ideales que son de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$ para:

$$Z_l, Z'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle\,,$$

ya que si $W_1 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle\,,$ tenemos que el elemento $W_1 - Z_1 z^{-1} w_1 = p^{k-1}(1 - z^{-1}w_1) + p^{\nu-1}w_2 b \in I$, en donde p no divide a $1 - z^{-1}w_1$, por lo que este caso se estudiará para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$

De lo anterior los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle W_1\rangle\,,$ se estudiará dentro del caso $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, ya que si el elemento $W_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_1\rangle\,,$ entonces $p^{k-1} + p^{\mu-1}w'_1 a + p^{\nu-1}w'_2 b \in I$, por lo que $p^{\mu-1}(w_1 - w'_1)a + p^{\nu-1}(w_2 - w_2)b \in I$, en donde: si $p \nmid w_1 - w'_1,$ tenemos que $Y_1 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$; ahora si $p \mid w_1 - w'_1,$ entonces $p^{k-2} + p^{\mu-2}w_1 a + p^{\mu-1}w'_1 a + p^{\nu-2}w_2 b + p^{\nu-1}w'_2 b \in I$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{\mu-1}(p^{k-\mu-1} + w_1)a + p^{\nu-1}w_2 b \in I$, por lo que $Y_1 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$.

Por último estudiaremos los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ para:

$$X_l, X'_l, Y_l, Y'_l, Z_l, Z'_l, W_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle\,.$$

3.1.8 Proposición:

- a) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle\,,$ entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle\,,$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle X_2\rangle := \left\langle p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 3 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k; 2 \le \nu \le k-1; \\ \quad\quad x = 1,2,...,p-1; x_1 = 0,1,...,p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X'_2\rangle := \\ \left\langle p^{k-1}x_2 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \nu+1 \le \mu \le k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \quad\quad x, x_2 = 1,2,...,p-1; x_1 = 0,1,...,p-1. \end{cases}$$

- b)Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_2\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle X_2\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle X_2\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle X_3\rangle := \\ \left\langle p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \mu = \nu+1; 3 \le \nu \le k-1; \\ \qquad x_{1,3} = 0,1,...,p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X'_3\rangle := \\ \left\langle p^{k-1}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 5 \le k < \infty; \mu = \nu+1; 3 \le \nu \le k-2; \\ \qquad x_4 = 1,2,...,p-1; x_{1,3} = 0,1,...,p-1. \end{cases}$$

- c) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle$, para $3 \le l$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle X_{l+1}\rangle := \\ \left\langle p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + p^{\nu-2}x_3 b + p^{\nu-1}x_5 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 5 \le k < \infty; \mu = \nu+1; 4 \le \nu \le k-1; \\ \qquad x_{3,5} = 0,1,...,p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X'_{l+1}\rangle := \\ \left\langle p^{k-1}x_6 + p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + p^{\nu-2}x_3 b + p^{\nu-1}x_5 b\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 6 \le k < \infty; \mu = \nu+1; 4 \le \nu \le k-2; \\ \qquad x_6 = 1,2,...,p-1; x_{3,5} = 0,1,...,p-1; \\ \qquad 3 \le l \le \nu - 1. \end{cases}$$

Demostración:

- a). De 3.1.7 tenemos los siguientes casos para w :

1. Si $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$ tenemos que $p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que al restarle X_1, obtenemos que $p^{\nu-1}(x'-x)b \in I$, por lo que podemos escribir $x' = x + px_1$, de donde
$$p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle,$$
elemento que al multiplicar por b implica que $p^{\mu-1}b \in I$, por lo que $\nu < \mu$.

2. Si $X'_l = p^{k-l_1}x_2 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$ en donde $0 < l_1 < l$, tenemos que $p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que al restarle X_1, obtenemos que el elemento $p^{\nu-1}(x'-x)b \in I$, por lo que podemos escribir $x' = x + px_1$, de donde
$$p^{k-1}x_2 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle,$$
elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-1}a \in I$, por lo que $\mu \leq k-1$, además al multiplicar por b implica que $p^{\mu-1}b \in I$, por lo que $\nu < \mu$, con lo cual queda demostrado el inciso a de esta proposición.

- Observemos que: Si
$$X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X'_2\rangle$$
en donde $2 \leq l$, tenemos que $p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}$ y al restarle este elemento a X'_2, obtenemos que el elemento $p^{k-1}x_2 + p^{\nu-1}(x_1 - x')b \in I$, por lo que este caso se estudiará para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ y de igual forma si $X'_l = p^{k-l_1}x_4 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X'_2\rangle$ en donde $0 < l_1 < l$ y $2 \leq l$, por lo que si $2 \leq l_1$ tenemos que $pX_l - X_la = p^{k-l_1}(p-a) \in I$ por lo que $\mu = k-1$, lo cual implica que $p^{k-1} - p^{\mu-1}a \in I$, elemento que al sumarle X_1, implica que $p^{k-1} + p^{\nu-1}xb \in I$, caso que se estudiará a fondo posteriormente, por lo que:

- Nota: En lo siguiente de la demostración de esta proposición podemos considerar
$$l_1 = 1.$$

Por lo anterior

$$X'_l = p^{k-1}x_4 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'_2\right\rangle,$$

tenemos que $p^{k-\lambda}x_4 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x'b \in I$, para $\lambda = 0, 1$, en donde tenemos el caso anterior para $\lambda = 0$. Para $\lambda = 1$, tenemos que $p^{k-1}(x_4 - x_2) + p^{\nu-1}(x' - x_1)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que ambos casos se estudiarán posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1\right\rangle$.

- b). De 3.1.7 tenemos los siguientes casos para w :

1. Si $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle$ en donde $2 \leq l$, por lo que $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ y al restarle X_2, obtenemos que elemento $p^{\nu-1}(x' - x_1)b \in I$, por lo que $x' = x_1 + px_3$, de donde $3 \leq l$ por lo que

$$p^{\mu-3}a + p^{\nu-3}xb + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x_3b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle$$

y al multiplicar por b implica que $(p^{\mu-2} + p^{\nu-1}x)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, en donde $\nu - 1 \leq \mu - 2$, por lo que $\nu - 1 = \mu - 2$, o bien $\nu = \mu - 1$, con lo cual podemos reescribir $x = -1$ y entonces

$$p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x_3b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle,$$

en donde $\nu = \mu - 1 \leq k - 1; 3 \leq l$.

2. Si $X'_l = p^{k-1}x_4 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle$ en donde $x_4 \neq 0$ y $2 \leq l$. Si $l = 2$ tenemos que $p^{k-1}x_4 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que al restarle X_2, obtenemos que $p^{k-1}x_4 + p^{\nu-1}(x' - x_1)b \in I$, en donde $p \nmid x_4$, por lo que este caso se estudiará posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1\right\rangle$ y entonces podemos considerar el caso $3 \leq l$, por lo que $p^{k-1}x_4 + p^{\mu-3}a + p^{\nu-3}xb + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle$, al multiplicar el elemento anterior por b implica que $\left(p^{k-1}x_4 + p^{\mu-2} + p^{\nu-1}x\right)b \in I$, en donde $\nu - 1 \leq \mu - 2 \leq k - 2$, por lo que $(p^{\mu-2} + p^{\nu-1}x)b \in I$, ya que $\nu \leq k - 1$, lo cual implica que $\nu - 1 = \mu - 2$ o bien $\nu = \mu - 1$, por lo que podemos reescribir $x = -1$, obteniendo que

$$p^{k-1}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle$$

de donde $p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al restarle X_2, implica que $x' = x_1 + px_3$ y entonces

$$p^{k-1}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x_3b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X_2\right\rangle,$$

elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-1}x_4a \in I$, por lo que $\mu \leq k-1$ y además $\mu = \nu - 1; 3 \leq l$, con lo cual queda demostrado el inciso b de esta proposición.

- Observemos que Si

$$X_l = p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X'_3\rangle$$

en donde $3 \leq l$, tenemos que $p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que $p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, y al restarle X_2, obtenemos que $p^{\nu-1}(x'-x_1)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ y entonces $x' = x_1 + px''$, con lo cual $p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x''b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, y al restarle este elemento a X'_3, obtenemos que $p^{k-1}x_2 + p^{\nu-1}(x_3 - x'')\, b \in I$, por lo que este caso se estudiará posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$. De igual forma si

$$X'_l = p^{k-1}x_6 + p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X'_3\rangle$$

en donde $x_6 \neq 0$ y $3 \leq l$, tenemos que $p^{k-\lambda}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I$, para $\lambda = 0, 1$, en donde tenemos el caso anterior para $\lambda = 0$. Para $\lambda = 1$, puesto que $p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}x'b \in I$, tenemos que $x' = x_1 + px''$, por lo que $p^{k-1}x_6 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x''b \in I$, elemento que al restarle X'_3 implica que $p^{k-1}(x_6 - x_4) + p^{\nu-1}(x'' - x_2)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que ambos casos se estudiarán posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$.

- c). Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle$ en donde $3 \leq l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle X_{l+1}\rangle \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X'_{l+1}\rangle \end{cases}$$

considerando de 3.1.7 los siguientes casos para w :

1. $X_r = p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle$ para $3 \leq r$.
2. $X'_r = p^{k-1}x_6 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_l\rangle$ para $3 \leq r$.

- Nota: Esta parte de la proposición se demuestra por inducción para l.

3.1.9 Proposición:

- a) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Z_2\rangle := \left\langle p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1 a\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 3 \leq k < \infty; \mu = k-1; 0 \leq \nu \leq k-1; \\ \quad\quad z_1 = 0, ..., p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 3 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; z_1 = 0 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_2\rangle := \\ \left\langle p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1 a + p^{\nu-1}z_2 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 3 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; \\ \quad\quad z_1 = 0, ..., p-1; z_2 = 1, ..., p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 3 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; \\ \quad\quad z_1 = 0; z_2 = 1, ..., p-1. \end{cases}$$

- b) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle$ para $2 \leq l$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Z_{l+1}\rangle := \left\langle p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-1}z_3 a\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 0 \leq \nu \leq k-1; \\ \quad\quad 2 \leq l \leq k-2; z_3 = 0, ..., p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; \\ \quad\quad 2 \leq l \leq k-2; z_3 = 0 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_{l+1}\rangle := \\ \left\langle p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-1}z_3 a + p^{\nu-1}z_4 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 :} 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; \\ \quad\quad 2 \leq l \leq k-2; z_3 = 0, ..., p-1; \\ \quad\quad z_4 = 1, ..., p-1 \\ \quad \text{caso2 :} 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; \\ \quad\quad 2 \leq l \leq k-2; z_3 = 0; \\ \quad\quad z_4 = 1, ..., p-1. \end{cases}$$

Demostración:

- a). De 3.1.7 tenemos los siguientes casos para w :

1. Si
$$Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l} z' a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$$
tenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1} z' a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que al restarle Z_1, obtenemos que $p^{\mu-1}(z' - z) a \in I$, por lo que podemos escribir $z' = z + pz_1$, de donde $p^{k-2} + p^{\mu-2} za + p^{\mu-1} z_1 a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$, Ahora, al multiplicar este elemento por a, obtenemos que $^{k-2} + p^{\mu-1} z) a \in I$, lo cual implica que $\mu = k - 1$ y por lo cual podemos reescribir $z = -1$, obteniendo que $p^{k-2} - p^{\mu-2} a + p^{\mu-1} z_1 a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$, elemento que al multiplicar por b implica $p^\mu z_1 b \in I$, por lo que si $z_1 \neq 0$, entonces $\nu \leq \mu = k - 1$ y en el caso de que $z_1 = 0$, no tenemos restricciones para ν, por lo que $\nu \leq k$.

2. Si
$$Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l} z' a + p^{\nu-l_1} z_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$$
en donde $0 < l_1 < l$, tenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1} z' a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que de manera análoga al caso 1 de este inciso, podemos escribir $z' = z + pz_1$, de donde $p^{k-2} + p^{\mu-2} za + p^{\mu-1} z_1 a + p^{\nu-1} z_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $^{k-2} + p^{\mu-1} z) a \in I$, por lo que $\mu = k - 1$, con lo cual podemos reescribir $z = -1$, obteniendo que $p^{k-2} - p^{\mu-2} a + p^{\mu-1} z_1 a + p^{\nu-1} z_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z_1 \rangle$, además al multiplicar por b implica que $p^\mu z_1 b \in I$, por lo que si $z_1 \neq 0$, entonces $\nu \leq \mu = k - 1$ y en el caso de que $z_1 = 0$, no tenemos restricciones para ν, por lo que $\nu \leq k$, con lo cual queda demostrado el inciso a de esta proposición.

- Observemos que: Si
$$Z_l = p^{k-l} - p^{\mu-l} a + p^{\mu-l+1} z' a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z'_2 \rangle$$
en donde $2 \leq l$, tenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2} a + p^{\mu-1} z' a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$ y al restarle este elemento a Z'_2, obtenemos que el elemento $p^{\mu-1}(z_1 - z') a + p^{\nu-1} z_2 b \in I$, en donde $z_2 \neq 0$, por lo que podemos restar el elemento $Z_1(z_1 - z')$, obteniendo que $p^{k-1}(z_1 - z') + p^{\nu-1} z_2 b \in I$, por lo que este caso se estudiará para $I_{k,\mu,\nu} \langle Y_1 \rangle$ y de igual forma si $Z'_l = p^{k-l} - p^{\mu-l} a + p^{\mu-l+1} z' a + p^{\nu-l_1} z_4 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Z'_2 \rangle$ en donde $0 < l_1 < l$, y $2 \leq l$, por lo que si $2 \leq l_1$ tenemos que

al multiplicar por a, obtenemos que $p^{\mu-l+2}z'a + p^{\nu-l_1+1}z_4b \in I$ de donde $p^{\mu-1}z'a + p^{\nu-1}z_4b \in I$ y al sumarle Z_1z', implica que $p^{k-1}z' + p^{\nu-1}z_4b \in I$, caso que se estudiará a fondo posteriormente, por lo que:

- Nota: En lo siguiente de la demostración de esta proposición podemos considerar $l_1 = 1$. Por lo anterior tendremos que

$$Z'_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-l+1}z'a + p^{\nu-1}z_4b \in$$

$$I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_2\rangle\,,$$

tenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z'a + p^{\nu-\lambda}z_4b \in I$, para $\lambda = 0, 1$, en donde tenemos el caso anterior para $\lambda = 0$. Para $\lambda = 1$, tenemos que $p^{\mu-1}(z_1 - z')a + p^{\nu-1}(z_2 - z_4)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, y al sumarle el elemento $Z_1(z_1 - z')$, obtenemos que $p^{k-1}(z_1 - z') + p^{\nu-1}(z_2 - z_4)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, por lo que ambos casos se estudiarán posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$.

- b). Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle$ en donde $2 \leq l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Z_{l+1}\rangle \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_{l+1}\rangle \end{cases}$$

considerando de 3.1.7 los siguientes casos:

1. $Z_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-r+1}z'a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle$ para $2 \leq r$.
2. $Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-r+1}z'a + p^{\nu-1}z_4b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_l\rangle$ para $2 \leq r$.

- Nota: Esta parte de la proposición se demuestra por inducción para l.

3.1.10 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que el elemento $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1 \rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle := \left\langle \left[p^{k-1}+p^{\nu-1}yb\right];\left[p^{\mu-1}a+p^{\nu-1}xb\right]\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{caso1 }: 3 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 1 \leq \nu \leq k-2; \\ \qquad x, y = 1, ..., p-1 \\ \quad \text{caso2 }: 2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; \\ \qquad x, y = 1, ..., p-1 \end{cases}$$

Demostración:

De 3.1.7 tenemos los siguientes siete casos para w :

1. Si
$$X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
en donde $0 < l$ y $x = 1, 2, ..., p-1$, por lo que $p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, elemento que al multiplicar por b implica que $p^\mu b \in I$, de donde $\nu \leq \mu$ y además $\mu \leq k-1$.

2. Si
$$X'_l = p^{k-l_1}s + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l_1 < l$ y $x, s = 1, 2, ..., p-1$, tenemos que el elemento $p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb \in I$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

3. Si
$$Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}y'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l$ y $y = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que $p^{k-1} + p^{\nu-1}y'b \in I$, por lo que al restarle Y_1, obtenemos que $p^{\nu-1}(y'-y)b \in I$ por lo cual podemos escribir $y' = y + py_1$ y entonces $2 \leq l$, por lo cual $p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-2}a + p^{\nu-1}yb \in I$, de donde $\mu = k-1$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

4. Si
$$Y_l' = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}y'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l_1 < l$ y $y, s = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que el elemento $p^{k-1} + p^{\nu-1}y'b \in I$, por lo que de manera análoga al caso 3, podemos escribir $y' = y + py_1$ y entonces $2 \leq l$, por lo cual $p^{k-2} + p^{\mu-1}sa + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-2}a + p^{\nu-1}yb \in I$, de donde $\mu = k-1$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

5. Si
$$Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l$ y $z = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1}za \in I$, elemento que al restarle Y_1 implica que $p^{\mu-1}za^{\nu-1}yb \in I$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

6. Si
$$Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za + p^{\nu-l_1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l_1 < l$ y $z, s = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que el elemento $p^{k-1} + p^{\mu-1}za \in I$, por lo que caemos en el caso anterior de esta demostración.

7. Si
$$W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_1a + p^{\nu-l}w_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$$
para $0 < l$ y $w_{1,2} = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}w_2b \in I$, elemento que al restarle Y_1 implica que $p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}(w_2 - y)b \in I$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración y con lo cual queda demostrada esta proposición.

3.1.11 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ un elemento tal que w pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, tenemos que $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$ esta contenido propiamente en las siguientes familias de ideales:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle := \\ \left\langle \left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \nu + 1 \le \mu \le k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \quad\quad x, y = 1, 2, ..., p-1; x_1 = 0, ..., p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle := \left\langle p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \mu = k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \quad\quad y = 1, 2, ..., p-1; y_1 = 0, ..., p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle W_2\rangle := \\ \left\langle p^{k-2} + p^{\mu-2}w_3 a + p^{\nu-2}(1+w_3)yb + p^{\nu-1}w_4 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \mu = k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \quad\quad w_3 = 1, 2, ..., p-2; w_4 = 0, ..., p-1; \\ \quad\quad y = 1, ..., p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle := \\ \left\langle \left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1 a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos} : 3 \le k < \infty; \mu = k-1; 1 \le \nu \le k-1; \\ \quad\quad z_1 = 0, ..., p-1; y = 1, 2, ..., p-1 \end{cases}$$

Demostración:

De 3.1.7 estudiaremos los siete posibles casos para w :

1. Si $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $X_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.8, inciso a, parte 1, tenemos que $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, de donde $\nu < \mu \le k-1$.

2. Si $X'_l = p^{k-l_1}x_2 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $X'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$ en donde $0 < l_1 < l$, por lo que de la proposición 3.1.8, inciso a, parte 2, tenemos que $p^{k-1}x_2 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1b$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, por lo que al restarle Y_1x_2 obtenemos que el elemento $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}(x_1 - x_2)b \in I$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

3. Si $Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}y'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que el elemento Y_l pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.10, parte 3, obtenemos que $p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $p^{k-2}a + p^{\nu-1}yb \in I$, de donde $\mu = k-1$, por lo que $x = y$ y $\nu \leq k-2$.

4. Si $Y'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}y'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $Y'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.10, parte 4, obtenemos que $p^{k-2} + p^{\mu-1}sa + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, elemento que al restarle X_1s implica $p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}(y_1 - xs)b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, por lo que caemos en el caso 3 de esta demostración.

5. Si $Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}z'a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $Z_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, en donde $Z_1 = Y_1 - X_1(x^{-1}y)$, por lo que de la proposición 3.1.9, inciso a, parte 1, obtenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1a$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, en donde $\nu \leq \mu = k-1$.

6. Si $Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}z'a + p^{\nu-l_1}z_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $Z'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, en donde $Z_1 = Y_1 - X_1(x^{-1}y)$, por lo que de la proposición 3.1.9, inciso a, parte 2, obtenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1a + p^{\nu-1}z_2b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, por lo que al restarle el elemento $X_1(x^{-1}z_2)$, implica que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}(z_1 - x^{-1}z_2)a$ pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, por lo que caemos en el caso 5 de esta demostración.

7. Por ultimo si $W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_3a + p^{\nu-l}{}_4b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$. Tenemos que $W_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$ por lo que $p^{k-1} + p^{\mu-1}w_3a + p^{\nu-1}w_4b \in I$, elemento que al restarle Y_1 implica que $p^{\mu-1}w_3a + p^{\nu-1}(w_4 - y)b \in I$, ahora al restarle a este último elemento X_1w_3, obtenemos que $p^{\nu-1}(w_4 - y - xw_3)b \in I$, por lo que podemos reescribir $w_4 := y + xw_3 + pw_4$, por lo que $2 \leq l$ y entonces $p^{k-2} + p^{\mu-2}w_3a + p^{\nu-2}(y + xw_3)b + p^{\nu-1}w_4b \in I$ y al multiplicar por a

obtenemos que $p^{k-2}a+p^{\mu-1}w_3a+p^{\nu-1}(y+xw_3)b \in I$, por lo que al restarle a este elemento X_1w_3, obtenemos que $p^{k-2}a+p^{\nu-1}yb \in I$, por lo que $\mu = k-1$ y $y = x$ obteniendo que $p^{k-2} + p^{\mu-2}w_3a + p^{\nu-2}(1+w_3)yb+p^{\nu-1}w_4b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_1\rangle$, de donde $w_3 \neq p-1$ y entonces al multiplicar por b, obtenemos que $p^{k-2}b \in I$, por lo que $\nu \leq k-2$, con lo cual queda demostrada esta proposición.

3.1.12 Observación:

En el estudio de $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, tenemos que si el elemento $Y_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, entonces este caso lo estudiaremos para los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, análogamente si W_2 pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, tenemos que $W_2 - X_2w_3 \in I$, el cual es un elemento de la forma Y_2 y de igual forma si $Z_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, ya que $Z_2 + X_2 - X_1z_1 \in I$ es un elemento de la forma Y_2, por lo que será suficiente estudiar el elemento $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, para los casos

$$X_l, X_l' \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle.$$

Análogamente, será suficiente estudiar los ideales que son de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$ para:

$$Z_l, Z_l' \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle,$$

ya que si $W_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$, tenemos que el elemento $W_2+Z_2w_3-X_1z_1w_3 \in I$, el cual es un elemento de la forma Y_2, por lo que este caso se estudiará para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$.

De lo anterior los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle W_2\rangle$, se estudiará dentro del caso $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, ya que si el elemento $W_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_2\rangle$, entonces $p^{k-2}+p^{\mu-2}{}_3+p^{\nu-2}(1+{}_3)yb+p^{\nu-1}{}_4b \in I$, por lo que $p^{\mu-2}(w_3-w'{}_3)a + p^{\nu-2}(w_3-w'{}_3)yb + p^{\nu-1}(w_4-w_4')b \in I$, en donde: si $p \nmid (w_3 - w_3')$, tenemos que $Y_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$; ahora, en el caso que $w_3' = w_3$, entonces $p^{k-3}+p^{\mu-3}w_3a+p^{\nu-3}(1+w_3)yb+p^{\nu-2}sb \in I$ para algún s, por lo que al multiplicar por a obtenemos que $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}sb \in I$, lo cual implica que $Y_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$.

Por último estudiaremos los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para:

$$X_l, X_l', Y_l, Y_l', Z_l, Z_l', W_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle.$$

3.1.13 Proposición:

- a) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle < \left\{ \begin{array}{l} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_3\rangle := \left\langle \left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 5 \leq k < \infty; \mu = \nu + 1; \\ \qquad\qquad 3 \leq \nu \leq k-2; y = 1, ..., p-1; \\ \qquad\qquad x_{1,3} = 0, ..., p-1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X_3\rangle := \left\langle p^{k-2}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + \right. \\ \left. p^{\nu-2}(x_1 - x_4)b + p^{\nu-1}x_3 b \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad x_4 = 1, ..., p-1; x_{1,3} = 0, ..., p-1. \end{array} \right.$$

- b) Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_l\rangle$, para $3 \leq l$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_l\rangle, < \left\{ \begin{array}{l} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_{l+1}\rangle := \left\langle \left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + p^{\nu-2}x_3 b + p^{\nu-1}x_5 b\right] \right\rangle + \\ \qquad\qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 6 \leq k < \infty; \mu = \nu + 1; 4 \leq \nu \leq k-2; \\ \qquad\qquad x_{3,5} = 0, 1, ..., p-1; y = 1, ..., p-1; \\ \qquad\qquad 3 \leq l \leq \nu - 1 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X''_{l+1}\rangle = \left\langle p^{k-2}x_6 + p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + \right. \\ \left. p^{\nu-2}(x_3 - x_6)b + p^{\nu-1}x_5 b \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad x_6 = 1, 2, ..., p-1; x_{3,5} = 0, 1, ..., p-1; \\ \qquad\qquad 3 \leq l \leq \nu - 1 \end{array} \right.$$

Demostración:

- a). De 3.1.12 tenemos los siguientes casos para w :

1. Si

$$X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle,$$

   Tenemos que $X_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_2\rangle$, por lo que de la proposición 3.1.8, inciso b, parte 1, obtenemos que

$$p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b + p^{\nu-1}x_3b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle,$$

   en donde $\nu = \mu - 1 \leq k - 2, 3 \leq l$.

2. Si

$$X'_l = p^{k-l_1}x_4 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle,$$

   en donde $0 < l_1 < l$. Observemos que si $l_1 = 1$, el elemento $X'_l - Y_1x_4 \in I$, es de la forma X_l, por lo que caemos en el caso 1 de este inciso. Ahora si $2 < l_1$, tenemos que $pX'_l - aX'_l = p^{k-l_1+1}x_4 - p^{k-l_1}x_4a \in I$, de donde $\mu = k - 1$, por lo que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a \in I$, elemento que al sumarlo con X_2 implica que $Y_2 \in I$, por lo que en lo siguiente de esta demostración podemos considerar únicamente el caso:

$$l_1 = 2$$

   por lo que tenemos el elemento $X'_l = p^{k-2}x_4 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$. En el caso de que $4 \leq l$, caemos en el caso 1 de este inciso, por lo que tenemos $p^{k-2}x_4 + p^{\mu-3}a + p^{\nu-3}xb + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$, elemento que al multiplicar por por b implica que $(p^{\mu-2} + p^{\nu-1}x)\, b \in I$, por lo que $\nu - 1 = \mu - 2$ o bien $\nu = \mu - 1$, por lo que podemos reescribir $x = -1$, obteniendo que $X'_3 = p^{k-2}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$. Observemos que $pX'_l - aX'_l = p^{k-1}x_4 - p^{k-2}x_4a \in I$, por lo que $\mu = k - 1$, lo cual implica que $p^{k-1} - p^{\mu-1}a \in I$, elemento que al sumarle X_1, implica que

$$p^{k-1} - p^{\nu-1}b \in I,$$

   por lo que podemos reescribir $y = -1$. Ahora al multiplicar X'_3 por p, obtenemos que $p^{k-1}x_4 + p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}x'b \in I$, por lo que $p^{\mu-2}a - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}(x' + x_4)b \in I$, elemento que al restarle X_2, implica que x' es igual a $x_1 - x_4 + px_3$ y entonces

$$p^{k-2}x_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}(x_1 - x_4)b + p^{\nu-1}x_3 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_2\right\rangle,$$

en donde $\mu = k-1$ y $\nu = k-2$, con lo cual queda demostrado el inciso a de esta proposición.

- Observemos que Si

$$X_l = p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'_3\right\rangle$$

en donde $3 \leq l$, tenemos que $p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I$, por lo que al restarle este elemento a X'_3, obtenemos que $p^{k-2}x_4 + p^{\nu-2}sb \in I$, para algún s, por lo que este caso se estudiará posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2\right\rangle$. De igual forma si

$$X'_l = p^{k-2}x'_4 + p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-l+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'_3\right\rangle$$

en donde tenemos el caso anterior para $4 \leq l$, por lo que en lo siguiente cosideraremos el caso $l = 3$, con lo cual tenemos que $p^{k-2}x'_4 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'_3\right\rangle$, elemento que al restarle X'_3 implica que $p^{k-2}(x'_4 - x_4) + p^{\nu-2}sb \in I$, para algún s, tal que $p \nmid s$ por lo que este caso se estudiará posteriormente para $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2\right\rangle$.

- b). Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_l\right\rangle$, en donde $3 \leq l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_l\right\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_{l+1}\right\rangle, \\ I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'_{l+1}\right\rangle \end{cases}$$

considerando de 3.1.12 los siguientes casos para w :

1. $X_r = p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_l\right\rangle$, para $3 \leq r$.
2. $X'_r = p^{k-2}x_6 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, X_l\right\rangle$, para $3 \leq r$.

- Nota: Esta parte de la proposición se demuestra por inducción para l.

3.1.14 Proposición:

Sea k,μ,ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ un elemento tal que w pertenece $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle$, para $2 \leq l$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_{l+1}\rangle := \left\langle \left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right];\right. \\ \left.\left[p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-1}z_3 a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; 2 \leq l \leq k-2; \\ \qquad z_3 = 0,...,p-1; y = 1,...,p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z''_{l+1}\rangle := \\ \left\langle p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-2}z_3 a + p^{\nu-2}z_3 yb + p^{\nu-1}z_4 b\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; 2 \leq l \leq k-2; \\ \qquad y, z_3 = 1,...,p-1; z_4 = 0,...,p-1. \end{cases}$$

Demostración:

Observemos que: Si $Z_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-l+1}z'a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$, al multiplicar por a obtenemos que $-l+1 = -1$, por lo que $Z_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-1}z'a \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$. Si $Z'_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-l+1}z'a + p^{\nu-l_1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$ en donde $0 < l_1 < l$. Tenemos que el caso $l_1 = 1$ es equivalente al caso $Z_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_2\rangle$. Ahora, si $3 \leq l_1$ tenemos que al multiplicar por a, obtenemos que $p^{\mu-l+2}z'a + p^{\nu-l_1+1}sb \in I$ de donde $l-1 = l_1$ y entonces $p^{\mu-2}z'a + p^{\nu-2}sb \in I$ y al sumarle $Z_2 z'$, implica que $p^{k-2}z' + p^{\nu-2}s'b \in I$, para algún s', por lo que este caso se estudiará a fondo posteriormente, con lo cual podemos considerar $l_1 = 2$ y entonces $Z'_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-l+1}z'a + p^{\nu-2}sb$, elemento que al multiplicar por a implica que $-l+1 = -2$, por lo que $Z'_l = p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-2}z'a + p^{\nu-2}sb$. Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle$ en donde $2 \leq l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_{l+1}\rangle \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_{l+1}\rangle \end{cases}$$

ya que de 3.1.12, se consideran los siguientes casos:

1. $Z_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-1}sa \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle$ para $2 \leq r$.
2. $Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-2}z'a + p^{\nu-2}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, Z_l\rangle$ para $2 \leq r$.

- Nota: Esta proposición se demuestra por inducción para l.

3.1.15 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que el elemento $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle := \\ \left\langle \left[p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1 b\right]; \left[p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}x_1 b\right]\right\rangle \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \text{casos}: 4 \le k < \infty; \mu = k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ y = 1, ..., p-1; y_1, x_1 = 0, ..., p-1 \end{cases}$$

Demostración:

De 3.1.7 tenemos los siguientes siete casos para w :

1. Si $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$. Tenemos que $X_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$ de donde $1 < l$ y $x = 1, 2, ..., p-1$, por lo que de la proposición 3.1.8, inciso a, parte 1, obtenemos que $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$, en donde $\nu < \mu = k-1$. Observemos que $Y_2 a = p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}yb \in I$, por lo cual al restarle este último elemento a X_1, obtenemos que $p^{\nu-1}(x-y)b \in I$ por lo que podemos reescribir $x = y$, con lo cual $p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}x_1 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}$.

2. Si $X'_l = p^{k-l_1}s + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}xb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para $0 < l_1 < l$ y $x, s = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que X'_l pertenece a $I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle X_1\rangle$, por lo que de la proposición 3.1.8, inciso a, parte 2, obtenemos que $p^{k-1}s + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que al restarle $Y_1 s$, obtenemos un elemento de la forma $X_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

3. Si $Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}y'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para $0 < l$ y $y' = 1, ..., p-1$. Tenemos que $p^{k-1} + p^{\nu-1}y'b \in I$, por lo que al restarle Y_1, obtenemos que $p^{\nu-1}(y'-y)b \in I$ por lo cual podemos escribir $y' = y + ps$ y entonces $2 \le l$, por lo cual $p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, por lo que al restarle Y_2, obtenemos que $p^{\nu-1}(s - y_1)b \in I$ por lo cual podemos escribir $s = y_1 + ps'$, con lo cual $2 < l$ y entonces tenemos que $p^{k-3} + p^{\nu-3}yb + p^{\nu-2}y'b + p^{\nu-1}s'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $X_2 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

4. Si $Y_l' = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}y'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para $0 < l_1 < l$ y $y, s = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que $p^{k-1} + p^{\nu-1}y'b \in I$, por lo que de manera análoga al caso 3 podemos escribir $y' = y + py_1$ y entonces $2 \le l$, por lo cual $p^{k-2} + p^{\mu-1}sa + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, por lo que al restarle X_1s obtenemos que $p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}s'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1\rangle$, para algún s' y de manera análoga al caso 3 podemos escribir $s' = y_1 + ps''$ y entonces $2 < l$, por lo que $p^{k-3} + p^{\mu-2}sa + p^{\nu-3}yb + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}s''b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $X_2 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

5. Si $Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$. Tenemos que el elemento $Z_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, por lo que de la proposición 3.1.9, inciso a, parte 1, obtenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1a \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$, por lo que si restamos este elemento a Y_2, implica que $X_2 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

6. Si $Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}za + p^{\nu-l_1}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para $0 < l_1 < l$ y $z, s = 1, 2, ..., p-1$. Tenemos que $Z_l' \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Z_1\rangle$, por lo que de la proposición 3.1.9, inciso a, parte 2, obtenemos que $p^{k-2} - p^{\mu-2}a + p^{\mu-1}z_1a + p^{\nu-1}z_2b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que si restamos este elemento a Y_2, implica que $X_2 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

7. Si $W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_1a + p^{\nu-l}w_2b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ para $0 < l$ y $w_{1,2} = 1, 2, ..., p-1$.Tenemos que $p^{k-1} + p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}w_2b \in I$, elemento que al restarle Y_1 implica que $p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}(w_2 - y)b \in I$ y al restarle a este X_1w_1, obtenemos que $p^{\nu-1}(w_2 - y - w_1x)b \in I$, por lo que $w_2 = y + w_1x + ps$ con lo cual $p^{k-2} + p^{\mu-2}w_1a + p^{\nu-2}(y + w_1x)b + p^{\nu-1}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que al restarle a este elemento Y_2, implica que $X_2 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2\rangle$ por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración y con lo cual queda demostrada esta proposición.

3.1.16 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$, entonces tenemos que $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$ esta contenido propiamente en las siguientes familias de ideales:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}y_1 b\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1 b - p^{\nu-1}x_3 b\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 5 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad x_{1,3}, y_1 = 0, ..., p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle := \left\langle p^{k-3} - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}y_1 b + p^{\nu-1}y_2 b\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 5 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad y_{1,2} = 0, ..., p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle := \\ \left\langle p^{k-3} + p^{\mu-3}w_5 a - p^{\nu-3}(1+w_5)b + p^{\nu-2}(1+w_5)y_1 b + \right. \\ \qquad \left. p^{\nu-1}w_6 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 5 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad y_1, w_6 = 0, ..., p-1; \\ \qquad\qquad w_5 = 1, 2, ..., p-2 \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_3\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1 b\right]; \right. \\ \left. \left[p^{k-3} - p^{\mu-3}a + p^{\mu-1}z_3 a\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 4 \le k < \infty; \mu = k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \qquad\qquad y_1, z_3 = 0, ..., p-1; \\ \qquad\qquad y = 1, 2, ..., p-1. \end{cases}$$

Demostración:

De 3.1.12 estudiaremos los siete posibles casos para w :

1. Si $X_l = p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$. Tenemos que $X_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.13, inciso a, parte 1, tenemos que $p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_2 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$, de donde $y = -1; \mu = k-1; \nu = k-2$.

2. Si $X'_l = p^{k-l_1}x_2 + p^{\mu-l}a + p^{\nu-l}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$.Tenemos que $X'_l \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_1, X_2\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.13, inciso a, parte 2, tenemos que $p^{k-2}x_2 + p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}(x_1 - x_2)b + p^{\nu-1}x_3 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$, de donde $y = -1$ y por lo que al restarle $Y_2 x_2$ obtenemos que $X_3 \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_2\rangle$, por lo que caemos en el caso 1 de esta demostración.

3. Si $Y_l = p^{k-l} + p^{\nu-l}y'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$. Tenemos que $Y_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2\right\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.15, parte 3, tenemos que $p^{k-3}+p^{\nu-3}yb+p^{\nu-2}y_1b+p^{\nu-1}y_2b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, en donde $\nu \leq k-2$ y al multiplicar por b obtenemos que $^{k-3}+p^{\nu-1}y)b \in I$ y entonces $\nu = k-2 : y = -1$.

4. Si $Y_l' = p^{k-l} + p^{\mu-l_1}sa + p^{\nu-l}y'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$. Tenemos que $Y'_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2\right\rangle$ por lo que de la proposición 3.1.15, parte 4, obtenemos que $p^{k-3} + p^{\mu-2}sa + p^{\nu-3}yb + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}y_2b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, elemento que al restarle X_2s implica que Y_3 pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$ (caso 3 de esta demostración).

5. Si $Z_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}z'a \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$. Tenemos que $Z_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_1, Z_2\right\rangle$, en donde $Z_2 = Y_2 - X_2$, por lo que de la proposición 3.1.14, parte 1, obtenemos el elemento $p^{k-3} - p^{\mu-3}a + p^{\mu-1}z_3a$ pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, en donde $2 \leq \nu < \mu = k-1$.

6. Si $Z'_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}z'a + p^{\nu-l_1}z_2b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$. Tenemos que $Z'_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Z_2\right\rangle$, en donde $Z_2 = Y_2 - X_2$, por lo que de la proposición 3.1.14, parte 2, obtenemos que $p^{k-3} - p^{\mu-3}a + p^{\mu-2}z_3a + p^{\nu-2}z_3yb + p^{\nu-1}z_4b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, por lo que al restarle el elemento X_2z_3, obtenemos que un elemento de la forma Z_3 pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$ (caso 5 de esta demostración.)

7. Por ultimo si $W_l = p^{k-l} + p^{\mu-l}w_5a + p^{\nu-l}w_6b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$. Tenemos que $W_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2\right\rangle$ por lo que de la proposición 1.15, parte 7, tenemos que $w_6 = (1+w_5)y + ps$, lo cual implica que $2 < l$ y entonces $p^{k-3} + p^{\mu-3}w_5a + p^{\nu-3}(1+w_5)yb + p^{\nu-2}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$ y al multiplicar por a obtenemos que $p^{\mu-2}(1_5)a + p^{\nu-2}(1+w_5)yb + p^{\nu-1}sb \in I$, por lo que al restarle a este elemento $X_2(1+w_5)$, obtenemos que $p^{\nu-1}(s-(1+w_5)x_1)b \in I$, por lo que $s = (1+w_5)x_1 + ps'$ obteniendo que $p^{k-3} + p^{\mu-3}w_5a + p^{\nu-3}(1+w_5)yb + p^{\nu-2}(1+w_5)x_1b + p^{\nu-1}s'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, de donde $w_5 \neq p-1$ y entonces al multiplicar por b, obtenemos que $(p^{\mu-2}+p^{\nu-1}y)b \in I$, lo cual implica que $\nu = \mu - 1 = k-2$ y $y = -1$, por lo que $p^{k-3} + p^{\mu-3}w_5a - p^{\nu-3}(1+w_5)b + p^{\nu-2}(1+w_5)x_1b + p^{\nu-1}s'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_2, X_2\right\rangle$, elemento que al multiplicar por p implica que $x_1 = y_1$, con lo cual queda demostrada esta proposición.

3.1.17 Observación:

En el estudio de $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle$, tenemos que si el elemento $Y_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle$, entonces, este caso lo estudiaremos para los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle$, análogamente si W_3 pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle$, tenemos que $W_3 - X_3w_5 \in I$, el cual es un elemento de la forma Y_3 y de igual forma si $Z_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle$, ya que $Z_3 + X_3 - X_1z_3 \in I$ es un elemento de la forma Y_3, por lo que será suficiente estudiar el elemento $w \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle$, para los casos

$$X_l, X_l' \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_3\rangle.$$

Análogamente, será suficiente estudiar los ideales que son de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_3\rangle$ para:

$$Z_l, Z_l' \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_3\rangle,$$

ya que si $W_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_3\rangle$, tenemos que el elemento $W_3 + Z_3w_5 - X_1z_3w_5 \in I$, el cual es un elemento de la forma Y_3, por lo que este caso se estudiará para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle$.

De lo anterior los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$, se estudiará dentro del caso $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle$, ya que si el elemento $W_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$, entonces $p^{k-3} + p^{\mu-3}w_5'a - p^{\nu-3}(1+w_5')b + p^{\nu-2}(1+w_5')y_1b + p^{\nu-1}y_2'b \in I$, por lo que $p^{\mu-3}(w_5-w_5')a - p^{\nu-3}(w_5-w_5')b + p^{\nu-2}(w_5-w_5')y_1b + p^{\nu-1}sb \in I$, en donde: si $p \nmid (w_5-w_5')$, tenemos que $X_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$, lo cual a su vez implica que $Y_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$. Ahora, en el caso que $w_5' = w_5$ entonces $4 \leq l$ por lo que $W_4 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$, elemento que al multiplicar por a implica que $X_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$ y por lo cual $Y_3 \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle W_3\rangle$.

Por último estudiaremos los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle$ para:

$$X_l, X_l', Y_l, Y_l', Z_l, Z_l', W_l \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle.$$

3.1.18 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_{l+1}\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}y_1 b\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + p^{\nu-2}x_3 b + p^{\nu-1}x_5 b\right]\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 6 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad x_{3,5}, y_1 = 0, 1, ..., p-1; \\ \qquad\qquad 3 \le l \le \nu - 1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\left\langle X'''_{l+1}\right\rangle = \\ \left\langle p^{k-3}x_6 + p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b - p^{\nu-3}x_6 b + p^{\nu-2}x_3 b + \right. \\ \qquad \left. p^{\nu-1}x_5 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \qquad \text{casos} : 6 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad\qquad x_6 = 1, 2, ..., p-1; x_{3,5} = 0, 1, ..., p-1; \\ \qquad\qquad 3 \le l \le \nu - 1. \end{cases}$$

Demostración:

Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle$, en donde $3 \le l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_{l+1}\rangle, \\ I_{k,\mu,\nu}\langle X'_{l+1}\rangle \end{cases}$$

considerando de 3.1.17 los siguientes casos para w:

1. Si
$$X_r = p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle,$$
Tenemos que $4 \le r$, por lo que al multiplicar este elemento por b, tendremos que $p^{\nu-r+3}x'b \in I$, por lo que $x' = p^{r-3}s$ y por lo que en este caso podemos considerar
$$X_r = p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle.$$

2. Si

$$X'_r = p^{k-r_1}x_6 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle,$$

en donde $0 < r_1 < r$. Observemos que si $r_1 < 3$, el elemento $X'_r - Y_{r_1}x_6 \in I$, es de la forma X_r, por lo que caemos en el caso 1. Ahora si $3 < r_1$, tenemos que $pX'_r - aX'_r = p^{k-r_1+1}x_6 - p^{k-r_1}x_6a \in I$, por lo que $p^{k-3} - p^{\mu-3}a \in I$, elemento que al sumarlo con X_3 implica que $Y_3 \in I$, caso que se estudiara posteriormente en para $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_3\rangle$, por lo que en lo siguiente de esta demostración podemos considerar únicamente el caso:

$$r_1 = 3$$

Observemos que $4 \le r$, por lo que al multiplicar este elemento por b, tendremos que $(p^{k-3}x_6 + p^{\nu-r+3}x')b \in I$, lo cual implica que $x' = {}^{r-4}x_6 + p^{r-3}s$, por lo que en este caso podemos considerar

$$X'_r = p^{k-3}x_6 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b - p^{\nu-3}x_6b + p^{\nu-2}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, X_l\rangle.$$

- Nota: Esta demostración se sigue por inducción en l.

3.1.19 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ un elemento tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$, entonces tenemos que los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$, para $3 \le l$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_{l+1}\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b\right];\right. \\ \left.\left[p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-1}z_5a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 5 \le k < \infty; \mu = k-1; 2 \le \nu \le k-2; \\ \quad\quad z_5, y_1 = 0, ..., p-1; y = 1, ..., p-1; \\ \quad\quad 3 \le l \le k-2. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\left\langle Z'''_{l+1}\right\rangle := \left\langle p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-3}z_5a - p^{\nu-3}z_5b + \right. \\ \left. p^{\nu-2}y_1z_5b + p^{\nu-1}z_6b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 5 \le k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \le l \le k-2; \\ \quad\quad z_5 = 1, ..., p-1; z_6, y_1 = 0, ..., p-1. \end{cases}$$

Demostración:

Para el estudio de los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$ en donde $3 \leq l$, es fácil ver que

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle < \left\{ \begin{array}{c} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_{l+1}\rangle \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z'_{l+1}\rangle \end{array} \right.$$

ya que de 3.1.17, se consideran los siguientes casos para w :

1. $Z_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-1}sa \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$ para $4 \leq r$.

2. $Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-r+1}z'a + p^{\nu-r_1}sb \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$

para $4 \leq r$ y $0 < r_1 < r$. Tenemos que si $r_1 < 3$, al restarle a este elemento Y_{r_1} obtenemos que $Z_r \in I$, por lo que caemos en el caso 1. Ahora, si $3 < r_1$, al multiplicar por a, obtenemos que $p^{\mu-r+2}z'a + p^{\nu-r_1+1}sb \in I$ de donde $r-1 = r_1$ y entonces $X_3 \in I$ elemento que al sumarle Z_3, implica que $Y_3 \in I$, por lo que este caso se estudiará a fondo posteriormente, con lo cual podemos considerar

$$r_1 = 3$$

por lo que al multiplicar Z'_r por a, obtenemos que $p^{\mu-r+2}z'a + p^{\nu-2}sb \in I$ de donde $z' = -p^{r-4}s + p^{r-3}s'$ por lo que podemos considerar

$$Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-3}sa - p^{\nu-3}sb + p^{\nu-2}s''b \in$$

$$I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_2, Z_l\rangle$$

para algún s''. Observemos que multiplicando este elemento por b, obtendremos que $\nu = \mu - 1 = k - 2$.

- Nota: La demostración de esta proposición se sigue por inducción en l.

3.1.20 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ un elemento tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$ para $3 \leq l$, entonces tenemos que los ideales $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$ están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, X_l \rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1 b + p^{\nu-1}y_2 b\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos :} 5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \quad\quad y_{1,2}, x_1 = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq k-2. \end{cases}$$

Demostración:

La demostración es similar a la de 3.1.15 y se procede por inducción en l, considerando de 3.1.17 los siguientes siete casos para $w : X_r, X'_r, Y_r, Y'_r, Z_r, Z'_r, W_r \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$ en donde consideraremos $3 \leq r$.

3.1.21 Observación:

En lo siguiente consideraremos $4 \leq r$, para los siguientes siete casos de w :

1. Si

$$X_r = p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$$

2. Si

$$X'_r = p^{k-r_1}s + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}x'b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$$

para $0 < r_1 < r$. Tenemos que al multiplicar este elemento por b, obtenemos que $(p^{k-r_1}s + p^{\nu-r+3}x')b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle$ por lo que $x' = -p^{r-r_1-1}s + p^{r-3}s''$, por lo que en lo siguiente:

$$X'_r = p^{k-r_1}s + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b - p^{\nu-r_1}sb + p^{\nu-2}s''b \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l \rangle .$$

3. Si
$$Y_r = p^{k-r} - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}y'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$$
tenemos que al multiplicar este elemento por b, obtenemos que $p^{\nu-r+3}y'b \in I$ por lo cual podemos escribir $y' = p^{r-3}s$ y entonces
$$Y_r = p^{k-r} - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$$

4. Si
$$Y'_r = p^{k-r} + p^{\mu-r_1}sa - p^{\nu-r}b + p^{\nu-r+1}y'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$$
al multiplicar por b, tenemos que $(p^{\mu-r_1+1}s + p^{\nu-r+3}y')b$ pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$ por lo que $y' = -p^{r-r_1-1}s + p^{r-3}s''$, por lo que en lo siguiente:
$$Y'_r = p^{k-r} + p^{\mu-r_1}sa - p^{\nu-r}b - p^{\nu-r_1}sb + p^{\nu-2}s''b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle .$$

5. Si
$$Z_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-1}z'a \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle .$$

6. Si
$$Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-r+1}z'a + p^{\nu-r_1}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle .$$
y al multiplicar este elemento por b, tenemos que $(p^{\mu-r+2}z' + p^{\nu-r_1+2}s)b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$ por lo que $z' = -p^{r-r_1-1}s + p^{r-3}s''$, por lo que en lo siguiente:
$$Z'_r = p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-r_1}sa - p^{\nu-r_1}sb + p^{\nu-2}z'b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle .$$

7. Si
$$W_r = p^{k-r} + p^{\mu-r}w_7a + p^{\nu-r}w_8b \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle ,$$
y al multiplicar por b, obtenemos que $(p^{k-r}+p^{\mu-r+1}w_7+p^{\nu-r+2}w_8)b$ pertenece a $I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle$ por lo que $w_8 = -(1+w_7) + p^{r-2}s$, por lo que en lo siguiente:
$$W_r = p^{k-r} + p^{\mu-r}w_7a - p^{\nu-r}(1+w_7)b + p^{\nu-2}sb \in I\diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l\rangle .$$

3.1.22 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, X_l \rangle$, para $3 \leq l$, entonces tenemos que $I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, X_l \rangle$ esta contenido propiamente en las siguientes familias de ideales:

$$
I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, X_l \rangle < \begin{cases}
I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, X_{l+1} \rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l} b + p^{\nu-1} y_2 b\right]; \right. \\
\left. \left[p^{\mu-l-1} a - p^{\nu-l-1} b + p^{\nu-2} x_3 b - p^{\nu-1} x_5 b\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\
\qquad \text{casos} : 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\
\qquad\qquad x_{3,5}, y_2 = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq k-3. \\
\\
I_{k,\mu,\nu} \langle Y_{l+1} \rangle := \left\langle p^{k-l-1} - p^{\nu-l-1} b + p^{\nu-2} y_3 b + p^{\nu-1} y_4 b \right\rangle + \\
\qquad I_{k,\mu,\nu} \\
\qquad \text{casos} : 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\
\qquad\qquad y_{3,4} = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq k-3. \\
\\
I_{k,\mu,\nu} \langle W_{l+1} \rangle := \\
\left\langle p^{k-l-1} + p^{\mu-l-1} w_7 a - p^{\nu-l-1}(1+w_7) b + p^{\nu-2}(1+w_7) y_1 b \right. \\
\qquad \left. + p^{\nu-1} w_8 b \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\
\qquad \text{casos} : 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\
\qquad\qquad y_1, w_8 = 0, ..., p-1; \\
\qquad\qquad w_7 = 1, 2, ..., p-2. \\
\\
I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, Z_{l+1} \rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l} b + p^{\nu-2} y_1 b + p^{\nu-1} y_2 b\right]; \right. \\
\left. \left[p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1} a + p^{\mu-1} z_6 a\right] \right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\
\qquad \text{casos} : 5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\
\qquad\qquad y_{1,2}, z_6 = 0, ..., p-1; \\
\qquad\qquad 3 \leq l \leq k-2.
\end{cases}
$$

Demostración:

La demostración es similar a la de 3.1.16 y se procede por inducción en l, considerando de 3.1.21 los siguientes siete casos para w : $X_r, X'_r, Y_r, Y'_r, Z_r, Z'_r, W_r \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu} \langle Y_l, X_l \rangle$ en donde $4 \leq r$.

3.1.23 Proposición:

Sea k,μ,ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_l, X_{l+1}\right\rangle$, para $3 \leq l$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_l, X_{l+1}\right\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_l, X_{l+1}\right\rangle < \begin{cases} \begin{array}{l} I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_l, X_r\right\rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-1}y_2 b\right]; \right. \\ \left. \left[p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}x_5 b + p^{\nu-1}x_7 b\right]\right\rangle + \\ \qquad I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 7 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad x_{5,7}, y_2 = 0,1,...,p-1; 3 \leq l \leq k-4; \\ \qquad l+2 \leq r \leq k-2. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\left\langle X''_r\right\rangle = \\ \left\langle p^{k-l-1}x_8 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b - p^{\nu-l-1}x_8 b + p^{\nu-2}x_5 b + \right. \\ \qquad \left. p^{\nu-1}x_7 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos}: 7 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \qquad x_8 = 1,2,...,p-1; x_{5,7} = 0,1,...,p-1; \\ \qquad 3 \leq l \leq k-4; l+2 \leq r \leq k-2. \end{array} \end{cases}$$

Demostración:

La demostración es similar a la de 3.1.18 y se procede por inducción en r, considerando de 3.1.21 los siguientes dos casos para $w : X_r, X'_r \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\left\langle Y_l, X_{l+1}\right\rangle$ en donde $5 \leq r$.

3.1.24 Proposición:

Sea k, μ, ν los mínimos enteros positivos tales que los elementos $p^k, p^\mu a, p^\nu b \in I$ y sea $w \in B_{\{p\}}(C_{p^2})$ tal que $w \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, Z_{l+1}\rangle$, para $3 \leq l$, entonces tenemos que los ideales de la forma $I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, Z_{l+1}\rangle$, están contenidos propiamente en:

$$I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, Z_{l+1}\rangle < \begin{cases} I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, Z_r\rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1 b + p^{\nu-1}y_2 b\right];\right. \\ \left.\left[p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-1}z_7 a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos :} 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; \\ \quad 3 \leq l \leq k-3; l+2 \leq r \leq k-1; z_7, y_{1,2} = 0, ..., p-1. \\ \\ I_{k,\mu,\nu}\langle Z''_r\rangle := \\ \left\langle p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-l-1}z_7 a - p^{\nu-l-1}z_7 b + p^{\nu-2}y_2 z_7 b + \right. \\ \qquad \left. p^{\nu-1}z_8 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu} \\ \quad \text{casos :} 6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \leq l \leq k-3; \\ \quad l+2 \leq r \leq k-1; z_7 = 1, ..., p-1; z_8, y_1 = 0, ..., p-1. \end{cases}$$

Demostración:

La demostración es similar a la de 3.1.19 y se procede por inducción en r, considerando de 3.1.21 los siguientes dos casos para $w : Z_r, Z'_r \in I \diagdown I_{k,\mu,\nu}\langle Y_l, Z_{l+1}\rangle$ en donde $5 \leq r$.

3.2. CONCLUSIONES.

En esta sección se dará una lista de todos los ideales propios, contenidos en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ así como su índice finito sobre este, con el objetivo final de calcular la función ζ del anillo de Burnside de C_{p^2}.

3.2.1. Lista de ideales propios de índice finito en $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$.

En resumen, tenemos que los ideales propios de $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ de índice finito (distintos) son:

$$
I_k \left\{ \begin{array}{l}
J \left\{ \begin{array}{l}
J\langle x_1\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle x_2\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle x_l\rangle \\ J\langle x_l'\rangle \end{array}\right. \\ J\langle x_2'\rangle \end{array}\right. \\
J\langle y_1\rangle < J\langle y_1, x_1\rangle \left\{ \begin{array}{l}
J\langle y_1, x_2\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_1, x_l\rangle \\ J\langle x_l''\rangle \end{array}\right. \\
J\langle y_2\rangle < J\langle y_2, x_2\rangle \left\{ \begin{array}{l}
J\langle y_2, x_3\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_2, x_l\rangle \\ J\langle x_l'''\rangle \end{array}\right. \\
J\langle y_l\rangle < J\langle y_l, x_l\rangle \left\{ \begin{array}{l}
J\langle y_l, x_{l+1}\rangle < \\
\quad \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_l, x_r\rangle \\ J\langle x_r''''\rangle \end{array}\right. \\
J\langle y_{l+1}\rangle \\
J\langle w_{l+1}\rangle \\
J\langle y_l, z_{l+1}\rangle < \\
\quad \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_l, z_r\rangle \\ J\langle z_r''''\rangle \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
J\langle w_l\rangle \\
J\langle y_2, z_3\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_2, z_l\rangle \\ J\langle z_l'''\rangle \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
J\langle w_2\rangle \\
J\langle y_1, z_2\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle y_1, z_l\rangle \\ J\langle z_l''\rangle \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
J\langle w_1\rangle \\
J\langle z_1\rangle \left\{ \begin{array}{l} J\langle z_l\rangle \\ J\langle z_l'\rangle \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
I_k'
\end{array}\right.
$$

En donde tenemos las siguientes restricciones para cada una de las 38 familias de ideales:

1) $I_k := p^k\mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus p^k Z_{\{p\}}a \bigoplus p^k\mathbb{Z}_{\{p\}}b$ en donde:

índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{I_k}\right| = p^{3k}$.

casos : $0 \leq k < \infty$.

2) $I_{k,\mu,\nu} := p^k\mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus p^\mu Z_{\{p\}}a \bigoplus p^\nu \mathbb{Z}_{\{p\}}b$ en donde:
índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{I_{k,\mu,\nu}}\right| = p^{k+\mu+\nu}$.
caso 1: $1 \leq k < \infty; \nu + 1 \leq \mu \leq k; 0 \leq \nu \leq k-1$.
caso 2: $1 \leq k < \infty; \mu = \nu; 0 \leq \nu \leq k-1$.
caso 3: $1 \leq k < \infty; \mu = \nu - 1; 1 \leq \nu \leq k$.

3) $I_k' := \left\langle p^{k-1}(a+sb)\right\rangle + I_k$ en donde:
índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{I_k'}\right| = p^{3k-1}$.
casos : $1 \leq k < \infty; s = 1, ..., p-1$.

4) $J\langle X_1\rangle := \langle p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle X_1\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-1}$.
caso 1: $2 \leq k < \infty; \nu + 1 \leq \mu \leq k; 1 \leq \nu \leq k-1; x = 1, ..., p-1$.
caso 2: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; x = 1, ..., p-1$.

5) $J\langle Y_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle Y_1\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-1}$.
caso 1: $3 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 1 \leq \nu \leq k-2; y = 1, ..., p-1$.
caso 2: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; y = 1, ..., p-1$.
caso 3: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu - 1; 1 \leq \nu \leq k-1; y = 1, ..., p-1$.

6) $J\langle W_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\mu-1}w_1a + p^{\nu-1}w_2b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice:$\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle W_1\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-1}$.
caso 1: $3 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 1 \leq \nu \leq k-2; w_{1,2} = 1, ..., p-1$.
caso 2: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; w_{1,2} = 1, ..., p-1$.
caso 3: $2 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; w_1 = -1; w_2 = 1, ..., p-1$.

7) $J\langle Z_1\rangle := \left\langle p^{k-1} + p^{\mu-1}za \right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle Z_1\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-1}$.
caso 1: $2 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 0 \leq \nu \leq k-2; z = 1, ..., p-1$.
caso 2: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; z = 1, ..., p-1$.
caso 3: $2 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; z = -1$.

8) $J\langle X_2\rangle := \langle p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle X_2\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-2}$.
casos: $3 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k; 2 \leq \nu \leq k-1; x = 1, ..., p-1$;
$x_1 = 0, ..., p-1$.

9) $J\langle X_2'\rangle := \left\langle p^{k-1}x_2 + p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left\langle X_2'\right\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-2}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 2 \leq \nu \leq k-2$;
$x, x_2 = 1, ..., p-1; x_1 = 0, ..., p-1$.

10) $J\langle X_l\rangle := \left\langle p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\langle X_l\rangle}\right| = p^{k+2\nu-l+1}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = \nu+1; 3 \leq \nu \leq k-1; 3 \leq l \leq \nu$;
$x_{1,3} = 0, ..., p-1$.

11) $J\langle X_l'\rangle := \left\langle p^{k-1}x_4 + p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}x_1 b + p^{\nu-1}x_3 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left\langle X_l'\right\rangle}\right| = p^{k+2\nu-l+1}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = \nu+1; 3 \leq \nu \leq k-2; 3 \leq l \leq \nu$;
$x_4 = 1, ..., p-1; x_{1,3} = 0, ..., p-1$.

12) $J\left\langle Z_l\right\rangle := \left\langle p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-1}z_1 a\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Z_l\right\rangle}\right| = p^{2k+\nu-l-1}$.
caso 1: $3 \leq k < \infty; \mu = k-1; 0 \leq \nu \leq k-1; 2 \leq l \leq k-1;$
$z_1 = 0, ..., p-1$.
caso 2: $3 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; z_1 = 0; 2 \leq l \leq k-1$.

13) $J\left\langle Z_l'\right\rangle := \left\langle p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-1}z_1 a + p^{\nu-1}z_2 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Z_l'\right\rangle}\right| = p^{2k+\nu-l-1}$.
caso 1: $3 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; 2 \leq l \leq k-1;$
$z_1 = 0, ..., p-1; z_2 = 1, ..., p-1$.
caso 2: $3 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k; 2 \leq l \leq k-1; z_1 = 0;$
$z_2 = 1, ..., p-1$.

14) $J\left\langle Y_1, X_1\right\rangle := \left\langle\left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{\mu-1}a + p^{\nu-1}xb\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Y_1, X_1\right\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-2}$.
caso 1: $3 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 1 \leq \nu \leq k-2; x, y = 1, ..., p-1$.
caso 2: $2 \leq k < \infty; \mu = \nu; 1 \leq \nu \leq k-1; x, y = 1, ..., p-1$.

15) $J\left\langle Y_1, X_2\right\rangle := \left\langle\left[p^{k-1} + p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}xb + p^{\nu-1}x_1 b\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Y_1, X_2\right\rangle}\right| = p^{k+\mu+\nu-3}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \nu+1 \leq \mu \leq k-1; 2 \leq \nu \leq k-2;$
$x, y = 1, ..., p-1; x_1 = 0, ..., p-1$.

16) $J\left\langle Y_2\right\rangle := \left\langle p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1 b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Y_2\right\rangle}\right| = p^{2k+\nu-4}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; y = 1, ..., p-1;$
$y_1 = 0, ..., p-1$.

17) $J\left\langle W_2\right\rangle := \left\langle p^{k-2}+p^{\mu-2}w_3a+p^{\nu-2}(1+w_3)yb+p^{\nu-1}w_4b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle W_2\rangle}\right| = p^{2k+\nu-4}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; w_3 = 1, ..., p-2;$
$w_4 = 0, ..., p-1; y = 1, ..., p-1.$

18) $J\left\langle Y_1, Z_2\right\rangle := \left\langle \left[p^{k-1}+p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{k-2}-p^{\mu-2}a+p^{\mu-1}z_1a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_1,Z_2\rangle}\right| = p^{2k+\nu-4}$.
casos: $3 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; z_1 = 0, ..., p-1;$
$y = 1, ..., p-1.$

19) $J\left\langle Y_1, X_l\right\rangle := \left\langle \left[p^{k-1}+p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{\mu-l}a-p^{\nu-l}b+p^{\nu-2}x_1b+p^{\nu-1}x_3b\right]\right\rangle +$
$I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_1,X_l\rangle}\right| = p^{k+2\nu-l}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = \nu+1; 3 \leq \nu \leq k-2; y = 1, ..., p-1;$
$x_{1,3} = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq \nu.$

20) $J\left\langle X_l''\right\rangle := \left\langle p^{k-2}x_4+p^{\mu-l}a-p^{\nu-l}b+p^{\nu-2}(x_1-x_4)b+p^{\nu-1}x_3b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle X_l''\right\rangle}\right| = p^{3k-l-4}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_4 = 1, ..., p-1;$
$x_{1,3} = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq \nu.$

21) $J\left\langle Y_1, Z_l\right\rangle := \left\langle \left[p^{k-1}+p^{\nu-1}yb\right]; \left[p^{k-l}-p^{\mu-l}a+p^{\mu-1}z_3a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_1,Z_l\rangle}\right| = p^{2k+\nu-l-2}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 1 \leq \nu \leq k-1; 3 \leq l \leq k-1;$
$z_3 = 0, ..., p-1; y = 1, ..., p-1.$

22) $J\langle Z_l''\rangle := \left\langle p^{k-l} - p^{\mu-l}a + p^{\mu-2}z_3a + p^{\nu-2}z_3yb + p^{\nu-1}z_4b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Z_l''\right\rangle}\right| = p^{2k+\nu-l-2}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; 3 \leq l \leq k-1;$
$y, z_3 = 1, ..., p-1; z_4 = 0, ..., p-1.$

23) $J\langle Y_2, X_2\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}y_1b\right]; \left[p^{\mu-2}a + p^{\nu-2}yb + p^{\nu-1}x_1b\right]\right\rangle$
$+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_2, X_2\rangle}\right| = p^{2k+\nu-5}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; y = 1, ..., p-1;$
$y_1, x_1 = 0, ..., p-1.$

24) $J\langle Y_2, X_3\rangle := \left\langle \left[p^{k-2} - p^{\nu-2}b + p^{\nu-1}y_1b\right]; \left[p^{\mu-3}a - p^{\nu-3}b + p^{\nu-2}x_1b - p^{\nu-1}x_3b\right]\right\rangle$
$+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_1, X_3\rangle}\right| = p^{3k-8}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_{1,3}, y_1 = 0, ..., p-1.$

25) $J\langle Y_l\rangle := \left\langle p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}y_2b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_l\rangle}\right| = p^{3k-2l-2}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \leq l \leq k-2;$
$y_{1,2} = 0, ..., p-1.$

26) $J\langle W_l\rangle := \left\langle p^{k-l} + p^{\mu-l}w_5a - p^{\nu-l}(1+w_5)b + p^{\nu-2}(1+w_5)y_1b + p^{\nu-1}w_6b\right\rangle$
$+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle W_l\rangle}\right| = p^{3k-2l-2}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \leq l \leq k-2;$
$y_1, w_6 = 0, ..., p-1; w_5 = 1, ..., p-2.$

27) $J\langle Y_2, Z_3\rangle := \left\langle \left[p^{k-2}+p^{\nu-2}yb+p^{\nu-1}y_1b\right]; \left[p^{k-3}-p^{\mu-3}a+p^{\mu-1}z_3a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_2,Z_3\rangle}\right| = p^{2k+\nu-6}$.
casos: $4 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; y_1, z_3 = 0, ..., p-1;$
$y = 1, ..., p-1.$

28) $J\langle Y_2, X_l\rangle := \left\langle \left[p^{k-2}-p^{\nu-2}b+p^{\nu-1}y_1b\right]; \left[p^{\mu-l}a-p^{\nu-l}b+p^{\nu-2}x_3b+p^{\nu-1}x_5b\right]\right\rangle$
$+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_2,X_l\rangle}\right| = p^{3k-l-5}$.
casos: $6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_{3,5}, y_1 = 0, ..., p-1;$
$4 \leq l \leq \nu.$

29) $J\langle X_l'''\rangle = \left\langle p^{k-3}x_6+p^{\mu-l}a-p^{\nu-l}b-p^{\nu-3}x_6b+p^{\nu-2}x_3b+p^{\nu-1}x_5b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle X_l'''\right\rangle}\right| = p^{3k-l-5}$.
casos: $6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_6 = 1, 2, ..., p-1;$
$x_{3,5} = 0, ..., p-1; 4 \leq l \leq \nu.$

30) $J\langle Y_2, Z_l\rangle := \left\langle \left[p^{k-2}+p^{\nu-2}yb+p^{\nu-1}y_1b\right]; \left[p^{k-l}-p^{\mu-l}a+p^{\mu-1}z_5a\right]\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_2,Z_l\rangle}\right| = p^{2k+\nu-l-3}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; 2 \leq \nu \leq k-2; z_5, y_1 = 0, ..., p-1;$
$y = 1, ..., p-1; 4 \leq l \leq k-1.$

31) $J\langle Z_l'''\rangle := \left\langle p^{k-l}-p^{\mu-l}a+p^{\mu-3}z_5a-p^{\nu-3}z_5b+p^{\nu-2}y_1z_5b+p^{\nu-1}z_6b\right\rangle + I_{k,\mu,\nu}$
$p^{\nu-2}y_1z_5b+p^{\nu-1}z_6b\rangle + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\left\langle Z_l'''\right\rangle}\right| = p^{3k-l-5}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 4 \leq l \leq k-1;$
$z_5 = 1, ..., p-1; z_6, y_1 = 0, ..., p-1.$

32) $J\left<Y_l, X_l\right> := \left<\left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}y_2b\right];\left[p^{\mu-l}a - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}x_3b\right]\right>$ $+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left<Y_l,X_l\right>}\right| = p^{3k-2l-3}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; y_{1,2}, x_3 = 0, ..., p-1;$
$3 \leq l \leq k-2$.

33) $J\left<Y_l, X_{l+1}\right> := \left<\left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-1}y_2b\right];\left[p^{\mu-l-1}a - p^{\nu-l-1}b + p^{\nu-2}x_3b - p^{\nu-1}x_5b\right]\right> +$ $I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left<Y_l,X_{l+1}\right>}\right| = p^{3k-2l-4}$.
casos: $6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_{3,5}, y_2 = 0, ..., p-1;$
$3 \leq l \leq k-3$

34) $J\left<Y_l, Z_{l+1}\right> := \left<\left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1b + p^{\nu-1}y_2b\right];\left[p^{k-l-1} - p^{\mu-l-1}a + p^{\mu-1}z_6a\right]\right> +$ $I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left<Y_l,Z_{l+1}\right>}\right| = p^{3k-2l-4}$.
casos: $5 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; y_{1,2}, z_6 = 0, ..., p-1;$
$3 \leq l \leq k-2$

35) $J\left<Y_l, X_r\right> := \left<\left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-1}y_2b\right];\left[p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b + p^{\nu-2}x_5b + p^{\nu-1}x_7b\right]\right> + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left<Y_l,X_r\right>}\right| = p^{3k-l-r-3}$.
casos: $7 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_{5,7}, y_2 = 0, ..., p-1;$
$3 \leq l \leq k-4; l+2 \leq r \leq k-2$.

36) $J\left<X''''_r\right> = \left<p^{k-l-1}x_8 + p^{\mu-r}a - p^{\nu-r}b - p^{\nu-l-1}x_8b + p^{\nu-2}x_5b + p^{\nu-1}x_7b\right> + I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}(C_{p^2})}{J\left<X''''_r\right>}\right| = p^{3k-l-r-3}$.
casos: $7 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; x_8 = 1, ..., p-1;$
$x_{5,7} = 0, ..., p-1; 3 \leq l \leq k-4; l+2 \leq r \leq k-2$.

37) $J\langle Y_l, Z_r\rangle := \left\langle \left[p^{k-l} - p^{\nu-l}b + p^{\nu-2}y_1 b + p^{\nu-1}y_2 b\right];\ \left[p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-1}z_7 a\right]\right\rangle$ $+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Y_l, Z_r\rangle}\right| = p^{3k-l-r-3}$.
casos: $6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \leq l \leq k-3;$
$l+2 \leq r \leq k-1; z_7, y_{1,2} = 0, ..., p-1.$

38) $J\langle Z''''_r\rangle := \left\langle p^{k-r} - p^{\mu-r}a + p^{\mu-l-1}z_7 a - p^{\nu-l-1}z_7 b + p^{\nu-2}y_2 z_7 b + p^{\nu-1}z_8 b\right\rangle +$ $+I_{k,\mu,\nu}$ en donde:
índice: $\left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{J\langle Z''''_r\rangle}\right| = p^{3k-l-r-3}$.
casos: $6 \leq k < \infty; \mu = k-1; \nu = k-2; 3 \leq l \leq k-3;$
$l+2 \leq r \leq k-1; z_7 = 1, ..., p-1; z_8, y_2 = 0, ..., p-1.$

3.2.2. La función zeta de $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$.

Una ves identificados todos los ideales distintos de $B_{\{p\}}$ de índice finito, tenemos que la función zeta del anillo de Burnside $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ del grupo C_{p^2} es la siguiente:

$$\zeta_{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z) = \sum_{\substack{I \leq B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right), \, ideales \\ \left[\ B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)\ :\ I\ \right] < \infty}} \left|\frac{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}{I}\right|^{-z} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(p^{-z}\right)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{k}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1} + (p-1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(p^{-z}\right)^{3k-1} +$$

$$(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{k}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-1} + (p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{k}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1} +$$

$$(p-1)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-1} + (p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1} +$$

$$(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1}+(p-1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-1}+$$

$$(p-1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1}+(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\left(p^{-z}\right)^{3k-2}+$$

$$(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-1}+(p-1)\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-1}+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(p^{-z}\right)^{3k-2}+p(p-1)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{k}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-2}+$$

$$p(p-1)^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-2}+p^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=3}^{k-1}\sum_{l=3}^{\nu}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-l+1}+$$

$$(p-1)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{\nu=3}^{k-2}\sum_{l=3}^{\nu}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-l+1}+p\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{l=2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-l-1}+$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-1}+p(p-1)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{l=2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-l-1}+$$

$$(p-1)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-1}+(p-1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-2}+$$

$$(p-1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-2}+p(p-1)^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{k+\mu+\nu-3}+$$

$$p(p-1)\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-4}+p(p-1)(p-2)\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-4}+$$

$$p(p-1)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-4}+(p-1)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{\nu=3}^{k-2}\sum_{l=3}^{\nu}\left(p^{-z}\right)^{k+2\nu-l}+$$

$$(p-1)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-4}+p(p-1)\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{l=3}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-l-2}+$$

$$p(p-1)^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\sum_{l=3}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-l-2}+(p-1)p^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-5}+$$

$$p^3\sum_{k=5}^{\infty}\left(p^{-z}\right)^{3k-8}+p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-2l-2}+(p-2)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-2l-2}+$$

$$(p-1)p^2\sum_{k=4}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-6}+p^3\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{l=4}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-5}+$$

$$(p-1)p^2\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{l=4}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-5}+(p-1)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{k-2}\sum_{l=4}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{2k+\nu-l-3}+$$

$$(p-1)p^2\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=4}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-5}+p^3\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-2l-3}+$$

$$p^3\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-3}\left(p^{-z}\right)^{3k-2l-4}+p^3\sum_{k=5}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-2l-4}+$$

$$p^3\sum_{k=7}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-4}\sum_{r=l+2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-r-3}+(p-1)p^2\sum_{k=7}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-4}\sum_{r=l+2}^{k-2}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-r-3}+$$

$$p^3\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-3}\sum_{r=l+2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-r-3}+(p-1)p^2\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{l=3}^{k-3}\sum_{r=l+2}^{k-1}\left(p^{-z}\right)^{3k-l-r-3}=$$

$$\frac{1-2p^{-z}+\left(1+p+p^2\right)p^{-2z}-2pp^{-3z}+p\left(1-p+p^2\right)p^{-4z}+(-1+p)\,p^2p^{-5z}}{\left(1-p^{-z}\right)^3}$$

Nota.

Recordemos que

$$B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigotimes B\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}_{\{p\}} \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}}a \bigoplus \mathbb{Z}_{\{p\}}b,$$

el cual es un orden sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$, para el cual

$$\widetilde{B}_{\{p\}}(C_{p^2}) = \mathbb{Z}^3_{\{p\}}$$

es su orden maximal sobre $\mathbb{Z}_{\{p\}}$.

3.2.3. L a función zeta de $\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$.

Puesto que $\widetilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right) = \mathbb{Z}^3_{\{p\}}$, de acuerdo con el teorema 2.2.21 (i) tenemos que

$$\zeta_{\widetilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z) = \zeta_{\mathbb{Z}^3_{\{p\}}}(z) = \zeta^3_{\mathbb{Z}_{\{p\}}}(z) = \left[\sum_{I \leq \mathbb{Z}_{\{p\}}} \left|\frac{\mathbb{Z}_{\{p\}}}{I}\right|^{-z}\right]^3,$$

en donde I es un ideal de $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ de índice finito, por lo que por el teorema 2.2.18 tenemos que $I = p^t\mathbb{Z}_{\{p\}}$, de donde

$$\zeta_{\widetilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z) = \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(p^{-z}\right)^t\right]^3 = \frac{1}{\left(1-(p)^{-z}\right)^3}.$$

3.2.4. Cálculo de $f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)$:

Puesto que tenemos la relación (teorema 2.2.22)

$$\zeta_{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z) = \left(f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)\right)\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}}(z)$$

entre la función zeta de $B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)$ del grupo cíclico C_{p^2} y la función zeta de su orden maximal, obtenemos que:

$$f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right) =$$
$$1 - 2p^{-z} + \left(1+p+p^2\right)p^{-2z} - 2pp^{-3z} + p\left(1-p+p^2\right)p^{-4z} + \left(-1+p\right)p^2p^{-5z}.$$

3.2.5. L a función zeta de $B\left(C_{p^2}\right)$.

Por último, por el teorema 2.221, parte iii, sabemos que:

$$\zeta_{B\left(C_{p^2}\right)}(z)=\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{B_{\{q\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)=\zeta_{B_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)\prod_{\substack{q\neq p\\ q-\text{primo}}}\zeta_{B_{\{q\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)=$$

Ahora, del teorema 2.2.22 y puesto que $f_{(C_p)}(q^{-z})=1$, siempre que $q\neq p$, obtenemos que:

$$\zeta_{B\left(C_{p^2}\right)}(z)=f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)\zeta_{\tilde{B}_{\{p\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)\prod_{\substack{q\neq p\\ q-\text{primo}}}\zeta_{\tilde{B}_{\{q\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)=$$

$$f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{\tilde{B}_{\{q\}}\left(C_{p^2}\right)}(z)=f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)\zeta_{\tilde{B}\left(C_{p^2}\right)}(z)=$$

Observemos que $\tilde{B}\left(C_{p^2}\right)=\mathbb{Z}^3$, por lo que del teorema 2.2.21, parte i, concluimos que:

$$\zeta_{B\left(C_{p^2}\right)}(z)=f_{C_{p^2}}\left(p^{-z}\right)\zeta_{\mathbb{Z}^3}(z)=$$

$$\left[1-2p^{-z}+\left(1+p+p^2\right)p^{-2z}-2pp^{-3z}+p\left(1-p+p^2\right)p^{-4z}+(-1+p)\,p^2p^{-5z}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}n^{-z}\right]^3.$$

NOMENCLATURA.

$\mathbb{N}$ El conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z}$ El conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q}$ El conjunto de los números racionales.
$\mathbb{R}$ El conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$ El conjunto de los números complejos.
$\mathbb{Z}_n$ El conjunto de los enteros módulo n.
$\mathbb{Z}_\pi$ El conjunto de $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid b$, $\forall\, p \in \pi$, un cto. de primos.
$\sim$ Relación de equivalencia.
$\uplus$ Unión ajena.
$\prod$ producto cartesiano.
$\bigoplus$ Suma directa.
$\bigotimes$ Producto tensorial.
$\langle x \rangle$ El conjunto generado por el elemento.
$|X|$ Número de elementos del conjunto X.
$[R : I]$ Índice de I en R.
$H \leq G$ H subgrupo de G.
$S(G)$ El conjunto de subgrupos del grupo G.
$H \trianglelefteq G$ H subgrupo normal de G.
$O_G(x)$ Órbita de x en G.
G/H El conjunto de clases laterales izquierdas de H en G.
$stab_G(x)$ Estabilizador de x en G.
$\overline{H}$ Clase de conjugación de H.
$C(G)$ El conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G
X^H El conjunto de puntos fijos de X bajo la acción de H.
$\varphi_H(X)$ La marca de H en X.
$\overline{X}$ Clase de isomorfismo de X.
$N_G(H)$ El normalizador de H en G.
$W(G)$ El grupo de Weyl de G.
$B(G)$ El anillo de Burnside de G.
$\tilde{B}(G)$ Producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ tantas veces como elementos en $C(G)$.
$B_\pi(G)$ Producto tensorial en $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_\pi$ con $B(G)$.
$\tilde{B}_\pi(G)$ Producto tensorial en $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_\pi$ con $\tilde{B}(G)$.
$Hom_G(X, Y)$ El conjunto de morfismos de G-conjuntos de X en Y.
$\zeta_\Lambda(z)$ La función zeta del orden Λ.

Bibliografía

[1] Jacobson "Basic Algebra I" W. H. Freeman and Company, Second Edition (1985).

[2] Jacobson "Basic Algebra II" W. H. Freeman and Company, Second Edition (1989).

[3] Reiner "Maximal Orders" Academic Press (1975)

[4] Articulo "Zeta Functions of Aritmetic Orders and Salomon's Conjectures" Colin J. Bushnell and Irving Reiner (1980).