Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Tesis:

Densidad de los ceros de la Función Zeta de Riemann y el problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos

Para obtener el grado de:

Maestro en Matemáticas

Presenta:

Miguel Corona Sánchez

Asesor:

Dr. Moubariz Z. Garaev

Morelia, Michoacán,. Enero de 2009.

Densidad de los ceros de la Función Zeta de Riemann y el problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos

Miguel Corona Sánchez

Enero de 2009

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Moubariz Z. Garaev por todo lo que aprendí de él durante el tiempo que trabajé bajo su dirección, por el tiempo que dedicó en cada una de las sesiones de asesoría y a las varias revisiones que fueron necesarias para darle a este trabajo su forma final. También quiero agradecer al M. en C. Víctor Cuauhtémoc García Hernández por su valioso tiempo en dedicar su apoyo incondicional en las correcciones de este trabajo.

Muchas gracias al Dr. Pavel Naumkin, al Dr. Florian Luca, al Dr. Eugenio P. Balanzario Gutierrez y al Dr. Abel Castorena Martínez por aceptar participar en el comité sinodal para la revisión de esta tesis y por sus valiosos comentarios y sugerencias respecto a la misma.

También quiero agradecer a las instituciones que apoyaron económicamente este proyecto: CONACyT, Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH. y PAPIIT IN 100357 UNAM.

Muchas gracias también al Instituto de Matemáticas de la UNAM., Unidad Morelia por proveerme de los medios físicos para la realización de este proyecto (cubículo, biblioteca, equipo de cómputo, salones de clase, etc). Muchas gracias al Dr. Daniel Juan Pineda, jefe de la Unidad, a la Lic.Mireya Fabián, a la Lic. Adriana Briseño, a la Lic. Lidia González y al M.C. Miguel A. Magaña, por su amable y eficiente atención siempre que necesité de su ayuda. Muchas gracias a todos los amigos y compañeros del instituto por su gran amistad y por todas las cosas que aprendí de cada uno de ustedes.

Quiero agradecer a mis familiares y amigos que estuvieron presentes en los momentos difíciles y cuya ayuda fue de gran valor para que yo pudiera concluir este proyecto.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a mi esposa Patricia Pérez Alvarado que durante nuestro noviazgo ha sufrido y soportado mis locuras desde que inicié la Maestría en el 2005 y que para culminar este trabajo me respaldó a pesar de sentirse desplazada.

Índice general

Introducción

La primera orientación científica sobre el estudio de los números enteros, acaso el origen de la teoría de los números, se atribuye generalmente a los griegos. Aproximadamente seis siglos antes de nuestra era Pitágoras y sus discípulos, entre sus diversas aportaciones, efectuaron un vasto estudio acerca de los enteros. Euclides, en el tercer siglo A. C. demostró que existe una infinidad de números primos. Un número primo se define como un entero mayor que uno cuyos únicos divisores son el uno y él mísmo, es decir

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots .$$

Los números que no son primos se llaman compuestos, excepto el número 1 que no es ni primo ni compuesto.

El *Teorema Fundamental de la Aritmética* establece que todo entero $n > 1$ se escribe de manera única como producto de primos sin importar el orden de los factores. Por esta razón, el estudio de las propiedades de los números primos siempre ha sido objeto de intenso estudio por matemáticos de todas las épocas.

La distribución de los numeros primos es muy irregular, se sabe que podemos encontrar espacios tan grandes como se quieran donde no exista ningun número primo; por ejemplo, la sucesión

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$$

consiste de n enteros consecutivos compuestos. Por otro lado, la *conjetura de los primos gemelos* afirma la existencia de una infinidad de parejas de primos p, q cuya diferencia es 2, o sea

$$p - q = 2.$$

Sin embargo, a pesar de tales fenómenos, la distribución de los números primos obedece a ciertas leyes que estudiaremos más adelante.

Un problema clásico es saber cuantos números primos pertenecen al intervalo $[1, x]$; en la Teoría de los Números la función $\pi(x)$ denota a tal cantidad, es decir

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

donde la sumatoria es tomada sobre los números primos. Bajo esta notación el teorema de Euclides establece

$$\pi(x) \to \infty \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

En 1737 Euler consideró la serie de variable real σ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}, \qquad \sigma > 1.$$

El observó que tiene lugar la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-\sigma}}, \qquad \sigma > 1,$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos p. Mediante esta observación Euler estableció que la serie $\sum\limits_{p} 1/p$ diverge, hecho que conduce a una demostración analítica de la existencia de una infinidad de números primos. Euler también demostró que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0,$$

afirmación nos dice que los números primos no son tan frecuentes entre los números naturales.

Gauss y Legendre, basados en evidencias empíricas, en 1792 conjeturaron que el comportamiento asintótico de $\pi(x)$ es como

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Gauss notó que una mejor aproximación para $\pi(x)$ esta dada por el *logaritmo integral* definido por

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\log t}.$$

(Observemos que $\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ cuando $x \to \infty$).

A través de métodos elementales, en 1850 Chebyshev estableció el orden correcto de $\pi(x)$, él demostró que existen dos constantes absolutas $a > 0$, $b > 0$ tales que

$$a\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq b\frac{x}{\log x}.$$

Chebyshev también probó que si el límite de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ existe cuando $x \to \infty$, entonces debe ser uno, es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \tag{1}$$

Hoy en día se sabe que tiene lugar (1), tal hecho es conocido como *El Teorema de los Números Primos*.

Una contribución fundamental para investigar el problema de la distribución de los números primos fué realizada por Riemann en 1859. Motivado por la demostración analítica de Euler sobre la existencia de una infinidad de números primos, Riemann introdujo la función de variable compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

donde $s = \sigma + it$, y $\sigma = \mathrm{Re}\ s > 1$. Esta función es conocida como *La Función Zeta de Riemann*. La serie de la parte derecha converge absolutamente en la región $\sigma > 1$ y de manera uniforme si $\sigma \geq \sigma_0$, para cualquier $\sigma_0 > 1$, y por lo tanto $\zeta(s)$ representa a una función analítica en la región $\sigma > 1$. Riemann demostró que $\zeta(s)$ es analíticamente continuable a una función meromorfa en todo el plano complejo con un único polo simple de residuo igual a 1 en $s = 1$.

Riemann tambien demostró que $\zeta(s)$ satisface una ecuación funcional. De tal ecuación se sigue que los enteros pares negativos $-2n$, $n \in \mathbb{N}$, anulan a $\zeta(s)$, tales ceros son conocidos como los *ceros triviales.* De las condiciones de simetría de la ecuación funcional se sigue que los ceros que no son triviales deben estar ubicados en la *franja crítica* $0 \leq \sigma \leq 1$, y además simetricamente distribuidos con respecto a la *línea crítica* $\sigma = 1/2$ y al eje real. Los ceros que están en la franja crítica son llamados *ceros no triviales.* Riemann afirmó sin demostración que todos ellos deben estar ubicados en la línea crítica, conjetura aún abierta y conocida como *La Hipótesis de Riemann.*

Riemann encontró una profunda conexión entre el problema de la distribución de los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ y la distribución de los números primos. Basados en las ideas desarrolladas por Riemann acerca de la función $\zeta(s)$, Hadamard y de La Vallée Poussin demostraron de manera independiente el teorema de los números primos en 1896.

Del teorema de los números primos se sigue que para $h \leq x$ tiene lugar la igualdad

$$\pi(x+h) - \pi(x) = \frac{x+h}{\log(x+h)} - \frac{x}{\log x} + o\Big(\frac{x}{\log x}\Big).$$

Encontrar h tal que $\pi(x+h) - \pi(x) > 0$ implica la existencia de un número primo en $(x, x+h]$. Esta observación motiva a investigar las condiciones sobre h para garantizar la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x+h]$.

Bertrand conjeturó en 1845 que si $h \geq 2$, entonces $(h, 2h)$ debería contener un número primo. Esta conjetura fue probada por Chebyshev en el año 1851 y además también probó que en el intervalo $(x, x+h]$ hay un número primo, si $x \geq x_0$ y $h \geq \frac{1}{5}x$. De manera natural surgen las siguientes preguntas:

- ¿Qué tan pequeño se puede elegir a $h = h(x)$ de tal forma que en el intervalo $(x, x+h]$ exista al menos un número primo, si x es suficientemente grande?
- ¿Es posible hallar una fórmula asintótica para la cantidad de números primos en el intervalo $(x, x+h]$?

Este problema es conocido como *El problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos.*

Una forma de abordar este problema es utilizando el teorema de los números primos

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + R(x), \qquad R(x) = o\Big(\frac{x}{\log x}\Big). \tag{2}$$

De La Vallée Poussin demostró en 1899 que

$$R(x) = O(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}), \quad c_0 > 0.$$

Por lo tanto, para $h \leq x$ tenemos

$$\pi(x+h) - \pi(x) = \int_x^{x+h} \frac{dt}{\log t} + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}), \quad c_1 > 0.$$

De esta forma, basta tomar

$$h = c_2 x e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\log x}}; \quad c_2 > 0,$$

para garantizar la existencia un número primo en el intervalo $(x, x+h]$. Más aún, la cantidad de números primos que hay en ese intervalo es asintóticamente $\frac{h}{\log x}$.

Asumiendo la Hipótesis de Riemann se obtiene

$$R(x) = O(x^{1/2+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Procediendo de manera análoga, al elegir $h = x^{1/2+\varepsilon}$ se garantiza la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x + x^{1/2+\varepsilon}]$, para cualquier $\varepsilon > 0$. Además, la cantidad de números primos será asintóticamente $\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{\log x}$.

De manera incondicional, el mejor término de error conocido en (2) para $\pi(x)$ se debe a Vinogradov, él estableció mediante su método que

$$R(x) = O(xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x}). \tag{3}$$

De esta forma, basta tomar $h(x) = xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x}$ para garantizar la existencia de un número primo en $(x, x + xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x}]$, siendo $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$.

A pesar de que $xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x} = o(x)$ siempre se tiene $xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x} \geq x^{1-\delta}$, para cualesquiera $\varepsilon, \delta > 0$ y $x \geq x_0(\delta) > 0$. Por tal razón, el teorema de los números primos no garantiza de manera incondicional la existencia de números primos en un intervalo de la forma $(x, x + x^{1-\delta}]$. Sin embargo, en la teoría de la función zeta de Riemann existe una rama muy profunda conocida como la *Teoría de la densidad de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann*, de la cual se siguen resultados más fuertes que lo que se deriva del teorema de los números primos.

Se denota por $\rho = \beta + i\gamma$, a cualquier cero no trivial de $\zeta(s)$. Para $T \geq 2$, se definen las funciones

$$\begin{aligned} N(T) &= \sum_{0 < \mathrm{Im}\ \rho \leq T} 1; \\ N(\sigma, T) &= \sum_{\substack{0 < |\mathrm{Im}\ \rho| \leq T \\ \mathrm{Re}\ \rho \geq \sigma}} 1. \end{aligned}$$

Es decir, $N(T)$ cuenta el número de ceros no triviales de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 < \mathrm{Im}\ \rho \leq T$ y $N(\sigma, T)$ cuenta el número de ceros de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 < |\mathrm{Im}\ \rho| \leq T$, con $\mathrm{Re}\ \rho \geq \sigma$. A la segunda función, se le conoce como *función de densidad de los ceros no triviales de* $\zeta(s)$.

El objetivo fundamental de esta tesis es estudiar el problema de densidad de los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ y su conexión con el problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos. De manera precisa; obtendremos una estimación para $N(\sigma, T)$, la cual permite establecer que para $h(x) \geq x^{3/4+\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, existe un número primo en el intervalo $(x, x+h(x)]$. Más aún, la cantidad de números primos que hay en ese intervalo es asintóticamente como $\frac{h(x)}{\log x}$. Además en el proceso de estudio vamos a aprender como se aplica el Teorema del Valor Medio de Vinogradov para obtener la región libre de ceros de $\zeta(s)$ que de hecho es el mejor resultado conocido en la actualidad. También veremos que la aplicación de este resultado establece (3).

Capítulo 1

Preliminares

En el desarrollo de esta tesis se denotará a c (al igual que $c_0, c_1, \ldots$) como una constante absoluta positiva, ε, δ (al igual que $\varepsilon_1, \delta_1, \ldots$) serán entendidas como constantes positivos tan pequeñas como se quiera, p denotará siempre a un número primo (lo mismo que $p_1, p_2, \ldots$).

Adoptamos la notación de Landau $f(x) = O(g(x))$, o de manera equivalente la notación de Vinogradov $f(x) \ll g(x)$, la cual significa que existe una constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq cg(x)$. Se denota $f(x) = o(g(x))$ para indicar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se dice que $f(x)$ es asintóticamente igual a $g(x)$ si

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)).$$

La función de Möbius $\mu(n)$, se define por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1; \\ 0, & \text{si } p^2 | n; \\ (-1)^k, & \text{si } n = p_1 p_2 \ldots p_k. \end{cases}$$

La función de Mangoldt $\Lambda(n)$, se define en la manera siguiente

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k; \\ 0 & \text{si } n \neq p^k. \end{cases}$$

Para $x > 0$, la función de Chebyshev se define como la sumatoria

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Para todo entero positivo n, la función $\tau(n)$ indica la cantidad de divisores de n, es decir

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Para cualquier real u, $[u]$ denota al entero más cercano a u tal que $u - [u] \geq 0$. El número $0 \leq u - [u] < 1$ es conocido como la parte fraccionaria de u y se denota por $\{u\}$. Se definen las siguientes funciones de variable real:

$$\begin{aligned} \rho(u) &= 1/2 - \{u\}, \qquad (1.1) \\ ||u|| &= \text{mín}(\{u\}, 1 - \{u\}). \end{aligned}$$

1.1. Fórmulas de sumación

Lema 1.1. (Fórmula de Sumación de Abel). *Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos. Sea $f(u)$ una función continuamente diferenciable en $[a, b]$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(u)f'(u)du + C(b)f(b),$$

donde $C(u) = \sum_{a<n\leq u} c_n$.

Demostración: Es suficiente demostrar que

$$\sum_{a<n\leq b} c_n(f(b) - f(n)) = \int_a^b C(u)f'(u)du.$$

Observe que

$$\sum_{a<n\leq b} c_n(f(b) - f(n)) = \sum_{a<n\leq b} c_n \int_a^b f'(u)du = \sum_{a<n\leq b} c_n \int_a^b f'(u)g(u; n)du,$$

donde

$$g(u; n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq u \leq b, \\ 0 \text{ si } a < u < n. \end{cases}$$

De esta forma, se deduce

$$\int_a^b \sum_{a<n\leq b} c_n f'(u) g(u;n) du = \int_a^b \sum_{a<n\leq u} c_n f'(u) du = \int_a^b C(u) f'(u) du. \quad \square$$

Lema 1.2. (Fórmula de Sumación de Euler). *Sea $f(u)$ una función continuamente diferenciable en $[a,b]$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) - \int_a^b \rho(u) f'(u) du,$$

donde $\rho(u)$ es la función definida en (1.1).

Demostración: Si definimos $C(u) = \sum\limits_{a<n\leq u} 1$, entonces

$$C(u) = \sum_{a<n\leq u} 1 = [u] - [a] = (u - 1/2 + \rho(u)) - (a - 1/2 + \rho(a)) = u - a - \rho(a) + \rho(u).$$

Aplicando el Lema 1.1 se tiene

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = -\int_a^b (u - a - \rho(a)) f'(u) du - \int_a^b \rho(u) f'(u) du + (b - a - \rho(a) + \rho(b)) f(b). \quad (1.2)$$

Por otro lado

$$-\int_a^b (u - a - \rho(a)) f'(u) du = -(u - a - \rho(a)) f(u)\Big|_{u=a}^{u=b} + \int_a^b f(u) du. \quad (1.3)$$

Sustituyendo (1.3) en (1.2), deducimos

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du + \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a) - \int_a^b \rho(u) f'(u) du. \quad \square$$

Lema 1.3. (Fórmula de sumación de Poisson). *Sea $F \in L^1(\mathbb{R})$. Suponga que la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v)$$

converge absoluta y de manera uniforme en la variable v. Si además

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| < \infty,$$

entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2\pi inv}.$$

Demostración: La función

$$G(v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v)$$

es una función continua de periodo 1. Los coeficientes de Fourier de $G(v)$ estan dados por

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 G(v)e^{-2\pi imv}dv = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(n+v)e^{-2\pi imv}dv \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} F(x)e^{-2\pi imx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-2\pi imx}dx = \widehat{F}(m). \end{aligned}$$

Dado que $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| < \infty$, podemos representar a $G(v)$ por su serie de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2\pi inv}.$$

El Lema está demostrado. $\square$

Se definen a las funciones de varible real x, para $x > 0$;

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi xn^2}, \\ \omega(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi xn^2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

De esta forma, como consecuencia del Lema anterior se tiene.

Corolario 1.1. (Ecuación funcional de $\theta(x)$). *Para $x > 0$ se tiene*

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x). \tag{1.5}$$

Demostración: Observe que, de existir, la transformada de Fourier de $F(x/t)$ es $|t|\widehat{F}(tu)$. Notemos que, si $F(t) = e^{-\pi t^2}$ entonces $\widehat{F}(t) = e^{-\pi t^2}$. Por lo tanto $e^{-\pi(t/\sqrt{x})^2}$ tiene transformada

$$\sqrt{x}e^{-\pi t^2 x}.$$

Aplicando el Lema 1.3, se deduce

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n/\sqrt{x})^2} = \sqrt{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} \quad \square$$

Es claro que $\theta(x) = 1 + 2\omega(x)$, y como consecuencia del Corolario 1.1 se verifica que

$$\omega\left(1/x\right) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\omega(x). \tag{1.6}$$

1.2. Estimación de Van der Corput

Lema 1.4. (Van der Corput). *Sea $f(x)$ una función de variable real continuamente diferenciable en el intervalo $[a,b]$ con derivada monótona. Si además $|f'(x)| \le \delta < 1$, entonces*

$$\sum_{a<n\le b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx + O\Big(\frac{1}{1-\delta}\Big),$$

donde la constante implícita de O es absoluta.

Demostración: Para n fijo sea

$$F_n(x) = e^{2\pi i f(n+x)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Definamos a $F_n(x)$ en los puntos 0 y 1 como

$$F_n(0) = F_n(1) = \frac{e^{2\pi i f(n)} + e^{2\pi i f(n+1)}}{2}.$$

Ahora extendamos el dominio de la función a todos los reales de manera que $F_n(x)$ tenga periodo 1, para cada $x \in \mathbb{R}$ elegimos

$$F_n(x) = F_n(\{x\}).$$

Utilizemos el siguiente resultado, que pertenece a la teoría de series de Fourier:

Sea $f(x)$ una función con periodo 1 definida en los reales con, a lo más, un número finito de discontinuidades de primera especie en $[0,1]$. Si, aparte de las discontinuidades, f

tiene derivada continua en $[0,1]$, *entonces la serie de Fourier converge a* $f(x)$ *en todos los puntos donde sea continua. Para los puntos* x_0 *de discontinuidad se tiene*

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

De esta forma, $F_n(x)$ admite la expansión en serie de Fourier

$$F_n(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{2\pi imx},$$

donde

$$c_m=c_m(n)=\int_0^1 F_n(u)e^{-2\pi imu}du.$$

Si $m\neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
c_m(n) &= -\frac{1}{2\pi im}\int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}d(e^{-2\pi imu})\\
&= -\frac{e^{2\pi if(n+u)}}{2\pi im}e^{-2\pi imu}\,|_{u=0}^{1}+\frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+u)e^{2\pi i(f(n+u)-mu)}du\\
&= \frac{1}{2\pi im}(e^{2\pi if(n)}-e^{2\pi if(n+1)})+\frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+u)e^{2\pi i(f(n+u)-mu)}du.
\end{aligned}$$

Al evaluar en $F_n(x)$ en $x=1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
F_n(1) &= \frac{e^{2\pi if(n)}+e^{2\pi if(n+1)}}{2}\\
&= \int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}du\;+\sum_{m\neq 0} c_m(n)\\
&= \int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}du\;+\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+u)e^{2\pi i(f(n+u)-mu)}du\\
&= \int_n^{n+1} e^{2\pi if(u)}du\;+\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\int_n^{n+1} f'(u)e^{2\pi i(f(u)-mu)}du.
\end{aligned}$$

Sumando sobre $a < n \leq b$, se tiene

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(u)} du \ + \ \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m} U_m \ + \ O(1),$$

donde

$$\begin{aligned}
U_m \quad &= \int_{[a]+1}^{[b]} f'(u) e^{2\pi i (f(u)-mu)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(u)}{f'(u)-m} d(e^{2\pi i f(u)-mu)}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(u)}{f'(u)-m} d(\operatorname{sen} 2\pi(f(u)-mu)) \\
&\quad - i \frac{1}{2\pi} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(u)}{f'(u)-m} d(\cos 2\pi(f(u)-mu)).
\end{aligned}$$

Recordemos el siguiente teorema de la media:

Si $g(x)$, $h(x)$ son integrables por Riemman con $g(x)$ monótona en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = g(a) \int_a^\xi h(x)dx + g(b) \int_\xi^b h(x)dx.$$

Aplicando este resultado a la parte real de U_m, siendo $g(u) = \frac{f'(u)}{f'(u)-m}$ monótona, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(u)}{f'(u)-m} d(\operatorname{sen} 2\pi(f(u)-mu)) \quad &\ll \quad \left| \frac{f'([b])}{f'([b])-m} \right| \\
&\ll \quad \frac{1}{|m|-\delta}.
\end{aligned}$$

Con un argumento similar, obtenemos la misma cota para la parte imaginaria de U_m. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} &= \int_a^b e^{2\pi i f(u)} du \; + \; O\left(\sum_{m>0} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-\delta}\right) \\ &= \int_a^b e^{2\pi i f(u)} du \; + \; O\left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1-\delta/m}\right) \\ &= \int_a^b e^{2\pi i f(u)} du \; + \; O\left(\frac{1}{1-\delta}\right),\end{aligned}$$

donde la constante de O es absoluta. □

1.3. La función Gamma de Euler

Definición 1.1. *La función Gamma de Euler* $\Gamma(s)$ *se define por*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}, \tag{1.7}$$

donde $\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right)$ *es la constante de Euler.*

Lema 1.5. (Fórmula integral). *Para* Re $s > 0$, *se cumple*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \tag{1.8}$$

Demostración: Observe que la integral converge absolutamente en la región Re $s > 0$ y de manera uniforme si Re $s \geq \sigma_0 > 0$, para todo $\sigma_0 > 0$. Por lo tanto $\Gamma(s)$ es una función analítica en el semiplano Re $s > 0$. Por definición de la función Gamma, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)} &= s \lim_{m\to\infty} e^{s(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m)} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n} \\ &= s \lim_{m\to\infty} m^{-s} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right) = s \lim_{m\to\infty} m^{-s} \frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}{m!}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}.$$

De esta última igualdad se tiene la *ecuación funcional de* $\Gamma(s)$,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Por otra parte,

$$\int_0^m (1-t/m)^m t^{s-1} dt = m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt.$$

Integrando por partes m veces a la integral del lado derecho obtenemos

$$m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m)}.$$

Por lo tanto

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \int_0^m (1-t/m)^m t^{s-1} dt.$$

Sea

$$\Gamma_1(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Entonces

$$\Gamma_1(s) - \Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^m t^{s-1}(e^{-t} - (1-t/m)^m) dt + \int_m^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \right).$$

La última integral tiende a cero si $m \to \infty$. Por otro lado, para $0 < y < 1$ tenemos $(1-y^2)e^{-y} < 1-y < e^{-y}$. De esto último, si $y = t/m$, donde $0 < t < m$, entonces

$$e^{-t}\Big(1 - \frac{t^2}{m^2}\Big)^m < \Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m < e^{-t}.$$

Luego

$$0 < e^{-t} - (1-t/m)^m < e^{-t}(1-(1-t^2/m^2)^m) < e^{-t}t^2/m,$$

ya que $1-(1-y)^m \leq my$, si $0<y<1$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(s)-\Gamma(s) &= \lim_{m\to\infty}\left(\int_0^m t^{s-1}(e^{-t}-(1-t/m)^m)dt\right) \\
&\ll \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m t^{\mathrm{Re}\ s+1}e^{-t}dt \\
&\ll \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\ s+1}e^{-t}dt = 0. \quad \square.
\end{aligned}$$

1.4. Funciones enteras de orden finito y producto de Weierstrass

Definición 1.2. *Sea $f(s)$ una función entera. Si existe $a>0$ tal que*

$$\max_{|s|=R} |\ f(s)\ | \leq e^{R^a}; \qquad R \geq R_0(a) > 0,$$

entonces $f(s)$ es llamada función entera de orden finito. En este caso, $\alpha = \inf a$, es llamado el orden de $f(s)$.

Teorema 1.1. *Sea $f(s)$ una función entera de orden 1 tal que $f(0)\neq 0$. Si*

$$0<|\rho_1|\leq|\rho_2|\leq|\rho_3|\leq\dots$$

son los ceros de $f(s)$ (incluyendo su multiplicidad), entonces existen constantes complejas A, B tales que

$$f(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}.$$

Para su demostración necesitamos los siguiente Lemas.

Lema 1.6. *Sea $f(s)$ una función entera de orden 1 sin ceros. Entonces existen constantes complejas A, B tales que*

$$f(s) = e^{A+Bs}.$$

Demostración: Sea $h(s) = \log f(s) - \log f(0)$. Entonces $h(s)$ es una función entera, dado que $f(s)$ no tiene ceros. Además, para cualquier $\varepsilon > 0$, si $|s| = R$ se tiene

$$|h(s)| \ll \log|f(s)| \ll R^{1+\varepsilon}, \quad R \geq R_o(\varepsilon) > 0.$$

Ahora escribamos $h(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)s^n$, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ y evaluamos en $s = Re^{i\theta}$ para obtener

$$\text{Re } h(s) = \text{Re } h(R_j e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\theta) - b_n \operatorname{sen}(n\theta))R^n.$$

Por otro lado

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cdot \text{Re } h(Re^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} a_n R^n \cos^2(n\theta)d\theta = \pi a_n R^n,$$

luego

$$\pi|a_n|R^n \leq \int_0^{2\pi} |\text{Re } h(Re^{i\theta})|d\theta \leq \int_0^{2\pi} |h(Re^{i\theta})|d\theta \ll R^{1+\varepsilon}.$$

Por lo tanto

$$|a_n| \ll R^{1+\varepsilon-n}.$$

Dado que la desigualdad anterior se cumple para todo R suficientemente grande, se tiene $a_n = 0$ si $n \geq 2$. De manera similar se verifica que $b_n = 0$, si $n \geq 2$. Además, dado que $h(0) = 0$, tenemos $a_0 = b_0 = 0$. El Lema está demostrado. $\square$

Lema 1.7. *Sea $f(s)$ una función entera de orden 1 tal que $f(0) \neq 0$. Si $N = N(r)$ denota al número de ceros de $f(s)$ en $|s| \leq r$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$N(r) \ll r^{1+\varepsilon}.$$

Demostración: Sean $\rho_1, \ldots \rho_N$ los ceros de $f(s)$ en el la región $|s| < r$. De esta forma, la función definida por

$$F(s) = f(s) \cdot \prod_{\substack{n \\ |\rho_n| \leq r}} \frac{1}{s - \rho_n},$$

es una función entera que no es constante, dado que f no es un polinomio. Aplicando el principio del módulo máximo se tiene

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{|\rho_n|} \leq \max_{|s|=3r} |F(s)|.$$

De esta forma

$$|f(0)|\frac{1}{r^N} \leq \max_{|s|=3r} |f(s)| \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{s - \rho_n} \leq e^{r^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(2r)^N},$$

es decir $2^N \leq C_1 e^{r^{1+\varepsilon}}$, por lo tanto $N \ll r^{1+\varepsilon}$. $\square$

Corolario 1.2. *Sea $f(s)$ una función entera de orden 1 tal que $f(0) \neq 0$. Si*

$$0 < |\rho_1| \leq |\rho_2| \leq |\rho_3| \leq \dots$$

son los ceros de $f(s)$ (incluyendo su multiplicidad), entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$$

converge.

Demostración: Por el Lema 1.7

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} &= \sum_{\substack{n \\ |\rho_n|<1}} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} + \sum_{\substack{n \\ |\rho_n|\geq 1}} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \leq c_1(\varepsilon) + \sum_{\substack{n \\ |\rho_n|\geq 1}} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq |\rho_n| \leq 2^{k+1}} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_2(\varepsilon) 2^{(k+1)^{(1+\varepsilon/2)}}}{2^{k(1+\varepsilon)}} \\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty} (2^{\frac{\varepsilon k}{2}})^{-1} < \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 1.1: Recordemos que

$$0 < |\rho_1| \leq |\rho_2| \leq |\rho_3| \leq \dots$$

son los ceros de la función entera $f(s)$, con $f(0) \neq 0$, de orden 1. En vista del corolario anterior, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^2} < \infty.$$

Con tal condición, se sabe que el producto

$$P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}$$

define a una función entera con los mismos ceros que $f(s)$. Definamos a la función $F(s)$ por

$$f(s) = P(s)F(s),$$

entonces $F(s)$ es una función entera sin ceros. Si $F(s)$ fuera de orden 1, podríamos concluir por el Lema 1.6, que $F(s) = e^{A+Bs}$, para ciertas constantes A y B. Para esto último escógase a R_i que satisfaga $\Big|R_i - |\rho_n|\Big| > |\rho_n|^{-2}$ para todo n, esto se puede hacer ya que la medida total de los intervalos

$$(|\rho_n| - |\rho_n|^{-2}, |\rho_n| + |\rho_n|^{-2})$$

está acotada por $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-2} < \infty$.

Sea

$$P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s),$$

donde

$$P_1(s) = \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|<R_i/2}} \Big(1 - \frac{s}{\rho_n}\Big)e^{s/\rho_n}, \quad P_2(s) = \prod_{\substack{n \\ R_i/2\le|\rho_n|\le 2R_i}} \Big(1 - \frac{s}{\rho_n}\Big)e^{s/\rho_n},$$

$$P_3(s) = \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|>2R_i}} \Big(1 - \frac{s}{\rho_n}\Big)e^{s/\rho_n}.$$

Sea $|s| = R_i$. Luego

$$\begin{aligned} P_1(s) &\ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|<R_i/2}} \left|1 - \left|\frac{s}{\rho_n}\right|\right| \cdot e^{-|s|/|\rho_n|} \ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|<R_i/2}} e^{-|s|/|\rho_n|} \\ &\ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|<R_i/2}} e^{-\frac{R_i|\rho_n|^{\varepsilon/2}}{|\rho_n|^{1+\varepsilon/2}}} \ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|<R_i/2}} e^{-\frac{R_i^{1+\varepsilon/2}}{|\rho_n|^{1+\varepsilon/2}}} \ge e^{-c_1 R_i^{1+\varepsilon/2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 1.7,

$$\begin{aligned} P_2(s) &\ge \prod_{\substack{n \\ R_i/2\le|\rho_n|\le 2R_i}} \frac{|s-\rho_n|}{|\rho_n|} \cdot e^{-|s|/|\rho_n|} \ge \prod_{\substack{n \\ R_i/2\le|\rho_n|\le 2R_i}} \frac{|R_i - |\rho_n||}{2R_i e^2} \\ &\ge \prod_{\substack{n \\ R_i/2\le|\rho_n|\le 2R_i}} \frac{1}{8R_i^3 e^2} \ge \Big(\frac{1}{8R_i^3 e^2}\Big)^{c_0 R_i^{1+\varepsilon/4}} \ge e^{-c_2 R_i^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$P_3(s) = \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|>2R_i}} e^{O\left(\frac{R_i^2}{|\rho_n|^2}\right)} \ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|>2R_i}} e^{-c_0 \frac{R_i^2}{|\rho_n|^{1+\varepsilon/2}} \cdot \frac{1}{|\rho_n|^{1-\varepsilon/2}}} \ge \prod_{\substack{n \\ |\rho_n|>2R_i}} e^{-c_0 \frac{R_i^2}{R_i^{1-\varepsilon/2}} \cdot \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon/2}}},$$

o sea

$$P_3(s) \ge e^{-c_0 R_i^{1+\varepsilon/2} \cdot \sum_{|\rho_n|>2R_i} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon/2}}} \ge e^{-c_3 R_i^{1+\varepsilon}}.$$

Por lo tanto, en la circunferencia $|s| = R_i$ tenemos

$$Ce^{R_i^{1+\varepsilon/2}} \geq \max_{|s|=R_i} |f(s)| = \max_{|s|=R_i} |P(s)| \cdot |F(s)| \geq e^{-(c_1+c_2+c_3)R_i^{1+\varepsilon/2}} \cdot \max_{|s|=R_i} |F(s)|,$$

es decir

$$\max_{|s|=R_i} |F(s)| \leq e^{R_i^{1+\varepsilon}}, \qquad (i \geq i_0). \quad \square$$

1.5. Lema de Borel-Caratheodory y sus consecuencias

Lema 1.8. (Borel-Caratheodory). *Sea $R > 0$. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una función analítica en en el círculo $|z - z_0| \leq R$. Si $\text{Re}f(z) \leq U$ para $|z - z_0| = R$, entonces*

a) $|c_n| = \left|\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq 2(U - \text{Re}f(z_0))R^{-n}, \quad (n = 1, 2, \dots);$

b) Para $|z - z_0| \leq r < R$, se tiene

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2r}{R-r}(U - \text{Re}f(z_0));$$
$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{2R}{(R-r)^{n+1}}(U - \text{Re}f(z_0)), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Demostración: Sea

$$F(z) = U - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n.$$

Si $0 < r < R$, $\zeta = z_0 + re^{i\varphi}$, entonces

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{F(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{(n+1)}} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} (P + iQ)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1.9}$$

donde

$$F(\zeta) = F(z_0 + re^{i\varphi}) = P + iQ, \quad (P, Q \in \mathbb{R})$$
$$P = \text{Re } F(\zeta) = U - \text{Re } f(\zeta) \geq 0.$$

En particular, se tiene

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P + iQ)d\varphi.$$

Dado que $\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{(n+1)}}$ es analítica en el círculo $|\zeta - z_0| \leq r$, tenemos

$$0 = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P + iQ) e^{in\varphi} d\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Tomando el conjugado a esta última expresión y tomando en cuenta (1.9), se tiene

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P e^{-in\varphi} d\varphi, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

de aquí (como $P \geq 0$, si $|\zeta - z_0| \leq r < R$), se tiene

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |P| d\varphi = \frac{2}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} P d\varphi = \frac{2}{r^n} \mathrm{Re}\ b_0.$$

Por lo tanto, cuando $r \to R$ se tiene

$$|b_n| \leq \frac{2\mathrm{Re}\ b_0}{R^n}, \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.10}$$

es decir, se tiene el inciso a).

Mostremos b). Considere el círculo $|z - z_0| \leq r < R$. Aplicando (1.10) se tiene

$$|F(z) - F(z_0)| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\ b_0 \Big(\frac{r}{R}\Big)^n = \frac{2r}{R - r} \mathrm{Re}\ b_0.$$

Finalmente, derivemos $F(z)$ y apliquemos (1.10)

$$\begin{aligned} |F^{(k)}(z)| &\leq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) r^{n-k} \frac{2(\mathrm{Re}\ b_0)}{R^n} = 2(\mathrm{Re}\ b_0) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d^k}{dr^k} \Big(\frac{r}{R}\Big)^n \\ &= \frac{2(\mathrm{Re}\ b_0) R k!}{(R - r)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 1.3. *Sea $F(z)$ una función analítica en una región que contiene al círculo $|z - z_0| \leq r$. Supongamos que $F(z_0) \neq 0$ y además*

$$\left| \frac{F(z)}{F(z_0)} \right| \leq M, \qquad |z - z_0| \leq r.$$

Si $F(z) \neq 0$ *en el semicírculo* $|z - z_0| \leq r/2$, $\mathrm{Re}\,(z - z_0) \geq 0$, *entonces se tiene*

$$a)\ \mathrm{Re}\,\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \geq -\frac{4}{r}\log M;$$
$$b)\ \mathrm{Re}\,\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \geq -\frac{4}{r}\log M + \mathrm{Re}\,\frac{1}{z_0 - \rho},$$

donde ρ *es cualquier cero de* $F(z)$ *en el semicírculo* $|z - z_0| \leq r/2$, $\mathrm{Re}\,(z - z_0) < 0$.

Demostración: Consideremos a la función

$$g(z) = \begin{cases} F(z)\prod\limits_{\rho}\frac{1}{z-\rho}, & \text{si } z \neq \rho; \\ \lim\limits_{z \to \rho} g(z), & \text{si } z = \rho, \end{cases}$$

donde el producto esta tomado sobre todos los ceros $F(z)$ en el semicírculo $|z - z_0| \leq r/2$ (incluyendo su multiplicidad). De esta forma $g(z)$ es una función analítica en el semicírculo $|z - z_0| \leq r/2$. En la circunferencia $|z - z_0| = r$, se tiene

$$\Big|\frac{g(z)}{g(z_0)}\Big| = \Big|\frac{F(z)}{F(z_0)}\prod_{\rho}\frac{z_0 - \rho}{z - \rho}\Big| \leq M.$$

Por el Principio del Módulo Máximo esta desigualdad se cumple en en círculo $|z - z_0| \leq r$. Analizemos en el semicírculo $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$, por hipótesis se cumple que $g(z) \neq 0$, entonces tomando la rama principal del logarítmo, vemos que $f(z) = \log\frac{g(z)}{g(z_0)}$, la cual es una función analítica en este mismo círculo y

$$\mathrm{Re} f(z) = \log\Big|\frac{g(z)}{g(z_0)}\Big| \leq \log M$$

($M \geq 1$, ya que para $z = z_0$ se tiene que $\frac{g(z)}{g(z_0)} = 1$); además, $\mathrm{Re}\ f(z_0) = 0$. Aplicando el Lema anterior con $R = r/2$, se tiene

$$|f'(z_0)| = \Big|\frac{g'(z_0)}{g(z_0)}\Big| \leq \frac{4}{r}\log M;$$
$$\Big|\frac{g'(z_0)}{g(z_0)}\Big| = \Big|\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} - \sum_{\rho}\frac{1}{z_0 - \rho}\Big| \leq \frac{4}{r}\log M,$$

o sea

$$\mathrm{Re}\Big\{\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} - \sum_{\rho}\frac{1}{z_0 - \rho}\Big\} \geq -\frac{4}{r}\log M. \tag{1.11}$$

Finalmente la condición $\mathrm{Re}\,(z_0 - \rho) > 0$, asegura que la afirmación se sigue de (1.11). $\square$

Capítulo 2

La función zeta de Riemann

2.1. Definición y propiedades básicas

La función zeta de Riemann se define por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \qquad s = \sigma + it,\ \mathrm{Re}\ s = \sigma > 1. \tag{2.1}$$

Esta serie converge absolutamente en la región $\sigma > 0$ y de manera uniforme en el semiplano Re $s = \sigma \geq \sigma_0 > 1$, para todo $\sigma_0 > 0$. Por tales razones $\zeta(s)$ es una función holomorfa en la región Re $s = \sigma > 1$. La función definida por la serie (2.1) fue estudiada por Euler (1707-1783), quien consideró solamente valores reales de s. La notación $\zeta(s)$ y $s = \sigma + it$ se debe a Riemann (1826-1866), quien hizo numerosos descubrimientos en [12] acerca de $\zeta(s)$.

Teorema 2.1. *En la región* Re $s = \sigma > 1$, *tiene lugar la identidad*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p}^{\infty} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{2.2}$$

donde el producto esta tomado sobre todos los números primos p.

Demostración: Sean $X > 0$, Re $s = \sigma > 1$. Consideremos al producto parcial

$$P(X) = \prod_{p \leq X} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

y probemos que $P(X) \to \zeta(s)$ cuando $X \to +\infty$. Escribiendo a cada factor de $P(X)$ como una serie geométrica tenemos

$$P(X) = \prod_{p \leq X} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\Big).$$

De esta forma, $P(X)$ queda expresado como producto de un número finito de series absolutamente convergentes. Al tomar todos los productos de estas series, del Teorema fundamental de la aritmética se sigue

$$P(X) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + R(X),$$

donde

$$R(X) \ll \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma}.$$

De esta forma tenemos

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} \right| \ll \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma}. \tag{2.3}$$

Tomando límite cuando $X \to \infty$ en (2.3), se concluye la demostración. □

Lema 2.1. *La función $\zeta(s)$ no se anula en la región* Re $s = \sigma > 1$.

Demostración: Observe que

$$\Big| \frac{1}{\zeta(s)} \Big| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{u^\sigma} du = \frac{\sigma}{\sigma - 1},$$

o sea $|\zeta(s)| \geq \frac{\sigma - 1}{\sigma} > 0$. □

Teorema 2.2. *Sea $N \geq 1$ un entero fijo. Si* Re $s > 1$, *entonces la función $\zeta(s)$ admite la representación*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^\infty \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du. \tag{2.4}$$

Demostración: Aplicando el Lema 1.2 se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{N < n \leq M} \frac{1}{n^s} &= \int_N^M \frac{du}{u^s} + \frac{1}{2M^s} - \frac{1}{2N^s} + s \int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{1+s}} du \\
&= \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{M^{-s}}{2} - \frac{N^{-s}}{2} + s \int_N^M \frac{\rho(u)}{u^{1+s}} du.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{1-s}}{1-s}-\frac{N^{1-s}}{1-s}+\frac{M^{-s}}{2}-\frac{N^{-s}}{2}+s\int_N^M\frac{\rho(u)}{u^{1+s}}du\right)$$
$$= -\frac{N^{1-s}}{1-s}-\frac{N^{-s}}{2}+s\int_N^\infty\frac{\rho(u)}{u^{1+s}}du.$$

Finalmente

$$\zeta(s)=\sum_{n=n1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{2}N^{-s}+s\int_N^\infty\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du. \quad \square$$

Sustituyendo $N=1$ en (2.4), se obtiene

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+s\int_1^\infty\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du. \tag{2.5}$$

Observe que la integral en la parte derecha de la igualdad converge absolutamente en la región Re $s=\sigma>0$ y de manera uniforme si Re $s=\sigma\geq\sigma_0$, para todo $\sigma_0>0$. Por tal razón $\zeta(s)$ se extiende analíticamente al semiplano complejo Re $s>0$ salvo el punto $s=1$, que es un polo simple con residuo igual a uno.

Lema 2.2. *Sea $\sigma_0>0$. Si $0<\sigma_0\leq\sigma\leq 2$ y $x\geq\frac{|t|}{\pi}$, entonces tiene lugar la fórmula*

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s}+\frac{x^{1-s}}{s-1}+O(x^{-\sigma}), \tag{2.6}$$

donde $s=\sigma+it$ y la constante implícita del simbolo O depende sólo de σ_0.

Demostración: Del Teorema 2.2, para $N>x$ se tiene

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{2}N^{-s}+s\int_N^\infty\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du$$
$$=\sum_{1\leq n\leq x}\frac{1}{n^s}+\sum_{x<n\leq N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}+O(N^{-\sigma})+O\Big(\frac{|t|}{N^\sigma}\Big). \tag{2.7}$$

Ahora estudiemos a la suma

$$\sum_{x<n\leq N}\frac{1}{n^{it}}\cdot\frac{1}{n^\sigma}.$$

Apliquemos la fórmula de sumación de Abel con $c_n = \frac{1}{n^{it}}$ y $f(n) = \frac{1}{n^{\sigma}}$ para obtener

$$\sum_{x<n\leq N} \frac{1}{n^{\sigma+it}} = \sigma \int_x^N u^{-(1+\sigma)} \mathbb{C}(u)du + \mathbb{C}(N)N^{-\sigma}.$$

Por otro lado, por el Lema 1.4 tenemos

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{x<n\leq u} e^{2\pi i(\frac{-t\log n}{2\pi})} = \int_x^u e^{2\pi i(\frac{-t\log v}{2\pi})}dv + O(1) = \frac{u^{1-it} - x^{1-it}}{1-it} + O(1).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{x<n\leq N} \frac{1}{n^{\sigma+it}} &= \sigma \int_x^N u^{-(1+\sigma)} \mathbb{C}(u)du + \mathbb{C}(N)N^{-\sigma} \\
&= \sigma \int_x^N \Big(\frac{u^{1-it} - x^{1-it}u^{-(1+\sigma)}}{1-it}\Big)du + O\Big(\int_x^N u^{-(1+\sigma)}du\Big) + \\
&\quad + \frac{N^{1-s} - x^{1-it}N^{-\sigma}}{1-it} + O(N^{-\sigma}) \\
&= \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}).
\end{aligned}$$

De esto último y de (2.7), tomando límite cuando $N \to +\infty$ se obtiene el Lema. $\square$

2.2. Ecuación funcional de la función zeta de Riemann

Teorema 2.3. *En la región* $\operatorname{Re} s > 1$, *tiene lugar la igualdad*

$$\pi^{-s/2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{\infty}(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\omega(x)dx,$$

donde $\omega(x)$ *esta definida en* (1.4).

Demostración: Para $\operatorname{Re} s > 0$, aplicando el Lema 1.5

$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} x^{s/2-1}e^{-x}dx.$$

Si $x = \pi n^2 y$, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = (\pi n^2)^{s/2} \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy,$$

por lo que

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dado Re $s > 1$, sumando sobre $n = 1, 2, 3, \ldots$, obtenemos

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy. \tag{2.8}$$

En (2.8), la posibilidad de cambiar el orden de la sumatoria con la integración se deduce del hecho de que

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} &= O(e^{-\pi N^2 x}), \qquad \text{si } x \geq 1; \\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} &= O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big), \qquad \text{si } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy &= \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} dy = \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) dy \\ &= \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) dy + \int_1^\infty y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) dy. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En la primera integral de la última igualdad tomamos $y = 1/x$ y por (1.6), se tiene

$$\begin{aligned} &\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) dy + \int_1^\infty y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) dy = \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\frac{s}{2}} \omega(1/x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\frac{s}{2}} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\omega(x)\right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^\infty \frac{x^{-\frac{s+1}{2}}}{2} dx - \int_1^\infty \frac{x^{-1-\frac{s}{2}}}{2} dx + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1+s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \omega(x) dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, combinando (2.8), (2.9) y multiplicando por $s(s-1)$ tenemos

$$\pi^{-s/2} s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 1 + s(s-1)\int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\omega(x)dx.$$

El Teorema está demostrado. $\square$

Definición 2.1. *La función ξ de Riemann se define por*

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\omega(x)dx. \tag{2.10}$$

Observe que la integral en la parte derecha de la ecuación anterior define a una función entera. Por tal razón $\xi(s)$ es una función entera que además satisface

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

El hecho anterior es equivalente a la relación

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

La última relación es llamada *Ecuación Funcional de la función zeta de Riemann.*

Corolario 2.1. *La función $\zeta(s)$ se extiende analíticamente en todo el plano complejo con $s \neq 1$.*

Demostración: Del Teorema 2.3 y las definiciones de las funciones $\xi(s)$ y $\Gamma(s)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{s-1}\pi^{s/2}\,\xi(s)\,\frac{1}{s\Gamma(s/2)} \\
&= \frac{1}{s-1}\pi^{s/2}\,\xi(s)\,\frac{1}{2}e^{\gamma s/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-s/2n}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

donde

$$\pi^{s/2}, \quad \xi(s), \quad \frac{1}{s\Gamma(s/2)},$$

son funciones enteras que no se anulan en $s = 1$. Por lo tanto $\zeta(s)$ se extiende analíticamente a todo el plano complejo con $s \neq 1$. $\square$

2.3. Teoremas acerca de los ceros no triviales de $\zeta(s)$

De la ecuación (2.11) se sigue que $\zeta(-2n) = 0$ para todo natural n. Estos valores son llamados *ceros triviales* de $\zeta(s)$ y se trata de los únicos ceros tales que Re $s < 0$. Por otra parte, los ceros de $\xi(s)$ son llamados *ceros no triviales* de $\zeta(s)$. Estos ceros no se denotan por $\rho = \beta + i\gamma$. De la ecuación (2.10) se deduce que $|\gamma| \geq 1$. De hecho, se sabe que el primer cero no trivial $\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, tiene parte imaginaria $\gamma_1 = 14{,}1347...$. Riemann probó que existe una infinidad de ceros no triviales y afirmó que deben estar ubicados en la recta Re $s = 1/2$. Esta afirmación, aún sin demostración, es conocida como *La Hipótesis de Riemann* y es uno de los llamados *Problemas del Milenio* (Ver [2]).

Teorema 2.4. *Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ estan en la franja crítica* $0 \leq \text{Re } s \leq 1$.

Demostración: Sea ρ es un cero no trivial. Según las propiedades de la función $\xi(s)$, se tiene que $\overline{\rho}$, $1-\rho$ y $1-\overline{\rho}$ también son ceros no triviales. Dado que Re $\rho \leq 1$ se sigue que $1 \geq \text{Re } (1-\rho) = 1 - \text{Re } \rho$, o sea Re $\rho \geq 0$. Por lo tanto $0 \leq \text{Re } \rho \leq 1$. $\square$

Teorema 2.5. *La función $\xi(s)$ es una función entera de orden 1.*

Demostración: Recordemos que

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{\infty}(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\omega(x)dx.$$

Dado que $e^{-\pi x} \leq \omega(x) \leq 2e^{-\pi x}$, si $x \geq 1$ y de la ecuación funcional de $\Gamma(s)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\max_{|s|\leq R} |\ \xi(s)\ | = \max_{|s|\leq R} |\ \xi(1-s)\ | &\leq \max_{\substack{|s|\leq 1+R \\ \text{Re } s\geq 1/2}} |\ \xi(s)\ | \\
&\leq 1 + (R+1)^2 \int_1^{\infty} 2(x^R + x^R)e^{-x}dx \leq 1 + 10R^2 \int_1^{\infty} x^R e^{-x}dx \\
&\leq 1 + 10R^2 \int_1^{\infty} x^{[R]+1}e^{-x}dx \leq 1 + 10R^2\Gamma([R]+2) \leq 1 + 10R^2([R]+1)! \\
&\leq 20R^2 e^{10(R+1)\log(R+1)} \leq e^{100R\log R} \ll e^{R^{1+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

si $\varepsilon > 0$ y $R > R_o(\varepsilon) > 0$. Por lo tanto, el orden de $\xi(s) \le 1$.

Por otro lado, recuerde que

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Finalmente, para $s = 2n+1, n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}\xi(2n+1) &\ge n^2\pi^{-n-1}\Gamma(n+1) = n^2\pi^{-n-1}n! \ge e^{\frac{1}{10}n\log n-(n+1)\log\pi}\\ &\ge e^{\frac{1}{100}n\log n} \ge e^{CR\log R}. \quad \square\end{aligned}$$

Dado que el orden de la función entera $\xi(s)$ es 1 y recordando que $\xi(0) = 1$, en virtud del Teorema 1.1 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Tiene validez la fórmula*

$$\xi(s) = e^{As}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}, \tag{2.12}$$

donde el producto esta tomado sobre todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ y A es una constante absoluta.

De hecho se puede probar que $A = -\gamma/2 - 1 + \frac{1}{2}\log 4\pi$, aquí γ es la constante de Euler. Utilizando el corolario anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Tiene lugar la siguiente igualdad*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right) + A_0, \tag{2.13}$$

donde ρ_n son todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ y A_0 es una constante absoluta.

Lema 2.3. *En la región* Re $s > 1$, *tiene lugar la fórmula*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{2.14}$$

Demostración: Si Re $s > 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda(m)}{m^s} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{m|l}\Lambda(m) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log l}{l^s} = -\zeta'(s). \quad \square$$

Teorema 2.7. *Sean $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, los ceros no triviales de la función zeta. Si $T \geq 2$, entonces tiene lugar la estimación*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} = O(\log T). \tag{2.15}$$

Demostración: Para $s = 2 + iT$ tenemos

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\Big)\Big| \leq \sum_{n\leq T}\Big(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\Big) + \sum_{n>T}^{\infty}\frac{|s|}{4n^2} \leq \log T + 1.$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned} -\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\Big) - B_0\Big\} - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\Big) \\ &\leq c_1 \log T - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\Big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Además, por el Lema 2.3

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq \Big|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\Big| \leq c_2,$$

luego

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\Big) \leq c_3 \log T.$$

Por otro lado

$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_n} = \mathrm{Re}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)} = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} \geq \frac{0.5}{1+(T-\gamma_n)^2}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \ll \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\Big) \ll \log T. \quad \square$$

Corolario 2.3. *El número de ceros ρ_n de la función zeta para los cuales $T \leq \mathrm{Im}\rho_n \leq T+1$ no sobrepasa a $c_4 \log T$.*

Demostración: Note que

$$\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \geq \frac{1}{1+(T-(T+1))^2} \geq \frac{1}{2},$$

donde $\gamma_n = \text{Im } \rho_n \in [T, T+1]$. Entonces

$$\sum_{T\leq\gamma_n\leq T+1} 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq c_4 \log T. \quad \square$$

Corolario 2.4. *Para $T \geq 2$, se tiene*

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{|T-\gamma_n|^2} = O(\log T).$$

Demostración: Sigue de

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{|T-\gamma_n|^2} \leq \sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{2}{1+|T-\gamma_n|^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+|T-\gamma_n|^2} = O(\log T). \quad \square$$

Corolario 2.5. *Sea $s = \sigma + it$, con $-1 \leq \sigma \leq 2$, , $|t| > 2$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log |t|). \tag{2.17}$$

Demostración: Sea $s = \sigma + it$, $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \geq 2$. Entonces

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \Big) \Big| \leq \sum_{n\leq|t|+2} \frac{2}{n} + \sum_{n>|t|+2} \frac{|\sigma+it|}{n^2} \leq c \log(|t|).$$

Por lo tanto, del Teorema 2.6, se tiene

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \Big) + O(\log |t|).$$

Al restar en la última igualdad $\zeta'(2+it)/\zeta(2+it)$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + O(\log |t|) \\ &= \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + \\ &\quad + \sum_{|t-\gamma_n|>1} \left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + O(\log |t|). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Note que

$$\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{2+it-\rho_n} = O(\log|t|);$$

$$\sum_{|t-\gamma_n|>1} \Big|\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\Big| \leq \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{2-\sigma}{(\gamma_n-t)^2} \ll \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{(\gamma_n-t)^2}.$$

Sustituyendo estas dos últimas estimaciones en (2.18) y aplicando el Corolario anterior, se concluye

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2} + O(\log|t|)\\ &= \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log|t|). \quad \square\end{aligned}$$

Definición 2.2. *Para $T \geq 2$, $0 \leq \sigma \leq 1$, se define la función*

$$N(T) = \sum_{0<Im\ \rho\leq T} 1.$$

Es decir, $N(T)$ es el número de ceros no triviales de la función zeta en el rectángulo $0 < \operatorname{Im}\rho \leq T$.

Del Corolario 2.3 se obtiene que $N(T) \ll T\log T$. En 1895 Mangoldt demostró que para $T \geq 2$, tiene lugar la fórmula asintótica

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{2.19}$$

Teorema 2.8. (C. J. de La Valle Poussin). *Existe una constante absoluta $c > 0$ tal que en la región*

$$\operatorname{Re} s = \sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}, \tag{2.20}$$

la función $\zeta(s)$ es libre de ceros.

Demostración: La función $\zeta(s)$ tiene un polo en el punto $s = 1$ y por lo tanto no tiene ceros para cierto número positivo $\gamma_0 > 0$ en el dominio $|s-1| \leq \gamma_0$. Sea $\rho = \beta + i\gamma$ un cero de $\zeta(s)$; claramente $|\gamma| > \gamma_0$. Sea $1 < \sigma \leq 2$. Entonces, según al Lema 2.3 se tiene

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} e^{-it\log n}.$$

Por lo tanto

$$-\text{Re}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \cos(t \log n).$$

La desigualdad trigonométrica $3 + 4\cos\phi + \cos(2\phi) = 2(1+\cos\phi)^2 \geq 0$, es válida para todo ϕ real. Entonces se tiene

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\left(-\text{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) + \left(-\text{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)}\right) \geq 0. \tag{2.21}$$

Dado que $\sigma > 1$, entonces tiene lugar la siguiente ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{s}} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log|t|+2).$$

Si $s = \sigma$, tenemos

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\beta_n-i\gamma_n} + \frac{1}{\beta_n+i\gamma_n}\right) + O(1) \leq \frac{1}{\sigma-1} + c_1, \tag{2.22}$$

donde $c_1 > 0$. Para $s = \sigma + it$, $|t| \geq \gamma_0$, se tiene

$$-\text{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + c_2\log(|t|+2),$$

donde $c_2 > 0$. Dado que $0 \leq \text{Re}\ \rho_n = \beta_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $\text{Re}\ s > 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Re}\,\frac{1}{s-\rho_n} &= \text{Re}\,\frac{1}{\sigma-\beta_n+i(t-\gamma_n)} = \frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} \geq 0,\\
\text{Re}\,\frac{1}{\rho_n} &= \frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\text{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \leq -\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} + c_2\log(|t|+2). \tag{2.23}$$

Además

$$-\text{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)} \leq c_2(\log(2|t|+2). \tag{2.24}$$

Sustituyendo las estimaciones (2.22), (2.23) y (2.24) en (2.21), deducimos

$$\frac{3}{\sigma-1} + c_3\log(|t|+2) - \frac{4(\sigma-\beta_n)}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} \geq 0,$$

donde $c_3 > 0$. Esta última desigualdad se cumple para todo t tal que $|t| \geq \gamma_0$ y $1 < \sigma \leq 2$. Por lo tanto, si

$$t = \gamma_n, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{2c_3 \log(|\gamma_n| + 2)},$$

entonces

$$\frac{4}{\sigma - \beta_n} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + c_3 \log(|\gamma_n| + 2).$$

Finalmente

$$\beta_n \leq 1 - \frac{1}{14c_3 \log(|\gamma_n| + 2)}; \quad c = \frac{1}{14c_3}. \quad \square$$

2.4. Representación de la función de Chebyshev a través de una suma sobre los ceros de $\zeta(s)$

Definición 2.3. *Una serie de Dirichlet es una expresión de la forma*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{2.25}$$

donde a_n son números complejos llamados coeficientes de la serie de Dirichlet.

El método de integración compleja en particular permite escribir a la función de Chebyshev en términos de la serie de Dirichlet

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Lema 2.4. *Sean $a > 0$, $T \geq 2$ y $b > 0$ números reales. Entonces para $a \neq 1$, se cumple*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{si} \quad a > 1; \\ O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{si} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Demostración: Sean $a > 1$, $u > b$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{a^s}{s} ds - I_1 - I_2 - I_3,$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b+iT}^{-u+iT} \frac{a^s}{s} ds, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-u+iT}^{-u-iT} \frac{a^s}{s} ds, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-u-iT}^{b-iT} \frac{a^s}{s} ds.$$

Por el teorema de Cauchy, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds = 1 - I_1 - I_2 - I_3.$$

Note que $|I_1| = |I_3|$. Valorizemos I_1

$$|I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-u}^{b}\frac{a^{\sigma+it}}{\sigma+it}d\sigma\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{b}\frac{a^\sigma}{T}d\sigma \leq \frac{a^b}{2\pi T\log a}.$$

Para I_2, tenemos

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{T}^{-T}\frac{a^{-u+it}}{-u+it}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{a^{-u}}{u}dt \leq \frac{a^{-u}}{2\pi u}2T,$$

de esta estimación, notamos que $|I_2| \to 0$ cuando $u \to \infty$. De esta forma, tomando $u = \frac{2T}{a^b/T\log a} + 10$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds = 1 + O\left(\frac{a^b}{T\log a}\right), \qquad a > 1.$$

Supongamos ahora que $0 < a < 1$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^s}{s}ds - I_1 - I_2 - I_3 = -(I_1 + I_2 + I_3),$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{b+iT}^{u+iT}\frac{a^s}{s}ds, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{u+iT}^{u-iT}\frac{a^s}{s}ds, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-iT}^{b-iT}\frac{a^s}{s}ds.$$

Valorizemos I_1

$$|I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{b}^{u}\frac{a^{\sigma+it}}{\sigma+it}d\sigma\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{b}^{u}\frac{a^\sigma}{T}d\sigma \leq \frac{-a^u + a^b}{2\pi T\log a} \leq \frac{a^b}{2\pi T|\log a|}.$$

Para I_2 tenemos

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{T}^{-T} \frac{a^{-u+it}}{-u+it}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{a^u}{u}dt \leq \frac{a^u}{2\pi u}2T,$$

de este hecho, notamos que $|I_2| \to 0$ cuando $u \to \infty$. De esta forma

$$\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}ds = O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), \qquad 0 < a < 1.$$

El Lema está demostrado. $\square$

Lema 2.5. *Para la función de Chebyshev $\psi(x)$ tiene lugar la identidad*

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}ds + O(1),$$

donde $x = N + 1/2$, N es un número natural, $T \geq 2$ y $b = 1 + \frac{1}{\log x}$.

Demostración: Del Lema 2.3, para Re $s > 1$ se tiene

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{s}\frac{x^s}{n^s}.$$

Si s varia en el segmento con los extremos $b - iT$, $b + iT$, resulta

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{s}\frac{x^s}{n^s}\Big| \leq \frac{x^b}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^b} < \infty.$$

Luego

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{n^s}ds.$$

Para $x \geq 2$ tenemos

$$I = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{n^s}ds + \sum_{n>x}\Lambda(n)\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{n^s}ds.$$

Por el Lema anterior

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n\le x}\Lambda(n)\Big(1+O\Big(\frac{(\frac{x^b}{n^b})}{T|\log\frac{x}{n}|}\Big)\Big)+\sum_{n>x}\Lambda(n)O\Big(\frac{(\frac{x}{n})^b}{T|\log\frac{x}{n}|}\Big)\\ &= \psi(x)+O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^b|\log\frac{x}{n}|}\right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \Big|\log\frac{x}{n}\Big| &\ge \text{mín}\left(\Big|\log\frac{n-1/2}{n}\Big|,\log\frac{n+1/2}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(2n)^k}>\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(2n)^2}>\frac{1}{3n}, \end{aligned}$$

pues $4n^2>3n$, $4n>3$, para $n\in\mathbb{N}$. Finalmente

$$I=\psi(x)+O\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}\Big)=\psi(x)+O(1). \quad \square$$

Teorema 2.9. *Sean $2\le T\le x$, $x=N+1/2$, $N\in\mathbb{Z}$. Entonces*

$$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right), \tag{2.26}$$

donde ρ son los ceros no triviales de la función zeta.

Demostración: Sean $b=1+\frac{1}{\log x}$ y $s=\sigma+iT_1$, donde $-1/2\le\sigma\le 2$, $T\le T_1\le T+1$. Aquí T_1 es elegido de tal forma que la distancia de la línea Im $s=T_1$ a el cero más cercano de $\zeta(s)$ es $\gg\log^{-1}T$ (ver Corolario 2.3). Aplicando el Lema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds+O(1)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds-I_1-I_2-I_3+O(1), \end{aligned}$$

donde

$$I_1=\int_{b+iT_1}^{-1/2+iT_1}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds,\quad I_2=\int_{-1/2+iT_1}^{-1/2-iT_1}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds,\quad I_3=\int_{-1/2-iT_1}^{b-iT_1}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds.$$

Por el Teorema 2.6 y del teorema de Cauchy, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Big(\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\Big)- -\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\Big)+C\Big)\cdot\frac{x^s}{s}ds = x-\sum_{|\mathrm{Im}\ \rho|\leq T_1}\frac{x^\rho}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Estimemos I_1. Por el Corolario 2.5 tenemos

$$I_1 = \int\limits_{b+iT_1}^{-1/2+iT_1}\Big(-\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log|t|+2)\Big)\cdot\frac{x^s}{s}ds.$$

Note $|s-\rho_n|=|\sigma-\beta_n+i(T_1-\gamma_n)|\geq\frac{c_1}{\log T}$, $c_1>0$.
Por lo tanto

$$\Big(-\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log|t|+2)\Big)\frac{x^s}{s}\ll\log^2 T\frac{x}{T}.$$

Luego

$$I_1 = O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) = I_3.$$

Estimemos I_2. Para $s=-1/2+it$, $|t|\leq T_1$, se tiene

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log|t|+2)\right|\ll\log T.$$

Finalmente

$$|I_2|\ll\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T_1}^{T_1}\log T\left|\frac{x^{-1/2+it}}{-1/2+it}\right|dt\ll x^{-1/2}\log T\left(1+\int\limits_{1}^{T_1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1/4}}\right)$$

$$\ll x^{-1/2}\log T\left(1+\int\limits_{1}^{T_1}\frac{dt}{t}\right)\ll x^{-1/2}\log^2 T\ll\frac{x\log^2 x}{T}. \quad\square$$

Capítulo 3

Teorema del Valor Medio de Vinogradov y su aplicación a la función $\zeta(s)$

Since 1934 the analytic theory of numbers has been largely trasformed by the work of Vinogradov. This work, which has led to remarkable new results, is characterized by its supreme ingenuity and great power.

K. Roth and A. Davenport.[1]

En este capítulo presentamos el Teorema del Valor Medio de Vinogradov y abordaremos una de sus profundas implicaciones en el estudio de la función zeta de Riemann; el orden de la función $\zeta(s)$ en cierta región. Además, presentamos el mejor resultado hasta hoy conocido sobre la región libre de ceros de la función $\zeta(s)$.

Sean P un entero suficientemente grande, y k, n enteros positivos. Dados los enteros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se denota por $J_{k,n}(P; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ al número de soluciones enteras del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_{2k} = \lambda_1 \\ x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{2k}^2 = \lambda_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n - x_{k+1}^n - \cdots - x_{2k}^n = \lambda_n \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$.

[1] Fragmento del prefacio de [17].

El número $J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ se puede escribir en la siguiente forma integral

$$J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x\leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)} \right|^{2k} e^{2\pi i(-\alpha_1\lambda_1-\cdots-\alpha_n\lambda_n)}\, d\alpha_1\cdots d\alpha_n.$$

Si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, entonces se denota $J_{k,n}(P) = J_{k,n}(P;0,\ldots,0)$ y además la expresión integral

$$J_{k,n}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x\leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)} \right|^{2k} d\alpha_1\cdots d\alpha_n,$$

se considera como el valor medio de la función

$$F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \left| \sum_{x\leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)} \right|^{2k},$$

donde $0\leq \alpha_1,\ldots,\alpha_n \leq 1$.

Se puede verificar fácilmente el siguiente Lema.

Lema 3.1. *Son justas las siguientes relaciones:*

a)
$$J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \leq J_{k,n}(P),$$

b)
$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = P^{2k},$$

c)
$$|\lambda_1| < kP, \quad |\lambda_2| < kP^2, \quad \ldots, \quad |\lambda_n| < kP^n,$$

d)
$$(2k)^{-n}P^{2k-(n^2+n)/2} \leq J_{k,n}(P),$$

e)
$$\Big| \sum_{x\leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n)} \Big|^{2k} = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) e^{2\pi i(-\alpha_1\lambda_1-\alpha_2\lambda_2-\cdots-\alpha_n\lambda_n)},$$

f)

$$\sum_{x\le P}\Big|\sum_{y\le P} e^{2\pi i(\alpha_1 xy+\alpha_2 x^2y^2+\cdots+\alpha_n x^n y^n)}\Big|^{2k}$$
$$\le \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(P;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\Big|\sum_{x\le P} e^{2\pi i(-\alpha_1\lambda_1 x-\alpha_2\lambda_2 x^2-\cdots-\alpha_n\lambda_n x^n)}\Big|.$$

3.1. Teorema del Valor Medio de Vinogradov

El teorema del valor medio de Vinogradov establece una estimación para $J_{k,n}(P)$ y se trata de una poderosa herramienta que ha encontrado aplicaciones en el estudio de problemas clásicos de la teoría de los números tales como el problema de Waring y propiedades acerca de la función zeta de Riemann [2]. El teorema del valor medio es por si mismo un tema de estudio tan profundo que describir todos los detalles nos obligaría a desviar la atención de nuestro objetivo particular, por tal razón será presentado sin demostración. Sin embargo, en esta sección estudiaremos con detalle el resultado de Vinogradov para obtener una estimación no trivial de la llamada suma zeta.

Teorema 3.1. (Valor medio de Vinogradov). *Sean r entero $r\ge 1$, $k\ge n^2+nr$ y $P\ge P_0$. Entonces tiene lugar la estimación*

$$J_{k,n}(P)\le (4n)^{4kr}P^{2k-\frac{n^2+n}{2}+\delta_r},$$

donde

$$\delta_r=\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^r.$$

Definición 3.1. *Las sumas de la forma*

$$S_1=\sum_{n=1}^{N} n^{it};\qquad S_2=\sum_{n=M+1}^{2M} n^{it},$$

son llamadas sumas zetas.

Para la estimación de estas sumas se requieren los siguientes lemas.

Lema 3.2. *Sean $\alpha>0$ un número real y $k\in\mathbb{Z}$ y $P\ge 1$ enteros fijos. Entonces se tiene*

$$\sum_{1\le x\le P} e^{2\pi i\alpha kx}\le \text{mín}\Big(P,\frac{1}{||\alpha k||}\Big),$$

donde $||x||$ esta definida en (1.1).

[2]Puede consultarse [10].

Demostración: Supongamos que αk no es un entero, entonces

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha kx}\Big| = \frac{|e^{2\pi i\alpha kP}-1|}{|e^{2\pi i\alpha k}-1|} = \frac{|\operatorname{sen}\pi\alpha kP|}{|\operatorname{sen}\pi\alpha k|} \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}\pi\alpha k|}.$$

Por otra parte, sabemos que $|\operatorname{sen}\pi x| \geq ||x||$. De esta forma concluimos

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha kx} \leq \min\Big(P, \frac{1}{||\alpha k||}\Big). \quad \square$$

Lema 3.3. (Dirichlet). *Sean $\alpha > 0$ y $\tau > 1$ números reales fijos. Entonces existen enteros primos relativos a, q con $1 \leq q \leq \tau$ tales que*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad |\theta| \leq 1.$$

Demostración: Sin perder generalidad podemos suponer que $\alpha < 1$. De esta manera consideremos al conjunto $\{\alpha m\}$, para $m = 0, \dots, [\tau]$ y dividamos al intervalo $[0,1]$ en $[\tau]+1$ secciones uniformes de longitud $\frac{1}{[\tau]+1}$.

Supongamos que $\{\alpha m\} \geq \frac{[\tau]}{[\tau]+1}$ para algún m. Luego

$$|\alpha m - ([\alpha m]+1)| \leq \frac{1}{[\tau]+1} < \frac{1}{\tau}; \tag{3.2}$$

en este caso tomemos $q_1 = m$ y $a_1 = [\alpha m]+1$. Por el contrario, si los $[\tau]+1$ números, $\{\alpha m\}$, están distribuidos en los intervalos

$$\Big[0, \frac{1}{[\tau]+1}\Big), \dots, \Big[\frac{[\tau]-1}{[\tau]+1}, \frac{[\tau]}{[\tau]+1}\Big).$$

Entonces existen enteros m_1 y m_2 con $0 \leq m_1 < m_2 \leq [\tau]$ que satisfacen

$$|\{m_2\alpha\} - \{m_1\alpha\}| = |\alpha(m_2 - m_1) - ([\alpha m_2] - [\alpha m_1])| \leq \frac{1}{[\tau]+1} < \frac{1}{\tau}, \tag{3.3}$$

llamemos $q_1 = (m_2 - m_1)$, $a_1 = [\alpha m_2] - [\alpha m_1]$.

Notemos que en ambos casos $q_1 \leq \tau$. Así, dividiendo las desigualdades (3.2) y (3.3) por q_1 y tomando la fracción reducida $\frac{a}{q} = \frac{a_1}{q_1}$ obtenemos

$$\alpha - \frac{a}{q} = \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a,q) = 1,\ q \leq \tau,\ |\theta| \leq 1. \quad \square$$

En particular, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existen enteros a y q con $(a,q) = 1$, $q \geq 1$ tales que

$$\alpha - \frac{a}{q} = \frac{\theta}{q^2}, \qquad |\theta| \leq 1.$$

Lema 3.4. *Sean α, β, números reales. Entonces es válida la siguiente estimación*

$$\sum_{N<k\leq N+M} \min\left\{P, \frac{1}{\|\alpha k+\beta\|}\right\} \leq 5\left(\frac{M}{q}+1\right)(P+q\log q),$$

donde

$$\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad |\theta|\leq 1.$$

Demostración: Supongamos que $0<\alpha<1$. Escribiendo $k=qt+r$ con $1\leq t\leq M/q+1$, $1\leq r\leq q$ tenemos

$$\sum_{N<k\leq N+M} \min\left\{P, \frac{1}{||\alpha k+\beta||}\right\} \leq \sum_{t=1}^{\frac{M}{q}+1}\sum_{r=1}^{q} \min\left\{P, \frac{1}{||\alpha(qt+r+N)+\beta||}\right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{M}{q}+1\right)\max_{1\leq t\leq M/q+1}\sum_{r=1}^{q}\min\left\{P, \frac{1}{||\alpha(qt+r+N)+\beta||}\right\} \\ &\leq \left(\frac{M}{q}+1\right)\sum_{r=1}^{q}\min\left\{P, \frac{1}{||\alpha r+\beta_1||}\right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otra parte, escribiendo $\beta_1=\frac{[q\beta_1]+\{q\beta_1\}}{q}$ tenemos

$$\alpha r+\beta_1 = \frac{ar+[q\beta_1]}{q}+\frac{\theta r+q\{q\beta_1\}}{q^2}.$$

Puesto que $(a,q)=1$, la expresión $y=ar+[q\beta_1]$ recorre el sistema de residuos módulo q a la vez que r. También es posible escribir $\theta r+q\{q\beta_1\}$ en términos de y, pues a pertenece al sistema reducido de residuos módulo q; es decir

$$\theta r+q\{q\beta_1\} = \theta a^{-1}(y-[q\beta_1])+q\{q\beta_1\} = \theta'(y), \quad |\theta'(y)|<2q.$$

De esta forma se tiene

$$\sum_{r=1}^{q}\min\left\{P, \frac{1}{||\alpha r+\beta_1||}\right\} = \sum_{|y|\leq q/2}\min\left\{P, \frac{1}{||\frac{y+\theta''}{q}||}\right\}, \quad |\theta''| = \left|\frac{\theta'(y)}{q}\right| < 2.$$

Si $2<|y|\leq q/2$, entonces

$$0 < \frac{|y|-2}{q} < \frac{|y|+\theta''}{q} \leq \frac{1}{2}+\frac{\theta''}{q} < 1,$$

pues $\theta''/q < 1/2$. Por lo tanto, $\frac{|y|+\theta''}{q} = \| \frac{y+\theta''}{q} \|$ y así

$$0 < \frac{|y|-2}{q} < \left\| \frac{y+\theta''}{q} \right\|.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{|y|\le q/2} \text{mín}\left\{P, \frac{1}{||\frac{y+\theta''}{q}||}\right\} &\le \sum_{|y|\le 2} \text{mín}\left\{P, \frac{1}{||\frac{y+\theta''}{q}||}\right\} + \sum_{2<|y|\le q/2} \frac{1}{||\frac{y+\theta''}{q}||} \\
&\le 5P + 2q \sum_{2<y\le q/2} \frac{1}{y-2} \le 5P + 4q\log q \\
&\le 5(P + q\log q).
\end{aligned}$$

Finalmente, de (3.4) se tiene

$$\sum_{N<k\le N+M} \text{mín}\left\{P, \frac{1}{||\alpha k+\beta||}\right\} \le 5\left(\frac{M}{q}+1\right)(P+q\log q). \quad \square$$

Teorema 3.2. *Existe una constante absoluta $c_0 > 0$ tal que para $2 \le N \le t$, tiene lugar la estimación*

$$S_1 \ll N e^{-c_0 \frac{\log^3 N}{\log^2 t}}. \tag{3.5}$$

Demostración: Notemos que

$$S_1 \ll \sum_{k=0}^{[\log N]+1} |S_2(k)|,$$

donde

$$S_2(k) = \sum_{2^k<n\le 2^{k+1}} n^{it}.$$

Entonces,

$$S_1 \ll S_2(k)\log N,$$

para algún $0 \le k \le [\log N]+1$. Por tal razón es suficiente estimar a la suma zeta del tipo S_2. Efectivamente, sean $N_0 \le M \le N$ y x, y enteros tales que

$$1 \le x \le a, \quad 1 \le y \le a, \quad a = [M^{2/5}].$$

Definimos

$$S = \sum_{n=M+1}^{2M} e^{it\log(n+xy)} = \sum_{n=M+xy+1}^{2M+xy} n^{it}.$$

Entonces

$$S_2 = S + 2\theta a^2, \quad |\theta| \le 1.$$

Luego

$$a^2 S_2 = \sum_{n=M+1}^{2M} \sum_{x\le a}\sum_{y \le a} e^{it\log(1+xy/n)} e^{it\log n} + 2\theta a^4.$$

Por lo tanto

$$S_2 \ll M a^{-2} \max_{M+1\le n\le 2M} |T(n)| + a^2, \quad T(n) = \sum_{x\le a}\sum_{y\le a} e^{it\log(1+xy/n)}.$$

Tomamos la expansión en serie de Taylor de $\log(1+xy/n)$, $0 < xy/n < 1$, y usamos la desigualdad $|e^{iu}-1| = 2|\operatorname{sen} u/2| \le u$ para obtener

$$e^{it\log(1+xy/n)} = e^{itF_r(x,y)} + t\theta_1(a^2n^{-1})^{r+1}, \quad |\theta_1| \le 1;$$

donde

$$F_r(x,y) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} k^{-1} (xyn^{-1})^k.$$

Escogemos

$$r = \left[5.01 \frac{\log t}{\log M}\right]. \tag{3.6}$$

Con tal elección se tiene

$$Mt(a^2n^{-1})^{r+1} \le MtM^{-(r+1)/5} \le (Mt)e^{\left(-\frac{1}{5}\log M\right)\left(5.01\frac{\log t}{\log M}\right)} = Mt^{-1/500}.$$

Por lo tanto

$$S_2 \ll Ma^{-2} \max_{M+1\le n\le 2M} U(n) + M^{4/5} + Mt^{-1/500},$$

donde

$$U(n) = \Big|\sum_{x\le a}\sum_{y\le a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r)}\Big|, \quad \left(\alpha_j = (-1)^{j-1}\frac{t}{2\pi j n^j},\ j = 1,\ldots,r\right).$$

De la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\Big(\sum_{1\le k\le n} u_k v_k\Big)^r \le \Big(\sum_{1\le k\le n} u_k\Big)^{r-1} \sum_{1\le k\le n} u_k (v_k)^r, \tag{3.7}$$

para $u_k, v_k \geq 0$ y $r \in \mathbb{N}$. Elevando a la potencia $2k$ a $U(n)$, aplicando (3.7) y después el Lema 3.1, obtenemos

$$\begin{aligned} U^{2k}(n) &\leq a^{2k-1} \sum_{x \leq a} \Big| \sum_{y \leq a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r)} \Big|^{2k} \\ &\leq a^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \Big| \sum_{x \leq a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \Big|. \end{aligned}$$

Nuevamente aplicando (3.7) y después el Lema 3.1

$$\begin{aligned} U^{4k^2}(n) &\leq a^{4k^2-2k} \Big(\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \Big)^{2k-1} \times \\ &\qquad \times \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \Big| \sum_{x \leq a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \Big|^{2k} \\ &\leq J_{r,k}(a) a^{8k^2-4k} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} \Big| \sum_{x \leq a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \Big|^{2k}. \end{aligned}$$

Por los Lemas 3.1 y 3.2

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} \Big| \sum_{x \leq a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \Big|^{2k} \\ &= \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_r \\ \mu_1, \ldots, \mu_r}} J_{k,r}(\mu_1, \ldots, \mu_r) e^{2\pi i(-\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 - \cdots - \alpha_r \lambda_r \mu_r)} \\ &\leq \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_r} J_{k,r}(a) \Big| \sum_{\lambda_1} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1)} \Big| \cdots \Big| \sum_{\lambda_r} e^{2\pi i(\alpha_r \lambda_r \mu_r)} \Big| \\ &\leq J_{k,r}(a) \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_r} \text{mín}(2A_1, ||\alpha_1 \mu_1||^{-1}) \cdots \text{mín}(2A_r, ||\alpha_r \mu_r||^{-1}) \\ &\leq J_{k,r}(a) \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| < A_m} \text{mín}(2A_m, ||\alpha_m \mu_m||^{-1}), \end{aligned}$$

donde $A_m = 2ka^m$ para $m = 1, \ldots, r$. Sea m de tal manera que

$$1 + \Big[\frac{2 \log t}{\log M} \Big] \leq m \leq \Big[\frac{5 \log t}{\log M} \Big].$$

Por el Lema 3.4, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_m} \text{mín}(2A_m, ||\alpha_m \mu_m||^{-1}) &\leq 5 \Big(\frac{2A_m}{q_m} + 1 \Big) (2A_m + q_m \log q_m) \\ &\leq 5(2A_m)^2 \log q_m \Big(\frac{1}{q_m} + \frac{1}{A_m} + \frac{q_m}{4A_m^2} \Big), \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m} + \frac{\theta_m}{q_m^2}, \quad |\theta_m| \leq 1;$$
$$a_m = (-1)^{m-1}, \quad q_m = [2\pi m n^m t^{-1}] > 1.$$

Tenemos que $\log q_m \leq m \log(2M) \leq 2m \log M$. Para $k \ll r^2$, $t \geq t_0$, $m \geq 2\log t/\log M$, se tiene

$$q_m \geq mn^m t^{-1} \geq mM^m t^{-1} \geq 8ka^m = 4A_m.$$

Luego

$$\frac{1}{q_m} + \frac{1}{A_m} + \frac{q_m}{4A_m^2} \leq \frac{q_m}{A_m^2} \leq \frac{2\pi m 2^m M^m}{4ta^{2m}} \leq m2^{2m+1} M^{m/5} t^{-1}.$$

Esto da

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m|<A_m} \text{mín}(2A_m, ||\alpha_m \mu_m||^{-1}) \\
&\leq \prod_{m=1}^{r} (2A_m)^2 \prod_{1+[2\log t/\log M] \leq m \leq [5\log t/\log M]} (m^2 2^{2m+5} M^{m/5} t^{-1} \log M) \\
&\leq W(4k)^{2r} 2^{8r^2} a^{r^2+r} \log^r M,
\end{aligned}$$

donde

$$W = \prod_{1+[2\log t/\log M] \leq m \leq [5\log t/\log M]} M^{m/5} t^{-1}.$$

Para $b > a \geq 1$ enteros, se tiene

$$\sum_{a+1 \leq n \leq b} n = \frac{1}{2}(b-a)(b+a+1).$$

Por lo tanto escribiendo $Y = \log t/\log M$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\log W &= \frac{\log M}{10}\{([5Y]-[2Y])([5Y]+[2Y]+1) - 10Y([5Y]-[2Y])\} \\
&\leq \frac{\log M}{10}([5Y]-[2Y])(1-3Y) \leq -\frac{\log M}{10}(3Y-1)^2,
\end{aligned}$$

aquí usamos el hecho de que $[x] - [y] \geq x - y - 1$. Ahora observe que podemos suponer que $Y = \log t/\log M \geq 10$, esto es, podemos restringirnos al rango

$$e^{\log^{2/3} t} \leq M \leq t^{1/10}.$$

La condición $Y \geq 10$ nos da

$$\log W \leq -\frac{\log M}{10}\Big(\frac{29}{10}Y\Big)^2 = -\frac{841\log^2 t}{1000\log M}.$$

Luego

$$\prod_{m=1}^{r}\sum_{|\mu_m|<A_m} \text{mín}(2A_m, ||\alpha_m\mu_m||^{-1}) \leq (4k)^{2r}2^{8r^2}a^{r^2+r}e^{-\frac{841\log^2 t}{1000\log M}}\log^r M,$$

y

$$U^{4k^2}(n) \leq J_{k,r}^2(a)(4k)^{2r}2^{8r^2}a^{8k^2-4k+r^2+r}e^{-\frac{841\log^2 t}{1000\log M}}\log^r M.$$

Aplicamos la estimación de $J_{k,r}(a)$ del Teorema 3.1 con $k=(R+1)r^2$, siendo R un entero explícito que más adelante determinaremos. De esta forma obtenemos

$$U(n) \leq \Big\{((4k)^{2r}2^{8r^2}(4r)^{8krR})^{(2k)^{-2}}\Big\}\,a^{(r^2+r)(2k)^{-2}(1-r^{-1})^{Rr}}a^2(\log M)^{r(2k)^{-2}}e^{-\frac{841\log^2 t}{4000k^2\log M}}.$$

El primer factor, entre corchetes, en la parte derecha de la desigualdad, sólo depende de r. Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$ y $M > M_0(\varepsilon)$ se tiene

$$(\log M)^{r(2k)^{-2}} < e^{\frac{\varepsilon\log^2 t}{4000k^2\log M}}.$$

La condición $M \leq t^{1/10}$ asegura por (3.6) que $r \geq 50$, luego $r^2+r \leq (51/50)r^2$. Además, usando el hecho $(1-r^{-1})^{rR} \leq e^{-R}$, tenemos

$$a^{(r^2+r)(2k)^{-2}(1-r^{-1})^{Rr}} \leq e^{\frac{2}{5}(\log M)\frac{51}{50}r^2e^{-R}(2k)^{-2}} = e^{\frac{51e^{-R}\log M}{500(R+1)^2r^2}}.$$

Por lo tanto

$$U(n) \ll a^2e^{\left(\frac{51e^{-R}}{500}+\frac{\varepsilon-841}{100{,}401}\right)\frac{\log M}{r^2(R+1)^2}}.$$

Ahora, escogemos a $R \geq 0$ un entero tal que minimize a

$$f(R) = \Big(\frac{51e^{-R}}{500} - \frac{841}{100{,}401}\Big)(R+1)^{-2}$$

Un cálculo muestra que el valor óptimo es $R=4$, el cual proporciona $f(R) = -1/3841{,}2987\ldots$. Por lo tanto, para ε suficientemente pequeño obtenemos

$$U(n) \ll a^2e^{-\frac{\log M}{3842r^2}} \leq a^2e^{-\frac{\log^3 M}{96{,}500\log^2 t}}.$$

Finalmente se tiene

$$S_2 \ll Me^{-c_1\frac{\log^3 M}{\log^2 t}}. \quad \square$$

Teorema 3.3. *Existe una constante absoluta $c_1 > 0$ tal que para $\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log^{2/3}|t|}$ se tiene*

$$\zeta(\sigma + it) = O(\log^{2/3}|t|), \qquad |t| \geq 2. \tag{3.8}$$

Demostración: Podemos suponer que $\sigma \leq 2$. Sean $c_1 = c_0/2$, donde c_0 es la constante del Teorema anterior, $N = [e^{\log^{2/3}|t|}]$ y $x = |t|$. Por el Lema 2.2 se tiene

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq N} \frac{1}{n^s} + \sum_{N<n\leq x} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

Valorizemos la primera suma

$$\Big|\sum_{n\leq N} \frac{1}{n^s}\Big| \leq \sum_{n\leq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u} du$$
$$\leq 1 + \int_1^N N^{c_1 \log^{-2/3}|t|} \frac{du}{u} = O(\log N) = O(\log^{2/3}|t|).$$

Para la valorización de la segunda suma apliquemos la fórmula de sumación de Abel y el Teorema anterior

$$\Big|\sum_{N<n\leq x} \frac{1}{n^s}\Big| \leq \sigma \int_N^x |C(u)| u^{-(1+\sigma)} du + |C(x)| x^{-\sigma}$$
$$= O\Big(\int_N^x u^{-\sigma} e^{-c_0 \frac{\log^3 u}{\log^2|t|}} du\Big) + O(|t|^{1-(\sigma+c_0)})$$
$$= O\Big(\int_{\log N}^{\log x} e^{v(1-\sigma) - c_0 \frac{v^3}{\log^2|t|}} dv\Big) + O(1)$$
$$= O\Big(\int_{\log N}^{\log x} e^{-c_0/2 \frac{v^3}{\log^2|t|}} dv\Big) + O(1) = O(\log^{2/3}|t|).$$

Se concluye la demostración. $\square$

3.2. Región libre de ceros de la función zeta de Riemann

Establecer una región libre de ceros en la franja crítica es de importancia fundamental en la teoría de la función zeta. Una aplicación inmediata se da en la estimación del término de error en el teorema de los números primos. El siguiente teorema presenta el resultado sobre la región libre de ceros obtenido por Vinogradov, resultado que permanece sin mejorar desde 1942.

Teorema 3.4. (Vinogradov). Existe una constante absoluta $c > 0$ tal que $\zeta(s) \neq 0$ en la región
$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log^{2/3}(|t|+2)\log\log(|t|+2)}.$$

Demostración: Mostremos que si $\rho = \beta + i\gamma$ es tal que $\zeta(\rho) = 0$, entonces existe una constante absoluta $c_0 > 0$ tal que
$$\beta \leq 1 - \frac{c_0}{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)}.$$

Sea
$$\beta = 1 - \frac{d}{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)}.$$
Vamos a mostrar que $d \geq c_0 > 0$. Si $d > 1$ el resultado es trivial. Entonces podemos suponer $d \leq 1$. Sea $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ tal que $\frac{1}{\log\log(2\gamma+2)} < \frac{c_1}{10}$, donde c_1 es la constante del Teorema anterior. Luego
$$\frac{d}{\log\log(2\gamma+2)} < \frac{c_1}{10}. \tag{3.9}$$

Sea
$$s_0 = 1 + \frac{4d}{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)} + i\gamma = \beta_0 + i\gamma.$$
Del punto s_0 trazemos un círculo de radio r, donde $r = \frac{c_1}{\log^{2/3}(2\gamma+2)}$. Luego el punto ρ estará dentro del círculo con centro en s_0 y radio $r/2$, ya que de (3.9) se obtiene
$$\frac{c_1}{2\log^{2/3}(2\gamma+2)} \geq \frac{5d}{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)} = |\rho - s_0|.$$

Sea $F(s) = \zeta(s)$ en el Corolario 1.3. Estimemos $\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|$ en el círculo $|s - s_0| \leq r$. Por el Teorema 3.3, en el círculo $|s - s_0| \leq r$ se tiene que $\zeta(s) \ll \log^{2/3}(t+2)$. Por otro lado
$$\begin{aligned}\frac{1}{|\zeta(s_0)|} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mu(n)}{n^{s_0}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta_0}} \leq 1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{u^{\beta_0}}du \\ &= 1 + \frac{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)}{4d}.\end{aligned}$$

Luego $\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \leq \frac{\log^{4/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)}{d} \leq c_2\frac{\log^2(2\gamma+2)}{d} =: M$. De manera análoga obtenemos una estimación en el círculo $|s-s_1| \leq r$, donde $s_1 = \beta_0 + 2i\gamma$. Dado que $\zeta(s) \neq 0$ en las regiones

$$|s-s_0| \leq \frac{r}{2}, \qquad \text{Re }(s-s_0) \geq 0;$$
$$|s-s_1| \leq \frac{r}{2}, \qquad \text{Re }(s-s_1) \geq 0.$$

Además, en la región $|s-s_0| \leq \frac{r}{2}$, Re $(s-s_0) \leq 0$, se tiene que $\zeta(\rho) = 0$. Entonces, aplicando el Corolario 1.3 tenemos

$$\begin{aligned} \text{Re }\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} &\geq -\frac{4}{r}\log M + \text{Re }\frac{1}{s_0-\rho} \\ &= -\frac{4}{c_1}\log^{2/3}(2\gamma+2)\log M + \frac{\log^{2/3}(2\gamma+2)\log\log(2\gamma+2)}{5d}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\text{Re }\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} \geq -\frac{4}{r}\log M = -\frac{4}{c_1}\log^{2/3}(2\gamma+2)\log M. \tag{3.11}$$

Por el Teorema 2.6, para $1 < \beta_0 \leq 2$, se tiene

$$-\frac{\zeta'(\beta_0)}{\zeta(\beta_0)} < \frac{1}{\beta_0-1} + c_3. \tag{3.12}$$

Por otro lado, siempre se cumple

$$3\left(-\frac{\zeta'(\beta_0)}{\zeta(\beta_0)}\right) + 4\left(-\text{Re }\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right) + \left(-\text{Re }\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)}\right) \geq 0.$$

Sustituyendo las estimaciones (3.10), (3.11) y (3.12) en la última desigualdad y simplificando, obtenemos

$$-\frac{1}{20d}\log\log(2\gamma+2) + \frac{40}{c_1}\log\log(2\gamma+2) - \frac{20}{c_1}\log d + c_4 \geq 0,$$

o bien

$$d \geq \frac{\log\log(2\gamma+2) + \frac{20}{c_1}d\log d}{\frac{40}{c_1}\log\log(2\gamma+2) + c_4}.$$

Dado que $d\log d \to 0$ si $d \to 0$, entonces de la última desigualdad vemos que $d \geq c_0 > 0$. El Teorema está demostrado $\square$

Inmediatamente se desprende el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, se cumplen las fórmulas asintóticas*

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c_1(\log x)^{3/5-\varepsilon}});$$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c_2(\log x)^{3/5-\varepsilon}}),$$

donde $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ y $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$.

Demostración: Elijase a T de tal manera que $T = e^{\log^{\frac{3}{5}} x(\log\log x)^{-3/5}}$. Por el Teorema 2.9 y el Teorema anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - x| &\leq x^{\beta} \sum_{|\mathrm{Im}\ \rho| \leq T} \frac{1}{|\rho|} + O\Big(\frac{x\log^2 x}{T}\Big) \\
&\leq x^{1-\frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} T \log\log T}} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\gamma|} + O\Big(\frac{x\log^2 x}{T}\Big) \\
&\leq x^{1-\frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} T \log\log T}} \sum_{k \leq T} \frac{\log k}{k} + O\Big(\frac{x\log^2 x}{T}\Big) \\
&\leq x^{1-\frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} T \log\log T}} \log^2 x + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) \\
&= O(xe^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} x}),
\end{aligned}$$

si $\varepsilon > 0$, $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$.

Por otro lado

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{p \leq x} 1 + \sum_{\substack{n = p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \leq \pi(x) + \sum_{\substack{n = p \leq \sqrt{x} \\ 2 \leq k \leq \log x}} 1 = \pi(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

Por la fórmula de sumación de Abel, deducimos

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= -\int_2^x \psi(u)\Big(\frac{1}{\log u}\Big)' du + \frac{\psi(x)}{\log x} + O(\sqrt{x}\log x) \\
&= -\int_2^x u\Big(\frac{1}{\log u}\Big)' du + O\left(\int_2^x ue^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} u}\Big(\frac{1}{\log u}\Big)' du\right) + O(xe^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} x}) \\
&= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\int_2^{\sqrt{x}} \frac{e^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} u}}{\log^2 u} du\right) + O\left(\int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} u}}{\log^2 u} du\right) + O(xe^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x}) + O\Big(\frac{xe^{-\frac{c_1}{\sqrt{2}}\log^{3/5-\varepsilon} x}}{\log^2 \sqrt{x}}\Big) + O(xe^{-c_1 \log^{3/5-\varepsilon} x}) \\
&= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c_2 \log^{3/5-\varepsilon} x}). \quad \square
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Densidad de los ceros de $\zeta(s)$ y la distribución de los números primos en pequeños intervalos

En este capítulo estudiaremos con detalle uno de los resultados sobre la densidad de los ceros en la franja crítica y su aplicación en el problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos.

Antes de comenzar, es necesario establecer los siguientes lemas.

Lema 4.1. *Sea $f(t)$ una función de valores complejos continuamente diferenciable en el segmento $[t_0, t_k]$, con $t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k$. Si $\delta = \min\limits_{0\leqslant r<k}(t_{r+1} - t_r)$, entonces*

$$\sum_{r=1}^{k} |f(t_r)|^2 \leq \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k} |f(t)|^2 dt + 2\left(\int_{t_0}^{t_k} |f(t)|^2 dt \int_{t_0}^{t_k} |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Demostración: Es suficiente mostrar que

$$\sum_{r=1}^{k} |f(t_r)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k} |f(t)|^2 dt + 2\int_{t_0}^{t_k} |f(t).f'(t)| dt.$$

Sea $g(t) = f^2(t)$. Para $t_r \leq x \leq t_{r+1}$, se tiene

$$\int_{x}^{t_{r+1}} g'(t) dt = g(t_{r+1}) - g(x).$$

Más adelante

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} g(t_{r+1})dx = \int_{t_r}^{t_{r+1}} g(x)dx + \int_{t_r}^{t_{r+1}}\int_{x}^{t_{r+1}} g'(t)dtdx = \int_{t_r}^{t_{r+1}} g(x)dx + \int_{t_r}^{t_{r+1}} (t-t_r)g'(t)dt.$$

Luego

$$|g(t_{r+1})| \leq \frac{1}{t_{r+1}-t_r}\int_{t_r}^{t_{r+1}} |g(x)|dx + \int_{t_r}^{t_{r+1}} |g'(t)|dt \leq \frac{1}{\delta}\int_{t_r}^{t_{r+1}} |g(x)|dx + \int_{t_r}^{t_{r+1}} |g'(t)|dt.$$

Finalmente

$$\sum_{r=1}^{k} |g(t_r)| \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k} |g(t)|dt + \int_{t_0}^{t_k} |g'(t)|dt. \quad \square$$

Lema 4.2. *Supongase que* $a_n \in \mathbb{C}$, $0 < X < Y \leq 2X$, $2 < N < M \leq 2N$. *Entonces se cumple*

$$I = \int_{X}^{Y} \Big|\sum_{N<n\leq M} a_n n^{it}\Big|^2 dt \leq (X + 32N\log N)\sum_{N<n\leq M} |a_n|^2.$$

Demostración: Observe que

$$I = \sum_{N<n,m\leq M} a_n\overline{a}_m \int_{X}^{Y}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{it}dt = (Y-X)\sum_{N<n\leq M}|a_n|^2 + W,$$

donde

$$W = -i\sum_{N<n\neq m\leq M} a_n\overline{a}_m\Big(\Big(\frac{n}{m}\Big)^{iY} - \Big(\frac{n}{m}\Big)^{iX}\Big)\Big(\log\frac{n}{m}\Big)^{-1}.$$

Luego

$$|W| \leq 4\sum_{N<n<m\leq M} |a_n||a_m|\Big(\log\frac{n}{m}\Big)^{-1}.$$

Sea $m = n + r$, $1 \leq r < M - N \leq N$, $a_n = 0$ para $n > M$, sucesivamente obtenemos

$$\log\frac{m}{n} = \log\Big(1+\frac{r}{n}\Big) = \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \cdots \geq \frac{r}{2n};\ \Big(\log\frac{m}{n}\Big)^{-1} \leq \frac{2n}{r} < \frac{2M}{r}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}|W| &\leq 8M \sum_{1\leq r<N} \frac{1}{r} \sum_{N<n<M} |a_n||a_{n+r}| \\ &\leq 8M \sum_{1\leq r<N} \frac{1}{r} \sqrt{\sum_{N<n\leq M} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{N<n\leq M} |a_{n+r}|^2} \\ &\leq 16M \log N \sum_{N<n\leq M} |a_n|^2.\end{aligned}$$

De aquí se sigue el enunciado del Lema. $\square$

Lema 4.3. *Para $x \geq 2$, se tiene*

$$\sum_{n\leq x} \tau^2(n) \ll x \log^3 x.$$

Demostración: Primero mostremos que para $x \geq 2$, se cumple

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) \ll x \log x.$$

Observe que

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d\leq x} \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv 0 (\text{mód } d)}} 1 = \sum_{d\leq x} \left[\frac{x}{d}\right] = x \sum_{d\leq x} \frac{1}{d} + O(x) \ll x \log x.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \tau^2(n) &= \sum_{n\leq x} \tau(n) \sum_{d|n} 1 = \sum_{d\leq x} \sum_{dt\leq x} \tau(dt) \ll \sum_{d\leq x} \tau(d) \sum_{t\leq x/d} \tau(t) \ll \\ &\ll x \log x \sum_{d\leq x} \frac{\tau(d)}{d}.\end{aligned}$$

Por la fórmula de sumación de Abel

$$\sum_{d\leq x} \frac{\tau(d)}{d} \ll \int_1^x \frac{u \log u}{u^2} du + \frac{x \log x}{x} \ll \log^2 x.$$

Finalmente deducimos

$$\sum_{n\leq x} \tau^2(n) \ll x \log^3 x. \quad \square$$

De manera general, se tiene

$$\sum_{n\leq x} \tau^l(n) \ll_l x (\log x)^{2^l - 1},$$

donde l es un número natural y $x \geq 2$.

4.1. Teorema de densidad

Definición 4.1. *Para $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 2$, se define la siguiente función*

$$N(\sigma, T) = \sum_{\substack{|\mathrm{Im}\rho| \leq T \\ \mathrm{Re}\rho \geq \sigma}} 1. \tag{4.1}$$

Es decir, $N(\sigma, T)$ es el número de ceros de la función zeta en el rectángulo $|\mathrm{Im}\ \rho| \leq T$, $\mathrm{Re}\ \rho \geq \sigma$.

Teorema 4.1. (Densidad de los ceros no triviales de $\zeta(s)$). Para $1/2 \leq \sigma \leq 1$, tiene lugar la siguiente estimación

$$N(\sigma, T) \ll T^{4\sigma(1-\sigma)}(\log T)^A, \quad A > 0. \tag{4.2}$$

Demostración: Sea

$$N_1(\sigma, T_1) = \sum_{\substack{\frac{T_1}{2} < \mathrm{Im}\rho \leq T_1 \\ \mathrm{Re}\rho \geq \sigma}} 1,$$

el número de ceros de $\zeta(s)$ de la forma $s = \rho$, $\mathrm{Re}\ \rho \geq \sigma$, $T_1/2 \leq \mathrm{Im}\ \rho \leq T_1$, $2 \leq T_1 \leq T$. Si tomamos $x = T_1$ en el Lema 2.2, entonces para $T_1/2 \leq t \leq T_1$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $s = \sigma + it$ tenemos

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq T_1} \frac{1}{n^s} + \frac{T_1^{1-s}}{s-1} + O(T_1^{-\sigma}).$$

Definimos a

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad (X < T_1).$$

Luego

$$M_X(s)\zeta(s) = M_X(s) \sum_{n \leq T_1} \frac{1}{n^s} + O\left(T_1^{-\sigma}|M_X(s)|\right). \tag{4.3}$$

Note que

$$M_X(s) \sum_{n \leq T_1} \frac{1}{n^s} = \sum_{m \leq X} \frac{\mu(m)}{m^s} \sum_{n \leq T_1} \frac{1}{n^s} = \sum_{l \leq XT_1} \frac{a(l)}{l^s},$$

donde

$$a(l) = \sum_{\substack{mn=l \\ 1 \leq m \leq X \\ 1 \leq n \leq T_1}} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 1; \\ 0, & \text{si } 1 < l \leq X. \end{cases} \tag{4.4}$$

Además de esto, siempre se cumple $|a(l)| \leq \tau(l)$. Ahora sea $s = \rho$, donde $\zeta(\rho) = 0$. Luego de (4.3) y de (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &\leq \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big| + O\left(T_1^{-\beta} |M_X(\rho)|\right) \\ 1 &\ll \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big|^2 + T_1^{-2\beta} |M_X(\rho)|^2. \end{aligned}$$

Sumando ambas partes de la última desigualdad por todos los ceros de $\zeta(s)$ en el rectángulo $\sigma \leq \text{Re } \rho \leq 1$, $\frac{T_1}{2} \leq \text{Im } \rho \leq T_1$, encontramos que

$$N_1(\sigma, T_1) \ll \sum_{\substack{\frac{T_1}{2} \leq \text{Im } \rho \leq T_1 \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big|^2 + \sum_{\substack{\frac{T_1}{2} \leq \text{Im } \rho \leq T_1 \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} T_1^{-2\beta} |M_X(\rho)|^2. \tag{4.5}$$

Sea

$$S(\rho) = \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big|^2.$$

Por el Corolario 2.3, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\frac{T_1}{2} \leq \text{Im } \rho \leq T_1 \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} S(\rho) &\leq \sum_{T_1/4 \leq m \leq T_1/2+1} \sum_{n=1}^{2} \sum_{\substack{2m+n-1 \leq \text{Im } \rho < 2m+n \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} S(\rho) \\ &\leq 2 \max_{1\leq n\leq 2} \sum_{T_1/4 \leq m \leq T_1/2+1} \sum_{\substack{2m+n-1 \leq \text{Im } \rho < 2m+n \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} S(\rho). \\ &\ll \log T_1 \sum_\rho{}' S(\rho), \end{aligned}$$

donde la suma $\sum_\rho'$ está tomada sobre los ceros de $\zeta(s)$ que satisfacen las condiciones $T_1/2 \leq \text{Im}\, \rho \leq T_1$, $\sigma \leq \text{Re}\, \rho \leq 1$, $|\text{Im}\, \rho - \text{Im}\, \rho'| \geq 1$. Por lo tanto (4.5) puede reescribirse como

$$N_1(\sigma, T_1) \ll \log T_1 \sum_\rho{}' \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big|^2 + \sum_{\substack{\frac{T_1}{2} \leq \text{Im } \rho \leq T_1 \\ \text{Re } \rho \geq \sigma}} T_1^{-2\beta} \Big| \sum_{m\leq X} \frac{\mu(m)}{m^\rho} \Big|^2. \tag{4.6}$$

Por otro lado, para algún $X \leq Y \leq XT_1$, se tiene

$$\sum_\rho{}' \Big| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \Big|^2 \ll \log T_1 \sum_\rho{}' \Big| \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n) \cdot n^{-\beta}}{n^{i\gamma}} \Big|^2.$$

Sea $\rho = \beta_l + i\gamma_l$, $\beta_l \geq \sigma$. Aplicando la fórmula de sumación de Abel a la suma interior de esta última desiguladad, obtenemos

$$\sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \cdot n^{-\beta_l} = \beta_l \int_Y^{2Y} \sum_{Y<n\leq u} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} u^{-(\beta_l+1)} du + \frac{1}{(2Y)^{\beta_l}} \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}}.$$

De esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)\cdot n^{-\beta_l}}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 &\ll Y \int_Y^{2Y} \Big| \sum_{Y<n\leq u} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} u^{-(\beta_l+1)} \Big|^2 du + \frac{1}{Y^{2\beta_l}} \Big| \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 \\ &\ll \frac{1}{Y^{2\beta_l+1}} \int_Y^{2Y} \Big| \sum_{Y<n\leq u} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 du + \frac{1}{Y^{2\beta_l}} \Big| \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_\rho{}' \left| \sum_{X<n\leq XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \right|^2 &\ll \frac{\log T_1}{Y^{2\sigma+1}} \sum_{\substack{l \\ |\gamma_{l+1}-\gamma_l|\geq 1}} \int_Y^{2Y} \Big| \sum_{Y<n\leq u} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 du + \\ &\quad + \frac{\log T_1}{Y^{2\sigma}} \sum_{\substack{l \\ |\gamma_{l+1}-\gamma_l|\geq 1}} \Big| \sum_{Y<n\leq 2Y} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 \\ &\ll \frac{\log T_1}{Y^{2\sigma}} \sum_{\substack{l \\ |\gamma_{l+1}-\gamma_l|\geq 1}} \Big| \sum_{Y<n\leq Y_1} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $Y \leq Y_1 \leq 2Y$. Por el Lema 4.1, encontramos

$$\sum_{\substack{l \\ |\gamma_{l+1}-\gamma_l|\geq 1}} \Big| \sum_{Y<n\leq Y_1} \frac{a(n)}{n^{i\gamma_l}} \Big|^2 \ll (I_1 + \sqrt{I_1 I_2}),$$

donde

$$I_1 = \int_{T_1/2}^{T_1} \Big| \sum_{Y<n\leq Y_1} a(n) n^{iu} \Big|^2 du, \quad I_2 = \int_{T_1/2}^{T_1} \Big| \sum_{Y<n\leq Y_1} (a(n)\log n) n^{iu} \Big|^2 du.$$

Por los Lemas 4.2 y 4.3 se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &\leq (T_1 + 40Y\log Y) \sum_{Y<n\leq 2Y} |a_n|^2 \ll (T_1 + 40Y\log Y) Y \log^3 Y \\ &\ll \log T_1 (T_1 + Y) Y \log^3 Y \ll Y(T_1+Y)\log^4 T_1. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$I_2 \ll Y(T_1 + Y)\log^6 T_1.$$

Por lo tanto, (4.7) puede reescribirse como

$$\sum_{\rho}{}' \Big| \sum_{X<n\le XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho}\Big|^2 \ll \frac{1}{Y^{2\sigma-1}}(T_1+Y)\log^6 T_1 \ll (T_1X^{1-2\sigma} + (XT_1)^{2-2\sigma})\log^6 T_1. \quad (4.8)$$

Estimemos

$$\sum_{\substack{\frac{T_1}{2}\le \operatorname{Im}\rho\le T_1 \\ \operatorname{Re}\rho\ge\sigma}} T_1^{-2\beta}\Big|\sum_{m\le X}\frac{\mu(m)}{m^\rho}\Big|^2.$$

Sea $X = T_1^{2\sigma-1}$. Entonces

$$\sum_{\substack{\frac{T_1}{2}\le \operatorname{Im}\rho\le T_1 \\ \operatorname{Re}\rho\ge\sigma}} T_1^{-2\beta}\Big|\sum_{m\le X}\frac{\mu(m)}{m^\rho}\Big|^2 \ll T_1^{1-2\sigma}X^{1-\sigma}(\log T_1)^4. \quad (4.9)$$

Sustituyendo las estimaciones (4.8), (4.9) en (4.6) y de la definición de X, tenemos

$$N_1(\sigma, T_1) \ll T_1^{4\sigma(1-\sigma)}\log^8 T_1.$$

Luego

$$N(\sigma, T) \ll T^{4\sigma(1-\sigma)}\log^9 T.$$

El Teorema está demostrado. □

4.2. Números primos en pequeños intervalos

Finalmente para nuestro propósito tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Para $h(x) \ge x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ y $x \ge x_0(\varepsilon) > 0$; se cumple la fórmula asintótica*

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O(he^{-c_1(\log\log x)^2}),$$

donde $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$.

Demostración: Consideremos $h \le x$, ya que si $h > x$, la afirmación se sigue del Corolario 3.1. Por el Teorema 2.9, para $2 \le T \le x$, se tiene

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

donde $\rho = \beta + i\gamma$ es tal que $\zeta(\rho) = 0$. Por lo tanto

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\text{Im } \rho| \le T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right). \tag{4.10}$$

Desde que

$$\left|\frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho}\right| = \left|\int_x^{x+h} u^{\rho-1} du\right| \le \int_x^{x+h} u^{\beta-1} du \leqslant h x^{\beta-1},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} S = \sum_{|\text{Im } \rho| \le T} x^\beta &= \sum_{|\text{Im } \rho| \le T} \left(\log x \int_0^\beta x^u du + 1\right) \\ &= N(T) + \log x \sum_{|\text{Im } \rho| \le T} \int_0^1 x^u f(u,\beta) du \\ &= N(T) + \log x \int_0^1 x^u \sum_{|\text{Im } \rho| \le T} f(u,\beta) du, \end{aligned}$$

donde

$$f(u,\beta) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le u \le \beta; \\ 0, & \text{si } \beta < u \le 1. \end{cases}$$

De la definición de $f(u,\beta)$ se tiene

$$\sum_{|\text{Im } \rho| \le T} f(u,\beta) = \sum_{\substack{|\text{Im } \rho| \le T \\ \text{Re } \rho \ge u}} 1 = N(u,T).$$

Debemos estimar $N(u,T)$ para $0 \le u \le 1$, usando tres fórmulas distintas. Si $0 \le u \le 1/2$, usamos la cota trival $N(T) \ll T \log T$. Si $1/2 < u \le 1 - \gamma(T)$, donde

$$\gamma(T) = \frac{c}{\log^{2/3} T \log\log T}$$

(aquí c es la constante en el Teorema 3.4), entonces usamos el Teorema 4.1. Finalmente, si

$1-\gamma(T) < u \leq 1$, la cota es cero. De aquí, tenemos

$$\begin{aligned} S &\ll T\log T + \log x \int_0^{1/2} x^u N(u,T)du + \log x \int_{1/2}^{1-\gamma(T)} x^u N(u,T)du \\ &\ll T\log T + \log x \int_0^{1/2} x^u T\log T du + \log x \int_{1/2}^{1-\gamma(T)} x^u T^{4(1-u)} \log^A T du \\ &\ll T\log T + x^{1/2} T\log^2 x + x(xT^{-4})^{-\gamma(T)} \log^{A+1} x \\ &\ll x^{1/2} T \log^2 x + x(xT^{-4})^{-\gamma(T)} \log^{A+1} x. \end{aligned}$$

De la estimación de S y de (4.10), tenemos

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = 1 + O\left(\frac{T\log^2 x}{x^{1/2}}\right) + O\left(\left(\frac{T^4}{x}\right)^{\gamma(T)} (\log x)^{A+1}\right) + O\left(\frac{x\log^2 x}{Th}\right). \quad (4.11)$$

Si establecemos $T = x^{\frac{1}{4}} e^{-\log^{2/3} x (\log\log x)^3}$, vemos que (4.11) se puede reescribir

$$\psi(x+h)-\psi(x) = h\Big(1 + O(e^{-c_0(\log\log x)^2}) + O\Big(\frac{x^{3/4} e^{\log^{2/3} x(\log\log x)^3 + 2\log\log x}}{h}\Big)\Big).$$

Finalmente, para $h(x) \geq x^{3/4+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$; se deduce la afirmación del Teorema. $\square$

Corolario 4.1. *Para la notación y las condiciones del teorema anterior en el intervalo* $(x, x+h]$ *existe un número primo.*

Demostración: Es fácil ver que

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + O(\sqrt{x}\log^2 x).$$

Por el Teorema anterior

$$\begin{aligned} \sum_{x<p\leq x+h} \log p &= \psi(x+h) - \psi(x) + O(\sqrt{x}\log^2 x) \\ &= h + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}) \geq 1, \quad \text{si } h \geqslant x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}. \quad \square \end{aligned}$$

Además, para $h(x) \geq x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$; la cantidad de números primos que hay en el intervalo $(x, x+h(x)]$ es asintóticamente $\frac{h(x)}{\log x}$. Ya que del Teorema anterior y por la fórmula de sumación de Abel se tiene

$$\pi(x+h(x)) - \pi(x) = \frac{h(x)}{\log x}(1+o(1)).$$

4.3. Conclusión

De manera general, si tenemos una estimación

$$N(\sigma, T) = O(T^{a(1-\sigma)} \log^b T), \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1, \tag{4.12}$$

donde a, b son constantes positivas con $a \geq 2$, entonces es suficiente elegir $h(x) = x^{1-1/a+\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, lo cual garantiza la existencia de un número primo p en el intervalo $(x, x+x^{1-1/a+\varepsilon}]$. Mas aún, la cantidad de números primos que hay en tal intervalo es asintóticamente $\frac{x^{1-1/a+\varepsilon}}{\log x}$.

En esta tesis probamos que $a = 4$ es aceptable. Luego, al elegir $h(x) = x^{3/4+\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$; se tiene que en el intervalo $(x, x + x^{3/4+\varepsilon}]$ existe un número primo p. Además, la cantidad de números primos que hay en tal intervalo es asintóticamente $\frac{x^{3/4+\varepsilon}}{\log x}$.

En 1940 A. E. Ingham, demostró

$$a = a(\sigma) \leq \frac{3}{2-\sigma} \text{ para } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}.$$

En 1972 M. N. Huxley, demostró

$$a = a(\sigma) \leq \frac{3}{3\sigma - 1} \text{ para } \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1.$$

La combinación de estas dos estimaciones da el mejor resultado en la actualidad: $a = a(\sigma) \leq 2.4$, uniformemente para $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$. De aquí, si elegimos $h(x) = x^{7/12+\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, se garantiza la existencia de un número primo p en el intervalo $(x, x+x^{7/12+\varepsilon}]$. Mas aún, la cantidad de números primos que hay en tal intervalo es asintóticamente $\frac{x^{7/12+\varepsilon}}{\log x}$.

La estimación (4.12) con $a = 2$, se conoce como *Hipótesis de densidad*. Haciendo uso de ésta, basta elegir $h(x) = x^{1/2+\varepsilon}$, si $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, para garantizar la existencia de un número primo p en el intervalo $(x, x + x^{1/2+\varepsilon}]$. Además, la cantidad de números primos que hay en tal intervalo es asintóticamente $\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{\log x}$. Note que este resultado es el mismo que se obtiene cuando se utiliza la hipótesis de Riemann.

Posteriormente, con otros métodos se han probado teoremas de existencia de números primos en pequeños intervalos, sin obtener fórmula asintótica a tal cantidad.

D. R. Heath-Brown y H. Iwaniec en 1979, demostraron la existencia de un número primo p en el intervalo $[x, x + x^{11/20+\varepsilon}]$, para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$.

R. C. Baker, G. Harman y J. Pintz en el 2001, demostraron la existencia de un número primo p en el intervalo $[x, x + x^{0.525}]$, si $x \geq x_0 > 0$.

Sin embargo, H. Cramér en 1936 conjeturó que existe un número primo p en el intervalo $[x, x + (\log x)^{2+\varepsilon}]$, para $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$. Note que si utilizamos la hipótesis de Riemann para resolver nuestro problema, todavía está lejos de esta conjetura.

Bibliografía

[1] R. C. BAKER, G. HARMAN AND J. PINTZ, *The difference between consecutive primes. II.* Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001), no. 3, 532-562.

[2] E. BOMBIERI, *The millennium prize problems: The Riemann hypotesis.* Clay Math. Inst. `http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/`

[3] H. CRAMÉR, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers.* Acta Arithmet. 2, 23-46 (1936).

[4] D. R. HEATH-BROWN AND H. IWANIEC, *On the difference between consecutive primes.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1 (1979), no. 5, 785-760.

[5] M. N. HUXLEY, *On the difference between consecutive primes.* Invent. Math. 15 (1972), 155-164.

[6] A. E. INGHAM, *On the estimation of* $N(\sigma, T)$. Quart. J. Math. Oxford Ser. 11 (1940), 291-292.

[7] A. IVIĆ, *The Riemann Zeta-function (Theory and Applications).* Dover Publications, Inc. Mineola, New York. First edition, (2003).

[8] A. A. KARATSUBA, *Fundamentos de la Teoría Analítica de los Números.* Mir Moscú, Moscú, primera edition, 1979. (1986).

[9] A. A. KARATSUBA, *Complex Analysis in Number Theory.* CRC Press, Ann Arbor (1995).

[10] A. A. KARATSUBA AND S. M. VORONIN, *The Riemann Zeta-Function.* Walter de Gruyter, Berlin, (1992).

[11] M. R. MURTY, *Problems in Analytic Number Theory.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg (1996)

[12] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröse* Monats. Preuss. Akad. Wiss. (1859–1860), 671–680.

[13] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function.* Oxford sciencie publications, second edition, (1986).

[14] I. M. Vinogradov, *A new evaluation of* $\zeta(1+it)$. Izv. Akad. Nauk SSSR.22 (1958), 161-164.

[15] I. M. Vinogradov, *Fundamentos de la Teoría de los Números.* Mir Moscú, segunda edition, (1977).

[16] I. M. Vinogradov, *On estimates of trigonometric sums.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 34, No 7 (1942), 199-200.

[17] I. M. Vinogradov, *The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers.* Dover Publications, Inc., New York, (2004).