



Evolución numérica de espacio-tiempos esféricamente simétricos en Relatividad General

Tesis
que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en el área de la Física

presenta

Jacobo Israel Palafox González

*Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

Julio de 2009

Director de tesis:
Dr. Francisco S. Guzmán Murillo
Instituto de Física y Matemáticas,
UMSNH.

Índice

1	Introducción	5
2	Descomposición 3+1 de la Relatividad General	9
2.1	Funciones de Norma	9
2.2	Curvatura Extrínseca	10
2.3	Constricciones Hamiltoniana y de Momento	11
2.4	Ecuaciones de Evolución	12
2.5	Hiperbolicidad	12
2.6	Elección de la norma	13
2.7	Horizontes	14
3	Métodos numéricos	19
3.1	Aproximación de diferencias finitas aplicadas a la solución de Problemas de Valores Iniciales	20
3.2	Convergencia	23
4	Evolución de un Hoyo Negro	27
4.1	Ecuaciones ADM en simetría esférica	27
4.2	Datos iniciales	28
4.3	Evolución y elección de la norma	29
4.4	Diagnóstico	31
4.4.1	Convergencia	31
4.4.2	Horizonte aparente	32
4.4.3	Geodésicas Nulas	32
4.5	Resultados	33
5	Evolución de un campo escalar	41
5.1	Descomposición 3+1	41
5.2	Datos iniciales	44
5.3	Resultados	45

5.3.1	Campo escalar dispersándose	45
5.4	Colapso en agujero negro	46
5.5	Comportamiento crítico	52
6	Conclusiones y perspectivas	55

Capítulo 1

Introducción

Durante las últimas tres décadas ha surgido como tema principal dentro del estudio de la Relatividad General, la Relatividad Numérica, que consiste en la construcción de soluciones de las ecuaciones de Einstein mediante el uso de métodos numéricos. La motivación del desarrollo de esta área es principalmente la urgencia de modelos de fuentes de ondas gravitacionales para distintos sistemas, ya sea debido a la órbita y colisión de hoyos negros, estrellas de neutrones, u otros objetos compactos, o cómo al colapso nuclear no esférico de supernovas [1].

Es especialmente importante el hecho de que en años recientes el problema de dos hoyos negros orbitando ha sido resuelto de manera numérica [2] y por tanto ha sido posible hacer predicciones de procesos astrofísicos del alta energía. Entonces es oportuno explorar la metodología utilizada en la solución numérica de las ecuaciones de Einstein.

Sin embargo, antes de involucrarse en sistemas relacionados con procesos astrofísicos complejos, es necesario adquirir experiencia en sistemas menos ambiciosos de los cuales se aprende el uso y la implementación de condiciones de norma adecuadas a distintos casos.

En este trabajo se presenta la evolución de distintos sistemas particulares que obedecen las ecuaciones de la Teoría General de la Relatividad. Los sistemas que se presentan en este trabajo son los siguientes:

La evolución de un hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein usando la formulación ADM [3].

La evolución de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad usando la formulación ADM modificada [5]

Ambos casos corresponden a espacio-tiempos con simetría esférica, pero involucran propiedades que los hacen distintos entre sí, como el hecho de que usan distintas condiciones de norma, o porque se utilizan distintos artificios que permiten la solución dependiente del tiempo. En el caso del agujero negro de Schwarzschild por ejemplo, el espacio-tiempo presenta un fenómeno conocido como Horizonte Aparente desde el tiempo inicial, mientras que en el segundo sistema se inserta un campo escalar, que es evolucionado variando sus parámetros iniciales para obtener distintos resultados, y que no necesariamente lleva a la formación de un Horizonte Aparente, razón por la cual la forma en que se manejan los dos sistemas es significativamente distinta.

La metodología utilizada para construir los espacio-tiempos involucra el uso de métodos numéricos, y es justamente este hecho el que justifica los ejemplos presentados aquí. Ante todo, en los casos presentados las soluciones se construyen a partir de la descomposición 3+1 de la Relatividad General, en su versión ADM, lo cual involucra la evolución de datos iniciales consistentes con las Ecuaciones de Einstein construidos en una hipersuperficie espacial inicial.

Los métodos numéricos utilizados en todos los casos corresponden a la aproximación en diferencias finitas de las ecuaciones de evolución y de constricción, lo cual implica la discretización del dominio espacio-temporal. La evolución de los datos iniciales en cada hipersuperficie espacial se consigue usando el método de líneas en cada punto del dominio espacial en cada hipersuperficie. Se utilizan condiciones de frontera de Sommerfeld con pequeñas modificaciones en cada caso y se verifica que la solución numérica converge en el límite continuo.

La elección de los dos sistemas que presentaremos corresponde a distintas situaciones: i) en el caso del hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, los datos iniciales corresponden a una solución exacta a las ecuaciones de Einstein, y se muestra el funcionamiento del proceso de excisión, que consiste en la remoción de un trozo del dominio espacial dentro del horizonte de eventos de la solución, con la finalidad de evitar la singularidad física que se encuentra en el origen de coordenadas, también se presenta el uso de buscadores de horizontes aparentes y trazadores de horizontes de eventos a través de geodésicas nulas radiales; adicionalmente se hace un recuento del tipo de problemas que se encuentran cuando se usan estos métodos; ii) en el caso de la evolución del campo escalar, se construye un dato inicial con materia, se utiliza una condición de norma tipo Bona-Masso, y se observa el comportamiento de dos casos: un campo escalar dispersándose, y un campo escalar de mayor amplitud que colapsa para formar un hoyo negro.

El objetivo primordial de este trabajo consiste en presentar los procesos llevados a cabo para efectuar la evolución de los ejemplos antes mencionados, que aunque

ya han sido estudiados con anterioridad, aquí son tratados usando códigos originales que son capaces de resolver dichos sistemas. Los procesos usados involucran varios elementos usados en la construcción de códigos avanzados que se utilizan en la Relatividad Numérica para la solución de problemas de valores iniciales con valores en la frontera. Se espera que con la experiencia adquirida en la implementación de los métodos presentados en este trabajo sea posible entrar de lleno en proyectos que involucran sistemas con simetrías menos restrictivas y más relacionados con procesos astrofísicos relativistas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo siguiente se presenta la descomposición 3+1 de la Relatividad General, en el capítulo 3 se presentan los elementos de la aplicación de la aproximación con diferencias finitas a la solución de problemas de valores iniciales, en los capítulos 4 y 5 se presentan respectivamente la evolución del hoyo negro y el colapso de campo escalar en su versión ADM modificada. Finalmente se presentan algunas conclusiones en el capítulo 6.

Capítulo 2

Descomposición 3+1 de la Relatividad General

Cuando se hace un estudio numérico de las ecuaciones de Einstein, lo ideal es tenerlas en una forma que permita reconocerlas de forma intuitiva y dar una interpretación física a cada uno de los términos que las componen. Para este fin, en la Relatividad General existen varias formas de replantear dichas ecuaciones, siendo una de las más comunes la llamada *Descomposición 3+1*, que básicamente consiste en separar las ecuaciones de Einstein en una parte espacial de tres dimensiones, y una parte temporal, de manera que el resultado sean sistemas de ecuaciones que constituyen un *problema de valores iniciales* (PVI) o *Problema de Cauchy*, tal que una vez dadas condiciones iniciales y de frontera adecuadas, puedan ser evolucionadas en el tiempo, para así construir el espacio-tiempo consistente con las ecuaciones de Einstein. En la descomposición 3+1 se divide el espacio-tiempo en "rebanadas" puramente espaciales (hipersuperficies), caracterizadas cada una por un punto del eje temporal, y se dan condiciones, llamadas *de norma*, para regular el cambio que sufren las coordenadas al pasar de una de estas rebanadas a la siguiente, a la vez que se reescriben las ecuaciones de Einstein para ser evaluadas adecuadamente en cada una de ellas [1].

2.1 Funciones de Norma

La esencia de la descomposición consiste en foliar el espacio-tiempo con hipersuperficies Σ_t tipo espacio, donde t es la etiqueta con la que se folia a las hipersuperficies y que corresponde a una coordenada temporal.

Partiendo de que se tiene definida la métrica del espacio-tiempo, el primer paso

en el proceso de la descomposición 3+1 es definir las funciones de norma α (*lapso*) y el vector β^i (*vector de corrimiento*), las cuales dependen de la coordenada temporal t y las espaciales x^i . La función lapso sirve para medir el tiempo propio entre dos hipersuperficies, como lo haría un observador que se mueve en dirección normal a ambas, de acuerdo con la siguiente relación

$$d\tau = \alpha(t, x^i)dt.$$

A su vez, el vector de corrimiento β^i tridimensional relaciona las coordenadas de puntos espaciales fijos respecto a la curva normal que une a las hipersuperficies, al pasar de una a la siguiente

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j)dt.$$

La elección del lapso y del vector de corrimiento puede hacerse libremente, y con las condiciones que uno decida imponer, siempre buscando aprovechar las simetrías existentes en el problema y evadir las singularidades que pudieran presentarse, mientras se cumplen ciertos requerimientos, como el que la función lapso sea positiva definida.

Ahora, usando las funciones de norma, y la 3-métrica γ_{ij} correspondiente a la hipersuperficie Σ_t , el elemento de línea del espacio-tiempo en su forma mas general es

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i\beta^i)dt^2 + 2\beta_idtdx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j.$$

Un vector normal n^μ a cada hipersuperficie espacial, se escribe entonces en términos de las funciones de norma de la siguiente forma:

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right), \quad n_\mu = (-\alpha, 0).$$

2.2 Curvatura Extrínseca

El siguiente elemento a calcular en la descomposición 3+1 es la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ_t . La curvatura extrínseca nos da información acerca de cómo se ve una hipersuperficie (la cual también tiene una curvatura intrínseca dada por el tensor de Riemann 3-dimensional, definido en base a γ_{ij}) inmersa en un espacio-tiempo con una métrica dada, de acuerdo a la forma en que se transporta paralelamente el vector normal a la hipersuperficie n^μ a través de dicha hipersuperficie. El tensor de curvatura extrínseca se define como

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{ij},$$

que a su vez, introduciendo la función escalar α y aprovechando las propiedades de la derivada de Lie podemos reescribir de la siguiente forma:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha}(\mathcal{L}_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\gamma_{ij},$$

pero la derivada de Lie respecto al tiempo se puede reemplazar por la derivada parcial ∂_t , ya que el parametro t a lo largo de las curvas integrales que llevan de una hipersuperficie a la siguiente es precisamente una de las coordenadas usadas en el sistema, de modo que

$$-2\alpha K_{ij} = (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\gamma_{ij}. \quad (2.1)$$

De hecho (2.1) constituye una ecuación de evolución para γ_{ij} .

2.3 Constricciones Hamiltoniana y de Momento

En seguida, se descompone el tensor de Energía-Momento $T_{\mu\nu}$ en términos de las variables 3+1, es decir, la métrica de las hipersuperficies y su curvatura extrínseca para obtener 2 nuevas expresiones: la *densidad de energía*, y la *densidad de momento*, que se obtienen a partir de proyecciones del tensor $T_{\mu\nu}$ a lo largo del vector normal a las hipersuperficies y paralelamente a Σ_t respectivamente:

$$\begin{aligned} \rho &\equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \\ j^i &\equiv -n_\mu T^{\mu i}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

a la vez que para referirnos a la parte espacial del tensor de Energía-Momento lo haremos con la expresión T_{ij} . Al contraer las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ con el vector normal a las hipersuperficies n^μ , y sustituyendo las relaciones (2.2) obtenemos cuatro ecuaciones de restricción, la primera es

$$H = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 16\pi\rho = 0, \quad (2.3)$$

a la cual se llama *Constricción Hamiltoniana*, donde ${}^{(3)}R$ es el escalar de Ricci de la hipersuperficie Σ_t y $K = \gamma^{ij}K_{ij}$ es la traza de K_{ij} . Naturalmente no es una ecuación de evolución pues no contiene derivadas respecto al tiempo de segundo orden, así que no se usa como ecuación de evolución, sino como una relación que se debe satisfacer en todo momento para asegurarnos de que el sistema realmente es una solución a las ecuaciones de Einstein. Las restantes tres constricciones son,

$$M^i = \nabla_j K^{ij} - \nabla^i K - 8\pi j^i = 0, \quad (2.4)$$

en las cuales tampoco hay derivadas con respecto al tiempo de segundo orden, por lo que también son ecuaciones de constricción, y se les llama *constricciones de momento*.

En el caso en que el problema de valores iniciales incluye constricciones, es necesario que los datos iniciales las satisfagan. En el presente caso, este hecho garantiza que la solución que se obtiene corresponde verdaderamente a una solución a las ecuaciones de Einstein.

Además, como se demuestra en [1], en base a proyecciones de las ecuaciones de campo de Einstein con el vector n^μ y las identidades de Bianchi, es posible construir ecuaciones de evolución para las constricciones Hamiltoniana y de Momento de la descomposición 3+1, que son proporcionales a los valores iniciales de éstas últimas, de modo que al tener datos iniciales que las satisfagan, se garantiza el que se sigan satisfaciendo durante el resto de la evolución.

2.4 Ecuaciones de Evolución

Las ecuaciones de evolución de la 3-métrica se obtienen a partir de (2.1), es decir, la definición de curvatura extrínseca. Por su parte, para obtener las ecuaciones de evolución de la curvatura extrínseca K_{ij} , es necesario tomar proyecciones del tensor de Riemann con el vector n^μ , en combinación con las ecuaciones de Einstein. Las relaciones resultantes son

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha({}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il} K_j^l) \\ &\quad + \mathcal{L}_\beta K_{ij} + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(T - \rho) - 2T_{ij}] \\ \partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij},\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde T es la traza del tensor de energía momento.

2.5 Hiperbolicidad

El sistema de ecuaciones que se obtiene de la descomposición 3+1 arriba expuesta, es del tipo

$$\partial_t u = P(D)u$$

donde u es un vector de estado con n entradas, y $P(D)$ es una matriz de $n \times n$ que depende de operadores diferenciales espaciales. A su vez, el problema de Cauchy consiste en encontrar una solución $u(t, x)$ a tal sistema de ecuaciones, a partir de datos iniciales conocidos $u(t = 0, x)$, donde x representa a las coordenadas espaciales del

dominio donde se define el problema.

Por otro lado, existen importantes características deseables en un PVI: que la solución a éste exista, que sea única y que dependa continuamente de las condiciones iniciales. Si un PVI posee tales cualidades se dice que está *bien planteado*, y formalmente quiere decir que es posible definir una norma $\|\cdot\|$ tal que

$$\|u(t, x)\| \leq ke^{\alpha t} \|u(0, x)\|,$$

con k y α constantes independientes de los datos iniciales.

Ahora consideremos un sistema de ecuaciones de evolución de la forma

$$\partial_t u + M^i \partial_i u = s(u),$$

donde las M^i son matrices de $n \times n$ elementos constantes, el índice i corre sobre la dimensión espacial del problema, y $s(u)$ es una fuente que puede depender de u , pero no de sus derivadas. Es posible demostrar que si la fuente depende linealmente de u , el sistema estará bien planteado, si es que el sistema sin fuentes lo está. Adicionalmente se dice que el sistema es *fuertemente hiperbólico* si dichas matrices son diagonalizables y con todos sus eigenvalores reales. La importancia de tal concepto radica en que para sistemas hiperbólicos, es posible encontrar una matriz hermitiana H con la cuál definir una norma $\|\cdot\|$ para las soluciones u de la ecuación diferencial como sigue

$$\|u\|^2 := \langle u, u \rangle = u^\dagger H u,$$

donde u^\dagger es el adjunto de u . Entonces, si un sistema de ecuaciones diferenciales cuenta con la propiedad de ser fuertemente hiperbólico, esto nos permite a su vez afirmar que el sistema está bien planteado [1].

En los ejemplos de este trabajo, utilizamos la descomposición 3+1 conocida como ADM (Arnowitt-Desner-Misner), la cuál, para el caso de la evolución del campo escalar en simetría esférica, puede escribirse como un sistema fuertemente hiperbólico [5]. En el caso del agujero negro de Schwarzschild sin embargo, esto no es posible.

2.6 Elección de la norma

Para cada problema particular que involucre la construcción del espacio-tiempo en términos de las ecuaciones de Einstein usando la descomposición 3+1, se debe elegir adecuadamente las funciones de norma, con el fin de que las coordenadas que estemos usando se comporten bien, es decir, que no se presenten divergencias en los valores numéricos obtenidos. Para lograr esto, se deben considerar distintos factores que

dependen del caso en cuestión, como por ejemplo, si es de esperar que en el proceso de la evolución se forme un agujero negro, la función α a escoger debería de adaptarse a los grandes cambios en las variables del sistema que se presentan en regiones cercanas a la singularidad del agujero negro, para congelar la evolución en dicha zona donde los gradientes de las funciones del sistema de ecuaciones son importantes. En cada problema que se trata en este trabajo se especificará la elección de las funciones de norma α y β^i .

2.7 Horizontes

Cuando se trata con hoyos negros en la Relatividad General, hay dos conceptos de particular importancia que se deben identificar y diferenciar: El *horizonte de eventos* y el *horizonte aparente*.

El horizonte de eventos es una superficie que rodea al hoyo negro, y hace las veces de frontera para éste. El horizonte de eventos se caracteriza por el hecho de que los eventos que ocurren en su interior, no pueden transmitir ningún tipo de información a un observador ubicado por fuera de él, y si un objeto lo atravesara desde afuera hacia adentro, para un observador exterior y lejano al horizonte de eventos, dicho objeto dará la impresión de permanecer inmóvil al llegar a éste, a la vez que su imagen sufriría un corrimiento al rojo, hasta que eventualmente sería prácticamente imperceptible. Desde el punto de vista geométrico, esto se debe a que, en las cercanías de un hoyo negro, el espacio-tiempo adquiere una curvatura tal, que los conos de luz cuyo origen se encuentre dentro del horizonte de eventos, están totalmente contenidos dentro de él y orientados hacia la singularidad, por lo que ni siquiera la luz puede escapar del interior. En el caso del agujero negro de Schwarzschild, contamos con el diagrama de Penrose que nos permite visualizar su geometría de una manera global. Para dibujar dicho diagrama, es necesario hacer una serie de cambios de coordenadas, de tal manera que los puntos en el infinito puedan ser caracterizados por valores coordenados finitos. Primero se hace la transformación de las coordenadas de Schwarzschild r y t a las llamadas *coordenadas de Kruskal-Szekeres*:

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

para $r > 2M$, y

$$U = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$V = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

para $r < 2M$, para las cuales la métrica de Schwarzschild deja de ser singular en $r = 2M$. A continuación se introducen dos nuevas coordenadas, u y v , mediante las relaciones

$$U = (v - u)/2, \quad V = (v + u)/2,$$

y se reemplazan ambos conjuntos de coordenadas por (u', v') y (U', V') definidos como

$$\begin{aligned} u' &= \tan^{-1}(u) \equiv V' - U', \\ v' &= \tan^{-1}(v) \equiv V' + U'. \end{aligned}$$

Estas nuevas coordenadas ofrecen varias ventajas al momento de visualizar las propiedades del agujero negro de Schwarzschild. Para empezar, en estas coordenadas los rangos infinitos de u y v se mapean al rango finito $(-\pi/2, \pi/2)$ de u' y v' respectivamente, además de que en el plano $U'V'$ del diagrama de Penrose, las geodésicas nulas radiales salientes son curvas con u' y v' constantes, es decir, líneas cuyo ángulo con la horizontal es de 45° . Éstas curvas terminan en la frontera que se conoce como *infinito nulo futuro*, denotado por \mathcal{I}^+ . De igual forma, las geodésicas nulas radiales entrantes terminan en el *infinito nulo pasado* \mathcal{I}^- .

El punto $(t = -\infty, r = 0)$ se mapea al punto I^- del diagrama de Penrose, y se le llama *infinito pasado tipo tiempo*, y el punto $(t = \infty, r = 0)$ es mapeado al punto I^+ o *infinito futuro tipo tiempo*. De igual manera, al infinito tipo espacio se le etiqueta como I^0 . El diagrama es separado en dos partes por la línea $r = 2M$, una zona sombreada, que corresponde a lo que llamamos agujero negro, y la zona en blanco, que es el resto del espacio-tiempo. Entonces podemos definir el *horizonte de eventos* del agujero negro, como la región $J^-(\mathcal{I}^+)$, es decir, la frontera del pasado causal del infinito nulo futuro \mathcal{I}^+ , en otras palabras, es la frontera del dominio $J^-(\mathcal{I}^+)$ que puede arrojar curvas causales hacia el infinito nulo futuro [12]. También se hace evidente que las geodésicas nulas que se originan dentro del agujero negro, terminan inevitablemente en la singularidad ubicada en $r = 0$.

Por otro lado, existe una superficie que permite aventurar predicciones acerca de la existencia e inclusive la ubicación del horizonte de eventos del hoyo negro, que es el horizonte aparente. Es importante mencionar que, mientras el horizonte aparente solamente está definido en una hipersuperficie, el horizonte de eventos es una cantidad global en el espacio-tiempo y que aunque la existencia de un horizonte aparente puede

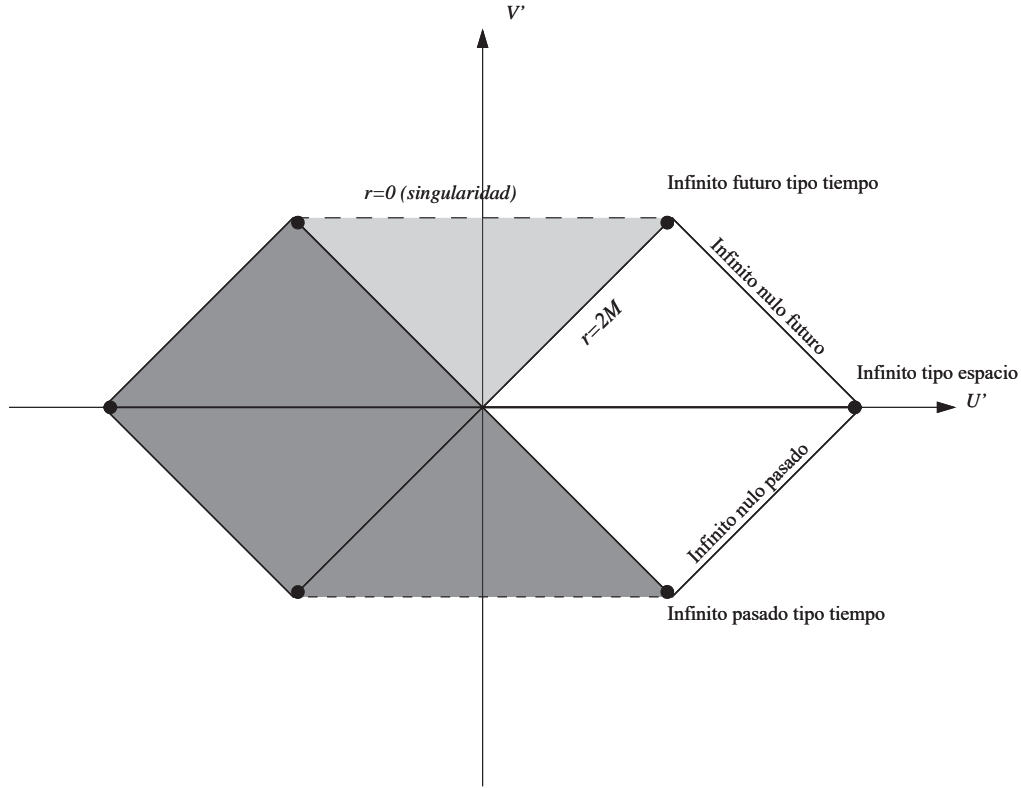


Figura 2.1: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Schwarzschild

implicar la aparición de un horizonte de eventos, la afirmación contraria no es correcta, de hecho es posible construir la solución de Schwarzschild en foliaciones del espacio-tiempo tales que no haya un horizonte aparente [9]. Un horizonte aparente se define como la superficie marginalmente atrapada (SMA) exterior a todas las demas. A su vez, las SMA se caracterizan por el hecho de que la divergencia de cualquier geodésica nula saliente, y perpendicular a ella, es cero, lo cual en términos de las componentes de la curvatura extrínseca se ve como:

$$\Theta \equiv \nabla_i n^i + K_{ij} n^i n^j - K = 0, \quad (2.6)$$

donde n^i es un 3-vector normal a la superficie marginalmente atrapada, apuntando hacia afuera de ésta, que en el caso de simetría esférica en coordenadas esféricas es paralelo al vector unitario radial.

En general la existencia y posición del Horizonte de Eventos durante la evolución numérica de un hoyo negro, sólo se pueden determinar al conocer en su totalidad el

espacio tiempo, ya que es preciso el estudio de las geodésicas nulas asociadas a la dinámica de rayos de luz ubicados en el dominio espacio-temporal del problema (en el caso general no esféricamente simétrico se trata de superficies nulas y no solamente geodésicas nulas radiales). En la práctica, sin embargo, solo podemos evolucionar un sistema hasta un tiempo finito, y usar esta porción de espacio-tiempo para buscar horizontes de eventos dentro de él. Por otra parte, como establecen Hawking y Penrose en el segundo teorema de las singularidades [13], la existencia de un horizonte aparente en un espacio-tiempo, implica forzosamente la formación de una singularidad en éste, y suponiendo como cierta la Conjetura del Censor Cósmico, según la cual no existen singularidades *desnudas*, es decir, carentes de un horizonte de eventos (excepto tal vez una singularidad tipo *Big Bang*), la formación de un horizonte aparente garantiza la existencia de un horizonte de eventos, cuya posición ya sea, coincide con la del horizonte aparente, o se encuentra en el exterior de éste, si se satisface la condición de la energía nula. En conclusión, el horizonte aparente indica la aparición de un horizonte de eventos sin la necesidad de esperar a la evolución completa del sistema para corroborarlo.

Capítulo 3

Métodos numéricos

De la infinidad de sistemas de ecuaciones diferenciales que se conocen, una mínima cantidad permite la construcción de soluciones exactas físicamente relevantes, pero esto no es un problema infranqueable. Una forma alternativa de lidiar con dicha problemática es el uso de métodos numéricos.

Existen distintos métodos numéricos útiles para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, de los cuales algunos de los más comunes son los métodos espectrales, los métodos con aproximación en diferencias finitas y el elemento finito. En el primer caso, las funciones involucradas se aproximan con una serie truncada de funciones ortogonales, de modo que las ecuaciones originales se reducen a un sistema de ecuaciones para los coeficientes de la expansión. En el segundo caso, el dominio donde se definen las ecuaciones se discretiza y se supone que las funciones involucradas en las ecuaciones permiten la expansión en serie de Taylor en cada punto del dominio de las ecuaciones, de modo que las ecuaciones -incluyendo los operadores diferenciales- son aproximadas en cada punto del dominio discretizado. En los tres casos, el sistema original es aproximado con un sistema de ecuaciones discretizadas, lo cual involucra un error de aproximación. De la precisión de la aproximación y de la proximidad a una solución consistente con las ecuaciones originales depende el éxito del método numérico utilizado.

La elección de un método numérico apropiado para la solución de un sistema de ecuaciones depende del tipo de problema que se desea resolver. En el caso del presente trabajo se usará la aproximación en diferencias finitas de las ecuaciones, tanto de construcción como de evolución.

Actualmente el desarrollo computacional, y el extenso conocimiento de métodos numéricos eficientes y altamente especializados permiten calcular las soluciones numéricas de las ecuaciones de Einstein en diversos casos de simetría y tipos de ma-

teria. A continuación se presenta una breve introducción a los métodos básicos usados para la solución numérica de problemas de valores iniciales usando la aproximación de diferencias finitas, su motivación y su implementación, mientras que los detalles mas profundos serán tratados mas adelante cuando sea necesario.

3.1 Aproximación de diferencias finitas aplicadas a la solución de Problemas de Valores Iniciales

Como se mencionó, el esquema de aproximación en diferencias finitas consiste en escribir la versión discreta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en un dominio discreto, para lo cual es necesario definir aproximaciones a los operadores diferenciales involucrados. Este enfoque resulta de gran utilidad en el presente trabajo, ya que se enfoca a la resolución de problemas con una sola dimensión espacial, para los cuales las diferencias finitas arrojan resultados bastante satisfactorios.

El primer paso para resolver un problema de EDP en una dimensión mediante la aproximación en Diferencias Finitas consiste en discretizar el dominio espacial debidamente acotado por un valor mínimo y un valor máximo,

$$D = [x_{min}, x_{max}]$$

introduciendo una malla uniforme con $N + 1$ puntos, donde cada punto está separado del siguiente una distancia fija $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ llamada *resolución* (para ciertos problemas puede ser mas conveniente utilizar resoluciones mas complejas, como alguna función dependiente de x , pero en los análisis desarrollados aquí, utilizaremos sólo procesos de discretización uniformes). Una convención usual para referirnos a cada uno de los puntos obtenidos de esta forma es x_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ donde $x_k = x_{min} + k\Delta x$. Éste procedimiento también se puede seguir cuando el problema involucra más de una dimensión espacial.

El siguiente paso consiste en aproximar la función incognita de la Ecuación Diferencial a resolver. Para cada uno de los puntos de la malla discreta que hemos construido, denotaremos como u_k a una función definida en el punto x_k de la malla construida.

Recordando la definición de la derivada de una función $u(x)$ con respecto a la variable (x):

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

proponemos una aproximación discreta de $u'(x)$ que se construye en base a una expansión en serie de Taylor de la función $u(x)$ alrededor del punto x_k de la siguiente

forma. Sabemos que

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0)u'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2u''(x_0) + \dots$$

de modo que para los puntos $u_{k+1} = u((k + 1)\Delta x)$, $u_{k-1} = u((k - 1)\Delta x)$ también podemos escribir

$$\begin{aligned} u_{k-1} &= u_k - \Delta x u'_k + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 u''_k + \dots \\ u_{k+1} &= u_k + \Delta x u'_k + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 u''_k + \dots \end{aligned}$$

donde hicimos $x - x_0 = \Delta x$. Ahora restamos estas ecuaciones para obtener la aproximación de la derivada de $u(x)$ respecto a x

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.1)$$

llamada *diferencia centrada*, la cual es una aproximación de u' con un error de segundo orden. Además, esta fórmula tiene un formato que nos permite utilizarla en cálculos numéricos para resolución de problemas específicos de EDP. Mediante procesos análogos al aquí ilustrado, se pueden encontrar aproximaciones similares a derivadas de orden superior, al igual que con precisión de mas alto orden (ver [3]).

Este tipo de diferencias centradas permite aproximar la función u' en todo el dominio sobre el que esté definida la función $u(x)$, con excepción de los puntos ubicados en cualquiera de las fronteras de éste, pues como es evidente, ahí no se cuenta con la información requerida por el método. Para los ejemplos de este trabajo, se utilizan distintas aproximaciones, incluyendo el uso de puntos auxiliares, ubicados mas allá del dominio permitido para la función que se evalúa, y que se obtienen por medio de extrapolaciones e información proporcionada acerca de la naturaleza de cada función cuando esta se acerca a alguna de las fronteras del dominio.

Por otra parte, los problemas a abordar en este trabajo de tesis requieren un enfoque orientado a la evolución en el tiempo de funciones con valores en la frontera y condiciones iniciales dadas, por lo que utilizaremos el método de líneas (ML) para abordarlos. Éste método consiste en tratar las derivadas espaciales usando la aproximación de diferencias finitas ya descrito, manteniendo las derivadas temporales continuas, las cuales son utilizadas para actualizar los datos iniciales del problema por medio de algún integrador de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias adecuado, y obtener nuevos valores que a su vez serán también actualizados, y así consecutivamente en cada paso de tiempo.

A continuación se ilustra el ML mediante el ejemplo de la ecuación de advección de primer orden

$$\partial_t u = -\partial_x u,$$

definida en el dominio $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1]$ y con la condición de frontera periódica

$$u(t, x = 0) = u(t, x = 1),$$

problema para el cuál tenemos un valor para la función u al tiempo inicial, $u(t = 0, x) = u^0(x)$.

Para empezar se discretiza el dominio espacial dividiendolo en $N + 1$ puntos, usando una resolución constante Δx . Usando la notación usual $u_k = u(x_k)$, $x_k = k\Delta x$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N$, aproximamos la derivada espacial mediante la fórmula (3.1), para obtener

$$\partial_t u_k = -\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta x},$$

se dice que esta ecuación está escrita en forma semidiscreta pues el tiempo aparece como un parámetro continuo. El método de líneas está basado en ésta consideración y asume que la parte derecha de ésta ecuación (en su forma discreta) es simplemente la parte derecha de una ecuación ordinaria de primer orden que debe integrarse como tal, es decir, puede usarse cualquier integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias para este fin. Como usamos un integrador de EDP de tipo iterativo descubrimos que es necesario discretizar también el parametro temporal, por lo que etiquetamos $t^n = n\Delta t$, donde Δt es la resolución en el dominio temporal y $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ la etiqueta del dominio temporal a un tiempo constante. Llamamos u^n al valor de la función u al tiempo t^n . A continuación obtendremos el valor de u al tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, donde Δt también será una cantidad constante de tiempo a lo largo de toda la evolución temporal. Una de las opciones para calcular este nuevo valor, y que es la que se usa en todas las evoluciones de este trabajo, es usar el método de Runge-Kutta. En el método de Runge-Kutta de cuarto orden por ejemplo, para una EDO dada por

$$y' = f(t, y), \quad y^0 = y(t^0),$$

se calcula el valor de y^{n+1} en base al valor y^n y a Δt de la siguiente forma:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

donde

$$l_1 = f(t^n, y^n)$$

$$\begin{aligned} l_2 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2}l_1\right) \\ l_3 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2}l_2\right) \\ l_4 &= f(t^n + \Delta t, y^n + \Delta tl_3). \end{aligned}$$

En el caso de la ecuación de advección aquí tratada

$$f(t^n, y^n) = -\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta x},$$

que es la aproximación discreta de $\partial_x u$. Entonces, conociendo los datos iniciales del problema, mediante el uso de ML es posible calcular el valor de un u^{n+1} en términos de u^n .

La relación entre los intervalos Δx y Δt debe ser escogida apropiadamente para que un código numérico usado para resolver un problema de EDP funcione adecuadamente. Mas específicamente, si tenemos el intervalo de tiempo de la forma

$$\Delta t = \gamma \Delta x,$$

siendo el factor γ un número real positivo (Factor de Courant-Friedrich-Levy), una elección no adecuada de dicho factor puede resultar en un comportamiento inestable de la evolución numérica. El valor de γ adecuado para que la evolución sea estable depende del integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias en el método de líneas, así por ejemplo si el integrador es el de Euler y la ecuación semidiscreta es lineal, la evolución es inestable para cualquier valor de γ , mientras que si el integrador es un método iterativo de Runge-Kutta de cuarto orden, y la ecuación semidiscreta es lineal, es posible encontrar un valor de γ , dependiente de las velocidades características del sistema, que garantice la estabilidad de la evolución [10].

3.2 Convergencia

Como hemos visto, el proceso de discretización implica que las nuevas ecuaciones no sean exactamente iguales a las originales, ya que, en las expansiones en serie de Taylor que se utilizaron es necesario desprestigiar todos los términos mayores a cierto orden de Δx para obtener una ecuación utilizable en la práctica. Entonces, se necesita de un criterio, llamado Convergencia, que permita discernir si el sistema propuesto, como aproximación al sistema continuo, realmente da soluciones congruentes con este último. La Convergencia es una medida de qué tanto se acerca la solución de un esquema de diferencias finitas a la solución del problema continuo, al usar una

mejor resolución en la discretización. Para establecer formalmente la convergencia, empezamos por definir la partición de un intervalo finito cualquiera como una malla uniforme descrita por un incremento Δx . Entonces consideramos una sucesión $\{\Delta x_j\}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) de dichas particiones de tal forma que $\Delta x_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Ahora sea X_j un espacio lineal con norma de dimensión finita que contiene a la solución asociada al incremento Δx_j y $\|\cdot\|_j$ una norma en tal espacio. Teniendo en cuenta estos conceptos, podemos definir la convergencia de la siguiente forma:

Un esquema de diferencias finitas que aproxima un problema continuo de valores iniciales con condiciones en la frontera es convergente al tiempo t si para cualquier sucesión de particiones $\{\Delta x_j\}$, cuando $(n+1)\Delta t \rightarrow t$

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j \rightarrow 0$$

cuando $j \rightarrow \infty$ y $\Delta t \rightarrow 0$, donde \mathbf{v}^n denota al vector correspondiente a la solución exacta v del problema, cuya k -ésima componente es $v(k\Delta x, n\Delta t)$ [7].

Además, para poder afirmar que un esquema es convergente, es necesario que se cumplan dos requisitos la *estabilidad* y la *consistencia*. Si tenemos una ecuación diferencial parcial dada por $\mathcal{L}v = F$, cuya aproximación es $L_k^n u_k^n = G_k^n$, tenemos que:

El esquema de diferencias finitas $L_k^n u_k^n = G_k^n$ es puntualmente consistente con la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}v = F$ en el punto (x, t) si para cualquier función suave $\phi = \phi(x, t)$,

$$(\mathcal{L}\phi - F)|_k^n - [L_k^n \phi(k\Delta x, n\Delta t) - G_k^n] \rightarrow 0$$

cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ y $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$ [7].

Por otro lado, la definición de estabilidad requiere que

Dado un esquema de diferencias finitas de la forma $\mathbf{u}^{(n+1)} = Q\mathbf{u}^n$, con $n \geq 0$, se dice que éste es estable si existen constantes positivas Δx_0 y Δt_0 , y constantes no negativas K y β de tal forma que

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\|,$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Entonces de acuerdo al Teorema de equivalencia de Lax [7]:

Un esquema de diferencias finitas para un problema de valores iniciales es convergente si y solo si es estable.

En general, para sistemas de ecuaciones diferenciales que no son lineales es bastante difícil demostrar la Estabilidad y Consistencia de un esquema de diferencias finitas, y más aún la convergencia, pero hay una alternativa para verificar directamente esta última usando el siguiente método [4]. Sea que una función f se conoce con una precisión de segundo orden, es decir

$$f(x) = f_0(x) + E(x)(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x^3),$$

donde $f_0(x)$ es la solución de la ecuación en el continuo y $E(x)$ es el error asociado a la aproximación. En el caso en que $f_0(x)$ es conocida, basta con comparar los resultados obtenidos al usar dos distintas resoluciones; f_1 obtenida usando Δx , y f_2 obtenida con $\Delta x/2$. Si el esquema es convergente esperamos que

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)} = 4 + \mathcal{O}(\Delta x),$$

y se dice que el esquema es convergente de segundo orden, pues al disminuir el valor de Δx por la mitad, el error esperado debe disminuir a 1/4 de su valor anterior.

Por lo general, la solución exacta no es conocida, entonces se puede efectuar un análisis de convergencia de tipo Cauchy, usando los resultados de tres distintas resoluciones. Por ejemplo, sean f_1 y f_2 las soluciones mencionadas anteriormente, y sea f_3 una solución obtenida usando $\Delta x/4$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_4} &= \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)} \\ &= \frac{\frac{3}{4}\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)}{\frac{3}{16}\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)} \\ &= 4 + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

En la práctica, el mínimo factor de convergencia deseable es precisamente 4, el cual implica convergencia de segundo orden.

Así pues, la credibilidad de las soluciones obtenidas mediante la aproximación en diferencias finitas en la descomposición 3+1 de la Relatividad General se basa en dos elementos:

- A pesar de que las ecuaciones de evolución involucran solamente a la 3-métrica, a la curvatura extrínseca de las hipersuperficies, las condiciones de norma y términos de materia, es necesario verificar que se satisfacen las ecuaciones de constricción en el límite continuo. Esto es, se debe verificar que las constricciones convergen a cero cuando se incrementa la resolución de la aproximación.

- Es útil verificar que las funciones que están siendo integradas son autoconvergentes. Para conseguirlo es necesario usar el criterio descrito para el caso en que la solución en el continuo es desconocida, lo cual demanda el cálculo de las soluciones usando tres resoluciones distintas.

En el caso del monitoreo de las ecuaciones de constricción, dado que es de esperar que la violación de tales ecuaciones es pequeña, es conveniente calcular un escalar de tal violación. Así, si por ejemplo H es una variable definida sobre el dominio espacial, es conveniente definir la norma Euclidiana de modo que

$$\|H\|_2 = \text{version discreta de } \left(\sqrt{\int H dx} \right) = \sqrt{\sum_{k=0}^N H_k^2 \Delta x} \quad (3.2)$$

donde la integral y la sumatoria son sobre el dominio espacial. Esta norma de la constricción debe converger con el mismo orden que la constricción misma [7], y la presentación de dicha norma facilita el estudio de los resultados, ya que debido a que se trata de un escalar, es sencillo monitorear e interpretar su comportamiento durante la evolución, mientras que para analizar la convergencia de H , es necesario tomar en consideración la función evaluada en todo el dominio espacial para cada paso de tiempo. La prueba de autoconvergencia por otra parte requiere de un análisis diferente, para el cuál es necesario obtener resultados usando tres resoluciones y después calcular la norma de la diferencia entre los resultados entre una resolución y otra.

En este trabajo se presentan pruebas de convergencia, y con la finalidad de no sobreusar gráficos se ha elegido presentar la convergencia de la norma Euclidiana de la constricción Hamiltoniana y la autoconvergencia de algunas funciones métricas en algunos instantes durante la evolución.

Capítulo 4

Evolución de un Hoyo Negro

4.1 Ecuaciones ADM en simetría esférica

Sabemos que el elemento de línea mas general para un espacio-tiempo esféricamente simétrico en coordenadas esféricas es:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2),$$

donde las funciones métricas dependen de las coordenadas temporal y radial (t, r) . Con esto en mente, para el caso de simetría esférica es posible escribir los elementos de la descomposición 3+1 descritos en el capítulo 2, las componentes espaciales de la métrica γ_{ij} , las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} y el vector de corrimiento β^i como

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\ K_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Y \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\ \beta^i &\equiv (\beta \ 0 \ 0). \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde A, B, X, Y, β son funciones que dependen de (t, r) en general, adicionalmente, a la función de lapso la denotamos con la letra griega α . En base a estas expresiones, los tensores que forman parte de las constricciones Hamiltoniana (2.3) y de Momento (2.4) se escriben de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
R &= -2\frac{\partial_{rr}B}{AB} + \frac{(\partial_r B)^2}{2AB^2} + \frac{(\partial_r A)(\partial_r B)}{A^2B} + \frac{2}{B}, \\
K_{ij}K^{ij} &= \frac{X^2}{A^2} + 2\frac{Y^2}{B^2}, \\
K &= \frac{X}{A} + 2\frac{Y}{B}, \\
\nabla_j K^{rj} &= -\frac{X\partial_r A}{A^3} + \frac{X\partial_r B}{A^2B} - \frac{Y\partial_r B}{AB^2} + \frac{\partial_r X}{A^2}, \\
\nabla^r K &= -\frac{X\partial_r A}{A^3} + \frac{\partial_r X}{A^2} - 2\frac{Y\partial_r B}{AB^2} + 2\frac{\partial_r Y}{AB}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Las ecuaciones de evolución de A, B, X y Y obtenidas a partir de (2.5) son

$$\begin{aligned}
\partial_t A &= -2\alpha X + \mathcal{L}_\beta A, \\
\partial_t B &= -2\alpha Y + \mathcal{L}_\beta B, \\
\partial_t X &= -\partial_{rr}\alpha + \frac{\partial_r\alpha}{2}\frac{\partial_r A}{A} - \alpha\frac{\partial_{rr}B}{B} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial_r B}{B}\right)^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{(\partial_r A)(\partial_r B)}{AB} + 2\alpha\frac{XY}{B} \\
&\quad - \alpha\frac{X^2}{A} + \mathcal{L}_\beta X, \\
\partial_t Y &= -\frac{\partial_r\alpha}{2}\frac{\partial_r B}{A} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial_{rr}B}{A} + \frac{\alpha}{4}\frac{(\partial_r A)(\partial_r B)}{A^2} + \alpha + \alpha\frac{XY}{A} + \mathcal{L}_\beta Y,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

con las derivadas de Lie dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\beta A &= \beta\partial_r A + 2(\partial_r\beta)A, \\
\mathcal{L}_\beta B &= \beta\partial_r B, \\
\mathcal{L}_\beta X &= \beta\partial_r X + 2(\partial_r\beta)X, \\
\mathcal{L}_\beta Y &= \beta\partial_r Y.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Este conjunto de ecuaciones es el que usaremos para evolucionar las componentes de la métrica y de la curvatura extrínseca del presente ejemplo.

4.2 Datos iniciales

Con la finalidad de evolucionar un hoyo negro, elegimos como datos iniciales la solución exacta de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. En función de la coordenada r y la masa m del agujero negro, tal solución tiene los siguientes

valores para las variables que pretendemos evolucionar, A y B las componentes de la métrica, y X , Y , las componentes de la curvatura extrínseca, además del lapso y el vector de corrimiento

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}}, \\
 \beta &= \frac{2m}{r} \frac{1}{1 + \frac{2m}{r}}, \\
 A &= 1 + \frac{2m}{r}, \\
 B &= r^2, \\
 X &= -\frac{2m}{r} \frac{1 + \frac{m}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}}, \\
 Y &= 2m \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}},
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

que corresponden a la solución exacta, que se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + \frac{4m}{r} dt dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Con estos valores es fácil verificar que se satisfacen las constricciones Hamiltoniana (2.3) y de Momento (2.4).

4.3 Evolución y elección de la norma

Además, la condición de Eddington-Finkelstein, que requiere que $t + r$ sea una coordenada entrante nula, es equivalente a pedir que la función lapso y la componente del vector de corrimiento satisfagan la relación

$$\frac{\alpha}{\sqrt{A}} + \beta = 1.$$

Por otro lado, imponemos la condición de que el área de superficies que tengan r constante, sea constante en el tiempo, es decir, que las componentes angulares de la métrica sean independientes del tiempo, para lo cual es suficiente que se cumpla

$$\partial_t B = 0.$$

Usando estas dos últimas expresiones y la ecuación de evolución obtenida para B

$$\partial_t B = -2\alpha Y + \beta \partial_r B,$$

podemos resolver para β de ambas expresiones, e igualarlas para obtener

$$1 - \frac{\alpha}{\sqrt{A}} = \frac{2\alpha Y}{\partial_r B},$$

y resolver para la función α , para así reconstruirla en base a las variables A y B de la métrica y Y de la curvatura extrínseca, una vez que han sido evolucionadas a partir de (4.3)

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{2Y}{\partial_r B}}, \quad (4.6)$$

lo que también nos permite calcular β usando

$$\beta = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{A}}. \quad (4.7)$$

Las expresiones (4.6) y (4.7) se usan durante la evolución como condiciones de norma una vez que A y Y han sido evolucionadas en cada paso de tiempo de acuerdo a (4.3).

Con la finalidad de evitar la singularidad que existe en $r = 0$, se hace excisión a un radio finito, que se ubique dentro del horizonte aparente, pero no demasiado cerca del origen. En otras palabras, el dominio espacial usado en las evoluciones se encuentra acotado por $r = r_{min}$ con $0 < r_{min} < 2m$.

Las ecuaciones de evolución se resuelven usando diferencias centradas de las ecuaciones del sistema (4.3) excepto en los términos de advección. Estos términos aparecen en (4.4) y se distinguen por ser los términos del tipo $\beta \partial_r F$ para alguna F . En este caso, debido a que el vector de corrimiento corre las coordenadas hacia la derecha si $\beta > 0$ y a la izquierda si $\beta < 0$ es necesario garantizar que la evolución es causalmente conectada. Así, en lugar de usar estenciles centrados se usan los inclinados hacia la derecha y hacia la izquierda para calcular la derivada espacial de F :

$$(\partial_r u)_k = \frac{-3u_k + 4u_{k+1} - u_{k+2}}{2\Delta r}, \quad \beta > 0 \quad (4.8)$$

$$(\partial_r u)_k = \frac{3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}}{2\Delta r}, \quad \beta < 0, \quad (4.9)$$

que son aproximaciones de segundo orden, los cuales se obtienen de manera análoga a como se construye la aproximación centrada (3.1) pero considerando la expansión solamente hacia la derecha o hacia la izquierda del punto de la malla.

En la frontera interior, la de excisión, no se aplica ninguna condición de frontera y se construye la parte derecha de las ecuaciones (4.3) usando el estencil (4.8) para calcular las derivadas espaciales. Esto se hace porque debido a que la frontera se localiza dentro del horizonte aparente, las señales debieran propagarse hacia dentro. En rigor, sería necesario calcular las velocidades características del sistema de ecuaciones (4.3) para verificarlo, pero en los resultados presentados aquí se confirma que no se presentan errores propagándose a partir de dicha frontera.

En la frontera exterior se aplican condiciones de onda saliente a todas las variables de (4.3), y substracción de fondo. Llevada a la práctica, dicha condición de frontera implica que la derivada parcial respecto al tiempo de una función cualquiera u , en el punto mas exterior del dominio espacial tiene la forma

$$\partial_t(u - u_f) = -c_+ \partial_r(u - u_f)$$

donde u_f es el fondo estático, el cuál en este caso, se asume como la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, y se utilizan diferencias orientadas a la izquierda para calcular la aproximación a la derivada parcial respecto a r .

4.4 Diagnóstico

Como ya habíamos mencionado, para corroborar que el método numérico realmente da una solución a las ecuaciones de Einstein, es conveniente ver que se satisfacen las constricciones Hamiltoniana y de momento para cada tiempo. Debido a los errores de la aproximación por diferencias finitas que son usadas, las ecuaciones H y M^r no van a satisfacerse exactamente, pero deben presentar errores muy pequeños. En términos de las componentes de la 3-métrica y la curvatura extrínseca, las expresiones para H y M^r son:

$$\begin{aligned} H &= -2 \frac{\partial_{rr} B}{AB} + \frac{(\partial_r B)^2}{2AB^2} + \frac{(\partial_r A)(\partial_r B)}{A^2 B} + \frac{2}{B} - 2 \frac{XY}{AB}, \\ M^r &= \frac{X \partial_r B}{A^2 B} + \frac{Y \partial_r B}{AB^2} - 2 \frac{\partial_r Y}{AB}, \end{aligned}$$

que deben de tener valores $\ll 1$ en todo el dominio espacial, durante la evolución temporal.

4.4.1 Convergencia

Para diagnosticar que la solución numérica es correcta es preciso verificar que las constricciones se satisfacen en el límite continuo con el orden de convergencia

correspondiente a la precisión del método numérico. Como en este caso el integrador en el tiempo es el Runge-Kutta de tercer orden, y las aproximaciones de las derivadas parciales son de segundo orden, esperamos que el código presente convergencia de segundo orden [7]. Adicionalmente se verifica la autoconvergencia de algunas de las funciones.

4.4.2 Horizonte aparente

En este ejemplo particular, usando nuestras variables de estado A, B, X, Y , la función Θ que definimos en la ecuación (2.6), que nos permite calcular el radio de las superficies marginalmente atrapadas se escribe como

$$\Theta = \frac{\partial_r B}{\sqrt{AB}} - 2\frac{Y}{B}, \quad (4.10)$$

y la forma de encontrar el horizonte aparente numéricamente, consiste en evaluar esta función en todo el dominio espacial, y encontrar el valor del radio r mas grande para el que se cumpla que $\Theta = 0$.

Debido a que el dominio de las funciones es discreto, es necesario buscar, dentro de los valores existentes de la coordenada espacial r , aquellos en los que la función Θ cambia de un valor positivo a uno negativo, o viceversa, para después hacer una interpolación lineal entre ellos, y así encontrar el valor numérico exacto de r en donde $\Theta = 0$, que es donde se ubica el radio del Horizonte Aparente.

4.4.3 Geodésicas Nulas

Como ya mencionamos, el horizonte de eventos solo es posible de localizar después de conocer la estructura global de la solución al sistema. Para tal efecto es útil trazar haces de rayos nulos radiales hacia afuera del hoyo negro y hacia el futuro, y la superficie de la que divergen será asociada con el horizonte de eventos, o bien, trazar haces de rayos nulos hacia el pasado hacia adentro del agujero negro, siendo la superficie a la que convergen el horizonte de eventos.

Para poder trazar tales rayos nulos, necesitamos una ecuación de evolución para la posición de cada uno de ellos, la cual podemos obtener al analizar el elemento de línea

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

que debe ser cero para las curvas correspondientes a las geodésicas nulas. En el caso con simetría esférica, las componentes de γ_{ij} y β_i están dadas por las ecuaciones (4.1), de donde concluimos que

$$\begin{aligned}\beta_i\beta^i &= \gamma_{ij}\beta^i\beta^j = A\beta^2, \\ \beta_i &= \gamma_{ij}\beta^j = A\beta,\end{aligned}$$

entonces, recordando que queremos analizar rayos perpendiculares al agujero negro dentro de un espacio-tiempo con simetría esférica (lo cuál implica que los valores de las coordenadas angulares θ y ϕ son constantes), podemos reescribir ds^2 como

$$ds^2 = -(\alpha^2 - A\beta^2)dt^2 + 2A\beta dt dr + A dr^2 = 0,$$

de donde podemos obtener directamente una expresión para la posición radial de un rayo nulo:

$$\frac{dr_{geo}}{dt} = -\beta \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \quad (4.11)$$

que puede ser integrada como el resto de las ecuaciones de evolución usando ML, y en este caso sirve para conocer la posición radial de la geodésica nula en cada tiempo. Así pues, α , β y A determinan la geodésica nula, y conforme dicho conjunto de variables evolucione, también r_{geo} lo hará. Para poder evaluar esta ecuación, es necesario hacer una interpolación de los valores de las funciones α , β y A , ya que solo conocemos dichas funciones en los puntos de la malla construida, y éstos en general no coinciden con los puntos donde se ubican las geodésicas nulas.

Ahora, utilizando al Horizonte Aparente como referencia, colocamos una serie de puntos cerca de éste, los cuales serán las posiciones iniciales de las geodésicas nulas a analizar, y con ayuda de la ecuación (4.11) se calculan sus trayectorias a lo largo de la evolución temporal. El horizonte de eventos entonces será aproximadamente la superficie de la cual divergen las geodésicas nulas.

4.5 Resultados

Se muestra a continuación la evolución de los datos iniciales usando un factor de Courant $CFL = 0.25$, para tres distintas resoluciones, 10000, 20000, y 40000 puntos en el dominio espacial D (es decir $\Delta r = 0.001, 0.0005, 0.00025$), para el cuál se hizo una excisión del origen hasta $r = 1.5$, teniendo entonces como dominio físico la región $D_{fis} = [1.5, 101.5]$ y se verificaron los resultados hasta $t = 100$.

Se muestra en la gráfica 4.1 las componentes radial y angular de la métrica, las componentes de la curvatura extrínseca se ilustran en las figuras 4.2 y 4.3, mientras que las funciones de norma se muestran en las figuras 4.4. Como es de esperarse, todas

estas gráficas son aproximadamente constantes en el tiempo, por lo que al mostrar instantáneas de ellas en varios tiempos, las curvas están encimadas unas sobre otras.

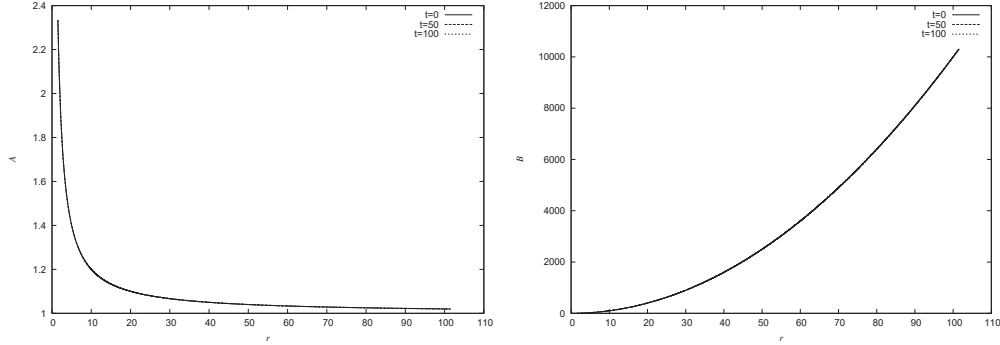


Figura 4.1: Instantáneas de las funciones métricas A y B para $t = 0, 50, 100$. Como es de esperar, estas funciones se mantienen congeladas durante la evolución, por lo que es prácticamente imposible distinguir la curva correspondiente a uno de los tiempos de las otras.

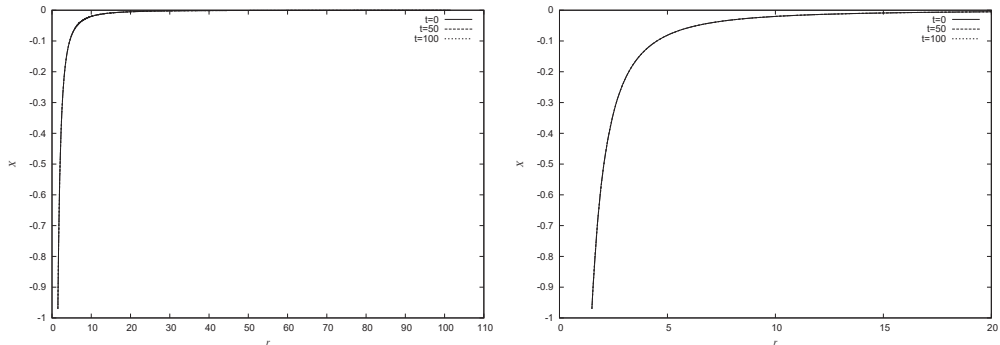


Figura 4.2: Instantáneas de la componentes X de la curvatura extrínseca para $t = 0, 50, 100$. En la segunda figura se observa un acercamiento a la región espacial en la que X aún no disminuye su amplitud. Después de ésta zona la función converge a 0. Al igual que las componentes de la métrica, la curvatura extrínseca se mantiene constante durante la evolución.

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestra la norma $\|H\|_2$ de la constricción Hamiltoniana contra el tiempo, hasta $t = 100$, para cada una de las resoluciones usadas, y de nuevo las mismas curvas, pero esta vez escaladas, es decir, multiplicamos la resolución media por un factor de 4, y la resolución mas alta por un factor de 16, con lo que las tres gráficas quedan prácticamente superpuestas una encima de la otra.

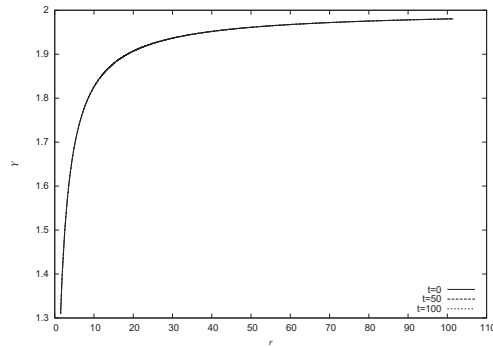


Figura 4.3: Instantáneas de la componentes Y de la curvatura extrínseca para $t = 0, 50, 100$. Al igual que las componentes de la métrica, la curvatura extrínseca se mantiene constante durante la evolución, aunque para resoluciones menores se aprecia un desplazamiento de la curva respecto al valor esperado, aquí se muestran los resultados obtenidos con la mas alta resolución, para la que dicho efecto no es significativo para el tiempo considerado.

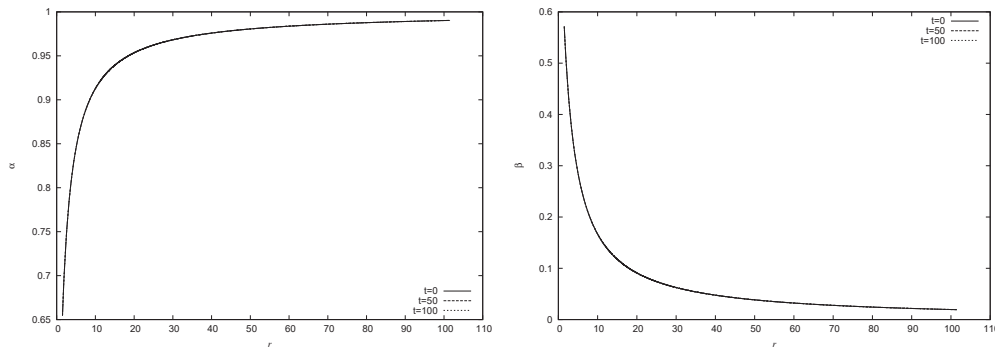


Figura 4.4: Instantáneas de las funciones α y β para $t = 0, 50, 100$.

Esto quiere decir que al aumentar la resolución al doble, la precisión del código aumenta por un factor de 2^2 , indicando que se tiene convergencia de segundo orden. También se puede apreciar la autoconvergencia de segundo orden para la componente A , ilustrada en la figura 4.7, donde se muestra el error relativo entre la primera y segunda resolución, dividido por el error relativo entre la segunda y tercera resolución a los tiempos $t = 25, 50, 75, 100$.

Como se esperaba, la condición de frontera aplicada, la cuál viola las constricciones, introduce un error que se propaga hacia el interior del dominio espacial, sin embargo los errores introducidos son del orden 10^{-10} e inclusive menores, para una función que

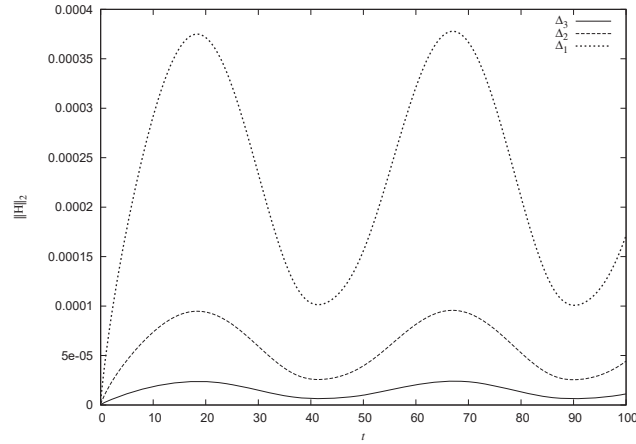


Figura 4.5: Norma $\|H\|_2$ de la constricción Hamiltoniana para las tres resoluciones $\Delta r = 0.001, 0.0005, 0.00025$ graficada en el tiempo. La norma se calculó para todos los puntos del dominio espacial utilizando la fórmula 3.2, hasta $t = 100$.

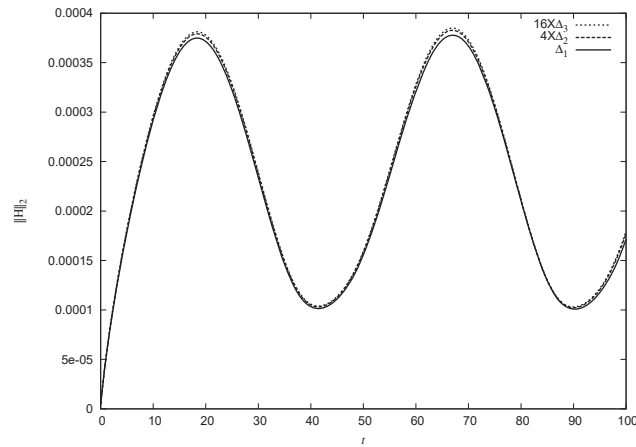


Figura 4.6: Norma $\|H\|_2$ de la constricción Hamiltoniana para las tres resoluciones $\Delta r = 0.001, 0.0005, 0.00025$. En éste gráfico se multiplica la resolución media por 4 y la resolución mas fina por 16, para ilustrar la convergencia de segundo orden. A pesar de que las condiciones de frontera introducen una violación a las constricciones, el error resultante es tan pequeño, que inclusive para tiempos avanzados la convergencia de éstas se mantiene con precisión de segundo orden.

en el dominio espacial considerado toma valores entre 2.5 y 1.0, de modo que el error propagado es tan pequeño que no causa que las constricciones se dejen de satisfacer, como se puede apreciar en las gráficas 4.5 y 4.6.

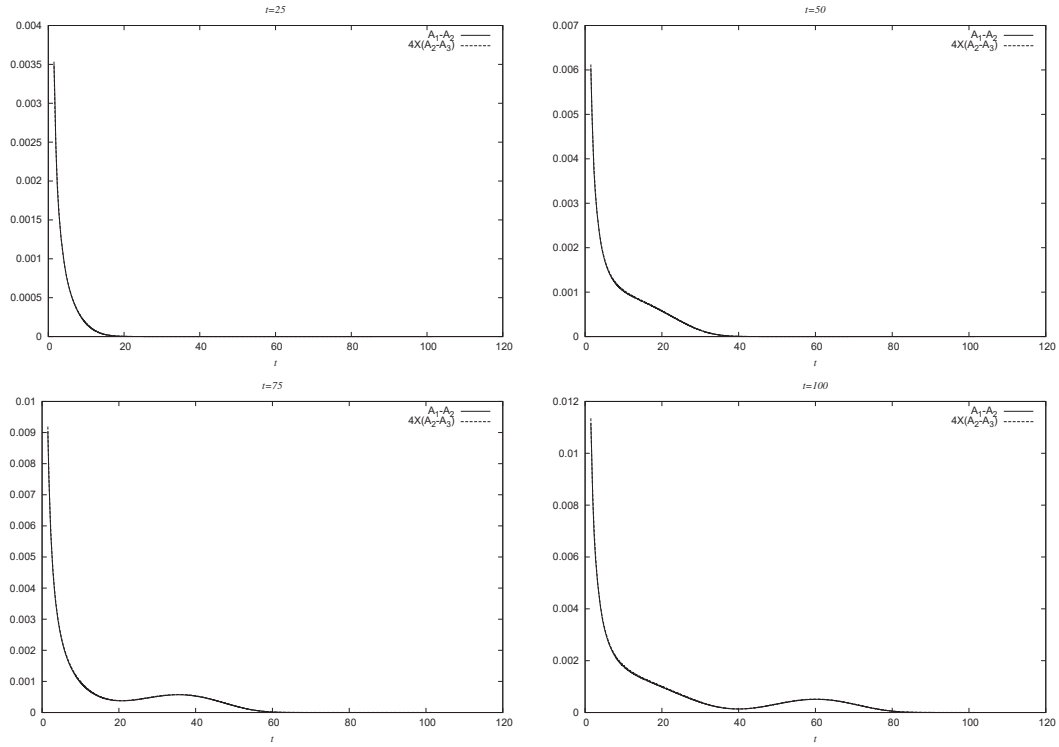


Figura 4.7: Las curvas de estas figuras muestran las diferencias entre los valores de la función A para las distintas resoluciones. En cada cuadro, una de las curvas representa la diferencia entre los valores obtenidos con la primera y la segunda resolución, mientras que la otra representa la diferencia entre los valores de la segunda resolución y la tercera, a la vez que ésta última curva se multiplica por un factor de 4 para ilustrar la autoconvergencia de la función A . Como mencionamos, aunque las condiciones de frontera introducen un error al sistema, este es tan pequeño que no causa que la autoconvergencia se pierda, aun para tiempos avanzados. Las resoluciones usadas son $\Delta r = 0.001, 0.0005, 0.00025$, para los tiempos $t = 25, 50, 75, 100$.

Utilizando como referencia el radio del horizonte aparente, que aparece como una recta mas gruesa en la figura 4.9, se presenta una serie de geodésicas nulas salientes a ambos lados de éste en la misma figura, separadas entre sí una distancia $\Delta r = 0.00001$, con lo que es posible ver que, al paso del tiempo, dichas geodésicas divergen de un radio $2.0 < r < 2.00001$, por lo que se estima que en ese intervalo se encuentra el Horizonte de Eventos.

La experiencia ganada con el estudio de este sistema es la siguiente:

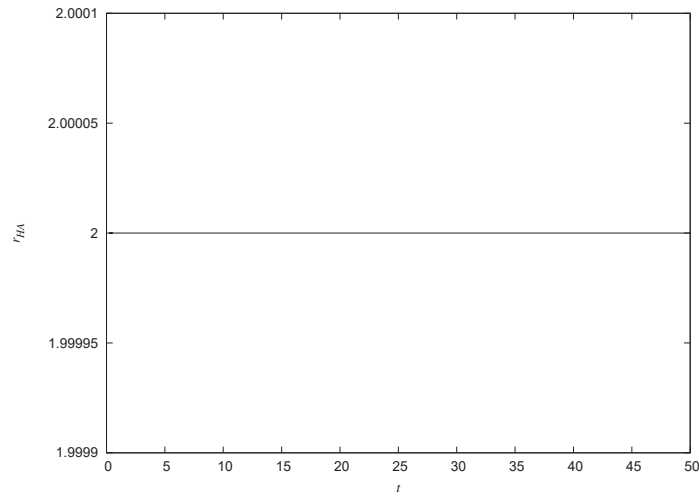


Figura 4.8: Radio del horizonte aparente graficado contra el tiempo. Éste aparece en $r = 2$ y se mantiene muy cerca a ese mismo valor (con una desviación del orden de 10^{-12}) durante toda la evolución para las tres resoluciones.

- A pesar de que se implementaron las condiciones de onda saliente para las variables de estado, y condiciones de frontera en la que se resta un fondo estático de Schwarzschild, existe una ligera violación de las constricciones Hamiltoniana y de Momento, sin embargo, no es lo suficientemente grande como para hacer que se pierda la convergencia.
- En efecto se verificó que en la frontera de excisión no fue necesario implementar condiciones de frontera y nunca se detectó alguna violación de las constricciones o algún pulso espurio saliendo de la frontera de excisión al exterior del hoyo negro.
- Gracias a la resolución usada para la evolución de las ecuaciones, y a la elección del factor de Courant, las componentes de la métrica, de la curvatura extrínseca y las funciones de norma fueron altamente estables como se esperaba.

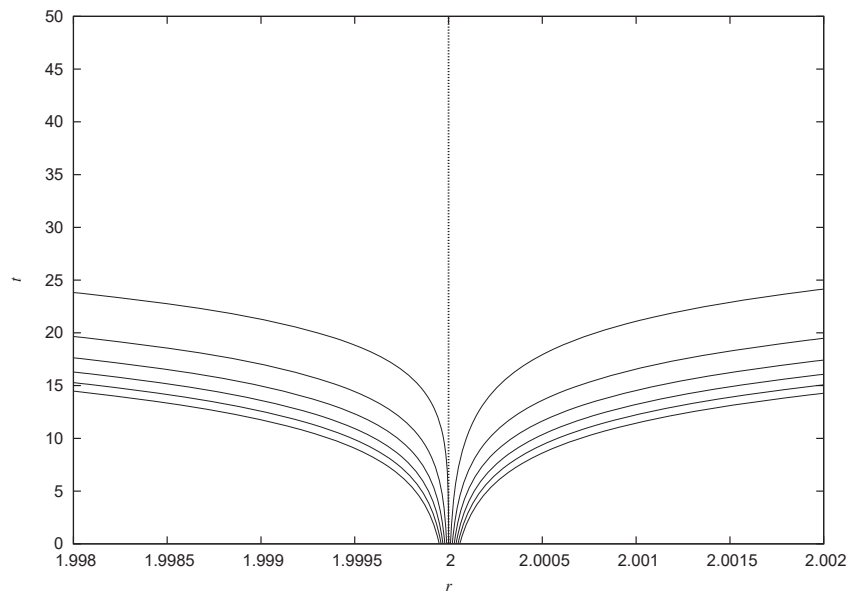


Figura 4.9: Rayos nulos radiales que apuntan hacia fuera durante la evolución. Éstos divergen de un radio ligeramente mayor al radio del Horizonte Aparente que se mantiene en el valor 2 para toda la evolución, graficado aquí con una línea punteada.

Capítulo 5

Evolución de un campo escalar

El propósito de este ejemplo es ilustrar la evolución de un campo escalar en un espacio-tiempo con simetría esférica, con miras a poder implementar éstos conceptos básicos en problemas mas generales. Es sabido que importantes teorías cosmológicas, actualmente bajo desarrollo, están basadas en la implementación de campos escalares en la Relatividad General, y aunque dichas teorías no necesariamente son tan sencillas como el ejemplo que aquí se desarrolla, el sistema físico general en el que se basan es el mismo, así que este modelo es un buen punto de partida para la familiarización con este tipo de problemas, que después conduzca al desarrollo de procesos mas complejos que sean útiles para la resolución de problemas de mayor relevancia y actualidad.

5.1 Descomposición 3+1

En este ejemplo particular consideraremos un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad y un espacio tiempo con simetría esférica definido por la métrica

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + A dr^2 + \tilde{B} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde $\tilde{B} r^2 = B$, y asumimos que el vector de corrimiento es cero. El campo escalar tiene asociado el siguiente tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + 2V(\phi)],$$

donde $V(\phi)$ es el potencial asociado al campo escalar, y las ecuaciones de Einstein están dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Asimismo, del tensor de energía momento podemos obtener directamente expresiones para las fuentes de materia, de acuerdo con la convención adoptada en la descom-

posición 3+1 para simetría esférica

$$\begin{aligned}\rho &= n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}, \\ j_r &= -n_\mu T_r^\mu.\end{aligned}$$

A la cantidad ρ se le asocia con la densidad de energía del sistema, mientras que j^r es la densidad de momento. Una vez calculadas las componentes del tensor, y recordando que el vector normal a la hipersuperficie y que apunta en dirección del tiempo es $n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$, $n_\mu = (-\alpha, \vec{0})$, se tiene

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial_t \phi)^2 A + \alpha^2 V A + \alpha^2 (\partial_r \phi)^2}{A} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial_t \phi)^2}{\alpha^2} + \frac{(\partial_r \phi)^2}{A} \right] + V\end{aligned}$$

y

$$j_r = \alpha \left[-\frac{(\partial_r \phi)(\partial_t \phi)}{\alpha^2} \right] = -\frac{(\partial_t \phi)(\partial_r \phi)}{\alpha}.$$

Por otro lado, para el presente caso la constricción Hamiltoniana resulta ser:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{4 \alpha^2 \tilde{B}^2 A^2 r^2} [-(\partial_r \tilde{B})^2 \alpha^2 A r^2 - 4(\partial_r A) \alpha^2 r \tilde{B}^2 + 4\alpha^2 A \tilde{B}^2 - 2(\partial_t A)(\partial_t \tilde{B}) A r^2 \tilde{B} \\ &\quad + 12\alpha^2 A \tilde{B} r (\partial_r \tilde{B}) + 4\alpha^2 A r^2 \tilde{B} (\partial_{rr} \tilde{B}) - 2(\partial_r A) \alpha^2 r^2 \tilde{B} (\partial_r \tilde{B}) - 4\tilde{B} \alpha^2 A^2 \\ &\quad - (\partial_t \tilde{B})^2 A^2 r^2 + 16\pi A^2 \tilde{B}^2 r^2 (\partial_t \phi)^2 + 32\pi A^2 \tilde{B}^2 r^2 \alpha^2 V + 16\pi A \tilde{B}^2 r^2 \alpha^2 (\partial_r \phi)^2] \\ &= \partial_r D_{\tilde{B}} - D_{\tilde{B}} \left(\frac{D_{\tilde{B}}}{4} + \frac{U}{2} - \frac{2\lambda \tilde{B}}{A} \right) - \frac{1}{r} \left(U - \lambda - D_{\tilde{B}} + \frac{4\lambda \tilde{B}}{A} \right) \\ &\quad - AK_{\tilde{B}}(2K - 3K_{\tilde{B}}) + 8A\pi\rho,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde hemos adoptado la notación de [5]

$$\begin{aligned}D_{\tilde{B}} &= \partial_r \ln \tilde{B} \\ U &= D_A - 2D_{\tilde{B}} - \frac{4\lambda \tilde{B}}{A} \\ D_A &= \partial_r \ln A \\ \lambda &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{\tilde{B}} \right) \\ K &= K_A + 2K_{\tilde{B}} \\ K_A &= \gamma^{rr} K_{rr} = \frac{1}{A} K_{rr} \\ K_{\tilde{B}} &= \gamma^{\phi\phi} K_{\phi\phi} = \frac{1}{\tilde{B}} K_{\phi\phi}.\end{aligned}$$

La variable λ se utiliza en los cálculos en vez de r , ya que la última presenta problemas de regularidad cerca del origen, como se menciona en [5].

De manera análoga se obtiene una expresión práctica para la constricción de Momento

$$M = \partial_r K_{\tilde{B}} - (K - 3K_{\tilde{B}}) \left[\frac{D_{\tilde{B}}}{2} + \frac{1}{r} \right] - 4\pi \frac{(\partial_r \phi)(\partial_t \phi)}{\alpha}.$$

Las ecuaciones de evolución obtenidas en [5] son

$$\begin{aligned} \partial_t A &= 2\alpha A(2K_{\tilde{B}} - K) \\ \partial_t \tilde{B} &= -2\alpha B K_{\tilde{B}} \\ \partial_t \lambda &= \frac{2\alpha A}{\tilde{B}} \left[\partial_r K_{\tilde{B}} + 4\pi J_A - \frac{D_{\tilde{B}}}{2}(K - 3K_{\tilde{B}}) \right] \\ \partial_t U &= -2\partial_r(\alpha K) + 4\alpha D_{\tilde{B}}(K - 3K_{\tilde{B}}) + 8\alpha \left[D_\alpha K_{\tilde{B}} + \frac{\lambda \tilde{B}}{A}(3K_{\tilde{B}} - K) - 4\pi J_A \right] \\ \partial_t D_{\tilde{B}} &= -2\partial_r(\alpha K_{\tilde{B}}) \\ \partial_t K &= \alpha \left[-\frac{\partial_r D_\alpha}{A} - 4K K_{\tilde{B}} + 6K_{\tilde{B}}^2 + K^2 + \frac{D_\alpha}{2A} \left(U + \frac{4\lambda \tilde{B}}{A} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_\alpha^2}{A} - \frac{2D_\alpha}{Ar} - 8\pi(M_A + 2M_{\tilde{B}} - 2\rho) \right] \\ \partial_t K_{\tilde{B}} &= \alpha \left[-\frac{\partial_r D_{\tilde{B}}}{2A} - \frac{D_\alpha D_{\tilde{B}}}{2A} + \frac{D_{\tilde{B}}}{4A} \left(U + \frac{4\lambda \tilde{B}}{A} \right) + K K_{\tilde{B}} - 8\pi M_{\tilde{B}} \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{Ar} \left[\frac{U}{2} + \frac{2\lambda \tilde{B}}{A} - D_{\tilde{B}} - \lambda - D_\alpha \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, para el campo escalar, se introducen las variables

$$\begin{aligned} \xi &:= \partial_r \phi, \\ \Pi &:= \frac{\tilde{B}\sqrt{A}}{\alpha} \partial_t \phi, \end{aligned}$$

y de la ecuación de Klein-Gordon se puede obtener la ecuación de evolución para Π

$$\partial_t \Pi = -\alpha \tilde{B} \sqrt{A} \partial_\phi V + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{\alpha \tilde{B} r^2 \xi}{\sqrt{A}} \right).$$

donde V es el potencial debido al campo escalar, que en este caso tomaremos como $V = \phi^2$ a lo largo de toda la evolución. Para fines prácticos, sin embargo, ésta última ecuación tiene que ser sustituida por una forma equivalente

$$\partial_t \Pi = -\alpha \tilde{B} \sqrt{A} \partial_\phi V + 3 \frac{d}{dr^3} \left(\frac{\alpha \tilde{B} r^2 \xi}{\sqrt{A}} \right),$$

ya que, como se demuestra en [1], el término correspondiente a la derivada parcial respecto a r en la primera expresión, al ser calculado numéricamente usando diferencias centradas, diverge cerca del origen. Es por eso, que se sustituye $\frac{1}{r^2} \partial_r$ por $3 \partial_{r^3}$, que aunque es matemáticamente equivalente, al ser evaluada con diferencias centradas, da una buena aproximación al caso continuo.

5.2 Datos iniciales

Al momento de hacer cálculos numéricos, se presentan problemas en los resultados que se obtienen en el origen, por lo que en lugar de considerar el inicio del dominio espacial en 0, se omite el origen y se comienza desde $-\Delta r/2$, suponiendo que las funciones A y \tilde{B} son regulares. A éste proceso de evitar el origen se le llama *staggering*.

Suponemos también que, al tiempo inicial, el sistema es simétrico respecto al tiempo, es decir, que las derivadas respecto al tiempo de todas las variables involucradas son cero para $t = 0$. La primera consecuencia directa de este hecho, es que las componentes de la curvatura extrínseca también se anulan $K_A = K_{\tilde{B}} = 0$, pues como sabemos, son directamente proporcionales a las derivadas parciales de las componentes de la métrica respecto al tiempo cuando el vector de corrimiento β es cero.

Con respecto a la componente angular \tilde{B} de la métrica, el valor inicial para el caso estático es $\tilde{B} = 1$, mientras que para la componente A , primero habremos de tener en cuenta que se debe satisfacer la restricción hamiltoniana para los valores iniciales $\Pi = K_{\tilde{B}} = D_{\tilde{B}} = K = 0$, es decir, la ecuación (5.1) se reduce a

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{r} \left(U - \lambda + \frac{4\lambda}{A} \right) + 8\pi A \rho \\ &= -\frac{1}{r} (D_A - \lambda) + 8\pi \rho A \\ &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial_r A}{A} - \frac{1-A}{r} \right) + 8\pi A \rho, \end{aligned}$$

de donde se obtiene una ecuación para integrar la función A

$$\partial_r A = A \left[\frac{1-A}{r} + 8\pi Ar\rho \right]. \quad (5.2)$$

Ahora nos damos cuenta de que necesitamos un valor inicial para la función A en el origen, pero en un principio también requerimos que el espacio sea localmente plano en $r = 0$, lo cual implica que A debe tomar el valor $A(r = 0) = 1$. En base a este valor de $A(t = 0, r = 0) = 1$ es posible usar la ecuación (5.2) para calcular el valor inicial la función A al momento inicial. Sin embargo, como ya mencionamos, al evitar el origen, el primer valor que necesitamos para integrar la función A es $A(t = 0, r = \Delta r/2)$, valor que podemos obtener al hacer una expansión en serie de Taylor de A , con ayuda de la ecuación (5.2). A segundo orden, y después de simplificar la expansión de Taylor, el valor requerido de A en el punto $\Delta r/2$ está dado por

$$A(t = 0, r = \Delta r/2) = 1 + (\Delta r)^2 \pi \left(\frac{\psi(0)^2}{2} + V(0) \right),$$

y en base a éste se integra la función A para el resto del dominio espacial.

Finalmente, para obtener una condición inicial para α que satisfaga las constricciones, se puede sustituir la ecuación de evolución para $K_{\bar{B}}$ en la constricción de Momento, para obtener la relación

$$\partial_r \alpha = -\frac{\alpha}{2r} [1 - A - 4\pi r^2 (\xi^2 - 2AV)],$$

la cual puede ser integrada de la misma forma que se hizo para A .

Además, iniciamos la evolución usando un campo escalar con un perfil gaussiano

$$\phi = C e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2},$$

donde C es la amplitud del campo, r_0 es la ubicación del centro del campo, y σ es el ancho. De esta expresión obtenemos directamente la derivada de ϕ respecto a r al tiempo inicial.

5.3 Resultados

5.3.1 Campo escalar dispersándose

Los siguientes resultados fueron obtenidos usando los parámetros de ϕ inicial $C = 0.002$ y $\sigma = 1.35$, centrada en $r = 25$, y evolucionando el sistema hasta un tiempo

$t = 50$, pues un campo escalar de ésta naturaleza inmerso en el espacio tiempo de este ejemplo se dispersa. El dominio espacial de la simulación es $r \in [0, 100]$ y se utilizan las mismas resoluciones que en el ejemplo anterior.

En la figura 5.1 se muestra el campo escalar para distintos tiempos de la evolución, desde el momento inicial en que tiene su máxima amplitud, y cómo se va dispersando hacia afuera, a la vez que disminuye su amplitud. Como se puede apreciar en la figura 5.2, la función α se aproxima al valor 1 en todo el dominio espacial, conforme el campo escalar se va dispersando.

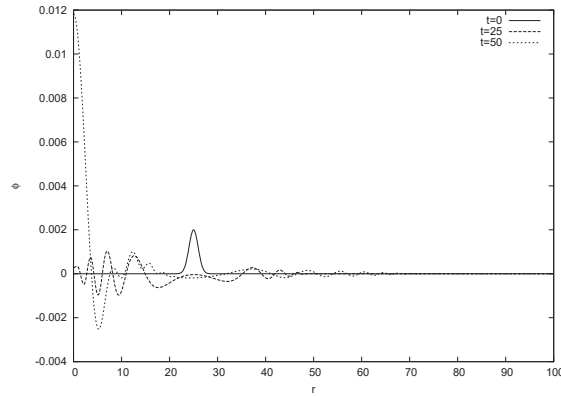


Figura 5.1: Campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$ a $t = 0, 25, 50$. En tiempos avanzados el campo se ha dispersado en gran medida, mientras que para $t = 25$ el pulso ha alcanzado la frontera izquierda y forma un pico, que también se dispersa rápidamente

En las gráficas 5.3 y 5.4 se ilustran las componentes de la métrica A y \tilde{B} respectivamente, para distintos tiempos, al igual que se muestra la densidad ρ en la figura 5.5.

En la figura 5.6 se grafica la norma de la constricción Hamiltoniana hasta $t = 50$ para cada una de las resoluciones, multiplicando la norma de la segunda resolución por un factor de 4, y la de la tercera resolución por un factor de 16, para ilustrar que se tiene convergencia de segundo orden.

5.4 Colapso en agujero negro

A continuación evolucionamos el campo escalar, esta vez con amplitud $C = 0.28$, un factor de dispersión dado por $\sigma = 1.5$ y centrado en el origen, en un dominio espacial $D = r \in [0, 50]$, y con tres resoluciones mas finas que las anteriormente usadas,

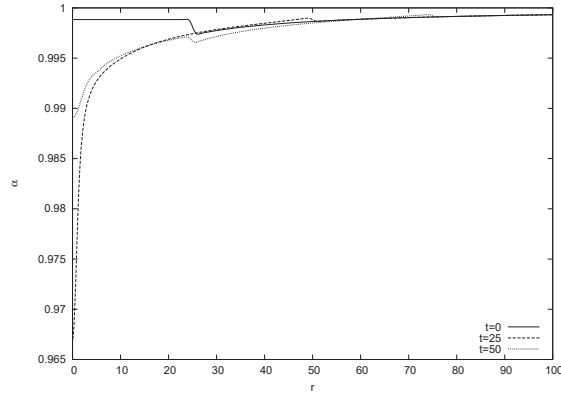


Figura 5.2: Función de lapso α en los tiempos $t = 0$, $t = 25$ y $t = 50$ para el campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$. Conforme el campo escalar se dispersa, la función tiende al valor $\alpha = 1$ en todo el dominio espacial.

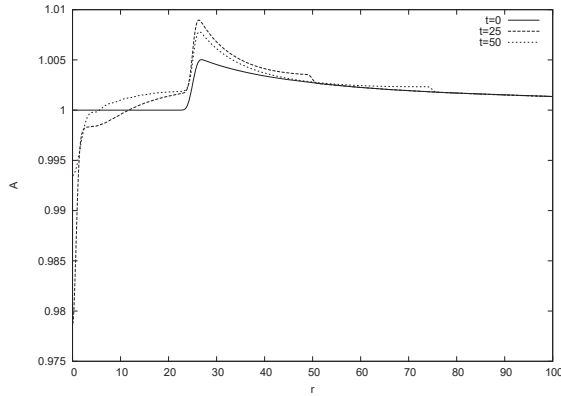


Figura 5.3: Componente Radial A de la métrica en los tiempos $t = 0$ (línea continua), $t = 25$ y $t = 50$ para el campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$.

$\Delta r = 0.00125, 0.000625, 0.0003125$. La primera diferencia evidente con respecto al caso anterior, es que éste campo escalar no se dispersa totalmente, sino que se concentra cerca del origen, y empieza a crecer en amplitud como se puede apreciar en la gráfica 5.7. Al mismo tiempo, en la figura 5.8 se vé como la función α se aproxima a 0, indicando un "congelamiento" temporal de la evolución en esa zona.

Lo primero que se debe hacer para poder hablar de la formación de un hoyo negro, es comprobar si es que efectivamente se forma un horizonte aparente, proceso que efectuamos mediante el mismo método usado en el capítulo 4. Esto es posible

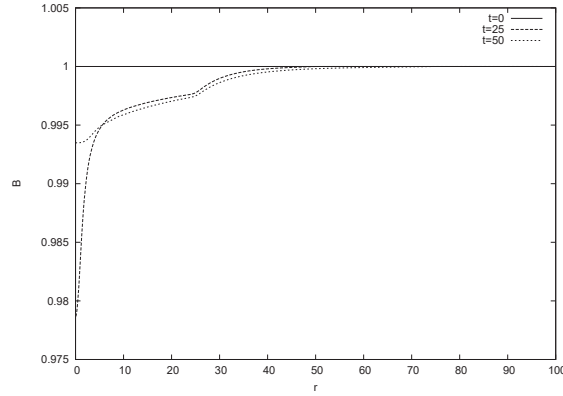


Figura 5.4: Componente B de la métrica para el campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$, en los tiempos $t = 0$ (línea continua), $t = 25$, cuando ha crecido y formado un pico cerca del origen, y $t = 50$.

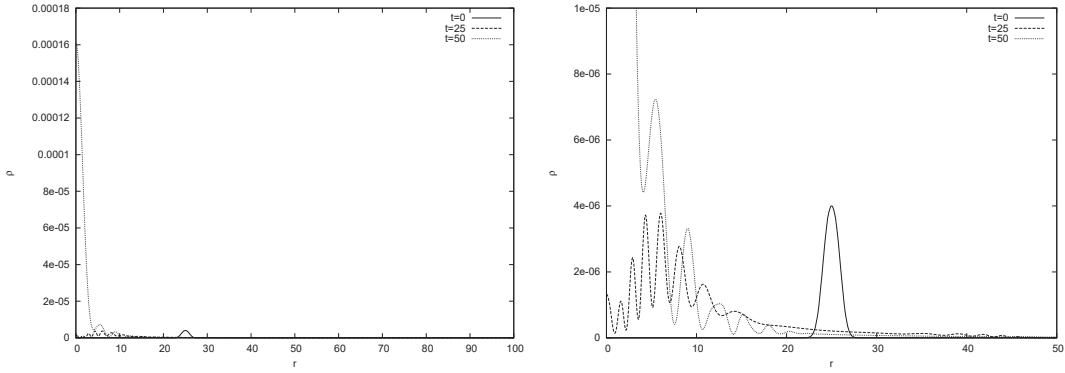


Figura 5.5: Densidad para los tiempos $t = 0$, $t = 25$ y $t = 50$ en el caso del campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$. En la primera figura se puede apreciar el valor de la densidad para todo el dominio espacial para cada uno de los tiempos, y en la segunda se tiene un acercamiento de la misma gráfica, donde se ilustra el valor inicial, y cómo la densidad aumenta cerca del origen para $t = 25$, solo para volver a dispersarse hacia $t = 50$.

gracias a que dicho método es aplicable a espacio-tiempos con simetría esférica, como el de éste ejemplo. Ésta vez, la función Θ adecuada al actual sistema de variables es

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{\partial_r(r^2\tilde{B})}{\sqrt{A}r^2\tilde{B}} - 2K_{\tilde{B}} \\ &= \frac{2}{r\sqrt{A}} + \frac{\partial_r\tilde{B}}{\sqrt{A}\tilde{B}} - 2K_{\tilde{B}}.\end{aligned}$$

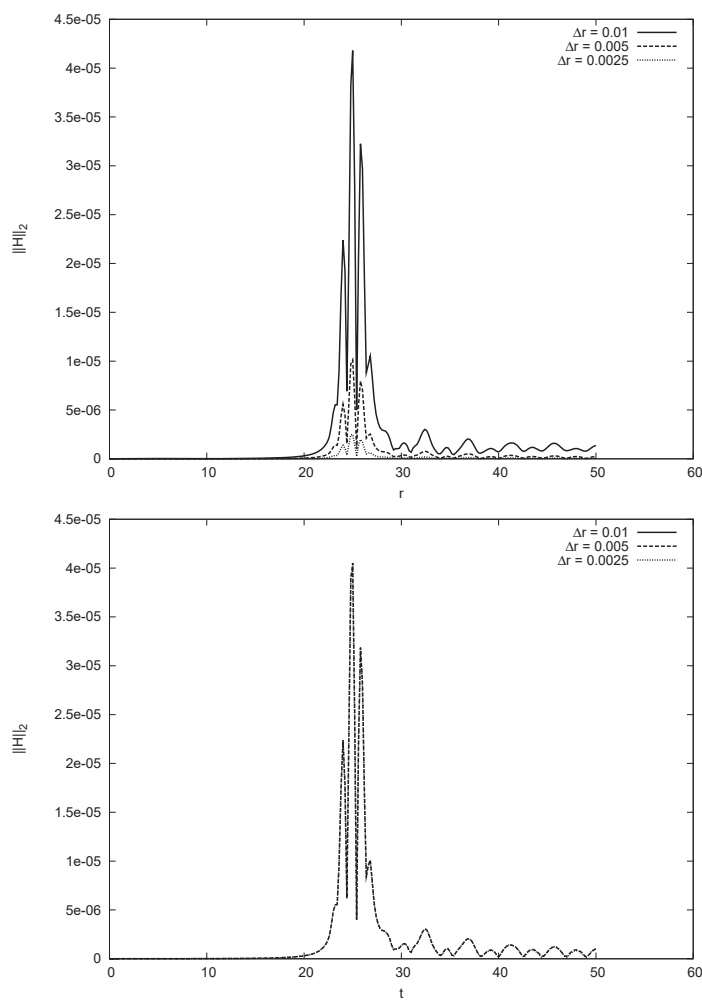


Figura 5.6: Gráfica de convergencia para la norma de la constricción Hamiltoniana de las tres resoluciones $\Delta r = 0.01, 0.005, 0.0025$, hasta $t = 50$ para el campo escalar con amplitud inicial $C = 0.002$, primero con sus valores originales, y en la segunda gráfica usando los valores escalados, es decir, con la curva correspondiente a $\Delta r = 0.005$ multiplicada por un factor de 4, y la curva de $\Delta r = 0.0025$ multiplicada por un factor de 16. Es evidente que las gráficas escaladas de ésta forma están prácticamente superpuestas, lo que indica convergencia de segundo orden para la constricción Hamiltoniana.

En la figura 5.9 se puede apreciar cómo efectivamente se forma un Horizonte Aparente al tiempo $t = 5$, cuya área se estabiliza.

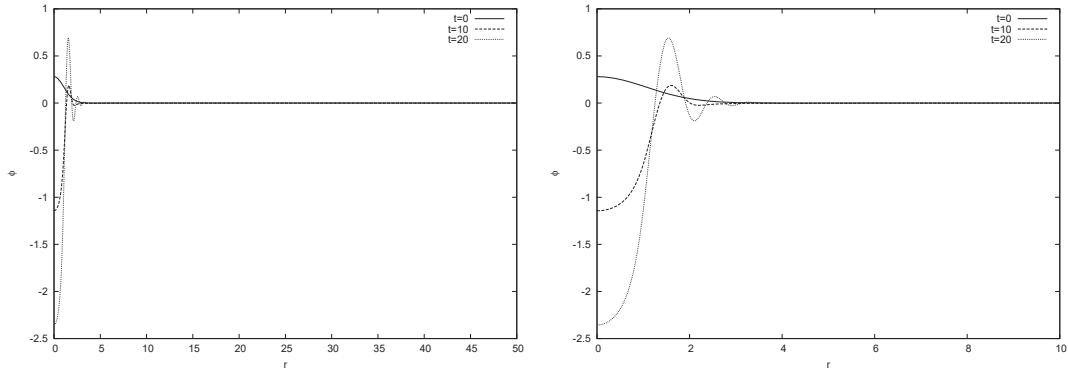


Figura 5.7: Campo escalar ϕ a los tiempos $t = 0, 10, 20$ en el caso en que éste colapsa. Se puede apreciar que ahora el campo se concentra cerca del origen, y no se dispersa totalmente, sino que aumenta su amplitud en dicha zona. En la primera gráfica se ve todo el dominio espacial ($D = r \in [0, 50]$), y en la segunda se tiene un acercamiento al intervalo $[0, 10]$.

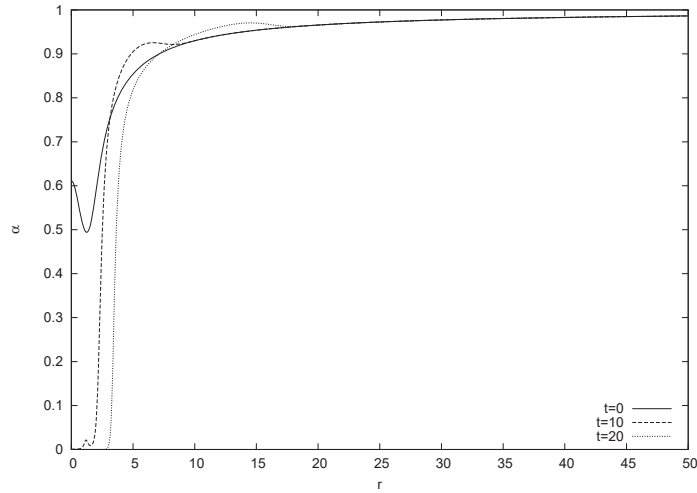


Figura 5.8: Función de Norma α en los tiempos $t = 0, 10, 20$, para el campo escalar de amplitud $C = 0.28$. Para este ejemplo, se utiliza una condición de norma tipo Bona-Masso, la cual permite lidiar con la singularidad que se forma, por medio del colapso de la función α . Sin embargo esto no evita que la componente A de la métrica crezca gradualmente, ocasionando que poco después del tiempo $t = 20$ la evolución explote. Para tiempos avanzados la función colapsa a cero para valores de r cercanos al origen, congelando la evolución en esa zona.

Como se menciona en [1], se puede demostrar que la masa ADM del sistema m_{ADM} es equivalente a la masa relacionada con la componente $A_{Sch}(r) = \frac{1}{1-2m_{Sch}(r)/r}$ de la métrica de Schwarzschild, y que se puede calcular mediante la fórmula

$$m_{Sch} = 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 dr,$$

ya que el campo escalar que utilizamos está localizado en una pequeña región del espacio y fuera de ésta su valor es despreciable, además de que los datos iniciales son simétricos en el tiempo [5]. Dicha integral se calcula numéricamente, sustituyendo los límites de integración por las fronteras de nuestro dominio espacial. Aunque formalmente la integral se debe evaluar hasta infinito, el valor de la densidad ρ decae rápidamente y es prácticamente cero mucho antes de alcanzar la frontera externa del dominio ubicada en $r = 50$, por lo que nuestra aproximación es buena.

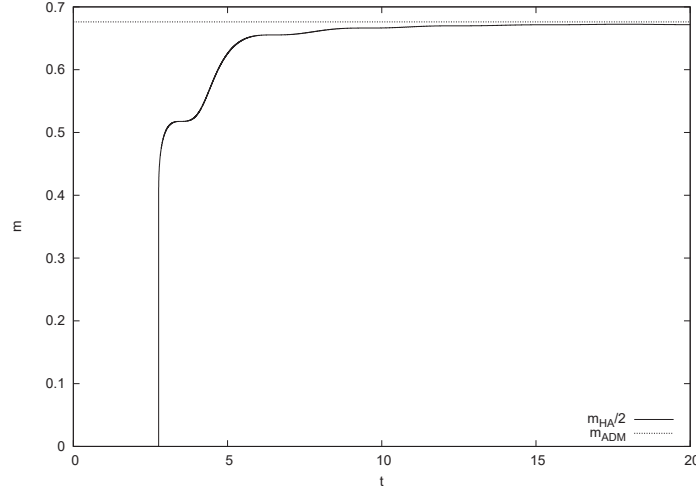


Figura 5.9: Masa del Horizonte Aparente a lo largo de la evolución para el campo escalar con amplitud $C = 0.28$. Al tiempo $t = 2.76725$ se forma un horizonte aparente, cuya masa se estabiliza alrededor de $t = 15$. Al comparar la mitad de la masa del Horizonte Aparente ($m_{HA}/2$) con el valor de la masa ADM del sistema ($m_{ADM} = 0.676048$ para el campo escalar en cuestión) podemos apreciar que el primero es un poco menor, indicando que la mayoría del campo escalar se ha concentrado dentro del radio del Horizonte Aparente, mientras que una parte se dispersa desde el inicio de la evolución. La masa asociada al Horizonte Aparente está dada por $m_{HA} = \frac{r_{HA}\sqrt{\tilde{B}_{AH}}}{2}$, donde r_{HA} es el radio del Horizonte Aparente, y \tilde{B}_{HA} es la componente angular \tilde{B} de la métrica evaluada en r_{HA} .

Debido a la falta de un apropiado valor del vector de corrimiento β que permita controlar el crecimiento de las componentes de la métrica, después de un tiempo de evolución la función A comienza a aumentar rápidamente su valor debido a un fenómeno conocido como Slice Stretching, causando a su vez que las aproximaciones de diferencias finitas pierdan precisión y que las constricciones Hamiltoniana y de Momento también crezcan enormemente, por lo que poco después del tiempo $t = 20$ el código explota. Sin embargo, antes de que esto suceda, podemos corroborar que se mantiene la convergencia de las constricciones, como se puede apreciar en la figura 5.10, donde se muestra la norma de la constricción Hamiltoniana para las tres resoluciones hasta $t = 10$. Las dos resoluciones mas finas están debidamente escaladas para ilustrar el factor de convergencia 2.

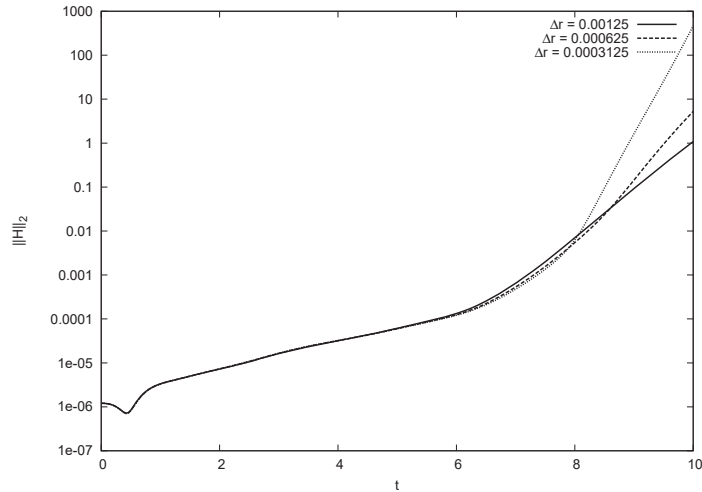


Figura 5.10: Norma de la constricción Hamiltoniana para las tres resoluciones, hasta $t = 10$, para el caso en que el campo escalar colapsa en un agujero negro. Las dos resoluciones mas finas se multiplican por los factores adecuados, para ilustrar la convergencia de segundo orden, la cual se mantiene aproximadamente hasta $t = 8$.

5.5 Comportamiento crítico

Como se ha mostrado, hay un umbral en los parámetros del perfil gaussiano de campo escalar antes del cual el campo se dispersa, y después del cual la configuración colapsa y forma un agujero negro. Se ha estudiado con anterioridad dicho umbral conocido como el valor crítico de los parámetros del perfil de campo escalar en el estudio del

colapso crítico originalmente en [15] para un campo escalar sin potencial y posteriormente para campo escalar con masa [16, 17].

Una prueba de que el código aquí presentado funciona, consiste en reproducir tales resultados, es decir, primero encontrar un valor crítico para uno de los parámetros, en éste caso la amplitud del campo escalar, y después verificar que la masa del Horizonte Aparente que se forma sigue el comportamiento correspondiente al modelo encontrado por Choptuik, que sostiene que, para valores del campo escalar cercanos al valor crítico C^* , la masa m_{HA} del horizonte aparente depende de C de acuerdo a la fórmula $m_{HA} = \gamma|C - C^*|^\lambda$, donde γ es una constante que depende de la familia de campos escalares usada, y el exponente es $\lambda \approx 0.37$, el cual parece ser independiente de tal familia de campos escalares [15]. Para lograr dicho objetivo, mantenemos el valor del parametro σ constante en $\sigma = 1.5$, y aumentamos gradualmente la amplitud del campo escalar hasta encontrar una aproximación al valor crítico de la amplitud C^* con suficiente precisión en el presente trabajo. Se usaron tres resoluciones distintas, $\Delta x = 0.002, 0.001, 0.0005$, y en conjunto con la extrapolación de Richardson se obtuvo una mejor aproximación, que resultó ser $C^* = 0.1908$. Análogamente se puede realizar un análisis del valor crítico de σ para el cual comienzan a formarse horizontes aparentes, manteniendo el valor de la amplitud del campo escalar constante, y los resultados deben de ajustarse a un modelo similar al de la amplitud ([15]).

En la figura 5.11 se muestra el comportamiento que presenta la masa del Horizonte Aparente conforme aumenta la amplitud inicial del campo escalar, y cómo dicho comportamiento concuerda con los resultados obtenidos en ([16], [17]). Como ya mencionamos, para el colapso del campo escalar el código deja de converger después de cierto tiempo, sin embargo las masas consideradas fueron encontradas dentro del intervalo en que se mantuvo la convergencia. Por otra parte, en [15] no mencionan lo que es considerado como valor cercano al valor crítico, y lo mismo sucede con otros artículos relacionados al tema como [16] y [17], por lo que aquí se muestran resultados obtenidos hasta una amplitud de $C = 0.19095$, recordando que la amplitud crítica se encuentra en $C^* = 0.1908$, y se comparan con la curva que mejor aproxima a los resultados experimentales y al mismo tiempo concuerda con la fórmula propuesta por Choptuik.

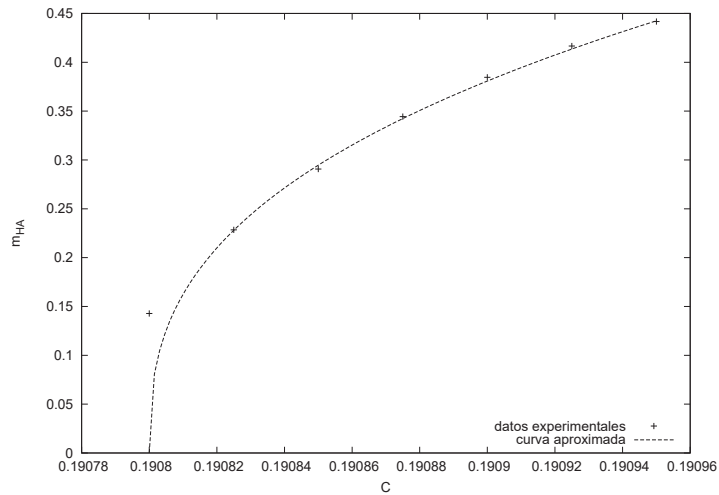


Figura 5.11: En la presente gráfica se muestra el comportamiento no lineal que presenta la dependencia de la masa del Horizonte Aparente respecto a la amplitud del campo escalar. Para este ejemplo, el valor crítico de la amplitud resultó ser $C^* = 0.1908$, y los puntos experimentales mostrados se calcularon aumentando la amplitud del campo escalar $\Delta C = 0.000025$ cada vez. En la figura la línea punteada corresponde a la curva $11.5|C - 0.1908|^{0.37}$, la cual aproxima a los datos obtenidos experimentalmente con el menor error.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se ha presentado la implementación de la solución numérica de dos sistemas en Relatividad General con simetría esférica. En el caso del vacío correspondiente a la solución de hoyo negro se logró implementar un código capaz de construir una solución consistente con la solución exacta en el límite continuo, y de mantenerla estable por un determinado tiempo, mismo código que puede ser ampliado para obtener resultados mas complejos.

Para el ejemplo de la evolución de un campo escalar, se obtuvieron logros similares, y en ambos casos se adquirió experiencia en el uso de conceptos fundamentales en la solución numérica de las ecuaciones de Einstein, a saber: la convergencia de las constricciones del sistema ADM de ecuaciones, la autoconvergencia de funciones involucradas en el sistema de ecuaciones de evolución, la implementación de distintas condiciones de frontera y regulización del sistema de ecuaciones en el origen de las coordenadas esféricas.

Además de tales conceptos importantes en la aplicación de los métodos a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en la parte de Relatividad General ha sido muy ilustrativo el uso de distintas condiciones de norma, el cálculo de distintos elementos de diagnóstico que refuerzan los conceptos de horizontes, compresión de coordenadas, singularidades de coordenadas, monitoreo de la estructura causal de cada hipersuperficie espacial durante la evolución, etcétera.

Las perspectivas a partir de este trabajo son diversas. Se espera que la experiencia adquirida con la implementación de las soluciones presentadas permita atacar problemas que no han sido resueltos con anterioridad. En particular, incluso en simetría esférica existe la capacidad casi inmediata de implementar la evolución de un campo escalar con ecuación de estado de energía oscura, la acreción de campo escalar en un hoyo negro y la evolución de un sistema de fluido perfecto y campo

escalar de manera simultánea.

Naturalmente se espera que la experiencia adquirida con este trabajo permita contribuir en la solución de sistemas en tres dimensiones sin simetrías y lograr entrar en un tema de la corriente principal o comenzar uno nuevo durante el doctorado.

Bibliografía

- [1] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press (2007)
- [2] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, Y. Zlochower, Phys. Rev. Lett. **96** 111101 (2006). John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, James van Meter, Phys.Rev.Lett. **96** 111102 (2006).
- [3] J. Thornburg *The Einstein Equations in Spherical Symmetry: Scalar field accretion to a Black hole. Lecture Notes Delivered in the 2003 summer school on Gravitational Wave Sources* <http://www.ifm.umich.mx/guzman/projects-docs/eeef.pdf>
- [4] F.S Guzmán, *Revista Mexicana de Física* **53** 2007
- [5] M. Alcubierre, J. A. González, M. Salgado *Phys. Rev. D* **70** 064016
- [6] R.L. Marsa, M. W. Choptuik *Phys. Rev. D* **54** (1996) 4929
- [7] J. W. Thomas *Numerical Partial Differential Equations*, Springer (1995)
- [8] E. Gourgoulhon, 3+1 Formalism and bases of Numerical Relativity. arxiv:gr-qc/0703035.
- [9] R. M. Wald, V. Iyer, Phys. Rev. D **44** (1991) 3719 (R)
- [10] P. Diener, F. S. Guzmán. Lecture Notes Delivered in the 2003 summer school on Gravitational Wave Sources <http://www.ifm.umich.mx/guzman/projects-docs/wave-equation.pdf>
- [11] R. M. Wald *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973)
- [13] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973)

- [14] J. B. Hartle *Gravitation, an introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (2003)
- [15] M. W. Choptuik, *Phis. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993)
- [16] P. R. Brady, *Phis. Rev. Dc* **56**, 6057 (1997)
- [17] C. Gundlach, "Critical Phenomena in Gravitational Collapse", *Living Rev. Relativity* **2**, (1999)