UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PERTURBACIONES EN MEMBRANAS GRUESAS

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

DAGOBERTO MALAGÓN MOREJÓN

ASESOR

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

CO-ASESOR

DR. ULISES NÚCAMENDI GÓMEZ

Morelia, Michoac 'an, Agosto, 2009

Índice general

Agradecimientos

Un agradecimiento especial a mis asesores, Dr. Alfredo Herrera Aguilar y Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por el gran apoyo recibido a lo largo de la maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología(CONACYT) y la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo(UMSNH) por haberme brindado una beca de tesista.

Agradezco a todo el personal docente y administrativo del Instituto de Física y Matemáticas perteneciente a la UMSNH.

Agradezco a los colegas Arturo Avelino, Nandinii Barbosa y Refugio Rigel por las útiles críticas y sugerencias realizadas a la tesis.

Un inmenso agradecimiento a mis padres por la comprensión y confianza que siempre me han brindado.

Capítulo 1

Introducción

La cuestión natural acerca de la dimensionalidad de nuestro universo surgio poco después de creada la Teoría General de la Relatividad. Los primeros pasos en el desarrollo de teorías de la gravedad en dimensiones mayores que 4 comenzaron con los artículos de Kaluza y Klein [1], [2]. La esencia de la idea primordial de Kaluza consiste en que la gravedad pentadimensional es equivalente a la gravedad cuadridimensional de Einstein acoplada al electromagnetismo de Maxwell y a un campo escalar. A continuación mencionamos algunas ventajas y desventajas de la teoría de Kaluza–Klein. Las ventajas son:

- Las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones se pueden reducir a la forma que adoptan las ecuaciones de la gravedad cuadridimensional acoplada a los campos electromagnético y escalar.

- A partir de las ecuaciones para las geodésicas en un espacio tiempo de cinco dimensiones, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas inmersas en los campos electromagnético y gravitacional.

- Si uno supone que todas las cantidades en la teoría de Kaluza–Klein no dependen de la quinta dimensión, entonces ésta cambia bajo transformaciones de coordenadas de la siguiente manera:

$$x^{5'} = x^5 + f(x^\mu), \qquad\qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Esta transformación de coordenadas conduce a las transformaciones de norma usuales en la teoría electromagnética de Maxwell.

Algunas de las desventajas son las siguientes:

- ¿Por qué no se puede observar la quinta dimensión en nuestro Universo?

- No es posible dar una interpretación física natural a la componente g_{55} de la métrica.

- La ecuación de campo del campo escalar proporciona una relación restrictiva entre el escalar de curvatura R y el invariante $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ del campo electromagnético.

En virtud de estas desventajas, se han considerado teorías multidimensionales de Kaluza-Klein. Una de las cuestiones más importantes en este contexto es la pregunta acerca del carácter inobservable de las dimensiones extra y de que las cantidades cuadridimensionales no dependan de las dimensiones adicionales.

El enfoque más general para resolver este problema consiste en obtener soluciones a las ecuaciones multidimensionales de Einstein que produzcan longitudes (medidas) del espacio tiempo cuadridimensional de órdenes de magnitud mucho mayores que las longitudes medidas en las dimensiones extra. Asimismo, es necesario que la métrica cuadridimensional de las ecuaciones obtenidas no dependa de las dimensiones adicionales.

De este modo, algunas de las características peculiares de las teorías multidimensionales de Kaluza-Klein son [3, 4, 5]:

1) Se debe cumplir cierta condición de periodicidad con respecto a las coordenadas extra.

2) Las dimensiones extra forman cierta variedad compacta M.

3) Las magnitudes de la variedad M son muy pequeñas en comparación con las longitudes del espacio tiempo [6].

En las últimas décadas, la idea de que nuestro espacio tiempo posee más de cuatro dimensiones se ha vuelto popular nuevamente. Fuertemente motivada por la Teoría de Cuerdas la cual en casi todas sus versiones es naturalmente y/o consistente formulada en más de 4 dimensiones. Al igual que las teorías de Kaluza-Klein surge la pregunta legítima: ¿por qué las propiedades físicas de las dimensiones extra difieren tanto de las observadas en el espacio tiempo de cuatro dimensiones?. Actualmente las principales propuestas para tratar de responder la pregunta son: el mecanismo de compactificación espontánea y el modelo de los mundos membrana.

En el caso de las dimensiones adicionales compactas, se supone que éstas son muy pequeñas. A mediados de los años setenta se introdujo un enfoque moderno hacia el problema del carácter inobservable de las dimensiones

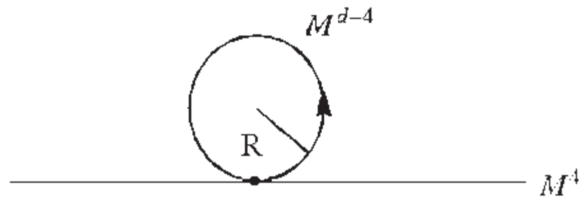

Figura 1.1: M^4 representa el espacio-tiempo tetradimensional , M^{d-4} es una variedad compacta y R es la longitud característica que describe a M^{d-4}.

extra compactificadas [7]–[8]. Por otro lado, en un espacio tiempo de d dimensiones es posible considerar que la gravedad está acoplada a la materia. Para compactificar, se busca una solución especial de la siguiente forma: $M^d = M^4 \times M^{d-4}$, donde M^4 es un espacio tiempo cuadridimensional y M^{d-4} es un espacio compacto de las dimensiones extra, además, las variedades M^4 y M^{d-4} son espacios de curvatura constante, en la figura 1.1 se muestra una representación esquemática de este tipo de modelos.

Existen varios mecanismos de compactificación espontánea en la literatura (véanse, por ejemplo, [9]–[10]).

Otro enfoque, de caracter más fenomenológico sobre el problema del carácter inobservable de las dimensiones adicionales es el llamado escenario del mundo membrana. Este enfoque es muy diferente del mecanismo tradicional de compactificación e inclusive permite que las dimensiones extra no sean compactas.

De acuerdo con este enfoque, las partículas correspondientes a interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes son confinadas a ciertas hipersuper-

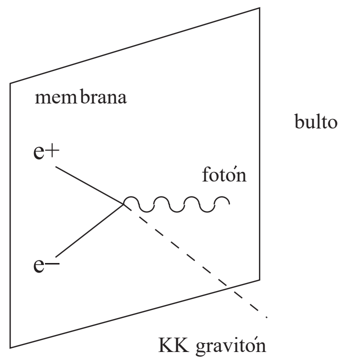

Figura 1.2: La materia descrita por el Modelo Estándar está confinada a la membrana, sólo la gravedad puede escapar al bulto.

ficies (membranas) que, a su vez, están inmersas en un espacio multidimensional denominado "bulto". Solamente la gravedad y cierta materia exótica pueden propagarse en el bulto, como es ilustrado en la figura 1.2.

En este marco se supone que nuestro Universo es uno de esos entes membrana. Esta idea fue formulada fenomenológicamente por primera vez en los trabajos [11]–[12] y posteriormente fue desarrollada en la teoría de cuerdas.

En el marco del escenario de los mundos membrana, las restricciones en las medidas de las dimensiones extra se tornan más débiles. Esto sucede debido a que las partículas del Modelo Estandar se propagan sólo en tres dimensiones espaciales. Además, la ley de de la gravitación universal de Newton no está en contradicción con la existencia de las dimensiones extra según los experimentos gravitatorios realizados hasta el momento.

A pesar de que varias ideas fueron presentadas durante los años ochenta y principios de los noventa [13, 14], uno de los hechos más sobresalientes que activaron los estudios relacionados con modelos membrana fue el desarrollo alcanzado en la teoría de supercuerdas y la teoría M a mediados de los años noventa, especialmente el descubrimiento de las soluciones de "D–branas" [15]. Según esta terminología moderna, nuestro universo constituye una tribrana que evoluciona en un espacio tiempo con más de cuatro dimensiones. Una valiosa contribución al desarrollo de este modelo fue realizada en los artículos [16]–[17] siguiendo una vieja idea de Antoniadis [18]. Estos autores consideraron una geometría del bulto plana de $4 + d$ dimensiones donde las d dimensiones extra son compactas de radio R. En este esquema, la masa de Planck cuadridimensional M_{Pl} y la definida en $4 + d$ dimensiones M_{fund}, están conectadas por la siguiente relación:

$$M_{Pl}^2 = M_{fund}^{2+d} R^d$$

y la gravitación difiere de la ley de Newton sólo a distancias menores que R. Puesto que la ley de Newton ha sido comprobada experimentalmente a distancias submilimétricas, entonces R puede ser del orden de un milímetro o menos.

En los artículos de [19]–[20] se consideró un modelo en el que nuestro Universo se expande como una membrana tridimensional en un espacio tiempo pentadimensional y se mostró que en ese marco se puede resolver el problema de la jerarquía de masas.

Posteriormente, siguiendo esta línea de razonamiento, en los trabajos [21]–[22] Randall y Sundrum consideraron métricas pentadimensionales con curvatura en las que se introduce un factor de deformación que contiene, a su vez, un parámetro k del orden de la masa de Planck fundamental. El modelo está dado por gravedad acoplada a una constante cosmológica en cinco dimensiones con la adición de una o dos membranas delgadas cuadridimensionales (funciones delta a lo largo de la quinta dimensión) que poseen su lagrangiano de materia y su energía de vacío respectivos. En este sistema, la relación entre la masa de Planck cuadridimensional M_{Pl} y la fundamental $M_\star$ está dada por:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_\star^3}{k}\left(1 - e^{-2kr_c\pi}\right) \sim \frac{M_\star^3}{k},$$

donde r_c es el radio de compactificación. De este modo, la escala de energías de los fenómenos físicos en la membrana se fija por el parámetro del factor de deformación k. Este mecanismo permite generar masas del orden de TeVs a partir de la masa de Planck fundamental $\sim 10^{16}$ TeVs si $kr_c \sim 12$.

En los últimos años se han considerado varios problemas físicos con la ayuda de mundos membrana en cinco o más dimensiones, especialmente tomando como base el modelo de Randall-Sundrum y algunas de sus extensiones. En varias de estas investigaciones se ha considerado que la membrana es infinitamente delgada y, a pesar de ello, varios resultados interesantes han sido obtenidos [23, 24, 25, 26].

Sin embargo, desde un punto vista más realístico, las membranas deben tener un ancho. Por otro lado, es lógico pensar que sí la teoría de los mundos membrana es el límite de bajas energías de una teoría más general, esta última debe tener una escala mínima de longitud(energía). De este modo, la introducción del grueso de las membranas produce nuevas posibilidades, algunas de las cuales son las siguientes:

- Describe modelos mas realísticos de mundos membrana.
- Existen soluciones que permiten suavizar las singularidades originadas por las funciones delta de Dirac que describen las membranas delgadas.
- A diferencia del modelo de Randall-Sundrum admite la inclusión de una clase más amplia de materia en el bulto.

En el presente trabajo de tesis proponemos un modelo consistente en gravedad pentadimensional acoplada a un campo escalar para modelar una membrana gruesa. En el segundo Capítulo, se decucen las ecuaciones de campo partiendo de un principio variacional y se obtiene la forma de dichas ecuaciones para el caso particular de una métrica no factorizable en $5D$ que preserva la simetría de Poincaré en 4 dimensiones. En el Capítulo 3, obtenemos las ecuaciones de las perturbaciones para una métrica arbitraria en el marco de membranas gruesas, además se estudia de manera general la libertad de norma del modelo. En el Capítulo 4 demostramos que es posible escojer la norma axial, transversa y sin traza para el sector donde el campo escalar no fluctúa. En la segunda mitad de este Capítulo estudiaremos el espectro de las perturbaciones gravitacionales. En particular, analizaremos la relación existente entre la localización de la gravedad, la existencia de un salto en el espectro de masas de las excitaciones gravitacionales y la regularidad del escalar de curvatura en $5D$.

Capítulo 2

Ecuaciones de campo

2.1. Deducción de las ecuaciones de campo

Para modelar nuestra membrana gruesa tomaremos un modelo consistente en la acción para la gravedad pentadimensional mínimamente acoplada a un campo escalar real [27, 28, 29]

$$S_5 = \int d^5x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R_5 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)\right], \tag{2.1}$$

donde g es la métrica en $5D$ y R_5 es el escalar de curvatura dado por la contracción del tensor de Ricci $R_5 = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ está dado por:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,5. \tag{2.2}$$

A lo largo de este trabajo los subíndices griegos $\alpha, \beta ... = 0,1,2,3,5$; mientras que los subíndices latinos $k, l, m .... = 0,1,2,3$. En este modelo ϕ es un campo escalar real y $V(\phi)$ su potencial de autointeracción. Además usaremos la siguiente notación $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$ y $d^5x = d^4xdy$, donde y describe la 5^{ta} dimensión.

Para obtener las ecuaciones de campo de nuestro modelo variamos la acción respecto a la métrica y al campo escalar como en las Refs. [30, 31, 32]. Para ello separemos S_5 en la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} y la acción del campo escalar S_ϕ

$$S_5 = S_{EH} + S_\phi,$$

donde

$$S_{EH} = \frac{1}{4}\int d^5x\sqrt{|g|}R_5, \tag{2.3}$$

y

$$S_\phi = -\int d^5x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + V(\phi)\right]. \tag{2.4}$$

Primeramente variemos S_5 con respecto a la métrica g. Consideremos que $\delta g^{\mu\nu}$ y sus derivadas covariantes se anulan en la frontera de la variedad

$$\delta S_5 = \delta S_{EH} + \delta S_\phi.$$

A partir de (2.3) y (2.4) tenemos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{4}\int d^5x\left[\delta\sqrt{|g|}R_5 + \sqrt{|g|}\delta R_5\right], \tag{2.5}$$

y

$$\delta S_\phi = -\int d^5x\left[\delta\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right) + \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}\delta(\nabla\phi)^2\right)\right]. \tag{2.6}$$

Expandiendo δR_5 se obtiene

$$\delta R_5 = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (2.5) y usando la identidad $\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, la acción de Einstein-Hilbert se reduce a:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{4}\int d^5x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_5\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\int d^5x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Calculemos $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$. Para ello, primeramente variemos (2.2) respecto a la métrica

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda},$$

donde $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ es la variación de los símbolos de Christoffel respecto a la métrica. Sabemos que los símbolos de Christoffel no se transforman como tensores debido a que al aplicarles una transformación de coordenadas, surge un término inhomogéneo que contiene segundas derivadas, pero dicho término no depende de la métrica; sin embargo, la variación de los símbolos de Christoffel respecto a la métrica sí se transforma como tensor. Usando el argumento anteriormente planteado y la definición de derivada covariante, podemos expresar $\delta R_{\mu\nu}$ de una manera más compacta

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}. \quad (2.8)$$

Definamos el vector

$$J^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu}.$$

Entonces

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda J^\lambda.$$

Esto nos permite escribir el segundo sumando de (2.7) como

$$\frac{1}{4}\int d^5x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int d^5x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda J^\lambda. \quad (2.9)$$

En virtud del teorema de Gauss podemos transformar la integral de volumen del término que contiene la divergencia de J en una integral sobre la frontera de dicho vector. Para obtener el valor de la integral sobre la frontera, expresemos $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ en términos de la variación de la métrica

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\partial_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right) - \delta g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\lambda\mu\nu},$$

donde $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$.

Nuevamente usando la definición de derivada covariante obtenemos el siguiente resultado

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}\right).$$

Esto nos dice que J es lineal en $\nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}$ y con la condición de que $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ es nula en la frontera, tenemos que el miembro derecho de (2.9) es cero debido al teorema de Gauss. De esta manera tenemos que δS_{EH} toma el siguiente aspecto

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{4}\int d^5x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_5\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

Ahora pasemos al cálculo de la variación de la acción del campo escalar respecto a la métrica. Notemos que

$$\delta(\nabla\phi)^2 = \delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi.$$

Luego, δS_ϕ queda como sigue

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{2}\int d^5x\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\left[\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right)\right]. \tag{2.11}$$

Ahora, de (2.10) y (2.11) tenemos que

$$\delta S_5 = \int d^5x\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_5\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right)\right)\right]. \tag{2.12}$$

Entonces las ecuaciones de Einstein adoptan la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_5 = T_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

donde

$$T_{\mu\nu} = 2\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right)\right]. \tag{2.14}$$

Ahora obtengamos la ecuación de campo resultante de variar S_5 respecto al campo escalar. Denotemos tal variación por $\hat{\delta}$. Asumiremos que $\hat{\delta}\phi$ es nula en la frontera de la variedad. Como las únicas cantidades que dependen de ϕ son $(\nabla\phi)^2$ y $V(\phi)$ obtenemos lo siguiente

$$\hat{\delta}S_5 = -\int d^5x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{2}\hat{\delta}(\nabla\phi)^2 + \hat{\delta}(V(\phi))\right].$$

Variando cada término en la igualdad anterior tenemos

$$\hat{\delta}S_5 = -\int d^5x\sqrt{|g|}\left[g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\nabla_\mu(\hat{\delta}\phi) + \frac{dV}{d\phi}\hat{\delta}\phi\right].$$

Usando la regla de Leibniz en el primer sumando de la relación anterior, obtenemos

$$\hat{\delta}S_5 = -\int d^5x\sqrt{|g|}\left[\nabla_\mu L^\mu - \hat{\delta}\phi(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi) + \frac{dV}{d\phi}\hat{\delta}\phi\right], \tag{2.15}$$

donde hemos definido el vector $L^\mu = \hat{\delta}\phi\nabla^\mu\phi$.

En virtud del teorema de Gauss y de la anulación de $\hat{\delta}\phi$ en la frontera tenemos que el primer sumando de (2.15) es nulo. Esto tiene como consecuencia que la ecuación de campo resultante sea

$$\Box^{(5)}\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{2.16}$$

Esta relación es conocida como ecuación de Klein-Gordon. Aquí hemos usado que el operador de d'Alembert en $5D$ está definido de la siguiente manera: $\Box^{(5)} = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$.

2.2. Modelos con membranas gruesas

En nuestro trabajo usaremos la siguiente manera alternativa para las ecuaciones de campo

$$R_{\mu\nu} = \widetilde{T}_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

$$\Box^{(5)}\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \tag{2.18}$$

donde $\widetilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}T$ y $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. En este trabajo llamaremos a $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ tensor de energía momento reducido. Usando (2.14) obtenemos:

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = 2\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{2}{3}g_{\mu\nu}V(\phi)\right]. \tag{2.19}$$

La membrana gruesa será modelada por un ansatz que preserva la invarianza de Poincaré en 4 dimensiones [27, 28, 29, 33, 34, 35, 36]:

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{mn}dx^m dx^n + dy^2, \tag{2.20}$$

tal que η_{mn} es la métrica cuatridimensional de Minkowski y $e^{2A(y)}$ es el factor de deformación[1].

[1] En Inglés "warp factor".

Consideraremos un modelo simple donde el campo escalar ϕ sólo dependa de la coordenada extra y.

Para hallar las ecuaciones de campo, primeramente calculemos el tensor de Ricci:

$$R_{mn} = -e^{2A}(A'' + 4A'^2)\eta_{mn}, \tag{2.21}$$

$$R_{m5} = 0, \tag{2.22}$$

$$R_{55} = -4(A'' + A'^2), \tag{2.23}$$

aquí la $(')$ denota derivada respecto a y.

Por otra parte, el tensor de energía momento reducido toma el siguiente aspecto

$$\tilde{T}_{mn} = \frac{2}{3}\eta_{mn}e^{2A(y)}V(\phi), \tag{2.24}$$

$$\tilde{T}_{m5} = 0, \tag{2.25}$$

$$\tilde{T}_{55} = \phi'^2 + \frac{2}{3}V(\phi). \tag{2.26}$$

Además, el operador de d'Alembert $5D$ aplicado sobre ϕ adopta la siguiente forma

$$\Box^{(5)}\phi = \phi'' + 4A'\phi'. \tag{2.27}$$

De aquí tenemos que las ecuaciones de campo están dadas por

$$\begin{aligned} A'' &= -\frac{2}{3}\phi'^2, & (2.28) \\ A'^2 &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)\right], & (2.29) \\ \phi'' + 4\phi' A' &= \frac{\partial V}{\partial \phi}. & (2.30) \end{aligned}$$

Aunque hemos obtenido 3 ecuaciones de campo, es de destacar que sólo 2 son independientes. Esto se puede mostrar si derivamos (2.29) respecto a y y usamos (2.30), obtenemos (2.28). Este resultado era de esperar si tenemos en cuenta las identidades de Bianchi.

El sistema de ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30) es no lineal, lo que hace que en general sea difícil encontrar soluciones exactas para tal sistema. En la literatura se han obtenido varias soluciones exactas [27, 29, 34, 35] y numéricas [34] para estas ecuaciones de campo fijando distintos potenciales $V(\phi)$.

Capítulo 3

Elementos de la teoría de perturbaciones

3.1. Deducción de las ecuaciones para las perturbaciones

En este capítulo estudiaremos las perturbaciones de la métrica y el campo escalar para un modelo con acoplamiento mínimo entre el campo escalar y la gravedad.

Para ello consideremos dos variedades de cinco dimensiones [37, 38, 39]. Tomemos una primera variedad M, la cual denominaremos variedad de referencia[1] con una métrica asociada $g_{\mu\nu}$, y otra variedad $M^{(p)}$, que denominaremos variedad perturbada y tiene asociada una métrica $g^{(p)}_{\mu\nu}$.

[1]También denominada variedad de fondo.

Supongamos que la métrica perturbada $g_{\mu\nu}^{(p)}$ se desvía respecto a la métrica de referencia $g_{\mu\nu}$ en una pequeña perturbación $\delta g_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}$, en otras palabras

$$g_{\mu\nu}^{(p)} = g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}; \qquad |H_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|, \tag{3.1}$$

donde $H_{\mu\nu}$ en general depende de las coordenadas $4D$ y de la coordenada extra. En lo que sigue, sólo consideraremos términos hasta primer orden en $H_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Ahora, si tenemos en cuenta que

$$g_{\mu\alpha}^{(p)} g_{(p)}^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu,$$

entonces obtenemos

$$g_{(p)}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

En la igualdad anterior hemos denotado $\delta g^{\mu\nu} = -H^{\mu\nu}$. Esto tiene como consecuencia que

$$H^{\mu\nu} = H_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}.$$

Los símbolos de Christoffel calculados a partir de $g_{(p)}^{\mu\nu}$ se pueden escribir como los calculados con la métrica de fondo más una variación debida a la perturbación, esto es $\Gamma_{\mu\nu}^{(p)\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Usando la definición de los símbolos de Christoffel y las expresiones (3.1) y (3.2), tenemos que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\partial_\mu H_{\nu\lambda} + \partial_\nu H_{\mu\lambda} - \partial_\lambda H_{\mu\nu}\right) - H^{\lambda\sigma}\Gamma_{\lambda\mu\nu},$$

que es equivalente a la expresión obtenida en el Capítulo 2, pero sustituyendo $\delta g_{\mu\nu}$ por $H_{\mu\nu}$. Luego, esto implica que la perturbación de los símbolos de Christoffel se pueda expresar de la siguiente manera covariante

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\nabla_\mu H_{\nu\alpha} + \nabla_\nu H_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha H_{\mu\nu}\right), \tag{3.3}$$

donde ∇_μ es el operador derivada covariante respecto a la métrica de fondo. Análogamente el tensor de Ricci asociado a $g^{(p)}_{\mu\nu}$ se separa en una contribución aportada por la variedad de fondo, la cual denotaremos por $R_{\mu\nu}$, y una pequeña perturbación, o sea

$$R^{(p)}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado en el Capítulo 2, tenemos que de (2.8) podemos expresar $\delta R_{\mu\nu}$ de la forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}. \tag{3.4}$$

Finalmente usando (3.3), tenemos

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\nabla^\lambda\nabla_\mu H_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda\nabla_\nu H_{\lambda\mu} - \nabla^\lambda\nabla_\lambda H_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\left(g^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{3.5}$$

En nuestro caso, la materia está constituida por un campo escalar ϕ acoplado mínimamente a la gravedad; como perturbamos la métrica, en principio el campo escalar también debe fluctuar. Luego, tenemos que perturbar el tensor de energía momento y la ecuación de Klein-Gordon respecto a la métrica y al campo escalar. Al igual que la métrica, el campo escalar sobre $M^{(p)}$ queda dividido en el campo escalar de fondo ϕ y una pequeña perturbación $\delta\phi$

$$\phi^{(p)} = \phi + \delta\phi, \qquad |\delta\phi| \ll |\phi|. \tag{3.6}$$

Por consistencia tenemos que

$$\tilde{T}^{(p)}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + \delta\tilde{T}_{\mu\nu},$$

donde $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento reducido para el fondo y $\delta\tilde{T}_{\mu\nu}$ es la perturbación. Usando (3.1), (3.6) y (2.19) y considerando sólo los términos de primer orden en $H_{\mu\nu}$ y $\delta\phi$ tenemos que

$$\delta\tilde{T}_{\mu\nu} = 4\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\delta\phi + \frac{4}{3}g_{\mu\nu}\delta\phi\frac{\partial V}{\partial\phi} + \frac{4}{3}H_{\mu\nu}V(\phi). \tag{3.7}$$

De esta manera tenemos que las ecuaciones de Einstein perturbadas [33] adquieren la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\nabla^{\lambda}\nabla_{\mu}H_{\lambda\nu} + \nabla^{\lambda}\nabla_{\nu}H_{\lambda\mu} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}H_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\left(g^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}\right)\right] = \\ 4\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\delta\phi + \frac{4}{3}g_{\mu\nu}\delta\phi\frac{\partial V}{\partial\phi} + \frac{4}{3}H_{\mu\nu}V(\phi).\end{aligned} \tag{3.8}$$

A continuación pasemos al análisis de la ecuación de Klein-Gordon. Para ello variemos (2.18) respecto a la métrica y al campo escalar. Al igual que el caso anterior, sólo consideraremos términos de primer orden en $H_{\mu\nu}$ y $\delta\phi$. Si tenemos en cuenta, (3.2), (3.6) y $\Gamma^{(p)\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, obtenemos

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta\phi - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\phi - H^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi.$$

Además, si consideramos (3.3), tiene lugar la siguiente identidad

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\phi = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}H_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\lambda}\bar{H}.$$

De esta manera, la ecuación de Klein-Gordon perturbada es [33]:

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta\phi - H^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - \nabla^{\mu}H_{\mu\alpha}\nabla^{\alpha}\phi + \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}(H_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu})\nabla^{\alpha}\phi = \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi. \tag{3.9}$$

3.2. Transformaciones de norma

Nuestro modelo, al igual que la Teoría General de la Relatividad es una teoría covariante, por lo que las ecuaciones de la teoría se escriben en términos de igualdades tensoriales. En otras palabras, las ecuaciones de campo pueden ser escritas equivalentemente en un sistema de coordenadas x^μ o en otro arbitrario $\bar{x^\mu}$ difeomorfo al primero. Esta equivalencia entre los distintos sistemas coordenados puede ser interpretado como una libertad de norma de la teoría. Para analizar este último punto asumamos al igual que en las Refs. [37, 38, 39], una transformación infinitesimal de coordenadas dada por:

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x); \qquad |\xi^\mu| \ll |x^\mu|, \tag{3.10}$$

donde ξ^μ es un vector infinitesimal arbitrario y $x = (x^0, x^1, x^2, x^3, y)$. Veamos cómo se transforman los tensores bajo (3.10). Sabemos que en general un tensor Q se transforma bajo una cambio de coordenada $x \to \bar{x}$, de la siguiente manera

$$\overline{Q}^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \cdots Q^\alpha_\beta(x)\,.$$

Para estudiar las transformaciones de norma comparemos $\overline{Q}(x)$ con $Q(x)$. Con el objetivo de hacer más comprensible el análisis empezaremos estudiando un campo escalar ϑ. En este caso la ley de transformación es trivial: $\bar{\vartheta}(\bar{x}) = \vartheta(x)$. Ahora, de la definición (3.10) obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu, \qquad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu. \tag{3.12}$$

Desarrollemos $\bar{\vartheta}(\bar{x})$ en serie de Taylor respecto a ξ hasta primer orden

$$\bar{\vartheta}(\bar{x}) = \bar{\vartheta}(x) + \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}^\alpha}\right)\bigg|_{\xi=0} \xi^\alpha,$$

si tenemos en cuenta (3.11), (3.12) y sólo consideramos términos hasta primer orden en ξ, se obtiene que

$$\bar{\vartheta}(\bar{x}) = \bar{\vartheta}(x) + \xi^\alpha \partial_\alpha \vartheta.$$

Esto tiene como consecuencia la siguiente relación

$$\bar{\vartheta}(x) = \vartheta(x) - \xi^\alpha \partial_\alpha \vartheta.$$

La fórmula anterior se puede escribir equivalentemente de la siguiente forma

$$\bar{\vartheta}(x) = \vartheta(x) - \mathcal{L}_\xi \vartheta,$$

donde $\mathcal{L}_\xi \vartheta = \xi^\alpha \partial_\alpha \vartheta$ y hemos denotado $\mathcal{L}_\xi \vartheta$ como derivada de Lie del escalar ϑ respecto al vector ξ. Veamos cómo se transforma un campo vectorial bajo una transformación de norma. Sea W^μ un campo vectorial, la ley de transformación para tal objeto es:

$$\overline{W}^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} W^\nu(x).$$

Usando la relación (3.11), podemos escribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\overline{W}^\mu(\bar{x}) = W^\mu(x) + W^\nu(x) \partial_\nu \xi^\mu(x),$$

análogamente al caso del campo escalar se tiene que

$$\overline{W}^{\mu}(\bar{x}) = \overline{W}^{\mu}(x) + \left(\frac{\partial \overline{W}^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \right) \Bigg|_{\xi=0} \xi^{\alpha}.$$

Si consideramos sólo términos de primer orden de pequeñez en ξ, obtenemos la siguiente relación:

$$\overline{W}^{\mu}(x) = W^{\mu}(x) + W^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{\mu} - \xi^{\nu}\partial_{\nu}W^{\mu}.$$

Nuevamente podemos reconocer en la igualdad anterior la derivada de Lie del vector W^{μ} respecto a ξ, la cual está dada por:

$$\mathcal{L}_{\xi}W^{\mu} = \xi^{\nu}\partial_{\nu}W^{\mu} - W^{\nu}\partial_{\nu}\xi^{\mu}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento de los dos casos anteriormente estudiados, se puede demostrar que un tensor Q de rango mayor que uno, bajo transformaciones de norma, toma el siguiente aspecto [38, 39]:

$$\overline{Q}(x) = Q(x) - \mathcal{L}_{\xi}Q(x). \tag{3.13}$$

En el caso de la métrica, la expresión para la derivada de Lie se simplifica notablemente:

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu}. \tag{3.14}$$

La identidad (3.13) nos muestra que una teoría covariante que involucre cantidades tensoriales Q puede ser escrita de manera equivalente en términos de los campos $Q(x)$ o de los campos $\overline{Q}(x)$.

Nuestra próxima tarea es conocer cómo se afecta $\delta g_{\mu\nu}$ cuando cambiamos la norma. Para ello, analicemos la transformación de $g^{(p)}_{\mu\nu}$ bajo (3.10).

Aplicando (3.13) para el caso de la métrica perturbada, obtenemos

$$\overline{g}^{(p)}_{\mu\nu}(x) = g^{(p)}_{\mu\nu}(x) - \mathcal{L}_\xi g^{(p)}_{\mu\nu}(x).$$

Ahora, si tenemos en cuenta (3.1) y consideramos sólo términos hasta primer orden en $\delta g_{\mu\nu}$ y ξ, la expresión anterior se transforma en:

$$\overline{g}^{(p)}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) - \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x).$$

Entonces, esto tiene como consecuencia la siguiente identidad

$$\delta\overline{g}_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\mu\nu}(x) - \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x). \tag{3.15}$$

En la igualdad anterior hemos usado que $\delta\overline{g}_{\mu\nu}(x) = \overline{g}^{(p)}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$.

Finalmente, recordando (3.14), podemos expresar (3.15) de una manera más operativa [37, 38, 39]:

$$\delta\overline{g}_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\mu\nu}(x) - \nabla_\mu\xi_\nu(x) - \nabla_\nu\xi_\mu(x). \tag{3.16}$$

En general, si tenemos un tensor arbitrario $Q^{(p)}$ definido sobre la variedad $M^{(p)}$ que se desvía en una pequeña cantidad δQ respecto a un tensor Q asociado a la variedad de fondo M, se puede demostrar de manera análoga al caso de la métrica, la siguiente igualdad

$$\delta\overline{Q}(x) = \delta Q(x) - \mathcal{L}_\xi Q(x).$$

Capítulo 4

Perturbaciones en membranas gruesas para una métrica no factorizable

En este Capítulo retomaremos el tema de las perturbaciones en teorías con campos escalares estudiadas en el Capítulo anterior. Con este motivo consideremos el elemento de línea de fondo (2.20), definido por:

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{mn}dx^m dx^n + dy^2.$$

Las ecuaciones del fondo asociadas a tal elemento están dadas por (2.28), (2.29) y (2.30).

4.1. Elección de la norma

Ahora, tomemos la siguiente métrica sobre la variedad perturbada $M^{(p)}$

$$ds_p^2 = \left(e^{2A(y)}\eta_{mn} + H_{mn}\right) dx^m dx^n + H_{m5} dx^m dy + (1 + H_{55})\, dy^2. \tag{4.1}$$

De manera general, las ecuaciones de campo perturbadas están dadas por (3.8) y (3.9). Resolver dicho sistema de ecuaciones aún para el caso de (4.1) es una tarea complicada, debido al acoplamiento entre las distintas componentes de $H_{\mu\nu}$ y $\delta\phi$. Una manera de simplificar el problema es fijar una norma particular e interpretar los resultados en dicha norma. Al igual que en las Refs. [27, 29, 33, 34, 35, 40, 41], elijamos un sistema coordenado Gaussiano normal[1], el cual está dado por las 5 condiciones siguientes:

$$H_{5\mu} = 0.$$

Ahora, demostremos que al menos para nuestro caso siempre es posible escojer esta norma. Del Capítulo anterior, sabemos que una transformación infinitesimal de coordenadas $\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ induce sobre $H_{\mu\nu}$ un cambio dado por

$$\overline{H}_{\mu\nu}(x) = H_{\mu\nu}(x) - \nabla_\mu \xi_\nu(x) - \nabla_\nu \xi_\mu(x),$$

en nuestro caso $x^\mu = (x^m, y)$. Usando la métrica de fondo (2.20) y los símbolos de Christoffel asociados a ella, obtenemos:

$$\overline{H}_{55}(x) = H_{55}(x) - 2\partial_5 \xi_5(x), \tag{4.2}$$

$$\overline{H}_{5m}(x) = H_{5m}(x) - \partial_5 \xi_m(x) - \partial_m \xi_5(x) + 2A' \xi_m(x), \tag{4.3}$$

[1] También conocido como norma axial.

$$\overline{H}_{mn}(x) = H_{mn}(x) - \partial_m \xi_n(x) - \partial_n \xi_m(x) - 2A' \eta_{mn} e^{2A} \xi_5(x), \tag{4.4}$$

nuevamente la $(')$ denota derivada respecto a y.

En el nuevo sistema coordenado x^μ, impongamos que $\overline{H}_{5\mu} = 0$. Esto nos guía al siguiente sistema de ecuaciones

$$2\partial_5 \xi_5(x) = H_{55}(x), \tag{4.5}$$

$$\partial_5 \xi_m(x) + \partial_m \xi_5(x) - 2A' \xi_m(x) = H_{5m}(x). \tag{4.6}$$

La solución del sistema anterior se puede hallar de manera directa y está dada por:

$$\xi_5(x^m, y) = \frac{1}{2} \int H_{55}(x^m, y) dy + \hat{\xi}_5(x^m), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \xi_n(x^m, y) = e^{2A} \int e^{-2A} H_{5n}(x^m, y) dy - \\ -e^{2A} \int e^{-2A} \partial_n \xi_5(x^m, y) dy + e^{2A} \hat{\xi}_n(x^m), \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $\hat{\xi}_5(x^m)$ y $\hat{\xi}_n(x^m)$ son funciones arbitrarias que no dependen de la coordenada extra y.

Por otra parte, en consecuencia de la covarianza del modelo, podemos asegurar que en los dos sistemas coordenados x^μ y $\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ se cumplen las ecuaciones de campo. Luego, las relaciones (4.7) y (4.8) expresan que dado un sistema coordenado x^μ con una métrica perturbada (4.1) podemos hallar un nuevo sistema $\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ donde $\overline{H}_{5\mu} = 0$. Esto implica que en el nuevo sistema $\bar{x}^\mu$ la métrica perturbada adopte una forma más simple:

$$ds_p^2 = \left(e^{2A(\bar{y})} \eta_{mn} + \overline{H}_{mn}\right) d\bar{x}^m d\bar{x}^n + d\bar{y}^2. \tag{4.9}$$

Sea $H_{mn} = e^{2A(\bar{y})}\bar{h}_{mn}$, reescribiendo (4.9) en términos de la perturbación $\bar{h}_{mn}$, tenemos

$$ds^2 = e^{2A(\bar{y})}\left(\eta_{mn} + \bar{h}_{mn}\right) d\bar{x}^m d\bar{x}^n + d\bar{y}^2. \tag{4.10}$$

Utilizando la fórmula (3.5) y el elemento de línea (2.20), la perturbación del tensor de Ricci a primer orden en la norma axial, se reduce a [27, 41]

$$\begin{aligned}\delta R_{mn} = -e^{2A}(\frac{1}{2}\partial_{\bar{y}}^2 + 2A'\partial_{\bar{y}} + A'' + 4A'^2)\bar{h}_{mn} - \frac{1}{2}\Box^{(4)}\bar{h}_{mn}\\ -\frac{1}{2}\eta_{mn}e^{2A}A'\partial_{\bar{y}}(\eta^{kl}\bar{h}_{kl}) - \frac{1}{2}\eta^{kl}(\partial_m\partial_n\bar{h}_{kl} - \partial_m\partial_k\bar{h}_{nl} - \partial_n\partial_k\bar{h}_{ml}),\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\delta R_{55} = -\frac{1}{2}(\partial_{\bar{y}}^2 + 2A'\partial_{\bar{y}})\eta^{kl}\bar{h}_{kl}, \tag{4.12}$$

$$\delta R_{m5} = \frac{1}{2}\eta^{kl}\partial_{\bar{y}}(\partial_k\bar{h}_{ml} - \partial_m\bar{h}_{kl}), \tag{4.13}$$

donde hemos usado el operador de d'Alembert en $4D$ definido por: $\Box^{(4)} \equiv \eta^{ij}\partial_i\partial_j$. Además, las componentes del tensor de energía momento a primer orden están dadas por:

$$\delta T_{55} = 4\delta\phi'\phi' + \frac{4}{3}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi, \tag{4.14}$$

$$\delta T_{5m} = 2\phi'\partial_m\phi, \tag{4.15}$$

$$\delta T_{mn} = \frac{4}{3}e^{2A}\left(\eta_{mn}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi + \bar{h}_{mn}V(\phi)\right). \tag{4.16}$$

La variación del operador de d'Alembert en $5D$ aplicado sobre ϕ toma la forma:

$$\delta(\Box^{(5)}\phi) = (\delta\phi)'' + e^{-2A}\Box^{(4)}\delta\phi + \frac{1}{2}\phi'\partial_{\bar{y}}(\eta^{mn}\bar{h}_{mn}) + 4A'(\delta\phi)'. \tag{4.17}$$

Ahora, consideremos el caso más simple en el que la fluctuación $\delta\phi$ alrededor del campo escalar de fondo ϕ es nula. Bajo esta suposición y usando las ecuaciones del fondo (2.28), (2.29) y (2.30), las ecuaciones de Einstein a primer orden adoptan la forma:

$$-e^{2A}(\frac{1}{2}\partial_{\bar{y}}^2 + 2A'\partial_{\bar{y}})\bar{h}_{mn} - \frac{1}{2}\Box^{(4)}\bar{h}_{mn} - \frac{1}{2}\eta_{mn}e^{2A}A'\partial_{\bar{y}}(\eta^{kl}\bar{h}_{kl}) - \tag{4.18}$$
$$-\frac{1}{2}\eta^{kl}(\partial_m\partial_n\bar{h}_{kl} - \partial_m\partial_k\bar{h}_{nl} - \partial_n\partial_k\bar{h}_{ml}) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(\partial_{\bar{y}}^2 + 2A'\partial_{\bar{y}})\eta^{kl}\bar{h}_{kl} = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{2}\eta^{kl}\partial_{\bar{y}}(\partial_k\bar{h}_{ml} - \partial_m\bar{h}_{kl}) = 0. \tag{4.20}$$

La ecuación de Klein–Gordon perturbada se reduce a [41]:

$$\frac{1}{2}\phi'\partial_{\bar{y}}(\eta^{mn}\bar{h}_{mn}) = 0. \tag{4.21}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (4.19) y (4.21) obtenemos que:

$$\bar{h} = \eta^{kl}\bar{h}_{kl} = c(\bar{x}^n), \tag{4.22}$$

donde $c(\bar{x}^n)$ es una función arbitraria que no depende de la coordenada extra $\bar{y}$. Por otra parte, si sustituimos el resultado anterior en (4.20), se tiene que

$$\partial^l\bar{h}_{ml} = d_m(\bar{x}^n) + \partial_m c(\bar{x}^n). \tag{4.23}$$

Nuevamente, $d_m(\bar{x}^n)$ es una función que sólo dependen de las coordenadas $4D$. A diferencia de $c(\bar{x}^n)$ esta nueva función no es arbitraria, esto es consecuencia de que al calcular la "traza" de (4.18) respecto a η^{mn} se obtiene una condición adicional para $d_m(\bar{x}^n)$ dada por

$$\partial^l d_l(\bar{x}^n) = 0.$$

Ahora, de (4.7) y (4.8) observamos que aún tenemos libertad para elegir las funciones $\hat{\xi}_5(x^m)$ y $\hat{\xi}_n(x^m)$, en otras palabras, podemos escojer un nuevo sistema coordenado $\hat{x}^\mu = \bar{x}^\mu + \epsilon^\mu(\bar{x})$, tal que en este nuevo sistema se preserve la norma axial $\widehat{H}_{5\mu} = 0$. De esta manera el vector ϵ adquiere el siguiente aspecto [41]

$$\epsilon_m = e^{2A(\bar{y})}\left(-\int d\bar{y}e^{-2A(\bar{y})}\partial_m\hat{\epsilon}^5(\bar{x}) + \hat{\epsilon}_m(\bar{x})\right), \quad \epsilon_5 = \hat{\epsilon}_5(\bar{x}), \tag{4.24}$$

donde las funciones $\hat{\epsilon}_m$ and $\hat{\epsilon}_5$ son independientes de la coordenada y. Si tomamos en cuenta (4.4) y la definición $\widehat{H}_{mn} = e^{2A}\hat{h}_{mn}$, las componentes cuadridimensionales de $\hat{h}_{mn}$ se reducen a:

$$\hat{h}_{mn} = \bar{h}_{mn} - \partial_m\hat{\epsilon}_n - \partial_n\hat{\epsilon}_m + 2\int d\bar{y}e^{-2A(\bar{y})}\partial_m\partial_n\hat{\epsilon}_5 - 2\eta_{mn}A'(\bar{y})\hat{\epsilon}_5. \tag{4.25}$$

De la estructura de las ecuaciones de campo perturbadas, vemos que es conveniente escojer la norma transversa y sin "traza". En otras palabras, tenemos que encontrar funciones ϵ_n y ϵ_5 de tal manera que $\hat{h} = \eta^{mn}\hat{h}_{mn} = 0$ y $\partial^l\hat{h}_{lk} = 0$. De (4.22), (4.23) y (4.25), la condición transversa y sin "traza" es de la siguiente forma

$$c(\bar{x}^n) - 2\partial^l\hat{\epsilon}_l + 2\int d\bar{y}e^{-2A}\square^{(4)}\hat{\epsilon}_5 - 8A'\hat{\epsilon}_5 = 0, \tag{4.26}$$

$$d_k(\bar{x}^n) + \partial_k c(\bar{x}^n) - \partial^l\partial_l\hat{\epsilon}_k - \partial_k\partial^l\hat{\epsilon}_l + 2\int d\bar{y}e^{-2A}\partial_k(\square^{(4)}\hat{\epsilon}_5) - 2A'\partial_k\hat{\epsilon}_5 = 0. \tag{4.27}$$

Ahora, escojamos $\hat{\epsilon}_5 = 0$. Esta elección reduce el sistema de ecuaciones (4.26) y (4.27) a:

$$\square^{(4)}\hat{\epsilon}_k = d_k + \frac{1}{2}\partial_k c, \tag{4.28}$$

$$\partial^l \hat{\epsilon}_l = \frac{1}{2}c. \tag{4.29}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reexpresar de la siguiente manera

$$\partial^l F_{lk} = d_k, \tag{4.30}$$

$$\partial^l \hat{\epsilon}_l = \frac{1}{2}c, \tag{4.31}$$

donde $F_{lk} = \partial_l \hat{\epsilon}_k - \partial_k \hat{\epsilon}_l$. Estas ecuaciones son invariantes bajo el cambio de norma dado por

$$\epsilon'_k = \hat{\epsilon}_k + \partial_k \chi,$$

$$d'_k = d_k,$$

$$c' = c + 2\partial^l \partial_l \chi,$$

donde χ es una función arbitraria que depende de las coordenadas $4D$, lo cual no es inesperado si tenemos en cuenta la similitud del sistema (4.30) y (4.31) con las ecuaciones de Maxwell en la norma de Lorentz. Luego, el sistema (4.30) y (4.31) es equivalente a

$$\partial^l F'_{lk} = d'_k, \tag{4.32}$$

$$\partial^l \epsilon'_l = \frac{1}{2}c'. \tag{4.33}$$

Puesto que la función χ es arbitraria, entonces la elejimos convenientemente de la siguiente manera

$$\partial^l \partial_l \chi = -\frac{1}{2}c.$$

Esto implica que el sistema (4.32) y (4.33) es equivalente a

$$\partial^l F'_{lk} = d'_k, \tag{4.34}$$

$$\partial^l \epsilon_l' = 0. \tag{4.35}$$

El sistema anterior es estructuralmente equivalente a las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas con una cuadricorriente dada por $J_k = d_k'$ bajo la norma de Lorentz. Sabemos que las ecuaciones de Maxwell tienen solución para una cuadricorriente arbitraria. Luego, esto implica que la condición transversa y sin "traza" es compatible para el sistema (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21), el cual se reduce a una única ecuación dada por [27, 34, 41]:

$$(\partial_{\hat{y}}^2 + 4A'\partial_{\hat{y}})\hat{h}_{mn} + e^{2A}\Box^{(4)}\hat{h}_{mn} = 0. \tag{4.36}$$

Ahora comparemos esta última ecuación con la ecuación de onda de un campo escalar arbitrario $\widehat{\varphi}$ libre y no masivo; para el caso de la métrica (2.20) dicha ecuación está dada por

$$\Box^{(5)}\widehat{\varphi} = \left(\partial_{\hat{y}}^2 + 4A'\partial_{\hat{y}} + e^{2A}\Box^{(4)}\right)\widehat{\varphi} = 0.$$

De aquí que en la norma axial, transversa y sin "traza", las perturbaciones de la métrica se comporten como un campo escalar libre no masivo que obedece la ecuación de onda en $5D$. Además, como era de esperar én la relación (4.36), existe una solución que describe el "gravitón" cuadridimensional, el cual está dado por [27, 35, 36]

$$2\hat{h}_{mn} = C_{mn}e^{ip\hat{x}},$$

donde $p^2 = -m^2 = 0$ y C_{ij} es constante.

4.1.1. Ecuación de Schrödinger

Con el objetivo de facilitar el análisis de (4.36) introduzcamos la variable z definida como $dz = e^{-A}d\hat{y}$, este cambio de variables transforma la métrica de fondo a una conformemente plana. Luego, (4.36) reescrita en la variable z se transforma en [27, 29, 34, 35, 36, 46]

$$(\partial_z^2 + 3A_z\partial_z + \Box^{(4)})\hat{h}_{mn} = 0, \tag{4.37}$$

donde $A_z = \frac{dA}{dz}$.

Adoptemos el siguiente ansatz $\hat{h}_{mn} = e^{ipx}e^{-3A/2}\Psi_{mn}(z)$, esto hace que (4.37) se transforme en una ecuación del tipo Schrödinger

$$[\partial_z^2 - V_{Sch}(z) + m^2]\Psi = 0, \tag{4.38}$$

donde hemos suprimido los subíndices mn para hacer más breve la notación; además, V_{sch} es el análogo del potencial mecánico cuántico y está dado por

$$V_{sch}(z) \equiv \frac{3}{2}A_{zz} + \frac{9}{4}(A_z)^2. \tag{4.39}$$

En este trabajo la norma para las fluctuaciones será la norma convencional usada en Mecánica Cuántica [27, 29]

$$||\Psi|| = \int |\Psi|^2 dz. \tag{4.40}$$

Por otro lado, si definimos el operador [27, 29, 34, 35, 47]

$$Q = -\partial_z + \frac{3}{2}A_z,$$

el operador adjunto asociado es

$$Q^\dagger = \partial_z + \frac{3}{2}A_z.$$

Luego, (4.38) se puede expresar como

$$(Q^\dagger Q)\Psi = m^2\Psi.$$

Se puede demostrar de manera análoga al problema del oscilador armónico en Mecánica Cuántica que $Q^\dagger Q$ es un operador hermítico semidefinido positivo; entonces no existen modos con "energía" negativa, lo cual es necesario para la estabilidad del fondo gravitacional.

El espectro de la "función de onda" Ψ, está determinado por el "potencial mecánico cuántico" $V_{sch}(z)$ y a la vez dicho potencial está dado en términos de A, por tanto, las soluciones de fondo determinan el espectro de Ψ. Ahora, como se muestra en [27, 28, 29, 34, 35, 36, 40], la función de onda del modo cero toma la siguiente forma

$$\Psi_0(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)}. \tag{4.41}$$

Además de (4.40) tenemos que la condición para tener gravedad cuadridimensional localizada es que $\Psi_0(z)$ sea normalizable; en otras palabras

$$\int dz|\Psi_0|^2 < \infty.$$

En lo que resta del Capítulo nos proponemos estudiar algunas características generales relacionadas con el espectro de las fluctuaciones gravitacionales.

El espectro de (4.38) se ha estudiado para distintos modelos de membranas gruesas.[2]

En [27, 29, 34] se estudian modelos donde la gravedad cuadridimensional está localizada, el escalar de Ricci en $5D$ es regular, pero no hay salto en el espectro de masas de las fluctuaciones, lo cual no es deseable si queremos tener una teoría de campos efectiva bien definida.

Por otra parte, también existen modelos [28, 35, 36, 46] donde la gravedad cuadridimensional se localiza, hay un salto en el espectro de masas, pero el escalar de curvatura en $5D$ es singular en la frontera de la variedad.

Luego, esto sugiere el análisis en el marco de las membranas gruesas de la relación entre los siguientes aspectos:

1. Localización de la gravedad cuadridimensional en el mundo membrana $5D$.
2. Suavidad del escalar de Ricci en $5D$.
3. Existencia de un salto en el espectro de masas de las excitaciones gravitacionales.

El escalar de Ricci en términos de la variable z toma el siguiente aspecto

$$R = 4(2\partial_z^2 A + 3(\partial_z A)^2)e^{-2A}. \tag{4.42}$$

Si tenemos en cuenta (4.39), (4.41) y (4.42) se puede observar una ligadura

[2] Lo que es equivalente a distintos potenciales de autointeracción $V(\phi)$.

entre las cantidades R, V_{sch} y Ψ_0, la cual se reduce a

$$V_{sch} = \frac{3}{16}\Psi_0^{\frac{4}{3}}R. \tag{4.43}$$

La igualdad anterior impide que se puedan satisfacer simultáneamente los 3 requisitos planteados; veamos cómo esto ocurre. Primeramente para que el modo cero sea localizado, V_{sch} debe ser tipo pozo de potencial con el mínimo global menor que cero. Sin perder generalidad consideremos que $-\infty < z < \infty$. Ahora, analicemos todos los casos posibles.

a) Supongamos que se cumplen los puntos 1 y 2. Al estar el modo cero localizado, entonces se tiene que $\Psi_0 \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Por otra parte tenemos que $R \rightarrow \neq 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, entonces de (4.43) se concluye que $V_{sch} \rightarrow 0$. En otras palabras no hay salto en el espectro de masas.

b) Si 1 y 3 son ciertos, entonces, $\Psi_0 \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ y $V_{sch} \rightarrow V_{\pm} > 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$, entonces al menos cuando $z \rightarrow \infty$ se tiene que $R \rightarrow \infty$, lo que hace el escalar de Ricci en $5D$ singular.

c) Si 2 y 3 son ciertos, en este caso $V_{sch} \rightarrow V_{\pm} > 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$ y $R \rightarrow \neq \infty$ en z infinito, luego, esto implica que $\Psi_0 \rightarrow \neq 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. En este caso no logramos localización de la gravedad cuadridimensional.

De esta manera se demuestra que en este tipo de modelos es imposible satisfacer simultáneamente los 3 requisitos.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se consideraron membranas gruesas generadas en el sistema de gravedad pentadimensional mínimamente acoplada a un campo escalar real que depende sólo de la quinta dimensión, al igual que el factor de deformación de la métrica.

Posteriormente se estudiaron las perturbaciones de la métrica en la norma axial, transnversa y sin traza para el sector en el que las fluctuaciones del campo escalar son nulas. En este marco se demostró la consistencia de la elección de dicha norma.

Se analizó la relación existente entre los siguientes aspectos en mebranas gruesas:

· Localización de la gravedad cuadridimensional en el mundo membrana $5D$.

· Suavidad del escalar de Ricci en $5D$.

· Existencia de un salto en el espectro de masas de las excitaciones gravitacionales.

Como resultado, se obtuvo que en el marco de las configuraciones consideradas, si se desea localizar la gravedad 4D en las membranas anchas y se exige que el escalar de curvatura se comporte de manera regular, entonces el potencial mecánico cuántico tiende a cero asintóticamente y, por lo tanto, no hay salto en el espectro de masas de las excitaciones de Kaluza–Klein del campo gravitatorio.

Por otro lado, si se requiere que la gravedad 4D se localice en las membranas anchas y se exige que haya un salto en el espectro de masas de los modos axiales, transversos y sin traza de las fluctuaciones de la métrica, es decir, que el potencial mecánico cuántico tienda asintóticamente a valores finitos mayores que cero, entoces el escalar de curvatura necesariamente desarrolla singularidades en las fronteras de la variedad pentadimensional.

Cabe señalar que este es un resultado original de este trabajo.

Por otro lado, en el futuro cercano se tiene planeado desarrollar la presente investigación a lo largo de las siguientes líneas:

· Análisis de la dinámica de las perturbaciones en el caso en el que las fluctuaciones del campo escalar son distintas de cero, haciendo uso del formalismo de fluctuaciones cosmológicas en mundos membrana [42], [43].

· Estudio del problema de las correcciones a la ley de Newton para el caso en el que las fluctuaciones del campo escalar son distintas de cero en las membranas gruesas.

· Análisis detallado de la localización de la gravedad cuadridimensional en membranas gruesas cuando las fluctuaciones del campo escalar no son triviales.

Apéndice A

Cantidades geométricas útiles

Dada la siguiente métrica

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{mn}dx^m dx^n + dy^2,$$

los símbolos de Christoffel asociados están dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= 0, & \Gamma^y_{ij} &= -A'\eta_{ij}e^{2A}, \\ \Gamma^i_{yj} &= A'\delta^i_j, & \Gamma^y_{yj} &= 0, \\ \Gamma^i_{yy} &= 0, & \Gamma^y_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Además, las componentes del tensor de Ricci en $5D$ toman el siguiente aspecto

$$R_{mn} = -e^{2A}(A'' + 4A'^2)\eta_{mn}, \tag{A.1}$$

$$R_{m5} = 0, \tag{A.2}$$

$$R_{55} = -4(A'' + A'^2), \tag{A.3}$$

donde $A' = \frac{dA}{dy}$. Por otra parte el escalar de curvatura en $5D$ es

$$R = -4(5(A')^2 + 2A'').$$

Si hacemos el cambio de variables $dz = e^{-A}dy$ la nueva métrica es conformemente plana y está dada por

$$ds^2 = e^{2A(z)}\left(\eta_{mn}dx^m dx^n + dz^2\right),$$

Finalmente, el escalar de Ricci asociado es

$$R = 4(2\partial_z^2 A + 3(\partial_z A)^2)e^{-2A}. \tag{A.4}$$

Bibliografía

[1] T. Kaluza, On the problem of unity in physics, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921** 966 (1921).

[2] O. Klein, Quantum theory and five–dimensional theory of relativity, Z. Phys. **37** 895 (1926); Surveys High Energ. Phys. **5** 241 (1986).

[3] W. Thirring, Acta Phys. Austriaca, Suppl. 9 (1972) 256-266.

[4] C.A. Orzalesi, Fortschr. Phys. 29 (1981) 413-421.

[5] C. Wetterich, Phys. Lett. 113B (1982) 377-391.

[6] O. Klein, Zeits. Phys. 37 (1926) 895-903.

[7] E. Cremmer and J. Scherk, Dual Models in Four-Dimensions with Internal Symmetries, Nucl. Phys. B**103** 399 (1976).

[8] J. Scherk, J.H. Schwarz, Dual field theory of quarks and gluons, Phys. Lett. B**57** 463 (1975).

[9] P.G.O. Freund, M.A. Rubin, Dynamics of dimensional reduction, Phys. Lett. B**97** 233 (1980).

[10] E. Witten, Instability of the Kaluza-Klein vacuum, Nucl. Phys. B**195** 481 (1982).

[11] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Extra space–time dimensions: towards a solution of the cosmological constant problem, Phys. Lett. B**125** (1983) 139.

[12] M. Visser, An exotic class of Kaluza–Klein models, Phys. Lett. B**159** (1985) 22.

[13] K. Akama, Pregeometry, in: K. Kikkawa, N. Nakanishi and H. Nariai, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1983, pp. 267-271.

[14] G. W. Gibbons and D. L. Wiltshire, Nucl. Phys. B717 (1987) 340-387.

[15] J. Polchinski, Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges, Phys. Rev. Lett. **75** 4724 (1995).

[16] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, Phys. Lett. B**429**, 263 (1998).

[17] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV, Phys. Lett. B**436**, 257 (1998).

[18] I. Antoniadis, A possible new dimension at a few TeV, Phys. Lett. **B246** 377 (1990).

[19] M. Gogberashvili, Four dimensionality in noncompact Kaluza–Klein model, Mod. Phys. Lett. A**14** (1999) 2025.

[20] M. Gogberashvili, Hierarchy problem in the shell universe model, Int. J. Mod. Phys. D**11**, 1635 (2002);

[21] L. Randall and R. Sundrum, An alternative to compactification, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.

[22] L. Randall and R. Sundrum, A large mass hierarchy from a small extra dimension, Phys. Rev Lett. **83** (1999) 3370.

[23] G. Dvali, G.Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485** (2000) 208 [hep-th/0005016]

[24] J. Lykken and L. Randall, JHEP**0006** (2000) 014 [hep-th/9908076]

[25] A. Karch and L. Randall, "Locally localized gravity," [hep-th/0011156]

[26] P.D. Mannheim, *Brane–localized Gravity*, (World Scientific, Singapore, 2005).

[27] O. De Wolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, Modeling the fifth dimension with scalars and gravity, Phys. Rev. D**62** (2000) 046008.

[28] M. Gremm, Four–dimensional gravity on a thick domain wall, Phys. Lett. B**478** (2000) 434; Thick domain walls and singular spaces, Phys. Rev. D**62** (2000) 044017.

[29] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, Universal aspects of gravity localized on thick branes, Nucl. Phys. B**581** (2000) 309.

[30] S.M. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).

[31] R.M. Wald, *General Relativity* , (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[32] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).

[33] O. Castillo–Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, Localizing gravity on exotic thick three–branes, Phys. Rev. D**70** (2004) 104029.

[34] D. Bazeia, A.R. Gomes and L. Losano, Gravity localization on thick branes: a numerical approach, Int. J. Mod. Phys. A**24** (2009) 1135.

[35] N. Barbosa–Cendejas and A. Herrera–Aguilar, 4D gravity localized in non Z_2–symmetric thick branes, JHEP **10** (2005) 101.

[36] N. Barbosa–Cendejas and A. Herrera–Aguilar, Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes, Phys. Rev. D**73** (2006) 084022; Erratum-ibid. **77** (2008) 049901.

[37] R.H. Brandenberger, Lectures on the theory of cosmological perturbations, Lect. Notes Phys. **646**, 127 (2004).

[38] K. Nakamura, 'Gauge' in general relativity: Second–order general relativistic gauge–invariant perturbation theory, arXiv:0711.0996 [gr-qc].

[39] L.R.W. Abramo, The Back reaction of gravitational perturbations and applications in cosmology, gr-qc/9709049.

[40] A. Wang, Thick de Sitter 3 branes, dynamic black holes and localization of gravity, Phys. Rev. D**66** (2002) 024024.

[41] K. Farakos, G. Koutsoumbas and P. Pasipoularides, Graviton localization and Newton's law for brane models with a non-minimally coupled bulk scalar field, Phys. Rev. D**76** (2007) 064025.

[42] D. Langlois, Is our universe brany?, Prog. Theor. Phys. Suppl. **163** 258 (2006).

[43] D. Langlois, Brane cosmological perturbations, Phys. Rev. D**62** 126012 (2000).

[44] K. Farakos and P. Pasipoularides, Brane world scenario in the presence of a non–minimally coupled bulk scalar field, J. Phys. Conf. Ser. **68** (2007) 012041.

[45] O. Arias, R. Cardenas and Israel Quiros, Thick brane worlds arising from pure geometry, Nucl. Phys. B**643** (2002) 187.

[46] N. Barbosa–Cendejas, A. Herrera–Aguilar, M.A. Reyes and C. Schubert, Mass gap for gravity lozalized on Weyl thick branes, Phys. Rev. D**77** (2008) 126013.

[47] N. Barbosa–Cendejas, A. Herrera–Aguilar, U. Nucamendi and I. Quiros, Mass hierarchy and mass gap on thick branes with Poincaré symmetry, arXiv:0712.3098 [hep-th].

[48] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev y M. Minamitsuji, Thick brane solutions, arXiv:0904.1775 [gr-qc].