Universidad Nacional Autónoma de México
Y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

INSTITUTO DE FISICO MATEMÁTICAS

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

El formalismo lagrangiano de la teoría clásica de campos

TESINA

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Mauricio Bustamante Londoño

Director:
José Antonio Zapata Ramírez

Morelia; Michoacán · diciembre de 2009

Índice general

Introducción

La geometría simpléctica enmarca perfectamente a la mecánica lagrangiana y hamiltoniana en el sentido que una que vez que se especifica el espacio de configuración para un sistema físico, toda la dinámica se puede determinar a partir de un lagrangiano o de un hamiltoniano. Dicha dinámica puede encontrarse de varias formas, por ejemplo, solucionando un problema variacional, integrando las ecuaciones de movimiento o, desde una perspectiva más geométrica, usando la forma simpléctica que se define canónicamente sobre el haz cotangente del espacio de configuración. Sin embargo cualquiera de estas maneras es equivalente a las otras (esto puede verse con mucho detalle en [Ar, AM]) y es justamente esto lo que potencia un entendimiento geométrico de toda la formulación de la mecánica. Uno de los objetivos de este trabajo será presentar esta visión geométrica en la teoría clásica de campos.

Por ejemplo, en la mecánica lagrangiana, una vez que se identifica el espacio de configuración Q de un sistema físico (el cual es una variedad diferenciable) uno toma el espacio de estados TQ como el haz tangente sobre Q. Así, si $(q^1, \ldots, q^n)$ representan los grados de libertad del sistema (y por tanto las coordenadas de Q), un *estado* queda determinado por un punto en TQ cuyas coordenadas son "posiciones" y "velocidades" $(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$. Más aún la dinámica del sistema quedará determinada por una función lagrangiana $L : TQ \to \mathbb{R}$ al encontrar los valores extremales de la acción que ella define. Entonces, para caracterizar un sistema mecánico basta especificar un espacio de configuración y una función lagrangiana.

En el caso de la teoría clásica de campos, el espacio de configuración se convierte en una variedad infinito-dimensional. Allí también es posible plantear problemas variacionales a partir de funcionales lagrangianos o hamiltonianos [M] y deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisfacen los campos clásicos.

El propósito de este trabajo es dar una revisión de los elementos geométricos necesarios para dar una formulación covariante de la teoría clásica de campos basada en una extensión de la geometría simpléctica. Esto significa que vamos a presentar un "escenario" en el cual es posible tratar igualmente al tiempo y a las demás coordenadas del espaciotiempo dentro de un formalismo en el que la dinámica se manifiesta por la geometría simpléctica o una extensión de ella. Tal escenario es el haz de jet de un haz fibrado sobre el espaciotiempo, el cual es una estructura que recoge la información a primer orden de las secciones de un haz fibrado. El formalismo desarrollado será aplicado a un sistema de una partícula newotniana, una partícula libre relativista y al electromagnetismo clásico.

Notación

A través de todo el texto las variedades diferenciables serán consideradas suaves, reales, finito-dimensionales, orientables y su topología será conexa. Todos las aplicaciones entre variedades diferenciables serán aplicaciones suaves.

Nos referiremos al haz fibrado (E, π, M) simplemente por su proyección π. A menos que se diga lo contrario, $\dim M = m$ y $\dim E = m + n$. Por una trivialización local de π alrededor de $p \in M$ nos referimos a una terna (W_p, t_p, F), donde W_p es una vecindad de p, F es la fibra típica del haz y $t_p : \pi^{-1}(W_p) \to W_p \times F$ es un difeomorfismo. Si x^i denotan las coordenadas sobre M y u^α las coordenadas sobre la fibra F, entonces las coordenadas sobre el espacio total E de π se escribirán como $u = (x^i, u^\alpha)$.
Si tenemos el producto de dos espacios $X_1 \times X_2$, las aplicaciones $pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, denotan la proyección a la primera y segunda componente respectivamente.
Si (E, π, M) y (H, ρ, N) son haces fibrados entonces un morfismo entre ellos será denotado por $(f, \bar{f}) : \pi \to \rho$, donde $f : E \to H$, $\bar{f} : M \to N$ y se satisface $\rho f = \bar{f}\pi$.
Denotaremos por E_p a la fibra sobre $p \in M$, es decir, $E_p = \pi^{-1}(p)$. También llamaremos $T\pi$ a la aplicación diferencial de TE a TM.

La convención de Einstein (suma sobre índices repetidos) será usada en todo el escrito.

1

Espacios afines y haces afines

Antes de definir un haz afín introducimos los espacios afines y aplicaciones afines.

Definición 1. *Sea A un conjunto, V un espacio vectorial de dimensión finita y $\alpha : A \times V \to A$ una función. La terna (A, V, α) es llamada un espacio afín si se satisface lo siguiente:*

1. *α define una acción de V (como grupo abeliano) sobre A, esto es, para todo $x \in A$, $\alpha(x, 0) = x$ y para todo $x \in A$, $v, w \in V$ $\alpha(\alpha(x, v), w) = \alpha(x, v + w)$.*

2. *Para todo $x, y \in A$ existe un único $v \in V$ tal que $y = \alpha(x, v)$.*

Aunque un espacio afín no tiene la estructura de espacio vectorial (por ejemplo, no tenemos un elemento 0), es posible dar coordenadas a los puntos de A haciendo referencia a algún punto distinguido (pero arbitrario) $p \in A$ y a una base $\{e_i\}_{i=1}^{dimV}$ del espacio vectorial V. Si $x \in A$ y $v = x^i e_i$ es el vector que satisface $x = \alpha(p, v)$, entonces asignamos a x las coordenadas x^i. Estas coordenadas están bien definidas (una vez que se fija un "origen" $p \in A$) por la unicidad de v.
Ahora queremos definir aplicaciones entre espacios afines.

Definición 2. *Sean (A, V, α) y (B, W, β) espacios afines. La función $T : A \to B$ es llamada una aplicación (o morfismo, o transformación) afín si existe una transformación lineal $L : V \to W$ tal que, para todo $x \in A$ y $v \in V$*

$$T(\alpha(x, v)) = \beta(T(x), L(v)).$$

A $L(v)$ se le llama la parte lineal de la transformación y a $T(x)$ la parte inhomogénea.

Igual que en el estudio de espacios vectoriales, será útil asociar coordenadas a los morfismos afines. Sea $T : A \to B$ una aplicación afín. Usemos un punto $p \in A$ y una base $\{e_i\}$ de V para dar coordenadas en A y el punto q y una base $\{f_k\}$ de W para dar coordenadas en B. Sean p^k las coordenadas de $T(p)$ y L_i^k las coordenadas de $T(\alpha(p, e_i))$, esto es,

$T(p) = \beta(q, p^k f_k)$ y $T(\alpha(p, e_i)) = \beta(q, L_i^k f_k)$. Con esto tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} T(x) &= T(\alpha(p, x^i e_i)) \\ &= \beta(T(p), L(x^i e_i)) \\ &= \beta(\beta(q, p^k f_k), L(x^i e_i)) \\ &= \beta(q, p^k f_k + x^i L_i^k f_k) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde L_i^k son las entradas de la matriz de la transformación L. Así, las coordenadas de $T(x)$ respecto a q y a $\{f_k\}$ son $(p^k + x^i L_i^k)$.

Tal y como se hace con los espacios vectoriales, el paso siguiente será definir el espacio dual de un espacio afín. La definición es natural:

Definición 3. *Sea (A, V, α) un espacio afín. El espacio dual de A es el conjunto de aplicaciones afines $A \to \mathbb{R}$ y se denota por A^**

De las definiciones es fácil ver que para generar una transformación afín basta con generar independientemente su parte lineal y su parte inohomogénea. El siguiente teorema lo muestra:

Teorema 1. *A^* es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión igual a $dimV + 1$.*

Demostración. El dual de un espacio afín se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ definiendo la suma y el producto por escalares puntualmente.
Sea $\{e_i\}_{i=1}^k$ una base de V, $\{e^{*i}\}$ su base dual y $p \in A$. Tomemos una transformación afín $T \in A^*$ arbitraria. Ahora notemos que si $F \in A^*$ entonces para cualquier $x \in A$ con coordenadas x^i respecto p y a la base $\{e_i\}$, existen λ, λ_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{dim}V$ tales que $F(x) = \lambda T(x) + \lambda_i e^{*i}(x^j e_j)$. Para cada i, consideramos las transformaciones afines $T^i : A \to \mathbb{R}$ tales que $T^i(\alpha(p, x^j e_j)) = L^i(x^j e_j) = L^i(e_k) e^{*k}(x^j e_j)$. El conjunto $\{T, T^i\}$ es linealmente independiente (porque la base dual $\{e^{*i}\}$ lo es) y genera a A^*. Por tanto $dimA^* = dimV + 1$. $\square$

Una vez definido un espacio afín (y su dual) podemos decir lo que es un haz fibrado afín (y su dual). El siguiente par de definiciones bastarán para introducir los elementos necesarios en el estudio de la teoría clásica de campos a través del haz de jet y el haz de jet dual.

Definición 4. *Sea (E, π, M) un haz vectorial. El cuádruple (A, ρ, M, α) es llamado un haz afín modelado sobre π si se satisface:*

1. *(A, ρ, M) es un haz fibrado.*
2. - *$\alpha : A \times_M E \to A$ es tal que, para todo $p \in M$ $Im\big(\alpha|_{E_p \times A_p}\big) \subset A_p$.*
   - *Para todo $p \in M$ la terna $(A_p, E_p, \alpha|_{E_p \times A_p})$ es un espacio afín.*
3. *Para cada $p \in M$ hay una trivialización local $(W_p, t_p, \mathbb{R}^n)$ de ρ, llamada trivialización local afín, tal que para todo $q \in W_p$ la aplicación $pr_2 \circ t_p|_{A_q} : A_q \to \mathbb{R}^n$, es un isomorfismo afín.*

Definición 5. *Si el cuádruple* (A, ρ, M, α) *es un haz afín con fibras* A_p*, entonces el haz afín dual es el haz cuyas fibras son los espacios duales* A_p^* *y será denotado por* (A^*, ρ^*, M)*.*

Por lo mencionado arriba, este haz es un haz vectorial. Además, la trivialización local afín de ρ induce una trivialización de ρ^*. Si $(W_p, t_p, \mathbb{R}^n)$ es una trivialización local afín de ρ entonces $pr_2 \circ t_p|_{A_q}$ es un isomorfismo afín de A_q en $\mathbb{R}^n$, así que identificando a $\mathbb{R}^{n+1}$ con el conjunto de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tendremos que la aplicación inversa de su transpuesta, denotada por t_{pq}^* es un isomorfismo lineal entre A_q^* y $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces definimos $t_p^* : \rho^{*-1}(W_p) \to W_p \times \mathbb{R}^{n+1}$ por $t_p^*(a) = \Big(\rho^*(a), t_{p\rho^*(a)}^*(a)\Big)$ y de esta manera $(W_p, t_p^*, \mathbb{R}^{n+1})$ es una trivialización local de ρ^*.

2

El haz de jet

Definición 6. *Sea (E, π, M) un haz fibrado. Denotemos por $\Gamma_p(\pi)$ el conjunto de secciones de π definidas en alguna vecindad de $p \in M$. Sobre $\Gamma_p(\pi)$ definimos una relación de equivalencia $\sim$ con la siguiente condición: si $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$, entonces, $\phi \sim \psi$ si y sólo si $\phi(p) = \psi(p)$ y $T\phi|_{E_p} = T\psi|_{E_p}$. En tal caso decimos que las secciones ϕ y ψ son 1-equivalentes en $p \in M$.*
A la clase de equivalencia de una sección ϕ se le llama 1-jet de ϕ y se denota por $j^1_p\phi$.
Al conjunto de clases de equivalencia de secciones 1-equivalentes se le llama el 1-jet de π y se denota por $J^1\pi$, es decir, $J^1\pi = \{j^1_p\phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$.

Consideremos funciones coordenadas (x^i, u^α) definidas sobre un abierto U de E. Definimos los conjuntos $J_U = \{j^1_p\phi \in J^1\pi : \phi(p) \in U\}$ en $J^1\pi$. Los J_U son el dominio de las funciones $u^1 = (x^i, u^\alpha, u^\alpha_i)$ definidas por:

$$\begin{aligned} x^i(j^1_p\phi) &= x^i(p) \\ u^\alpha(j^1_p\phi) &= u^\alpha \circ \phi(p) := \phi^\alpha(p) \\ u^\alpha_i(j^1_p\phi) &= \left.\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\right|_p . \end{aligned}$$

Se puede probar que la familia $\{(J_U, u^1)\}$ define un atlas C^∞ para $J^1\pi$ que convierten a este conjunto en una variedad diferenciable de dimensión $m + n + mn$ [Sau].

Existen aplicaciones de $J^1\pi$ sobre E y sobre M de una manera obvia

$$\begin{aligned} \pi^1 : J^1\pi &\longrightarrow E \\ j^1_p\phi &\longmapsto \phi(p) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_1 : J^1\pi &\longrightarrow M \\ j^1_p\phi &\longmapsto p \end{aligned}$$

El espacio $J^1\pi$, más que una variedad diferenciable, es el espacio total de un haz fibrado sobre E. Para probarlo usaremos el siguiente lema,

Lema 1. *Sea (E, π, M) un haz fibrado. Para todo $a \in E$, existe una sección ϕ de π definida en alguna vecindad de $\pi(a)$ tal que $\phi(\pi(a)) = a$.*

Demostración. Sea $p = \pi(a)$ y tomemos una trivialización local (W_p, t_p, F) de π alrededor de p. Podemos incluir a W_p en el producto $W_p \times F$ simplemente fijando un punto de F. Sea $i : W_p \to W_p \times F$ tal inclusión. Definimos $\phi : W_p \to \pi^{-1}(W_p) \subset E$ por $\phi = t_p^{-1} \circ i$. Esta aplicación es suave y además, para todo $q \in W_p$, $\pi(t_p^{-1} \circ i)(q) = pr_1(i(q)) = q$. Tambien se tiene que $\phi(\pi(a)) = a$. Luego ϕ es una sección local que buscábamos.

□

Teorema 2. *La aplicación $\pi^1 : J^1\pi \to E$ es suave y sobreyectiva. Más aún, la terna $(J^1\pi, \pi^1, E)$ es un haz fibrado.*

Demostración. Por el lema anterior π^1 es sobreyectiva porque si $a \in E$, entonces existe una sección ϕ de π tal que $a = \phi(\pi(a))$, luego $\pi^1(j^1_{\pi(a)}) = a$.
π^1 es suave porque si (J_U, u^1) es una carta alrededor de $j^1_p\phi \in J^1\pi$ inducida por la carta (U, u) alrededor de $\phi(p)$, entonces la aplicación $u \circ \pi^1 \circ (u^1)^{-1} : (u^1(J_U) \subset \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{mn}) \to u(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ coincide con la proyección a las primeras $m + n$ componentes.
Ahora, la aplicación

$$\begin{aligned} t_u : (\pi^1)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^{mn} \\ j^1_p\phi &\longmapsto (\phi(p), u^\alpha_i(j^1_p\phi)) \end{aligned}$$

es una trivialización local de π^1 ya que t_u se puede factorizar como sigue

$$(\pi^1)^{-1}(U) \xrightarrow{u^1} \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{mn} \xrightarrow{u^{-1} \times id_{\mathbb{R}^{mn}}} U \times \mathbb{R}^{mn}$$

y además $pr_1(t_u(j^1_p\phi)) = \pi^1(j^1_p\phi) = \phi(p)$. Esto completa la prueba.

□

Sabiendo que $(J^1\pi, \pi^1, E)$ es un haz fibrado, la siguiente observación nos permite concluir que π^1 es un haz afín modelado sobre el haz vectorial $(\pi^*(T^*M) \otimes V\pi, \pi^*(\tau^*_M) \otimes T\pi|_{V\pi}, E)$, donde $(V\pi, T\pi|_{V\pi}, E)$ es el subhaz vertical de π y $\tau^*_M : T^*M \to M$ es la proyección natural. Ahora, si $u = (x^i, u^\alpha, u^\alpha_i)$ y $v = (y^j, v^\beta, v^\beta_j)$ son funciones coordenadas definidas respectivamente en abiertos U^1 y V^1 de $J^1\pi$ cuya intersección es no vacía, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} v^\beta_j &= \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^i} + \frac{\partial v^\beta}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \\ &= \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^i} + \frac{\partial v^\beta}{\partial u^\alpha} u^\alpha_i \right) \frac{\partial x^i}{\partial y^j}. \end{aligned}$$

El primer sumando nos hace sospechar que un elemento de T^*M actúa sobre las fibras de π^1; el segundo sumando indica una acción de un vector que sólo tiene componentes sobre las fibras de E, es decir, un vector vertical. Combinando esto, lo que se tiene es que un elemento de la forma $dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ actúa de manera inhomogénea sobre las fibras de $J^1\pi$. Para hacer todo esto más preciso establecemos el siguiente teorema [Sau]:

Teorema 3. *El haz π^1 puede dotarse con estructura de haz fibrado afín modelado sobre el haz vectorial $\pi^*(\tau_M^*) \otimes T\pi|_{V\pi}$ y la trivialización local encontrada en el teorema anterior es justamente una trivialización local afín.*

Demostración. Sea ξ un elemento en la fibra sobre $a \in E$ del haz $\pi^*(\tau_M^*) \otimes T\pi|_{V\pi}$. En coordenadas locales, $\xi = \xi_i^\alpha\ dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$. La acción de este elemento sobre una clase $j^1_{\pi(a)}\phi$ es (viendo el efecto sobre sus coordenadas) $u_i^\alpha(\xi[j^1_p\phi]) = u_i^\alpha(j^1_p\phi) + \xi_i^\alpha$. Así definida, esta acción permite concluir que el morfismo $pr_2 \circ t_u|_{(\pi^1)^{-1}(a)} : (\pi^1)^{-1}(a) \to \mathbb{R}^{mn}$ es un isomorfismo afín[1]. □

2.1. Prolongación de secciones

Aunque no será demostrado aquí, la terna $(J^1\pi, \pi_1, M)$ conforma un haz vectorial (ver [Sau] para una prueba). Algo que será muy usado más adelante es que cada sección local de π determina una única sección de π_1. Dicha sección se llama primera prolongación de ϕ. Encontraremos algunas propiedades de este nuevo objeto.

Definición 7. *Sea (E, π, M) un haz fibrado, $W \subset E$ un abierto de E y $\phi \in \Gamma_W(\pi)$. La primera prolongación de ϕ es la sección $j^1\phi \in \Gamma_W(\pi_1)$ definida por $j^1\phi(p) = j^1_p\phi$.*

No todas las secciones de π_1 son prolongaciones de alguna sección de π. La siguiente es una forma de caracterizar las prolongaciones.

Teorema 4. *Si $\psi \in \Gamma_W(\pi_1)$, entonces hay una sección local $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ que satisface $\psi = j^1\phi$ si y sólo si $\psi = j^1(\pi^1 \circ \psi)$.*

Demostración. Supongamos que tal sección existe. Como $\pi^1 \circ j^1\phi = \phi$, se sigue que $\psi = j^1\phi = j^1(\pi^1 \circ \psi)$. Ahora, si $\psi = j^1(\pi^1 \circ \psi)$, para todo $p \in W$, $\pi \circ \pi^1 \circ \psi(p) = \pi_1 \circ \psi(p) = p$, así que $\pi^1 \circ \psi \in \Gamma_W(\pi)$. □

Las prolongaciones de secciones se pueden distinguir de las demás secciones de π_1 usando las coordenadas $u = (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ de $J^1\pi$. Esto se ve en lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^i(j^1\phi)(p) &= x^i(p); \\ u^\alpha(j^1\phi)(p) &= u^\alpha(\phi(p)) = \phi^\alpha(p); \\ u_i^\alpha(j^1\phi)(p) &= \left.\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\right|_p . \end{aligned}$$

[1] También es necesario probar que la definición de la acción no depende de las coordenadas, sin embargo, esto puede demostrarse con la regla de la cadena y con las propiedades de transformación de los tensores involucrados. Los detalles están en [Sau].

2.2. Prolongación de morfismos y campos vectoriales

La idea ahora es prolongar morfismos de haces fibrados a morfismos entre haces de jets, una vez hecho esto encontraremos una manera natural de definir la prolongación de un campo vectorial.

Si (E, π, M) y (H, ρ, N) son dos haces fibrados, $(f, \bar{f}) : \pi \to \rho$ es un morfismo de haces tal que $\bar{f}$ es un difeomorfismo y ϕ es una sección local de π, es fácil ver que $\bar{f}(\phi) := f \circ \phi \circ \bar{f}^{-1}$ es una sección local de ρ. Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 8. *Sean (E, π, M) y (H, ρ, N) haces fibrados y $(f, \bar{f}) : \pi \to \rho$ es un morfismo de haces tal que $\bar{f}$ es un difeomorfismo. A la aplicación $j^1(f, \bar{f}) : J^1\pi \to J^1\rho$ definida por*

$$j^1(f, \bar{f})(j^1_p\phi) = j^1_{\bar{f}(p)}(\bar{f}(\phi))$$

se le llama primera prolongación de $(f, \bar{f})$.

Si no hay lugar a confusión, usaremos la notación $j^1 f$ en vez de $j^1(f, \bar{f})$. Cuando $H = E$ y $N = M$ la anterior definición permite introducir prolongaciones de un campos vectoriales. Para ver cómo, consideremos un campo vectorial X sobre E que es proyectable a la variedad base M, esto es, X induce un morfismo entre los haces (E, π, M) y $(TE, T\pi, TM)$. Ahora consideramos el flujo ψ de X. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, $\psi_t : E \to E$ genera un automorfismo de π sobre π. Cuando prolongamos ψ_t a $J^1\pi$ obtenemos un flujo $j^1\psi_t$ sobre la variedad de jet y el campo vectorial asociado a ese flujo será la primera prolongación de X a $J^1\pi$. Si denotamos por $j^1 X$ a tal prolongación, lo que tenemos es que para cada t,

$$j^1 X(f)_p = \frac{d}{dt} f(j^1\psi_t).$$

Si además escogemos $\bar{f} = id_M$ en la definición anterior, el flujo ψ_t será vertical y más adelante nos permitirá definir variaciones de secciones a lo largo de las fibras de E.

Observación

Lo que se ha definido y probado hasta aquí es apenas una mínima parte de la teoría general de los haces de jets. En general es posible definir clases de equivalencia de secciones cuando coinciden hasta sus $k-$ésimas derivadas parciales. Esto produciría haces de jets de órdenes mayores y la teoría por sí misma gana más interés, por ejemplo, en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. Todo eso puede consultarse en [Sau]. Sin embargo, para lo que se pretende en este trabajo, bastará con conocer la estructura del primer haz de jet y su dual, principalmente porque aquí nos enfocamos en entender las teorías de los campos clásicos, muchas de las cuales pueden escribirse en un formalismo de primer orden.

3

El haz de jet dual

En el caso de haces vectoriales la estructura lineal sobre sus fibras permite construir nuevos haces a partir de otros, mediante porcesos como tomar el dual o el producto tensorial. La estructura afín del haz de jet también se puede aprovechar para construir el haz de jet dual.
En adelante escribiremos $J^1_a\pi$ para denotar la fibra sobre un punto $a \in E$, es decir, $J^1_a\pi := (\pi^1)^{-1}(a)$.

Definición 9. *El haz de jet dual* $(J^{1*}\pi, \pi^{1*}, E)$ *es el haz dual a* π^1 *como haz afín.*

Las fibras de π^{1*} son entonces aplicaciones afines de $J^1_a\pi$ a $\mathbb{R}$. Será útil mantener en mente la identificación de las fibras de $\Lambda^m M$ [1] con $\mathbb{R}$. Si utilizamos la ecuación 1.1 en nuestro caso, no es difícil ver que una aplicación afín entre las fibras de $J^1\pi$ a las de $\Lambda^m M$ que en términos de las coordenadas de $J^1\pi$ se ve como

$$u^\alpha_i \longmapsto (p + p^i_\alpha u^\alpha_i) d^m x.$$

Lo que pretendemos ahora es definir un análogo a las formas canónicas que se encuentran en el haz cotangente. Estas formas darán la estructura *multisimpléctica* al haz de jet dual y nos dejarán aproximarnos a la definición de sistemas lagrangianos y hamiltonianos y en última instancia, al estudio de la dinámica de los campos clásicos.

3.1. Formas canónicas

Sea $\lambda_E : \Lambda^m E \to E$ la proyección natural y consideremos el subhaz de $(\Lambda^m E, \lambda_E, E)$ cuyo espacio total es denotado por $Z \subset \Lambda^m E$, y cuyas fibras Z_a sobre un punto $a \in E$ son

$$Z_a = \{z \in \Lambda^m E : \mathrm{i}_v \mathrm{i}_w z = 0 \text{ para todo } v, w \in V_a\pi\}.$$

[1] $\Lambda^p M$ denota el espacio de $p-$formas diferenciales sobre M.

Un elemento de Z tiene la representación coordenada $z = p\ d^m x + p^i_\alpha du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i$, donde $d^{m-1}x_i := \mathrm{i}_{\partial_i} d^m x$. Esto significa que las coordenadas sobre las fibras de Z son (p, p^i_α), más aún, el espacio total Z tiene funciones coordenadas $(x^i, u^\alpha, p^i_\alpha, p)$. Este hecho nos motiva a conjeturar que las estructuras de $J^{1*}\pi$ y de Z son las mismas.

Teorema 5. *Existe un isomorfismo de haces vectoriales entre π^{1*} y $\lambda_E|_Z$.*

Demostración. Primero notemos que como cada clase de $J^1\pi$ recoge la información hasta primer orden de su representante, uno puede identificar la fibras de π^1 sobre $a \in E$ con secciones del haz $(TE, T\pi, TM)$ mediante la asignación $j^1_{\pi(a)}\phi \mapsto (\gamma : T_{\pi(a)}M \to T_a E)$, donde γ es una aplicación lineal que al componerse con $T\pi$ es la identidad en $T_{\pi(a)}M$ [Got].
Pensando así, definimos la aplicación $\Phi : Z \to J^{1*}\pi$ por $\langle \Phi(z), \gamma\rangle = \gamma^* z$. Podemos probar que esto es un isomorfismo usando coordenadas locales.
Si γ tiene coordenadas u^α_i sobre la fibra de $J^1\pi$, entonces uno tiene que

$$\gamma^*(dx^i) = d(x^i \circ \gamma) = dx^i$$

y

$$\gamma^*(du^\alpha) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\gamma^*(dx^i) = u^\alpha_i dx^i,$$

por tanto

$$\gamma^*(pd^m x + p^i_\alpha du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i) = (p + p^i_\alpha u^\alpha_i) d^m x.$$

Pero esto último es el producto interno de $\Phi(z) = pd^m x + p^i_\alpha du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i$ con $\gamma = (u^\alpha_i)$; es decir, la aplicación lleva fibras en fibras.

$\square$

Con este isomorfismo podemos llevar las formas canónicas a $J^{1*}\pi$ una vez sean construidas sobre Z. Con la proyección $\lambda_E : \Lambda^m E \to E$ podemos definir una $m-$forma canónica Υ sobre $\Lambda^m E$ como

$$\begin{aligned}\Upsilon(z)(v_1, \ldots, v_m) &= (\lambda_E^* z)(v_1, \ldots, v_m)\\ &= z(T\lambda_E\ v_1, \ldots, T\lambda_E\ v_m)\end{aligned}$$

para todo $z \in \Lambda^m E$ y $v_1, \ldots, v_m \in T_z \Lambda^m E$.

Para obtener una forma canónica sobre Z basta considerar la inclusión $i : Z \to \Lambda^m E$ y definir la *$m-$forma canónica* Θ sobre Z como

$$\Theta = i^*\Upsilon.$$

También se define la $(m+1)-$forma canónica Ω sobre Z como

$$\Omega = -\mathrm{d}\Theta.$$

Al par (Z, Ω) se le llama *variedad multisimpléctica* [Got][2].

Será útil tener expresiones en coordenadas para las formas canónicas. Por como fueron construidas (a través de la inclusión) se ve que

$$\Theta = p^i_\alpha du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i + pd^m x$$

$$\Omega = du^\alpha \wedge dp^i_\alpha \wedge d^{m-1}x_i - dp \wedge d^m x.$$

[2]La palabra "multisimpléctica" tiene que ver con que Ω es una forma cerrada y no degenerada, es decir, $\mathrm{i}_v\Omega = 0$ si y sólo si $v = 0$. La definición de variedad multisimpléctica no es estándar y puede tener dificultades técnicas que no la hacen tan amena como una variedad simpléctica, por ejemplo, en general no es posible encontrar un teorema de Darboux. En [Got] y las referencias que hay allí se manifiestan este tipo de situaciones.

4

Dinámica Lagrangiana

Las formas diferenciales encontradas en la sección anterior serán las apropiadas para formular una teoría clásica de campos. Para hacerlo necesitamos varias definiciones.

Definición 10. *Una densidad lagrangiana es una aplicación* $\mathcal{L} : J^1\pi \to \Lambda^m M$*. En coordenadas escribimos* $\mathcal{L} = L(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)d^m x$*.*

Ahora pretendemos transportar la forma canónica sobre $J^{1*}\pi$ hasta $J^1\pi$. Para esto necesitamos una aplicación de $J^1\pi$ a $J^{1*}\pi$ que permita "halarla" mediante el pull-back. Además de eso queremos que al expresar la aplicación en coordenadas estas se puedan interpretar como los "momentos" generalizados asociados a las coordenadas u_i^α. Esta situación se presenta en la mecánica clásica y consiste esencialmente en pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana. Este paso se hace a través de la transformada de Legendre (o derivada fibrada). Será útil recordar la siguiente definición válida para haces vectoriales [AM]

Definición 11. *Sea* M *una variedad diferenciable y* $f : TM \to \mathbb{R}$ *una aplicación suave. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} Ff :& TM \to T^*M \\ & v_p \longmapsto Tf|_{T_pM}(v_p) \end{aligned}$$

es llamado la derivada fibrada de f*.*

Note que $Ff(v) \cdot w = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(v + tw)$. En [Gra] se muestra que la derivada fibrada no está restringida únicamente a aplicaciones entre haces tangentes y cotangentes sino que puede definirse para morfismos entre haces afines. Además, la derivada fibrada del lagrangiano de un sistema clásico con finitos grados de libertad no es más que su transformada de Legendre [AM]. Esto se aprovecha en la siguiente definición, donde se generaliza la transformada de Legendre usual[1].

[1]Sin embargo, debemos tener en cuenta que la función que se de define entre $J^1\pi$ y $J^{1*}\pi$ no va a ser una transformación de "velocidades" a "momentos", para esto basta fijarse en la dimensión de las variedades en cuestión. Tal transformación sí se puede definir pero es necesario tomar un cociente adecuado de $J^{1*}\pi$ de manera que el espacio resultante tenga la misma dimensión que $J^1\pi$.

Definición 12. *La transformada de Legendre de $\mathcal{L}$ es la aplicación de haces afines $\mathcal{FL} : J^1\pi \longrightarrow J^{1*}\pi$ definido por*

$$\langle \mathcal{FL}(\gamma), \gamma' \rangle = \mathcal{L}(\gamma) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{L}(\gamma + t(\gamma' - \gamma)),$$

donde $\gamma, \gamma' \in J^1_a\pi$ y el último signo $+$ denota la acción del espacio vectorial que modela a las fibras de $J^1\pi$.

Si escribimos lo anterior en coordenadas encontramos que

$$\mathcal{L}(\gamma) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{L}(\gamma + t(\gamma' - \gamma)) = (L(\gamma) + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}(v_i^\alpha - u_i^\alpha))d^m x,$$

así que las coordenadas de la transformada de legendre de $\mathcal{L}$ son

$$p_i^\alpha = \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \text{ y } p = L - \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} u_i^\alpha.$$

Ahora podemos definir la forma de Cartan:

Definición 13. *La forma de Cartan es la $m-$forma $\Theta_{\mathcal{L}}$ sobre $J^1\pi$ definida por*

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \mathcal{FL}^*\Theta$$

donde Θ es la $m-$ forma canónica sobre Z

Definimos también la $(m+1)-$forma $\Omega_{\mathcal{L}}$ por

$$\Omega_{\mathcal{L}} = -\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}}$$

No es difícil encontrar expresiones en coordenadas para la forma de Cartan y derivada exterior:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i - \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} u_i^\alpha - L \right) d^m x \\
\Omega_{\mathcal{L}} &= du^\alpha \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) \wedge d^{m-1}x_i - d\left(L - \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} u_i^\alpha \right) \wedge d^m x \\
&= -\frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\beta \partial u_i^\alpha} du_j^\beta \wedge du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i - \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\beta \partial u_i^\alpha} du^\beta \wedge du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\beta \partial u_i^\alpha} u_i^\alpha du_j^\beta \wedge d^m x + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial u_i^\alpha} u_i^\alpha - \frac{\partial L}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial u_i^\alpha} u_i^\alpha \right) du^\beta \wedge d^m x.
\end{aligned}$$

Ahora veremos que en efecto la forma de Cartan contiene toda información sobre la dinámica. Esto es lo que nos asegura que justamente $J^1\pi$ es el “espacio de estados” adecuado para una teoría clásica de campos. Antes de enunciar el próximo teorema, necesitamos una vez más algunas definiciones (tomadas de [Sau]).

Definición 14. *Si $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ y el campo vectorial $\pi-$vertical X tiene flujo ψ_t, entonces la variación de ϕ inducida por X es la familia uniparamétrica de secciones locales $\phi_t = \psi_t \circ \phi \in \Gamma_W(\pi)$.*

Uno puede definir la función $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ por $t \longmapsto \int_C \mathcal{L}(j^1(\psi_t \circ \phi))$, donde C una subvariedad compacta $m-$dimensional de M y $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ con $C \subset W$.

Definición 15. *La sección local $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ es un extremal de $\mathcal{L}$ si*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_C \mathcal{L}(j^1(\psi_t \circ \phi)) = 0$$

para cualquier subvariedad compacta $C \subset W$ $m-$dimensional de M y cualquier campo $\pi-$vertical X, cuyo flujo es ψ_t y satisface $X|_{\pi^{-1}(\partial C)} = 0$.

Lema 2. *Sea ϕ una sección de (E, π, M), $j^1\phi$ su prolongación a $J^1\pi$, $L : J^1\pi \to \Lambda^m M$ una densidad lagrangiana y $\Theta_{\mathcal{L}}$ la forma de Cartan de L. Entonces*

$$\mathcal{L}(j^1\phi) = (j^1\phi)^*\Theta_{\mathcal{L}}$$

Demostración. En coordenadas:

$$\begin{aligned}(j^1\phi)^*\Theta_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}(j^1\phi)d\phi^\alpha \wedge dx_i^m + \left(L(j^1\phi) - \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha}\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\right)d^m x \\ &= L(j^1\phi)d^m x = \mathcal{L}(j^1\phi).\end{aligned}$$

□

Con el formalismo desarrollado podemos reexpresar las ecuaciones de Euler-Lagrange de una manera intrínseca, sin referencia a algún sistema coordenado. Esto queda expresado en el siguiente teorema

Teorema 6. *Sea $(J^1\pi, \Omega_{\mathcal{L}})$ un sistema lagrangiano. Sea $\phi \in \Gamma(\pi)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es un extremal de $\mathcal{L}$.*

2. *Para todo campo vectorial X sobre $J^1\pi$, $(j^1\phi)^* i_X \Omega_{\mathcal{L}} = 0$.*

3. *Si $(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ es un sistema coordenado definido en algún abierto de $J^1\pi$, entonces $j^1\phi = (x^i, u^\alpha, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i})$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \circ j^1\phi - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \circ j^1\phi\right) = 0$$

Demostración. (1 $\Leftrightarrow$ 2) Sea V un campo vectorial π^1-vertical con soporte compacto en $C \subset M$ y sea ψ_t su flujo. Consideremos la variación de ϕ inducida por V y denotemos $\pounds_{(j^1V)}$ a la derivada de Lie a lo largo de j^1V. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_C \mathcal{L}(j^1\phi_t) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_C (j^1\phi_t)^*\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_C (j^1(\psi_t\circ\phi))^*\Theta_{\mathcal{L}} \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_C (j^1\phi)^*(j^1\psi_t)^*\Theta_{\mathcal{L}} = \int_C (j^1\phi)^*\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(j^1\psi_t)^*\Theta_{\mathcal{L}}\right) \\
&= \int_C (j^1\phi)^*\pounds_{(j^1V)}\Theta_{\mathcal{L}} = \int_C (j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{(j^1V)}\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} + \mathrm{d}\mathrm{i}_{(j^1V)}\Theta_{\mathcal{L}}) \\
&= -\int_C (j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{(j^1V)}\Omega_{\mathcal{L}} + \int_C (j^1\phi)^*\mathrm{d}\mathrm{i}_{(j^1V)}\Theta_{\mathcal{L}}) \\
&= -\int_C (j^1\phi)^*\mathrm{i}_{(j^1V)}\Omega_{\mathcal{L}} + \int_{\partial C} (j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{(j^1V)}\Theta_{\mathcal{L}}) \\
&= -\int_C (j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{(j^1V)}\Omega_{\mathcal{L}}),
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado el teorema de Stokes y el hecho de que el campo V y por tanto su prolongación a $J^1\pi$ se anulan en ∂C.
Ahora, si suponemos que para todo campo vectorial X sobre $J^1\pi$, $(j^1\phi)^* i_X\Omega_{\mathcal{L}} = 0$, entonces en particular se cumple para campos verticales y por tanto ϕ es un extremal de L.
Recíprocamente, supongamos que ϕ es un extremal de L. Observemos que para todo $p \in M$, la fibra sobre este punto puede descomponerse como $\pi_1^{-1}(p) = T_{j^1_p\phi}(\mathrm{Im}(j^1\phi)) \oplus V_p\pi_1$, donde $T_{j^1_p\phi}(\mathrm{Im}(j^1\phi))$ denota el conjunto de vectores tangentes a la imagen de $j^1\phi$ y $V_p\pi_1$ la fibra sobre p del subhaz vertical de π_1. Pero los campos verticales en $V\pi_1$ pueden descomponerse, a su vez, en un campo vectorial π^1-vertical y en la prolongación de un campo vectorial $\pi-$vertical. Juntando todo esto, concluimos que X puede escribirse como $X = X_\phi + X_{\pi^1} + j^1X_\pi$ donde X_ϕ es tangente a la imagen de $j^1\phi$, X_{π^1} es π^1-vertical y j^1X_π es la prolongación de un campo $\pi-$vertical.
Ahora notemos que $X_\phi = T(j^1\phi)\cdot w$ para algún campo vectorial w sobre C y que por tanto

$$\begin{aligned}
(j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{X_\phi}\Omega_{\mathcal{L}}) &= (j^1\phi)^*(\mathrm{i}_{(T(j^1\phi)\cdot w)}\Omega_{\mathcal{L}}) \\
&= \mathrm{i}_w(j^1\phi)^*\Omega_{\mathcal{L}},
\end{aligned}$$

pero este término se anula porque $(j^1\phi)^*\Omega_{\mathcal{L}}$ es una $(m+1)-$forma sobre una variedad $m-$dimensional y por tanto actuaría sobre vectores linealmente dependientes.
La parte π^1-vertical de X tiene componentes $(0, 0, W_i^\alpha)$. Esto implica que:

$$\mathrm{i}_{X_{\pi^1}}\Omega_{\mathcal{L}} = -W_j^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\alpha \partial u_j^\beta}\left(du^\alpha \wedge d^{m-1}x_i - u_i^\alpha d^m\right)$$

y por tanto

$$(j^1\phi)^*\mathrm{i}_{X_{\pi^1}}\Omega_{\mathcal{L}} = -W_j^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\alpha \partial u_j^\beta}\left(d\phi^\alpha \wedge d^{m-1}x_i - u_i^\alpha d^m x\right) = 0.$$

Entonces, como ϕ es un extremal

$$\int_C (j^1\phi)^* \mathrm{i}_X \Omega_{\mathcal{L}} = \int_C (j^1\phi)^* \mathrm{i}_{j^1 X_\pi} \Omega_{\mathcal{L}} = 0.$$

($1 \Leftrightarrow 3$) Esta implicación se da mediante un argumento estándar de cálculo de variaciones. Si las coordenadas de $j^1(\phi_t)$ son $(x^i(t), u^\alpha(t), u_i^\alpha(t))$, entonces calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_C \mathcal{L}(j^1\phi_t) &= \frac{d}{dt}\int_C L(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) d^m x \\
&= \int_C \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\frac{du_i^\alpha}{dt} \right) d^m x \\
&= \int_C \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{du^\alpha}{dt} \right) d^m x \\
&= \int_C \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right)\frac{du^\alpha}{dt} \right) d^m x \\
&= \int_C \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right)\right)\frac{du^\alpha}{dt} \right) d^m x,
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado el teorema de Stokes y el hecho de que sólo estamos considerando variaciones inducidas por campos que se anulan en ∂C. Como los campos que inducen las variaciones son campos vectoriales verticales, $\frac{dx^i}{dt} = 0$. Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange se cumplen si y sólo si $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\int_C \mathcal{L}(j^1\phi_t) = 0$.

$\square$

5

Ejemplos

5.1. Partícula newtoniana y partícula libre relativista

Sea M el espacio de configuración para un sistema de una partícula. Uno puede describir el movimiento de la partícula como la gráfica de una curva sobre M. Pensando así, uno puede describir la dinámica a través del haz trivial $(\mathbb{R}\times M, \pi := pr_1, \mathbb{R})$ y las posibles historias de la partícula serán secciones de este haz. Podemos identificar a $\mathbb{R}\times TM$ con $J^1\pi$ de la siguiente manera: sea $j^1_{t_0} \in J^1\pi$. A esta clase de equivalencia le asignamos la pareja $(t, [pr_2 \circ \phi \circ \tau_{t_0}])$ donde $\tau_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una traslación $s \mapsto s + t_0$ y $[pr_2 \circ \phi \circ \tau_{t_0}]$ denota la clase de equivalencia de curvas tangentes en $pr_2(\phi(t_0))$. De modo que si (t, q^i) son coordenadas sobre $\mathbb{R} \times M$, las coordenadas inducidas sobre $J^1\pi$ son $(t, q^i, \dot{q}^i)$.
Ahora queremos construir el haz de jet dual y las formas canónicas para este ejemplo particular. Con las coordenadas que definimos, una $1-$forma sobre $\mathbb{R} \times M$ se escribe como $Hdt + p_i dq^i$. Entonces cualquier forma de este tipo se anula por la acción (inserción) de dos campos vectoriales verticales, esto significa que $Z = T^*(\mathbb{R} \times M) = T^*\mathbb{R} \times T^*M$ y las coordenadas en este espacio serían (t, q^i, p_t, p_i). En este punto ya podemos notar que el haz de jet dual no es más que el espacio de fase extendido de la mecánica hamiltoniana.
Para este sistema, la densidad lagrangiana es una función $L : \mathbb{R}\times TM \to \mathbb{R}$ que en coordenadas se escribe como $L(t, q^i, \dot{q}^i)dt$. Si especializamos las expresiones generales en coordenadas que hallamos para la transformada de Legendre y la forma de Cartan a nuestro caso, fácilmente encontramos que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad \text{y} \quad p_t = L - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -H$$

y

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i - Hdt.$$

Ya que por el Teorema 6 es equivalente tener la forma de Cartan a tener las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas, concluimos que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

En el caso newtoniano, la densidad lagrangiana de una partícula de masa m está dada por $\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q^i)\right)dt$, donde $V(q^i)$ es un potencial que depende sólo de las coordendas q^i. Podemos entonces calcular:

$$p_i = m\dot{q}_i \quad \text{y} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V.$$

Adicionalmente

$$\Theta_{\mathcal{L}} = m\dot{q}_i dq^i - \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)dt,$$

y con esto encontramos las ecuaciones de movimiento:

$$m\frac{d^2q^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

En el caso de una partícula libre relatvista de masa m, uno considera el haz $(\mathbb{R}^4, pr_1, \mathbb{R})$ y la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}dt,$$

donde g es la métrica del espaciotiempo de Minkowski, $v^\mu = \frac{dq^\mu}{dt}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ y el lagrangiano es la expresión coordenada de la masa por el tiempo propio y por lo tanto queda invariante bajo reparametrizaciones temporales. De acuerdo a los resultados que obtuvimos arriba, uno encuentra que

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{mg_{\mu\nu}v^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}}dq^\mu$$

y por lo tanto

$$p_\mu = \frac{mg_{\mu\nu}v^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}} \quad \text{y} \quad H = 0.$$

Notemos que estas ecuaciones nos dan la condición $p^2 = -m^2$.
Además las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\mu\nu}v^\nu}{|v|}\right) = \frac{1}{2|v|}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^\mu}v^\nu v^\sigma,$$

donde $|v| = \sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}$.

5.2. El campo electromagnético

Sea M un espaciotiempo cuadridimensional con una pseudométrica fija g. Como sabemos, la electrodinámica clásica se puede describir en términos del cuadripotencial. Este resulta ser una $1-$forma A sobre M, es decir, una sección del haz (T^*M, τ_M^*, M). Llamemos a las coordenadas del espacio total de este haz (x^i, A_j) y por tanto las coordenadas en $J^1\tau_M^*$ son $(x^i, A_j, \partial_i A_j)$ donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Una $4-$forma en $Z \simeq J^{1*}\tau_M^*$ se escribe como $z = pd^4x + p^{ij}dA_i \wedge d^3x_j$ y por tanto las coordenadas en $J^{1*}\tau_M^*$ son (x^i, A_j, p, p^{ij}).
Esta teoría puede ser descrita mediante el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g}d^4x$$

donde $\sqrt{-g} := \sqrt{-\det g_{ij}}$, F_{ij} es una función sobre $J^{1*}\tau_M^*$ definida por

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

y $F^{ij} := g^{ik}g^{jl}F_{kl}$, siendo g^{ij} las componentes de la métrica inversa.
Atendiendo a esto, el paso a los “multimomentos” dado por la transformada de Legendre nos queda

$$\begin{aligned} p^{ij} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_i A_j)} &= -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial(\partial_i A_j)}F_{kl}F^{kl} \\ &= -\frac{1}{2}F_{kl}\left(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}\right)\sqrt{-g} \\ &= -F^{ij}\sqrt{-g} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p = L - \frac{\partial L}{\partial(\partial_i A_j)}\partial^i A^j &= -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g} + F_{ij}(\partial^i A^j)\sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g} + \frac{1}{2}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g} = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g}, \end{aligned}$$

y usando la expresión en coordenadas para la $4-$forma de Cartan encontramos

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}F^{ij}dA_i \wedge d^3x_j + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\sqrt{-g}d^4x$$

y la $5-$forma $\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$ queda:

$$\Omega_{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\left(g^{ij}g^{kl} - g^{il}g^{jk}\right)dA_i \wedge d(\partial_j A_l) \wedge d^3x_k - \sqrt{-g}F^{ij}d(\partial_j A_i) \wedge d^4x.$$

Usando los resultados que acabamos de obtener, recuperamos las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{-g}F^{ij}\right) = \nabla_j F^{ij} = 0,$$

donde ∇ es la derivada covariante asociada a la métrica g.

Bibliografía

[Ar] V.Arnold, Mathematical methods of classical mechanics. Second Edition,Springer-Verlag, 1989.

[AM] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of mechanics*. Second Edition, Adisson-Wesley, 1978.

[Gra] X. Gràcia, *Fibre derivatives: Some applications to singular lagrangians*. Reports on Mathematical Physics, **45**, 67-84, 2000.

[Got] M.J.Gotay, J. Isenberg, J. Marsden, R. Montgomery, *Momentum Maps and Classical Fields*, arXiv:physics/9801019v2.

[M] J. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*. Springer, 1999.

[Sau] D.J. Saunders, *The geometry of jet bundles*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, **142**, 1989.