



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

---

---

**INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**

**AMPLITUDES DE FOTONES EN EL FORMALISMO  
LÍNEA DE MUNDO**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA**

PRESENTA

**CRISTHIAM MANUEL LÓPEZ ARCOS**

DIRECTOR DE TESIS: DR. CHRISTIAN SCHUBERT

MORELIA, MICHOACÁN, ENERO 2010.



**INSTITUTO DE FÍSICA  
Y MATEMÁTICAS**



## Índice general

<b>Capítulo 1. Introducción</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1. Amplitudes de Fotones . . . . .	3
1.2. El Formalismo Línea de Mundo . . . . .	6
1.3. Organización del Trabajo . . . . .	8
<b>Capítulo 2. Amplitudes de Fotones en el Formalismo Línea de Mundo</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1. Electrodinámica Escalar . . . . .	9
2.2. Electrodinámica Espinorial . . . . .	15
2.3. Supersimetría en la Línea de Mundo . . . . .	17
<b>Capítulo 3. Amplitud de 4 Fotones On-Shell con <math>m = 0</math></b> . . . . .	<b>21</b>
3.1. Caso Escalar . . . . .	21
3.2. Caso Espinorial . . . . .	24
3.3. Acercamiento General . . . . .	24
<b>Capítulo 4. Amplitud de 4 Fotones On-Shell con <math>m \neq 0</math></b> . . . . .	<b>32</b>
4.1. Integración Numérica de las Amplitudes . . . . .	32
4.2. Términos Subdominantes . . . . .	35
4.3. Comparación entre los Términos Subdominantes y el Resultado Numérico . . . . .	36
<b>Capítulo 5. Términos Dominantes para 4 Fotones Off-Shell</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>Capítulo 6. Amplitud de 6 Fotones On-Shell con <math>m \neq 0</math></b> . . . . .	<b>46</b>
<b>Capítulo 7. Conclusiones</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>Apéndice A. Técnica Spinor-Helicity</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>Apéndice B. Identidades</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>Apéndice C. Implementaciones en MATHEMATICA Para el Cálculo de la Amplitud de 6-fotones</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>61</b>



## Capítulo 1

### Introducción

#### 1.1. Amplitudes de Fotones

En la amplitud de 4 fotones a un lazo se describe un proceso de gran importancia a nivel conceptual en la electrodinámica, la dispersión de luz por luz. Ésta no se ha medido experimentalmente, pero en el cálculo es donde se tiene por primera vez una interacción no lineal entre los campos y es un efecto que sólo surge a nivel cuántico. La primera vez que se realizó este cálculo (Euler and Kockel, 1935) fué usando la teoría "Hole" de Dirac, ya que se encuentran involucrados procesos de creación de pares electrón-positrón. Se obtuvo el siguiente resultado para los campos eléctrico y magnético

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_0 \sum_j \mu_{ij} H_j$$

donde la no linealidad aparece en la corrección cuántica

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{e^4 \hbar}{45\pi m^4 c^7} [2(E^2 - c^2 B^2)\delta_{ij} + 7c^2 B_i B_j] + \dots \\ \mu_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{e^4 \hbar}{45\pi m^4 c^7} [2(c^2 B^2 - E^2)\delta_{ij} + 7c^2 E_i E_j] + \dots \end{aligned}$$

El resultado más importante en esos momentos vino poco más tarde gracias a Euler y Heisenberg (Heisenberg and Euler, 1936), quienes calcularon el Lagrangiano efectivo en el caso de un campo electromagnético constante. La corrección al Lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab},$$

viene dada por

$$\delta\mathcal{L}_{\text{spin}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \left[ \frac{e^2 ab}{\tan(eas)\tanh(ebs)} \right],$$

donde  $a^2 - b^2 = E^2 - B^2$ ,  $ab = \vec{E} \cdot \vec{B}$  (la deducción de esta corrección se puede encontrar en (Itzykson and Zuber, 1980)). Este Lagrangiano proporciona la información acerca de las amplitudes de fotones a un lazo, en el límite de cero energía para los fotones.

Poco despues se obtuvo una versión de este Lagrangiano para el caso de la electrodinámica escalar (Weisskopf, 1936)

$$\mathcal{L}_{\text{scal}} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \left[ \frac{e^2 ab}{\sin(eas)\sinh(ebs)} \right].$$

Años más tarde se continuó con la investigación de estas interacciones no lineales entre los campos (Karplus and Neuman, 1950). Se calculó la amplitud de 4 fotones, pero en este caso para cualquier energía. El cálculo de la polarización no lineal del vacío a cuarto orden se realizó haciendo uso de las nuevas y prometedoras herramientas de la época para la electrodinámica, proporcionadas por Dyson, Feynman, Schwinger y Tomonaga. Se obtuvo el tensor de polarización del vacío; que da la corrección a la corriente inducida

$$\delta j_a(x) = -(\alpha^2/12\hbar) \int G_{abcd}(x, x', x'', x''') A_b(x') A_c(x'') A_d(x''') dx' dx'' dx''''.$$

Se mostró que este tensor es finito y de divergencia cero en todos sus índices. Siguiendo este acercamiento se calculó el Lagrangiano efectivo recuperando el resultado de Euler y Kockel nuevamente.

Usando el resultado obtenido para el tensor de polarización se calcularon diferentes procesos (Karplus and Neuman, 1951). Éstos fueron: dispersión de luz por luz, creación de pares por dos fotones, dispersión de la luz en un campo externo y creación de pares en un campo externo.

En los trabajos realizados por Karplus y Neuman, ellos calcularon directamente las integrales asociadas a los diagramás de Feynman, éstas mostraban divergencias U.V. (ultravioleta) espurias en los diagramás individuales, pero finalmente se cancelan al realizar la suma sobre las permutaciones del diagrama, gracias a la invariancia de calibración (gauge).

Calculando esta amplitud se han logrado evidenciar los siguientes efectos físicos:

- Modificación en las relaciones de dispersión; dependencia de los índices de refracción  $n_\perp$  y  $n_\parallel$  del campo magnético  $\vec{B}$ , cuando el campo magnético es fuerte;
- Dicroísmo (la absorción del medio depende de la polarización de la onda entrante), en presencia campos eléctricos fuertes;
- Dispersión  $\gamma - \gamma$ ;
- Producción de pares por un campo eléctrico, también llamado efecto Schwinger.

Debido a su finitud (en el ultravioleta e infrarojo), la amplitud de 4 fotones es una de las favoritas a la hora de probar diferentes mecanismos de cálculo (De~Tollis, 1964)(Jikia and Tkabladze, 1994; Bernicot, 2008, más recientemente), y es muy usada como ejemplo para evidenciar nuevos efectos a nivel teórico (Duff and Isham, 1979, p.e.). Es también utilizada como modelo para las amplitudes de 4-gluones (Ellis and Sexton, 1986).

Cabe nombrar que en los casos anteriores sólo se ha calculado la amplitud de 4 fotones con estos on-shell<sup>1</sup>. En 1971 (Constantini et~al., 1971) realizaron un cálculo con 2 de los fotones off-shell. Hasta el momento el cálculo de la amplitud con todos los fotones off-shell no se ha realizado.

El paso siguiente es el caso de la amplitud con 6 fotones, el teorema de Furry establece que no hay amplitudes con número impar de fotones. Para esta amplitud sólo recientemente se han calculado expresiones exactas, en el caso sin masa, El primer resultado se obtuvo para la amplitud con violación máxima de helicidad (MHV, es del tipo  $(- - + + ++)$ ) (Mahlon, 1994b), este caso resulta ser el más simple de todos teniendo una acción efectiva auto-dual. Más recientemente resultados analíticos para todas las amplitudes han sido encontrados con el uso de técnicas más modernas (Binnoth et~al., 2007; Bernicot and Guillet, 2008). Numéricamente también se han calculado estas amplitudes no másivas (Nagy and Soper, 2006). En el caso másivo sólo se ha realizado el cálculo analítico para las polarizaciones  $(++++++)$  (Bernicot, 2008). También se han realizado cálculos numéricos de las amplitudes de 6 fotones en el caso másivo (Ossola et~al., 2007).

En el caso general de  $N$  fotones también se tienen varios resultados importantes. Primero esta el teorema de Mahlon el cual establece la cancelacion de las amplitudes  $(+ + + \dots +)$  y  $(- + + \dots +)$  para el caso no másivo on-shell, y con  $N \geq 4$  (Mahlon, 1994a). Hay un resultado muy reciente para las amplitudes MHV en electrodinámica supersimétrica (SQED) (Brandhuber et~al., 2009), donde encuentran unas relaciones entre éstas y las mismás amplitudes para Super-Yang-Mills (SYM).

Continuando con el estudio de las amplitudes para  $N$  fotones en el caso masivo, se ha calculado el comportamiento a un lazo en el límite de bajas energías (Martin et~al., 2003). Utilizando el Lagrangiano de Euler-Heisenberg obtuvieron el término dominante de la expansión en masa grande (energía baja). El resultado para la amplitud en el caso espinorial que obtuvieron es

$$\Gamma_{\text{spin}}[\varepsilon_1^+; \dots; \varepsilon_K^+; \varepsilon_{K+1}^-; \dots; \varepsilon_N^-] = -\frac{m^4}{8\pi^2} \left(\frac{2e}{m^2}\right)^N c_{\text{spin}}\left(\frac{K}{2}, \frac{N-K}{2}\right) \chi_K^+ \chi_{N-K}^-,$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_K^+ &= \frac{\left(\frac{K}{2}\right)!}{2^{\frac{K}{2}}} \left( [12]^2 [34]^2 \dots [(K-1)K]^2 + \text{perm.} \right) \\ \chi_{N-K}^- &= \frac{\left(\frac{N-K}{2}\right)!}{2^{\frac{N-K}{2}}} \left( \langle (K+1)(K+2) \rangle^2 \langle (K+3)(K+4) \rangle^2 \dots \langle (N-1)N \rangle^2 + \text{perm.} \right) \\ c_{\text{spin}}\left(\frac{K}{2}, \frac{N-K}{2}\right) &= (-1)^{\frac{N}{2}} (N-3)! \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^{N-K} (-1)^{N-K-l} \frac{\mathcal{B}_{k+l} \mathcal{B}_{N-k+l}}{k! l! (K-k)! (N-K-l)!}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Para el caso de los fotones la condición on-shell se refiere no solamente a los momenta en la capa de masa (cono de luz), sino también a las 2 polarizaciones físicas (transversales). En el caso off-shell los momenta estan fuera de la capa de masa y se pueden tener las 4 polarizaciones. Como se refiere a dos condiciones (sobre momentum y polarización), en este trabajo se las llamará con su nombre en inglés on-shell y off-shell.

los  $\mathcal{B}_n$ 's que aparecen en el numerador son los números de Bernoulli y los productos espinoriales, junto con sus propiedades, se tratan en el apéndice A. En el caso escalar la amplitud toma la forma

$$\Gamma_{\text{scal}}[\varepsilon_1^+; \dots; \varepsilon_K^+; \varepsilon_{K+1}^-; \dots; \varepsilon_N^-] = \frac{m^4}{16\pi^2} \left(\frac{2e}{m^2}\right)^N c_{\text{scal}}\left(\frac{K}{2}, \frac{N-K}{2}\right) \chi_K^+ \chi_{N-K}^-,$$

en este caso

$$c_{\text{scal}}\left(\frac{K}{2}, \frac{N-K}{2}\right) = (-1)^{\frac{N}{2}} (N-3)! \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^{N-K} (-1)^{N-K-l} \times \frac{(1-2^{1-k-l})(1-2^{1-N+k+l}) \mathcal{B}_{k+l} \mathcal{B}_{N-k+l}}{k! (K-k)! (N-K-l)!}.$$

Esta expresión es para polarizaciones de la forma  $((- \dots - (\#\text{par})) + \dots +)$  y  $(+ \dots +)$ , el Lagrangiano de Euler-Heisenberg no aporta para el caso de polarizaciones “-” impar. En este trabajo se calculará el término dominante para el caso  $(- + \dots +)$ , y términos subdominantes para el caso de 4 fotones on-shell y off-shell. Este límite de masa grande se había estudiando también para órdenes más altos en los lazos, dos y con  $N = 10$ , (Dunne and Schubert, 2002a,b) tomando todas las polarizaciones “+”

Fuera del ambito teórico, también existen propuestas de problemás que involucran los tipos de amplitudes mencionadas aquí, para ser tratados en los futuros aceleradores de fotones como el *Photon Large Collider* PLC (Ginzburg, 2009; Jikia and Tkabladze, 1994). Los problemás propuestos involucran aspectos del modelo estandar (física de hadrones, Higgs, partículas nuevas) y también aspectos más exóticos (monopolos, unparticles). Esta puede ser otra motivación para el desarrollo de nuevas técnicas de cálculo de amplitudes, como las que se tratarán en este trabajo.

## 1.2. El Formalismo Línea de Mundo

También conocido como “Inspirado en Cuerdas” debido a que se llegó a él, principalmente, tomando el límite de la tensión de la cuerda a infinito en diferentes teorías de cuerdas (Scherk, 1971; Neveu and Scherk, 1972; Yoneya, 1973). El paso definitivo fue logrado por Bern y Kosower (Bern:1991aq) quienes lograron establecer un formalismo para el cálculo de amplitudes en teorías de calibración, con un conjunto de reglas que ya no necesita recurrir a ninguna teoría de cuerdas en particular. Poco despues (Strassler, 1992) rederivó el formalismo como una teoría de campos en una dimensión.

Viniendo de la teoría de cuerdas, este formalismo hereda muchas de sus propiedades. Siendo una teoría en el marco de la primera cuantización, las funciones de Green tienen un aspecto diferente al de la teoría convencional y más parecidas a las utilizadas en cuerdas

$$\langle X^a(\sigma_1 \tau_1) X^b(\sigma_2 \tau_2) \rangle \longrightarrow \langle x^a(\tau_1) x^b(\tau_2) \rangle = G(\tau_1, \tau_2) \eta^{ab}.$$

Otra propiedad es que en presencia de un campo externo, las patas externas se conectan al lazo (pensando en una línea de mundo cerrada) como operadores de vértice

$$V^A = \int_0^T d\tau \dot{x} \cdot A(x(\tau))$$

donde  $T$  es el tiempo propio de la línea de mundo cerrada.

La acción efectiva para un campo escalar en presencia de un campo de Maxwell externo tiene la siguiente forma

$$\Gamma[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + ie\dot{x}\cdot A)}.$$

Feynman ya había obtenido la misma expresión, que se muestra en el apéndice de su artículo “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction”.

Bern y Kosower obtuvieron una fórmula maestra para el cálculo de la amplitud de  $N$  fotones (Bern and Kosower, 1992), la cual se muestra aquí, pero su deducción se realizará más adelante

$$\Gamma_{\text{scal}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] = (-ie)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum k_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \\ \times \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \exp \left[ \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{1}{2} G_{Bij} k_i \cdot k_j - i \dot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right) \right] \Bigg|_{\text{multi-lin}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)}$$

donde aparecen las funciones de Green con sus primeras y segundas derivadas

$$G_B(\tau_1, \tau_2) = |\tau_1 - \tau_2| - \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{T}, \\ \dot{G}_{B12} \equiv \dot{G}_B(\tau_1, \tau_2) = \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) - 2 \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{T}, \\ \ddot{G}_{B12} \equiv \ddot{G}_B(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2) - \frac{2}{T}.$$

Ellos también implementaron las llamadas “reglas de Bern y Kosower”, de las cuales se estableció la equivalencia con las reglas de Feynman (Bern and Dunbar, 1992)

Aquí no se discutirán estas reglas. A continuación se mencionan simplemente las ventajas respecto a las reglas de Feynman, que particularmente se verán reflejadas a lo largo del trabajo:

- La organización de la invariancia de calibración es superior.
- Ausencia de momentum del lazo, lo cual reduce el número de invariantes cinéticos desde el principio, y dispara la eficiencia de la técnica de “spinor-helicity”.
- El método se combina bien con supersimetría del espacio-tiempo.

- Los cálculos de las amplitudes de dispersión con los mismos estados externos pero con diferentes partículas circulando en el lazo están más fuertemente relacionados de lo usual.

En el caso de la QED espinorial, también se tiene una acción efectiva. Ahora se incluyen variables de Grassmann para los grados de libertad de espín y se tiene una super integral funcional (Fradkin, 1966; Barducci et~al., 1981)

$$\Gamma[A] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_P \mathcal{D}x \int_A \mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} + ieA \cdot \dot{x} - ie\psi \cdot F \cdot \psi \right) \right].$$

En la integral se han incluido también funciones Grassmannianas anti-periódicas  $\psi^m(\tau)$ . Otro aspecto interesante de esta acción es que ésta exhibe una supersimetría global, lo cual se discutirá en posteriores secciones, la llamada “supersimetría en la línea de mundo”.

Como en el caso escalar, Feynman también tenía una versión de esta acción efectiva, pero hacía uso de matrices de Dirac en lugar de variables de Grasmann, lo cual no la hacía igualmente eficiente para cálculos analíticos.

### 1.3. Organización del Trabajo

La idea de este trabajo es mostrar como el formalismo línea de mundo puede exhibir ventajas a la hora de calcular amplitudes de fotones a un lazo, respecto al formalismo tradicional de diagramas de Feynman (p.e. no hay que regularizar; una sola integral representa todas las permutaciones de los diagramas). Después de la breve introducción acerca del desarrollo de las amplitudes de fotones se inicia el trabajo de la tesis, donde se calculan algunas de las amplitudes ya conocidas y también se exploran algunos aspectos nuevos de éstas.

En el segundo capítulo se dará una introducción al formalismo línea de mundo y se mostrará como se calculan las amplitudes haciendo uso de éste. En el tercer capítulo se usará el resultado del capítulo anterior para calcular amplitudes conocidas de 4 fotones on-shell sin masa, y también se calculará esta amplitud tomando polarizaciones arbitrarias. En el cuarto capítulo se tratará la amplitud de 4 fotones on-shell, pero en el caso másivo. En una parte se realiza la integración numérica, donde se emplea el programa MATHEMATICA 7.01; en la otra parte se calculan los términos subdominantes de la expansión para masa grande, los cuales no eran conocidos, tomando diferentes polarizaciones; al final de este capítulo se realiza una comparación entre estos dos resultados (la expansión en masa grande y el numérico). En el quinto capítulo se vuelve a calcular la expansión para masa grande de la amplitud de 4 fotones, pero con todos estos off-shell y se verá como se hace manifiesta la invariancia de calibración, este también es un resultado nuevo para esta desconocida amplitud. En el capítulo final de nuevo se realizará un análisis numérico para algunos casos de la amplitud de 6 fotones on-shell, siendo esta la primera vez que se realiza un cálculo numérico de una amplitud de este orden usando un programa como MATHEMATICA, en lugar de programas especializados como FORM, GOLEM (Binoth et~al., 2009), CUBA (Hahn, 2005), entre otros. Esto con el propósito de mostrar las ventajas del formalismo línea de mundo.

## Capítulo 2

### Amplitudes de Fotones en el Formalismo Línea de Mundo

El formalismo línea de mundo es también conocido como el *string – inspired* (inspirado en cuerdas) (para una revisión (Schubert, 2001)). En este marco se trabaja con la primera cuantización de una partícula en la línea de mundo. Los campos en este caso son en una dimensión, el escalar  $x^m(\tau)$  y el espinorial  $\psi^m(\tau)$ , con el tiempo propio de la partícula como parámetro.

En este capítulo se verá el mecanismo para el cálculo de las amplitudes de fotones en el formalismo línea de mundo. Se estudiarán los casos escalar y espinorial partiendo de sus respectivas acciones efectivas. Se podrá apreciar la notable diferencia con la teoría de campos tradicional en el marco de la segunda cuantización, aunque sólo hasta capítulos siguientes se verá realmente la fortaleza del formalismo al aplicarlo en casos particulares.

#### 2.1. Electrodinámica Escalar

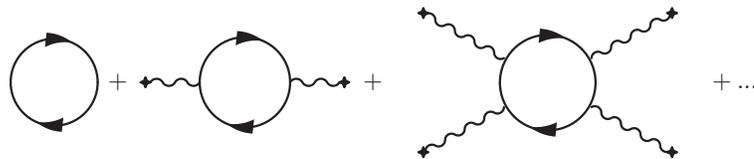
En este caso se tiene un campo escalar complejo masivo mínimamente acoplado a un campo de Maxwell de fondo. La acción efectiva para esta teoría es

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{scal}}[A] &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{-(\partial + ieA)^2 + m^2}{-\square + m^2} \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + ie\dot{x} \cdot A(x(\tau)))}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

En esta teoría 1-dimensional, se analiza a continuación el "potencial de interacción", a fin de realizar teoría de perturbaciones

$$\exp \left[ -\int_0^T d\tau ie\dot{x} \cdot A \right] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ie)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \dot{x}(\tau_i) \cdot A(x(\tau_i)). \quad (2.2)$$

Al reemplazar esta expresión en la acción efectiva, se puede visualizar diagramáticamente como una expansión a un lazo, y cada término corresponde a un número fijo de interacciones del campo escalar con el campo externo



Lo que sigue a continuación es tomar el campo de fondo como una superposición de ondas planas

$$A_a = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{ia} e^{ik_i \cdot x}. \quad (2.3)$$

Con esta especialización del campo de fondo se introduce el operador de vértice

$$V_{\text{scal}}^A[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau \varepsilon \cdot \dot{x} e^{ik \cdot x}. \quad (2.4)$$

Usando lo anterior, la parte de la interacción en  $\Gamma_{\text{scal}}[A]$  toma la forma de una contracción de los operadores de vértice

$$\langle V_{\text{scal},1}^A \cdots V_{\text{scal},N}^A \rangle, \quad (2.5)$$

donde estan involucradas contracciones de Wick de campos con exponenciales de la forma

$$\langle \dot{x}_1^{a_1} e^{ik_1 \cdot x_1} \cdots \dot{x}_N^{a_N} e^{ik_N \cdot x_N} \rangle. \quad (2.6)$$

El término a analizar ahora es la parte libre. Se puede ver que ésta tiene la forma de una Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^T \cdot M \cdot x}, \quad (2.7)$$

donde el papel de la matriz lo hace el operador segunda-derivada. Como es conocido, para llevar a cabo la evaluación de la integral, la matriz (operador) debe satisfacer ciertas condiciones (debe ser simétrica(o) y positiva(o)-definida(o)). Al realizar la suma sobre todas las  $x(\tau)$  se tienen algunas con valor propio cero, las funciones constantes, por lo cual deben ser removidas. Para remover estas funciones, la integral se restringe al espacio de todos los lazos fijando la posición del "centro de masa" del lazo

$$x_0^a \equiv \frac{1}{T} \int_0^T d\tau x^a(\tau). \quad (2.8)$$

Ahora se integra  $\int \mathcal{D}y$  sobre  $y(\tau) \equiv x(\tau) - x_0$ . El operador  $d^2/d\tau^2$  se encuentra definido en el espacio de Hilbert de funciones periódicas en el intervalo  $[0, T]$ , donde es invertible, y se puede calcular la función de Green correspondiente, emitiendo una constante irrelevante.

$$2\langle \tau_1 | \left( \frac{d}{d\tau} \right)^{-2} | \tau_2 \rangle = 2T \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(\tau_1 - \tau_2)/T}}{(2\pi i n)^2} = |\tau_1 - \tau_2| - \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{T}. \quad (2.9)$$

Para el cálculo de esta suma es útil la identidad de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n u} = \delta(u), \quad (2.10)$$

la cual aparecerá después de derivar dos veces. Retornando entonces, se tiene

$$G_B(\tau_1, \tau_2) = |\tau_1 - \tau_2| - \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{T}. \quad (2.11)$$

Esta función de Green es la utilizada como función de correlación del campo escalar en una dimensión,

$$\langle y^a(\tau_1) y^b(\tau_2) \rangle = -\eta^{ab} G_B(\tau_1, \tau_2) \quad (2.12)$$

con la métrica  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Como ya se tiene el operador en una base donde es positivo definido, ahora se calcula su determinante. El determinante de un operador  $\mathcal{O}$  se obtiene definiendo la función  $\zeta_{\mathcal{O}}$  de la siguiente manera

$$\zeta_{\mathcal{O}}(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-z} \quad (2.13)$$

donde los  $\lambda_n$  son los valores propios de  $\mathcal{O}$  y con un parámetro  $z \in \mathbb{C}$ . El determinante se obtiene con

$$\text{Det} \mathcal{O} \equiv \exp \left( -\frac{d}{dz} \zeta_{\mathcal{O}}(0) \right). \quad (2.14)$$

Para este operador

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T}, \quad (2.15)$$

y se usan algunos valores para la función  $\zeta$  de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (2.16)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y la relación para el determinante con la intergral Gaussiana, se puede calcular la integral libre

$$\int \mathcal{D}y \exp\left(-\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{y}^2\right) = (4\pi T)^{-D/2}. \quad (2.17)$$

Con los resultados anteriores ya se tiene una nueva forma para la acción efectiva

$$\Gamma_{\text{scal}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] = (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-D/2} \langle V_{\text{scal},1}^A \dots V_{\text{scal},N}^A \rangle. \quad (2.18)$$

A continuación lo que atañe es la contracción de los campos en la parte derecha de la expresión, aquí se tienen los campos con exponenciales. Para realizar las contracciones de Wick se suben al exponente los campos, así

$$\varepsilon_i \cdot \dot{x}_i e^{ik_i \cdot x_i} = e^{\varepsilon_i \cdot \dot{x}_i + ik_i \cdot x_i} \Big|_{\text{lin}(\varepsilon_i)}. \quad (2.19)$$

Al realizar las contracciones van a aparecer términos de la forma  $\langle y(\tau_i)y(\tau_j) \rangle$ ,  $\langle \dot{y}(\tau_i)y(\tau_j) \rangle$  y  $\langle \dot{y}(\tau_i)\dot{y}(\tau_j) \rangle$  los cuales se entienden como derivadas de  $G_B(\tau_i, \tau_j)$  respecto al argumento correspondiente.

Luego de realizar todas las contracciones se llega a la siguiente expresión para la acción efectiva, conocida como la fórmula maestra de Bern y Kosower (Bern and Kosower, 1992),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{scal}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] &= (-ie)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum k_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \\ &\times \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \exp\left[\sum_{i,j=1}^N \left(\frac{1}{2}G_{Bij}k_i \cdot k_j - i\dot{G}_{Bij}\varepsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2}\ddot{G}_{Bij}\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j\right)\right] \Bigg|_{\text{multi-lin}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La forma explícita para las derivadas de las funciones de Green es como sigue

$$\begin{aligned} \dot{G}_{B12} &\equiv \dot{G}_B(\tau_1, \tau_2) = \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) - 2\frac{(\tau_1 - \tau_2)}{T}, \\ \ddot{G}_{B12} &\equiv \ddot{G}_B(\tau_1, \tau_2) = 2\delta(\tau_1 - \tau_2) - \frac{2}{T}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde el punto se refiere a la derivada respecto al primer argumento.

Antes de ir al caso de la amplitud de 4 puntos se puede trabajar más en la fórmula para la acción efectiva. Esto es realizando el procedimiento de integración parcial simétrica (Schubert, 1998). La exponencial en la acción efectiva, tomando los términos multilineales, adquiere la forma

$$\exp[\ ]|_{\text{multi-lin}} = (-i)^N P_N(\dot{G}_{Bij}, \ddot{G}_{Bij}) \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_{Bij} k_i \cdot k_j \right], \quad (2.22)$$

aquí  $P_N$  es un polinomio multilineal en los  $N$   $\varepsilon_i$ 's. Mediante el proceso de Integración parcial simétrica la idea es remover las  $\ddot{G}_{Bij}$  de  $P_N$  realizando integración por partes respecto a las variables  $\tau_1, \dots, \tau_N$  de forma adecuada. Lo que se obtiene luego de este procedimiento es un polinomio  $Q_N$  el cual sólo depende de las  $\dot{G}_{Bij}$

$$P_N(\dot{G}_{Bij}, \ddot{G}_{Bij}) e^{\frac{1}{2} \sum G_{Bij} k_i \cdot k_j} \xrightarrow{\text{int. parc.}} Q_N(\dot{G}_{Bij}) e^{\frac{1}{2} \sum G_{Bij} k_i \cdot k_j}. \quad (2.23)$$

En el polinomio  $P_N$  aparecen los invariantes cinéticos  $(\varepsilon \cdot \varepsilon, \varepsilon \cdot k)$ . Después de la integración parcial los invariantes cinéticos se van a combinar dando forma a los "ciclos de Lorentz"  $Z_n$

$$\begin{aligned} Z_2(ij) &\equiv \varepsilon_i \cdot k_j \varepsilon_j \cdot k_i - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j k_i \cdot k_j, \\ Z_n(i_1 i_2 \dots i_n) &\equiv \text{tr} \prod_{j=1}^n [k_{i_j} \otimes \varepsilon_{i_j} - \varepsilon_{i_j} \otimes k_{i_j}] \quad (n \geq 3). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Otra estructura que se forma debido al proceso son los llamados " $\tau$ -ciclos", que son productos de  $\dot{G}_{Bij}$ 's en los cuales los índices forman una cadena cerrada,

$$\dot{G}_{Bi_1 i_2} \dot{G}_{Bi_2 i_3} \dots \dot{G}_{Bi_n i_1}. \quad (2.25)$$

Para mostrar algunos ejemplos de cómo funciona el formalismo primero se trabaja la amplitud con  $N = 2$ , la polarización del vacío en QED escalar; el polinomio en este caso es de la forma

$$P_2 = \dot{G}_{B12} \varepsilon_1 \cdot k_2 \dot{G}_{B21} \varepsilon_2 \cdot k_1 - \ddot{G}_{B12} \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2. \quad (2.26)$$

Integrando por partes el segundo término, en presencia de la exponencial, puede ser respecto a  $\tau_1$  o  $\tau_2$ , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} Q_2 &= (\varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 k_1 \cdot k_2) \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} \\ &= Z_2(12) \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Otro caso para mostrar como ejemplo es el de tres puntos, donde se tiene

$$\begin{aligned}
P_3 &= \dot{G}_{B1i}\varepsilon_1 \cdot k_i \dot{G}_{B2j}\varepsilon_2 \cdot k_j \dot{G}_{B3k}\varepsilon_3 \cdot k_k \\
&\quad - [\ddot{G}_{B12}\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \dot{G}_{B3i}\varepsilon_3 \cdot k_i + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2)].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Despues de realizar el proceso de integrar las  $\ddot{G}_{Bij}$ 's se obtiene

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \dot{G}_{B1i}\varepsilon_1 \cdot k_i \dot{G}_{B2j}\varepsilon_2 \cdot k_j \dot{G}_{B3k}\varepsilon_3 \cdot k_k \\
&\quad + \frac{1}{2} [\dot{G}_{B12}\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 (\dot{G}_{B3i}\varepsilon_3 \cdot k_i (\dot{G}_{B1j}k_1 \cdot k_j - \dot{G}_{B2j}k_2 \cdot k_j) \\
&\quad + (\dot{G}_{B31}\varepsilon_3 \cdot k_1 - \dot{G}_{B32}\varepsilon_3 \cdot k_2) \dot{G}_{B3j}\varepsilon_3 \cdot k_j) + 2 \text{ permutaciones}].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

El resultado anterior se puede escribir de manera mas compacta como:

$$\begin{aligned}
Q_3 &= Q_3^3 + Q_3^2, \\
Q_3^3 &= Z_3(123)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B31}, \\
Q_3^2 &= Z_2(12)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B21}\dot{G}_{B3i}\varepsilon_3 \cdot k_i + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

El índice superior en los componentes de  $Q_3$  indica el “ $\tau$ -ciclo” contenido en esa expresión, éstos siempre van acompañados por un “ciclo de Lorentz”.

Sólo hasta este punto se tiene una forma final para  $Q_N$  independientemente del camino que se siga para la integración por partes. En los casos siguientes, esto no se cumple. Siguiendo (Schubert, 1998) se adquiere una forma para la amplitud de 4 puntos invariante de permutaciones

$$\begin{aligned}
Q_4 &= Q_4^4 + Q_4^3 + Q_4^2 + Q_4^{22} \\
Q_4^4 &= Z_4(1234)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34}\dot{G}_{B41} + 2 \text{ permutaciones}, \\
Q_4^3 &= Z_3(123)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B31}\dot{G}_{B4i}\varepsilon_4 \cdot k_i + 3 \text{ permutaciones}, \\
Q_4^2 &= Z_2(12)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B21} \left[ \lambda_{ij34}\dot{G}_{B3j}\varepsilon_3 \cdot k_j \dot{G}_{B4i}\varepsilon_4 \cdot k_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\dot{G}_{B34}\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \left( \kappa_{i4}\dot{G}_{B3i}k_3 \cdot k_i - \kappa_{i3}\dot{G}_{B4i}k_4 \cdot k_i \right) \right] + 5 \text{ permutaciones}, \\
Q_4^{22} &= Z_2(12)\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B21}Z_2(34)\dot{G}_{B34}\dot{G}_{B43} + 2 \text{ permutaciones}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

donde se han introducido los símbolos  $\kappa_{ij}$  y  $\lambda_{ijkl}$ , los cuales cumplen

$$\kappa_{ai} = \begin{cases} 0, & a = i \\ 1, & a \neq i \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\lambda_{abij} = \begin{cases} 0, & a = i, b = j \\ 1, & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (2.33)$$

Éstos se incorporaron a fin de no tener cadenas cerradas fuera de los “ $\tau$ -ciclos”. Las estructuras en las cuales se tienen productos de funciones de Green donde sus índices no forman una cadena cerrada son llamadas “ $m$ -colas”. Para esta amplitud se tienen una 1-cola y una 2-cola

$$\begin{aligned} T_1(j) &= \dot{G}_{Bji}\varepsilon_j \cdot k_i, \\ T_2(lm) &= \left[ \lambda_{ijlm}\dot{G}_{Blj}\varepsilon_l \cdot k_j \dot{G}_{Bmi}\varepsilon_m \cdot k_i + \frac{1}{2}\dot{G}_{Blm}\varepsilon_l \cdot \varepsilon_m \left( \kappa_{im}\dot{G}_{Bli}k_l \cdot k_i - \kappa_{il}\dot{G}_{Bmi}k_m \cdot k_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente la forma compacta para la amplitud de 4 fotones a nivel de un lazo en QED escalar, sin  $\ddot{G}_{Bij}$ 's, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{scal}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_4, \varepsilon_4] &= \frac{e^4}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty \frac{dT}{T} T^{4-(D/2)} e^{-m^2 T} \\ &\times \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 Q_4(\dot{G}_{Bij}) \exp \left[ \frac{T}{2} \sum_{i,j=1}^4 G_{Bij} k_i \cdot k_j \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde no se ha puesto la función delta de la conservación del momentum, que sale de la integración de  $x_0$ . En la expresión anterior se ha realizado un reescalamiento al círculo unitario, de la forma  $\tau_i = Tu_i$ ,  $\dot{G}_{Bij} = \text{Sign}(u_i - u_j) - 2(u_i - u_j)$ . Al realizar la integración de los  $u_i$ 's entre 0 y 1 se están tomando en cuenta todos los cruces de patas que se puedan presentar en la amplitud, por tanto en esta expresión se tiene la contribución de todos los diagramas de Feynman de una vez.

## 2.2. Electrodinámica Espinorial

En la sección anterior se realizó el cálculo de la amplitud para el caso escalar con el mayor detalle posible. El mecanismo funciona de manera muy análoga para el caso espinorial, por tanto en esta sección no se discutirán mucho los detalles de calculo. La acción efectiva para el caso espinorial es de la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{spin}}[A] &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_P \mathcal{D}x \int_A \mathcal{D}\psi \\ &\times \exp \left[ - \int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} + ieA \cdot \dot{x} - ie\psi \cdot F \cdot \psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ahora en la suma también se incluyen funciones Grassmannianas antiperiodicas  $\psi^a(\tau)$ , las cuales hacen el papel de campos espinoriales en una dimensión.

Analizando la parte libre de los  $\psi$ 's en la integral se pueden calcular las funciones de correlación. En este caso no se tiene modo cero, debido a la antiperiodicidad. Así, para las funciones de Green se tiene

$$2 \langle \tau_1 | \left( \frac{d}{d\tau} \right)^{-1} | \tau_2 \rangle = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n+1/2)(\tau_1-\tau_2)/T}}{2\pi i(n+1/2)} = \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \equiv G_F(\tau_1, \tau_2), \quad (2.37)$$

las cuales juegan el mismo papel como en el caso escalar

$$\langle \psi^a(\tau_1) \psi^b(\tau_2) \rangle = \frac{1}{2} \eta^{ab} G_F(\tau_1, \tau_2). \quad (2.38)$$

La integral total del término libre también se calcula con el determinante de  $d/d\tau$ . De esta manera,

$$\int \mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int_0^T d\tau \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} \right] = 4. \quad (2.39)$$

De nuevo se realiza el mismo trabajo de especializar el campo de fondo como superposición de ondas planas. Para el término de interacción, se realiza la misma expansión como en el caso anterior, pero esta vez se tiene un operador de vértice de la forma

$$V_{\text{spin}}^A[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau [\varepsilon \cdot \dot{x} + 2i\varepsilon \cdot \psi k \cdot \psi] e^{ik \cdot x}. \quad (2.40)$$

Juntando todos los ingredientes anteriores, como se hizo en el caso escalar, se tiene la siguiente forma para la acción efectiva

$$\Gamma_{\text{spin}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] = -2(-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-D/2} \langle V_{\text{spin},1}^A \dots V_{\text{spin},N}^A \rangle. \quad (2.41)$$

Antes de obtener la expresión para la amplitud de 4 fotones en QED debe discutirse otro aspecto que se hace manifiesto en el formalismo línea de mundo, lo cual se discutirá en la siguiente sección.

### 2.3. Supersimetría en la Línea de Mundo

En esta sección se mostrará cómo el Lagrangiano de QED en el formalismo línea de mundo tiene supersimetría global. A fin de realizar este análisis de manera adecuada se introducirá el formalismo de supercampos en una dimensión. Se analiza de nuevo el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\dot{x}_a\dot{x}^a + \frac{1}{2}\psi_a \cdot \dot{\psi}^a + ie\dot{x}_a A^a - ie\psi^a F_{ab}\psi^b. \quad (2.42)$$

Introduciendo los supercampos

$$\begin{aligned} X^a &= x^a + \sqrt{2}\theta\psi^a, \\ Y^a &= X^a - x_0^a, \end{aligned} \quad (2.43)$$

con  $x_0$  como el “centro de masa” del lazo para la parte escalar, y la superderivada

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta \frac{d}{d\tau}, \quad (2.44)$$

donde aparece la variable de Grassmann  $\theta$ , para la cual se toma la integración en el sentido de Berezin

$$\int d\theta\theta = 1. \quad (2.45)$$

En este formalismo, para la acción efectiva se tiene una superintegral de camino (Polyakov, 1987) de la siguiente forma compacta

$$\Gamma_{\text{spin}}[A] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int \mathcal{D}X \exp \left[ - \int_0^T d\tau \int d\theta \left( -\frac{1}{4} X \cdot D^3 X - ie DX \cdot A(X) \right) \right]. \quad (2.46)$$

El Lagrangiano que se encuentra en la exponencial

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} X \cdot D^3 X - ie DX \cdot A(X), \quad (2.47)$$

es invariante localmente bajo las siguientes transformaciones de supersimetría globales, “supersimetría en la línea de mundo”, con un parámetro  $\eta$  de Grassmann

$$\begin{aligned}
\delta x^a &= -2\eta\psi^a \\
\delta\psi^a &= \eta x^a.
\end{aligned}
\tag{2.48}$$

Con las condiciones de frontera establecidas, en la acción esta supersimetría se rompe debido a las condiciones de anti-periodicidad de los  $\psi$ 's.

Los operadores de vértice en el formalismo de supercampos toman ahora la siguiente forma

$$V_{\text{spin}}^A[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau \int d\theta \varepsilon \cdot DX \exp[ik \cdot X]. \tag{2.49}$$

Para estar de acuerdo con el resultado anterior para  $V_{\text{spin}}^A$  se introducen vectores de polarización  $\varepsilon$  Grassmannianos también.

La función de correlación entre dos supercampos combina la parte escalar y espinorial

$$\langle Y^a(\tau_1, \theta_1) Y^b(\tau_2, \theta_2) \rangle = -\eta^{ab} \hat{G}(\tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) \tag{2.50}$$

donde la función de Green (superpropagador) es de la forma

$$\hat{G}(\tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) \equiv G_B(\tau_1, \tau_2) + \theta_1 \theta_2 G_F(\tau_1, \tau_2). \tag{2.51}$$

La fórmula para la amplitud para  $N$  fotones se puede obtener de forma análoga al caso escalar

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{spin}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] &= -2(-ie)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum k_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \\
&\times \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \int d\theta_i \exp \left[ \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{1}{2} \hat{G}_{ij} k_i \cdot k_j + i D_i \hat{G}_{ij} \varepsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} D_i D_j \hat{G}_{ij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right) \right] \Bigg|_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}.
\end{aligned}
\tag{2.52}$$

Realizando el mismo desarrollo de la exponencial en términos multilineales en  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N$  se obtiene un resultado análogo al caso escalar, con el mismo  $P_N$  se tiene

$$(-i)^N P_N(-D_i \hat{G}_{ij}, D_i D_j \hat{G}_{ij}) \exp \left[ \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} \hat{G}_{ij} k_i \cdot k_j \right]. \tag{2.53}$$

La idea ahora es realizar la integración por partes para deshacerse de las segundas superderivadas. En este punto se tienen superciclos y supercolas, donde los  $d/d\tau_i$ 's son reemplazados por

$D_i$ 's. Pero, existe una diferencia y es que para este caso  $D_i\hat{G}_{ij} \neq -D_j\hat{G}_{ij}$ . Esto lleva a cambios en algunas estructuras. Por ejemplo, la 2-cola para el caso supersimétrico adquiere la forma

$$\hat{T}_2(lm) = D_l\hat{G}_{li}\varepsilon_l \cdot k_i D_m\hat{G}_{mj}\varepsilon_m \cdot k_j + \frac{1}{2}[D_l\hat{G}_{lm}\varepsilon_l \cdot \varepsilon_m D_m\hat{G}_{mj}k_m \cdot k_j + (l \leftrightarrow m)]. \quad (2.54)$$

Recordando que el desarrollo de la exponencial es multilíneal en  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N$ , y que en la fórmula para la amplitud cada  $\varepsilon_i$  viene acompañado por un  $D_i$ , se ve entonces que estos últimos aparecen exactamente una sola vez en  $P_N$ , luego de la integración por partes. Analizando la forma explícita de las superderivadas

$$D_i\hat{G}_{ij} = -\theta_i\dot{G}_{Bij} + \theta_j G_{Fij}, \quad (2.55)$$

se puede ver que el  $\theta_i$  que acompaña a un  $\dot{G}_{Bij}$  en la cola no es de los mismos que aparecen en los ciclos. Por tanto, éste sobrevive. Pero los  $\theta_j$  que acompañan a  $G_{Fij}$  ya están en los ciclos, por lo que no sobreviven. La única forma de que aparecieran  $G_{Fij}$ 's en las colas sería si se formaran ciclos, pero éstos ya se vió anteriormente que no aparecen en las colas. De esta forma las  $G_{Fij}$ 's sólo pueden aparecer en los ciclos.

Antes de mostrar la forma como cambian los ciclos para la parte espinorial se puede ilustrar lo anterior con un ejemplo. Para el primer término de la 2-cola  $\hat{T}_2(34)$  se tiene

$$D_3\hat{G}_{3j}D_4\hat{G}_{4j} = (\theta_3\dot{G}_{B3i} - \theta_i G_{F3i})(\theta_4\dot{G}_{B4j} - \theta_j G_{F4j}). \quad (2.56)$$

Los índices  $i, j$  corren de 1 a 4, pero no debe aparecer  $i = 3, j = 4$  juntos, que sería la única forma de que algún  $G_{Fij}$  apareciera en la cola. Los demás se cancelan todos, ya que los  $\theta$ 's que los acompañan están en el ciclo.

Así las  $G_{Fij}$ 's que aparecen en la amplitud espinorial vienen de los superciclos

$$\int d\theta_{i_1} \dots d\theta_{i_n} D_{i_1}\hat{G}_{i_1 i_2} D_{i_2}\hat{G}_{i_2 i_3} \dots D_{i_n}\hat{G}_{i_n i_1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\dot{G}_{B i_1 i_2} \dot{G}_{B i_2 i_3} \dots \dot{G}_{B i_n i_1} - G_{F i_1 i_2} G_{F i_2 i_3} \dots G_{F i_n i_1}). \quad (2.57)$$

Finalmente, la amplitud para  $N$  fotones en QED espinorial tiene exactamente la misma estructura que para el caso escalar, recordando el caso de  $N=4$

$$\begin{aligned} Q_4 &= \dot{G}(1234) + 2 \text{ permutaciones} \\ &\quad + \dot{G}(123)T_1(4) + 3 \text{ permutaciones} \\ &\quad + \dot{G}(12)T_2(34) + 5 \text{ permutaciones} \\ &\quad + \dot{G}(12)\dot{G}(34) + 2 \text{ permutaciones} \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde  $\dot{G}(ij\dots)$  representa a los  $\tau$ -ciclos acompañados por sus respectivos ciclos de Lorentz

A parte de un  $-2$  global, el cambio en la estructura es sólo en los ciclos, los cuales al pasar de escalar a espinorial cambian de la siguiente manera

$$\dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} \longrightarrow \dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} - G_{Fi_1i_2}G_{Fi_2i_3}\cdots G_{Fi_ni_1}. \quad (2.59)$$

Lo cual es un resultado notable del formalismo línea de mundo, muy diferente a la teoría de campos convencional. Este remplazo de los ciclos también se puede realizar siguiendo las reglas de Bern y Kosower para el caso de escalar a espinorial<sup>1</sup> (Bern and Kosower, 1992), las cuales no se discutieron aquí.

Ya se tiene entonces la expresión para calcular la amplitud de 4 fotones en QED escalar y espinorial. Lo que sigue en capítulos posteriores es el uso de esta expresión para calcular diferentes casos particulares para dicha amplitud, y aún más visualizar nuevos aspectos de esta.

---

<sup>1</sup>Mas aún tienen un conjunto de reglas para pasar de escalar a vectorial.

## Capítulo 3

### Amplitud de 4 Fotones On-Shell con $m = 0$

En este capítulo se usará la expresión para  $Q_4$  encontrada en el capítulo anterior a fin de calcular amplitudes de 4 fotones on-shell sin masa en el caso escalar y espinorial, resultados que ya son muy conocidos (Binon et al., 2002; Bernicot, 2008). Para las amplitudes se tendrán en cuenta las polarizaciones usuales  $A(++++)$ ,  $A(-+++)$  y  $A(--++)$ . La eficiente técnica spinor-helicity (ver Apéndice A) será utilizada a fin de obtener considerables simplificaciones en los ciclos y en las colas, para así tener que calcular la menor cantidad de términos posibles en cada amplitud. En la parte final se realizarán los cálculos para polarizaciones arbitrarias, los cuales no se habían realizado hasta el momento. Para calcular las integrales de este capítulo se emplea la técnica discutida en el apéndice E de (Schubert, 2001). Las variables de Mandelstam utilizadas en este trabajo para 4 puntos tienen la forma<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2, \\ t &= (k_2 + k_3)^2, \\ u &= (k_1 + k_3)^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

y cumplen

$$s + t + u = 0. \tag{3.2}$$

#### 3.1. Caso Escalar

Tomando primero el caso más simple  $A(-+++)$ . Aplicando spinor-helicity se fijan los momenta de referencia  $(k_4, k_1, k_1, k_1)$  para los correspondientes vectores de polarización, lo que lleva a lo siguiente

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 4. \tag{3.3}$$

También, para los otros productos se tiene:

---

<sup>1</sup>Otras convenciones muy utilizadas para variables de Mandelstam son tomando el negativo de las que se usan aquí.

$$\begin{aligned}
k_4 \cdot \varepsilon_1 &= k_1 \cdot \varepsilon_2 = k_1 \cdot \varepsilon_3 = k_1 \cdot \varepsilon_4 = 0 \\
k_3 \cdot \varepsilon_1 &= -k_2 \cdot \varepsilon_1, \quad k_4 \cdot \varepsilon_2 = -k_3 \cdot \varepsilon_2, \quad k_4 \cdot \varepsilon_3 = -k_2 \cdot \varepsilon_3, \quad k_3 \cdot \varepsilon_4 = -k_2 \cdot \varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Con las reglas anteriores, el integrante adquiere la forma más simple posible para una amplitud de 4 fotones

$$Q_4 = \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 \varepsilon_3 \cdot k_4 \varepsilon_4 \cdot k_3 (\dot{G}_{B12} - \dot{G}_{B13})(\dot{G}_{B23} - \dot{G}_{B24})(\dot{G}_{B24} - \dot{G}_{B34})(\dot{G}_{B23} + \dot{G}_{B34}). \tag{3.5}$$

La integral es ahora mucho más fácilmente realizable, y para esta amplitud se obtiene el resultado esperado

$$A_{scal}(-+++) = \frac{16}{su} \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 \varepsilon_3 \cdot k_4 \varepsilon_4 \cdot k_3. \tag{3.6}$$

El caso que sigue  $A(- - ++)$  es un poco menos trivial. Los momenta de referencia se fijan  $(k_4, k_4, k_1, k_1)$ , lo cual lleva a menos cancelaciones

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_4 = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4 = \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 = 0, \\
\varepsilon_1 \cdot k_4 &= \varepsilon_2 \cdot k_4 = \varepsilon_3 \cdot k_1 = \varepsilon_4 \cdot k_1 = 0, \\
\varepsilon_1 \cdot k_3 &= -\varepsilon_1 \cdot k_2, \quad \varepsilon_2 \cdot k_1 = -\varepsilon_2 \cdot k_3, \quad \varepsilon_3 \cdot k_4 = -\varepsilon_3 \cdot k_2, \quad \varepsilon_4 \cdot k_2 = -\varepsilon_4 \cdot k_3, \\
\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_2 \cdot k_3 \varepsilon_3 \cdot k_2}{k_2 \cdot k_3}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Con las condiciones anteriores se obtiene una cancelación de todos los 3-ciclos. Los otros terminos contribuirán en  $Q_4$ , quedando de la forma

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 \varepsilon_3 \cdot k_2 \varepsilon_4 \cdot k_2 ((\dot{G}_{B13} \dot{G}_{B14} - \dot{G}_{B12}^2) \dot{G}_{B23} \dot{G}_{B24} \\
&\quad + \dot{G}_{B12} ((\dot{G}_{B12} - \dot{G}_{B14}) \dot{G}_{B23} + (\dot{G}_{B13} - \dot{G}_{B12}) \dot{G}_{B24}) \dot{G}_{B34} \\
&\quad + (\dot{G}_{B12} - \dot{G}_{B13})(\dot{G}_{B12} + \dot{G}_{B23}) \dot{G}_{B34}^2).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Se realiza la integral anterior y se obtiene

$$A_{scal}(- - ++)= \frac{16}{s^2} \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 \varepsilon_3 \cdot k_2 \varepsilon_4 \cdot k_2 \left[ 1 - \frac{tu}{s^2} \pi^2 + \frac{u-t}{s} \ln \left( \frac{u}{t} \right) - \frac{tu}{s^2} \ln^2 \left( \frac{u}{t} \right) \right]. \tag{3.9}$$

La amplitud  $A(++++)$ , aunque se nombró anteriormente de primera entre las tres, es la que tiene las relaciones menos triviales entre los  $\varepsilon$ 's y los  $k$ 's. Se toman como momenta de referencia  $(k_4, k_1, k_1, k_1)$  como en  $A(-+++)$  pero se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 &= \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4 = \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 = 0, \\
\varepsilon_2 \cdot k_1 &= \varepsilon_3 \cdot k_1 = \varepsilon_4 \cdot k_1 = \varepsilon_1 \cdot k_4 = 0, \\
\varepsilon_2 \cdot k_3 &= -\varepsilon_2 \cdot k_4, \quad \varepsilon_3 \cdot k_2 = -\varepsilon_3 \cdot k_4, \quad \varepsilon_4 \cdot k_2 = -\varepsilon_4 \cdot k_3, \quad \varepsilon_1 \cdot k_2 = -\varepsilon_1 \cdot k_3, \\
\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_4}{k_2 \cdot k_4}, \\
\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_3 \cdot k_4}{k_3 \cdot k_4}, \\
\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_4 &= -\frac{k_1 \cdot k_4 \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_4 \cdot k_2}{k_2 \cdot k_4 k_1 \cdot k_2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Los productos  $k_i \cdot k_j$  se pueden convertir a variables de Mandelstam y luego realizar algunas simplificaciones con éstas, pero aún así la expresión no obtiene una forma simple y compacta como las anteriores. Como la expresión resultante es tan grande, es mejor escribir los aportes de cada una de las partes de  $Q_4$  por separado, a fin de una mejor visualización

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \frac{1}{2su} \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 \varepsilon_3 \cdot k_4 \varepsilon_4 \cdot k_3 (Q_4^4 + Q_4^3 + Q_4^2 + Q_4^{22}), \\
Q_4^4 &= -4(tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} - st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34}), \\
Q_4^3 &= 4(-su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} - st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} \\
&\quad + tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} - st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} - tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} \\
&\quad + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} - su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34}), \\
Q_4^2 &= st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}^2 + tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}^2 - 2s^2\dot{G}_{B12}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} - 2u^2\dot{G}_{B13}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} \\
&\quad - 2t^2\dot{G}_{B14}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24} + 2su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B24} - 2su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B24} + tu\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B24} \\
&\quad + tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B24}^2 - 2su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24}^2 + 2su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24}^2 + tu\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B24}^2 \\
&\quad + 2s^2\dot{G}_{B12}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} + 2u^2\dot{G}_{B13}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} + 2t^2\dot{G}_{B14}^2\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34} - 2su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B34} \\
&\quad + 2su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B34} + st\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B23}^2\dot{G}_{B34} - 2s^2\dot{G}_{B12}^2\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} - 2u^2\dot{G}_{B13}^2\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} \\
&\quad - 2t^2\dot{G}_{B14}^2\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34} - 2su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B24}^2\dot{G}_{B34} + su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B24}^2\dot{G}_{B34} + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B34}^2 \\
&\quad + st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B14}\dot{G}_{B34}^2 - st\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34}^2 - 2su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34}^2 + 2su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34}^2 \\
&\quad + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34}^2 - 2su\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B34}^2 + su\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B13}\dot{G}_{B24}^2, \\
Q_4^{22} &= 2(t^2\dot{G}_{B14}^2\dot{G}_{B23}^2 + u^2\dot{G}_{B13}^2\dot{G}_{B24}^2 + s^2\dot{G}_{B12}^2\dot{G}_{B34}^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Aunque para esta amplitud se tienen tantos términos por integrar, el resultado es muy simple

$$A_{scal}(++++) = -\frac{16}{su}\varepsilon_1 \cdot k_3\varepsilon_2 \cdot k_4\varepsilon_3 \cdot k_4\varepsilon_4 \cdot k_3. \quad (3.12)$$

Así para el caso de QED escalar las tres amplitudes que se obtuvieron están de acuerdo con las obtenidas con el método tradicional con integrales de Feynman

### 3.2. Caso Espinorial

El poder del formalismo línea de mundo se hace más evidente en el paso del caso escalar al espinorial. No es un cambio nada radical el que se presenta en las integrales. Como se mencionó anteriormente el cambio sólo se da en los ciclos de derivadas de funciones de Green,

$$\dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} \longrightarrow \dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} - G_{Fi_1i_2}G_{Fi_2i_3}\cdots G_{Fi_ni_1}.$$

Después de realizar el respectivo cambio en los ciclos para cada una de las expresiones de  $Q_4$  anteriores, los resultados para cada una de las amplitudes que se obtienen en QED espinorial son de la forma

$$A_{spin}(++++) = -2A_{scal}(++++) \quad (3.13)$$

$$A_{spin}(-++++) = -2A_{scal}(-++++) \quad (3.14)$$

$$A_{spin}(- - ++ ) = -\frac{32}{s^2}\varepsilon_1 \cdot k_2\varepsilon_2 \cdot k_1\varepsilon_3 \cdot k_2\varepsilon_4 \cdot k_2 \left[ 1 + \frac{t^2 + u^2}{2s^2}\pi^2 + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) + \frac{t^2 + u^2}{2s^2} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) \right]. \quad (3.15)$$

### 3.3. Acercamiento General

Para la amplitud de 4 fotones, en general sin tomar polarizaciones ni momenta de referencia,  $Q_4$  tiene 66 términos. Se desea realizar este cálculo, pero no tiene sentido nada práctico realizar las 66 integrales. Buscando un resultado general en las polarizaciones para la amplitud, en el desarrollo de este trabajo se encontraron ciertas simetrías de permutacion en los terminos de  $Q_4$  con el denominador, que permiten igualar unos términos con otros. Tam bien se usó otro hecho conocido y es que permutando índices en los términos individuales de  $Q_4$  se pueden obtener unos a partir de otros. Como se verá en esta sección, el notable resultado es que para generar los 66 términos sólo se necesitan realizar 7 integrales.

La igualdad entre algunos términos se puede ver analizando la estructura en el exponente de la expresión para la amplitud, escrito con variables de Mandelstam

$$\sum_{i<j=1}^4 G_{Bij}k_i \cdot k_j = \frac{1}{2}(G_{B12}s + G_{B13}u + G_{B14}t + G_{B23}t + G_{B24}u + G_{B34}s), \quad (3.16)$$

es invariante bajo intercambios de dos índices a la vez (e.g.  $(1 \leftrightarrow 2)$ ,  $(3 \leftrightarrow 4)$ ;...). Esta simetría se transmite también al término que multiplica a la exponente mediante un cambio de variables en la integral. Así algunos términos no necesitan integrarse por tener el mismo resultado. En el caso de la 2-cola esta simetría será de gran ayuda.

El otro aspecto es que permutando índices se puede llegar de un término a otro. Por ejemplo en el caso de un 4-ciclo

$$\dot{G}_{B12}\dot{G}_{B23}\dot{G}_{B34}\dot{G}_{B41} \xrightarrow{2 \leftrightarrow 3} \dot{G}_{B13}\dot{G}_{B32}\dot{G}_{B24}\dot{G}_{B41}. \quad (3.17)$$

Las permutaciones de los índices se transmiten a intercambios entre las variables de Mandelstam en el resultado final.

De esta forma calculando sólo 7 integrales se generan todos los términos de la amplitud, como se verá a continuación:

Se define la integral para la amplitud

$$I_4^m \equiv \Gamma(4 - \frac{D}{2}) \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 \frac{Q_4^m(\dot{G}_{Bij})}{\left[ \sum_{i < j=1}^4 G_{Bij} k_i \cdot k_j \right]^{4 - \frac{D}{2}}}. \quad (3.18)$$

A continuación se muestran los resultados para cada parte de esta amplitud. Introduciendo algunas abreviaciones

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv s^n + t^n + u^n, \\ r_\Gamma &\equiv \frac{\Gamma(1 - \epsilon/2)\Gamma^2(1 + \epsilon/2)}{\Gamma(1 + \epsilon)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para la primera parte de la amplitud se tiene el siguiente resultado:

$$I_4^4 = Z_4(1234)r_{41}^4 + Z_4(1324)r_{42}^4 + Z_4(1243)r_{43}^4 \quad (3.20)$$

donde, en el caso escalar,

$$r_{41}^4 = G_4^4 l_1 \quad (3.21)$$

con

$$\begin{aligned} G_4^4 &= r_\Gamma \left( 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 \left( \frac{19}{12} + \frac{st}{4u^2} \right) \right)^{-1} \\ &\times \left( 1 + \epsilon^2 \pi^2 \frac{4s^8 + 23s^7t + 55s^6t^2 + 73s^5t^3 + 62s^4t^4 + 73s^3t^5 + 55s^2t^6 + 23st^7 + 4t^8}{48s^2t^2u^4} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$\begin{aligned}
l_1 = & -\frac{64}{\epsilon^2 st} + \frac{8}{\epsilon stu} (t(2 \ln s + \ln t + \ln u) + s(\ln s + 2 \ln t + \ln u)) \\
& + \frac{2}{3s^3 t^3 u^4} \left[ s^2 t^2 (3s^4 + 4s^3 t - 22s^2 t^2 + 4st^3 + 3t^4) \ln^2 \left( \frac{s}{t} \right) \right. \\
& - u^3 \left( s^2 (8s^3 + 22s^2 t + 14st^2 + 3t^3) \ln^2 \left( \frac{s}{u} \right) + t^2 (8t^3 + 22t^2 s + 14ts^2 + 3s^3) \ln^2 \left( \frac{t}{u} \right) \right) \\
& + stu \left( s(48s^4 + 120s^3 u + 80s^2 u^2 - 24u^4 - 3stu^2 (\ln s + \ln t)) \ln \left( \frac{s}{t} \right) \right. \\
& \left. \left. + 16u^5 \ln \left( \frac{t}{u} \right) - 3stu^3 (2 \ln^2 s + \ln^2 t + \ln^2 u) \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

los otros términos se obtienen con

$$\begin{aligned}
r_{42}^4 &= r_{41}^4 (s \leftrightarrow u) \\
r_{43}^4 &= r_{41}^4 (t \leftrightarrow u).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Para el caso espinorial no es necesario el factor global  $G_4^4$ , ya que es mas simple

$$\begin{aligned}
r_{41}^4 = & \frac{128}{st\epsilon} - \frac{4}{3s^3 t^3 u^4} \left[ 4s^3 t^3 (s^2 + 5st + t^2) \ln^2 \left( \frac{s}{t} \right) + t^3 u^4 (3t + 7u) \ln^2 \left( \frac{t}{u} \right) \right. \\
& + 4stu \left( s(2s^4 + 4s^3 t + 2s^2 t^2 + 9st^3 + 3t^4) \ln \left( \frac{s}{u} \right) + t(3s^4 + 9s^3 t + 2s^2 t^2 + 4st^3 + 2t^4) \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right) \\
& + 4s^2 t^2 u^2 (29s^2 - 6u^2 (\ln s + \ln t) + 55st + 29t^2) + s^3 u^4 (3s + 7u) \ln^2 \left( \frac{s}{u} \right) \\
& \left. - \pi^2 (4s^8 + 23s^7 t + 52s^6 t^2 + 61s^5 t^3 + 44s^4 t^4 + 61s^3 t^5 + 52s^2 t^6 + 23st^7 + 4t^8) \right], \\
r_{42}^4 &= r_{41}^4 (s \leftrightarrow u), \\
r_{43}^4 &= r_{41}^4 (t \leftrightarrow u).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Resultado para la segunda parte de la amplitud:

$$I_3^3 = \frac{G_4^3}{stu} [Z_3(123)R_1(4) + Z_3(124)R_1(3) + Z_3(143)R_1(2) + Z_3(423)R_1(1)] \tag{3.26}$$

donde, para el caso escalar,

$$G_4^3 = r_\Gamma \left(1 + 2\epsilon + \frac{5\epsilon^2}{3}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\pi^2}{24}\epsilon^2 \left(3 + \frac{3\sigma_2^3 - 8\sigma_3^2}{6s^2t^2u^2}\right)\right)^{-1} \quad (3.27)$$

aquí

$$R_1(4) = \sum_{i=1}^3 r_{4i\epsilon_4} \cdot k_i, \quad (3.28)$$

los otros  $R_1(i)$ 's se obtienen cambiando el índice de  $\epsilon$  y con la respectiva permutación, el otro término es como sigue

$$\begin{aligned} r_{41} &= \frac{16(s-u)}{\epsilon^2} + \frac{8(s \ln u - u \ln s)}{\epsilon} + 2(s \ln^2 u - u \ln^2 s) \\ &\quad + \frac{8}{3stu} \left( s^3(s-t) \ln\left(\frac{s}{t}\right) + u^3(u-t) \ln\left(\frac{t}{u}\right) + 3s^2u^2 \ln\left(\frac{s}{u}\right) \right) \\ &\quad + \frac{2s(3s+t)}{3u^2} (t-s) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + \frac{2u(3u+t)}{3s^2} (u-t) \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) + \frac{8su}{3t^2} (s-u) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right), \\ r_{42} &= -r_{41}(t \leftrightarrow u), \\ r_{43} &= -r_{41}(s \leftrightarrow t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

En el caso espinorial aplica la misma estructura para los  $R_1(i)$ 's, el cambio en los términos que la componen es de la forma

$$G_4^3 = r_\Gamma \left(1 + \frac{7}{6}\epsilon\right)^{-1} \left(1 - \pi^2\epsilon \left(\frac{3\sigma_2^3 - 8\sigma_3^2}{288s^2t^2u^2}\right)\right)^{-1} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} r_{41} &= \frac{32(u-s)}{stu\epsilon} + \frac{8}{3s^3t^3u^3} \left[ (s-u) \left( u^3 \left( s^3 \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) + t^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \right) + s^3 t^3 \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + stu \left( s^3(s-t) \ln\left(\frac{s}{t}\right) + u^3(u-t) \ln\left(\frac{t}{u}\right) + 3su(u(t-u) \ln s + s(s-t) \ln u) \right) \right], \\ r_{42} &= -r_{41}(t \leftrightarrow u), \\ r_{43} &= -r_{41}(s \leftrightarrow t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Resultado para la tercera parte de la amplitud:

$$I_4^{22} = r_\Gamma [Z_2(12)Z_2(34)r_1^{22} + Z_2(13)Z_2(24)r_2^{22} + Z_2(12)Z_2(43)r_3^{22}] \quad (3.32)$$

donde, en el caso escalar,

$$\begin{aligned} r_1^{22} &= -\frac{8(s \ln s + t \ln t + u \ln u)}{\epsilon stu} + \frac{2}{3s^2t^4u^4} \left[ 8s^2t^2u^2(3t^2 - 4tu + 3u^2) \right. \\ &\quad + 4\pi^2(6t^8 + 10t^7u + 3t^6u^2 + 4t^4u^4 + 3t^2u^6 + 10tu^7 + 6u^8) - 3st^3u^3(s \ln^2 s + t \ln^2 t + u \ln^2 u) \\ &\quad + t^3(24t^5 + 40t^4u + 12t^3u^2 + 7tu^4 + 3u^5) \ln^2 \left( \frac{s}{t} \right) \\ &\quad + u^3(3t^5 + 7t^4u + 12t^2u^3 + 40tu^4 + 24u^5) \ln^2 \left( \frac{s}{u} \right) - t^3u^3(3t^2 - 2tu + 3u^2) \ln^2 \left( \frac{t}{u} \right) \\ &\quad \left. + 8stu \left( u^3(6u^2 + tu - 3t^2) \ln \left( \frac{s}{u} \right) + t^3(6t^2 + tu - 3u^2) \ln \left( \frac{s}{t} \right) \right) \right], \\ r_2^{22} &= r_1^{22}(s \leftrightarrow u), \\ r_3^{22} &= r_1^{22}(t \leftrightarrow u). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ahora el caso espinorial

$$\begin{aligned} r_1^{22} &= \frac{16}{3s^2t^4u^4} \left[ s \left( tu^4(-3t^2 + tu + 6u^2) \ln \left( \frac{s}{u} \right) + t^4u(6t^2 + tu - 3u^2) \ln \left( \frac{s}{t} \right) \right) + t^4u^4 \ln^2 \left( \frac{t}{u} \right) \right. \\ &\quad + s \left( st^4(3t^2 - tu - u^2) \ln^2 \left( \frac{s}{t} \right) - su^4(t^2 + tu - 3u^2) \ln^2 \left( \frac{s}{u} \right) \right) \\ &\quad \left. + s^2t^2u^2(3t^2 - 4tu + 3u^2) + \pi^2(3t^8 + 5t^7u - 3t^5u^3 - t^4u^4 - 3t^3u^5 + 5tu^7 + 3u^8) \right], \\ r_2^{22} &= r_1^{22}(s \leftrightarrow u), \\ r_3^{22} &= r_1^{22}(t \leftrightarrow u). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Finalmente el término mas extenso de la amplitud, que se simplifica gracias a la simetría de permutación que se mencionó al principio de la sección:

$$\begin{aligned} I_4^2(1) &= Z_2(12)r_\Gamma \{ (\epsilon_3 \cdot k_1 \epsilon_4 \cdot k_1 + \epsilon_3 \cdot k_2 \epsilon_4 \cdot k_2) r_4^2(1) + (\epsilon_3 \cdot k_1 \epsilon_4 \cdot k_3 + \epsilon_3 \cdot k_4 \epsilon_4 \cdot k_2) r_4^2(2) \\ &\quad - (\epsilon_3 \cdot k_2 \epsilon_4 \cdot k_3 + \epsilon_3 \cdot k_4 \epsilon_4 \cdot k_1) r_4^2(3) + \epsilon_3 \cdot k_2 \epsilon_4 \cdot k_1 r_4^2(4) + \epsilon_3 \cdot k_1 \epsilon_4 \cdot k_2 r_4^2(5) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [(k_3 \cdot k_1 + k_4 \cdot k_2) r_4^2(6) + (k_3 \cdot k_2 + k_4 \cdot k_1) r_4^2(7)] \}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

éste es sólo el primer término de  $I_4^2$ , los otros se obtienen realizando las permutaciones.

En el caso escalar se tiene

$$\begin{aligned}
r_4^2(1) &= \frac{16}{tu\epsilon^2} - \frac{8(4s + u \ln(t) + t \ln(u))}{stu\epsilon} + \frac{2}{3s^2t^3u^3} \left[ st^3(4s^2 - 6su - 3u^2) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \right. \\
&\quad + u^3 \left( (7s^3 - 3su^2) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) - 2t^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \right) \\
&\quad + stu \left( 8s^3 \ln\left(\frac{s}{t}\right) - 8u^3 \ln\left(\frac{t}{u}\right) - tu(3u \ln^2 t + 3t \ln^2 u + 8s(3 \ln^2 u - 7)) \right) \\
&\quad \left. - \pi^2(4t^6 + 18t^5u + 21t^4u^2 + 16t^3u^3 + 21t^2u^4 + 18tu^5 + 4u^6) \right], \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(2) &= -\frac{16}{su\epsilon^2} + \frac{8(u \ln s + s \ln u + 4t)}{stu\epsilon} - \frac{2}{3s^2t^4u^3} \left[ s(8tu^3(6u^2 + 5tu - 3t^2) \ln\left(\frac{s}{u}\right) - 8t^5u \ln\left(\frac{s}{t}\right) \right. \\
&\quad + st^3(3s^2 + 4st - 3t^2) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + 4s(6s^2 + 10st + 3t^2)u^3 \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \\
&\quad + t^3(3s + 4t)u^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) + st^2u^2(8t^2(3 \ln u - 7) + t(u(3 \ln^2 s - 8) + 3s \ln^2 u) - 24u^2) \\
&\quad \left. + \pi^2(4s^7 + 22s^6u + 45s^5u^2 + 40s^4u^3 + 10s^3u^4 + 30s^2u^5 + 13su^6 + 4u^7) \right], \\
r_4^2(3) &= -r_4^2(2)(t \leftrightarrow u), \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(4) &= -\frac{8\left(s \ln\left(\frac{s}{t}\right) + u \ln\left(\frac{t}{u}\right)\right)}{stu\epsilon} + \frac{2}{3s^2t^3u^4} \left[ st \left( 8u^4 \left( 2u \ln\left(\frac{s}{u}\right) + 3t \ln\left(\frac{t}{u}\right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t^2u(48t^2 + 88tu + 3u^2(8 + \ln s + \ln t)) \ln\left(\frac{s}{t}\right) \right) + st^2u^2(8s(3t + u) + 3u^2(\ln^2 s - 2 \ln^2 t + \ln^2 u)) \right. \\
&\quad \left. - st^2(24t^4 + 56t^3u + 40t^2u^2 + 14tu^3 + 3u^4) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) - su^3(3t^3 + 8t^2u + 10tu^2 + 8u^3) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \right. \\
&\quad \left. + t^2u^3(3u^2 - 2tu - 3t^2) \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) - 2\pi^2(12s^7 + 44s^6u + 60s^5u^2 + 33s^4u^3 + 5s^3u^4 - 3s^2u^5 - u^7) \right], \\
r_4^2(5) &= r_4^2(4)(t \leftrightarrow u), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(6) &= \frac{16}{su\epsilon^2} - \frac{8(4t + u \ln s + s \ln u)}{stu\epsilon} - \frac{2}{3s^2t^4u^3} \left[ 8stu^3(6u^2 + 5tu - 3t^2) \ln\left(\frac{s}{u}\right) - 8st^5u \ln\left(\frac{s}{t}\right) \right. \\
&\quad + s^2t^3(3s^2 + 4st - 3t) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + 4s^2u^3(6s^2 + 10st + 3t^2) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) + t^3u^3(3s + 4t) \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \\
&\quad + st^2u^2(8t^2(3 \ln u - 7) - 24u^2 + t(u(3 \ln^2 s - 8) + 3s \ln^2 u)) \\
&\quad \left. + \pi^2(24u^7 + 56tu^6 + 36t^2u^5 + 5t^4u^3 + 3t^5u^2 - 6t^6u - 4t^7) \right], \\
r_4^2(7) &= r_4^2(6)(t \leftrightarrow u). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

En el caso espinorial

$$\begin{aligned}
r_4^2(1) &= -\frac{32}{tu\epsilon} - \frac{4}{3s^2t^3u^3} \left[ s \left( 4t^3u(t+3u) \ln\left(\frac{s}{t}\right) + 4tu^3(3t+u) \ln\left(\frac{s}{u}\right) \right) \right. \\
&\quad + s \left( st^3(2t+5u) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + su^3(5t+2u) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \right) - 2t^3u^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \\
&\quad \left. + \pi^2(s-t)(s-u)(t^4+2t^3u+2tu^3+u^4) - 4st^2u^2(7s+3u \ln t + 3t \ln u) \right]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(2) &= \frac{32}{sue} - \frac{1}{3s^2t^4u^3} \left[ s \left( 4t^5u \ln\left(\frac{s}{t}\right) + st^4(2t-u) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \right) \right. \\
&\quad + 4tu^3(3t^2-5tu-6u^2) \ln\left(\frac{s}{u}\right) + s(t-2u)u^3(5t+6u) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \\
&\quad - 2t^4u^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) + 4st^2u^2(tu+3u^2+t^2(7-3 \ln u)) \\
&\quad \left. + \pi^2(2t^7+3t^6u+2t^4u^3+6t^3u^4-15t^2u^5-28tu^6-12u^7) \right], \\
r_4^2(3) &= -r_4^2(2)(t \leftrightarrow u),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(4) &= -\frac{4}{3s^2t^3u^4} \left[ s \left( 2tu^3 \left( s(s+5u) \ln\left(\frac{s}{u}\right) - t(t+3u) \ln\left(\frac{t}{u}\right) \right) \right) \right. \\
&\quad - 2st^2u(3s^2+16st+t^2) \ln\left(\frac{s}{t}\right) \\
&\quad + s \left( st^3(3t^2+14st-s^2) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + su^4(s-3u) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \right) - 2t^3u^4 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \\
&\quad \left. + 4s^2t^2u^2(s-2t) + \pi^2(12s^7+44s^6u+57s^5u^2+27s^4u^3+2s^3u^4+6su^6+2u^7) \right], \\
r_4^2(5) &= r_4^2(4)(t \leftrightarrow u),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2(6) &= -\frac{32}{sue} - \frac{4}{3s^2t^4u^3} \left[ 4stu^3(6u^2+5tu-3t^2) \ln\left(\frac{s}{u}\right) - 4st^5u \ln\left(\frac{s}{t}\right) \right. \\
&\quad + s^2 \left( t^4(2s+3u) \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + u^3(u-5s)(s+3u) \ln^2\left(\frac{s}{u}\right) \right) + 2t^4u^3 \ln^2\left(\frac{t}{u}\right) \\
&\quad + \pi^2(2s^7+11s^6u+24s^5u^2+23s^4u^3+8s^3u^4+18s^2u^5+8su^6+2u^7) \\
&\quad \left. - 4st^2u^2(7s^2+13su-3t^2 \ln u + 9u^2) \right], \\
r_4^2(7) &= r_4^2(6)(t \leftrightarrow u).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Teniendo las expresiones anteriores para cada término de  $Q_4$  se puede generar cualquier amplitud fijando sólo los momentos de referencia para las polarizaciones, que llevan a las diferentes cancelaciones. Esto finaliza el análisis general para esta amplitud.

Se realizó un análisis exhaustivo de la amplitud de 4 fotones on-shell sin masa. En el capítulo siguiente se seguirá trabajando con la misma amplitud de 4 puntos on-shell pero ahora con masa en el lazo.

## Capítulo 4

### Amplitud de 4 Fotones On-Shell con $m \neq 0$

En este capítulo se continua estudiando la amplitud de 4 fotones, pero con un lazo masivo. En la primera sección se realiza un análisis numérico de esta amplitud para las diferentes polarizaciones. En la sección siguiente se realiza el cálculo de los términos subdominantes de la expansión para masa grande. Al final, se comparan los resultados analítico y numérico. También se realiza la comparación con la expansión para masa grande.

#### 4.1. Integración Numérica de las Amplitudes

La amplitud de cuatro fotones con lazo masivo ha sido calculada analíticamente en varias ocasiones haciendo uso de diferentes técnicas (Jikia and Tkabladze, 1994; Bernicot, 2008). La implementación numérica de dichas amplitudes no ha resultado ser una tarea trivial. En esta sección se muestra que dicha implementación es muy simple en el formalismo línea de mundo, al punto de realizar la integración numérica utilizando las rutinas construidas de MATHEMATICA 7.01.

Para estas amplitudes, se tomarán las mismas polarizaciones y los mismos momenta de referencia que se usaron en el capítulo anterior. La métrica que se usa en este capítulo tiene la signatura  $(1, -1, -1, -1)$ . Los  $Q_4$ 's del numerador permanecerán iguales. El único cambio que trae la masa es que la integral ahora se ve como:

$$\mathcal{A}(s, t, u, m) = \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 \frac{Q_4(\dot{G}_{Bij})}{\left[ m^2 + \sum_{i < j=1}^4 G_{Bij} k_i \cdot k_j \right]^2}. \quad (4.1)$$

Lo anterior expresa la amplitud on-shell para el caso masivo. Para cambiar del caso escalar al espinorial y para el cambio en las polarizaciones se realiza el cambio en  $Q_4$ , tal como se hizo en el capítulo anterior.

Como para las amplitudes con polarizaciones  $(++++)$  y  $(-+++)$  la diferencia entre el caso escalar y espinorial es de un factor global  $-2$ , no se tomará y se mostrará sólo el comportamiento para diferentes valores de la masa en el caso espinorial de dichas amplitudes. Realizando la integración numérica se obtuvieron las siguientes gráficas, en las que se tomaron valores fijos para las variables de Mandelstam ( $s = 1, t = 2, u = -3$ ).

Amplitud  $\mathcal{A}(+++)$

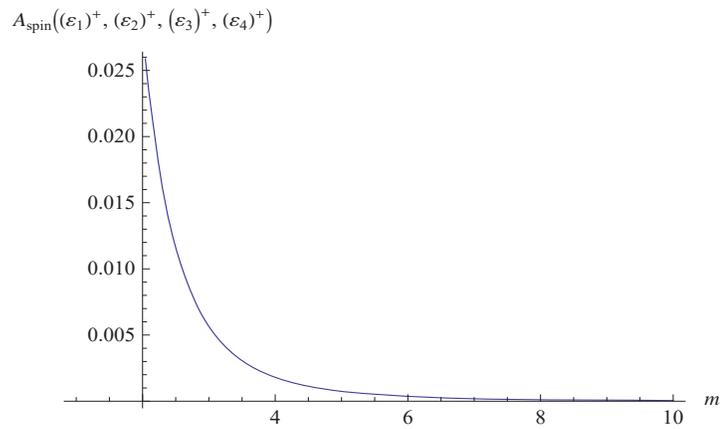


Figura 4.1: Resultado numérico para  $\mathcal{A}(+++)$

Amplitud  $\mathcal{A}(-+++)$

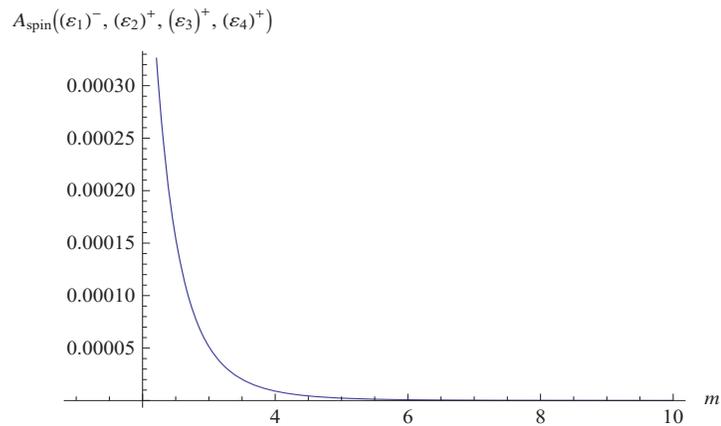


Figura 4.2: Resultado numérico para  $\mathcal{A}(-+++)$

El caso con polarizaciones  $(--++)$  si es diferente en la para el caso escalar y espinorial

Amplitud  $\mathcal{A}_{scal}(--++)$

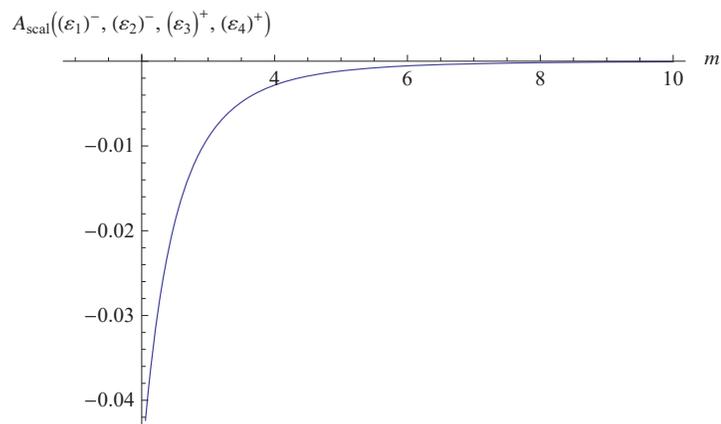


Figura 4.3: Resultado numérico para  $\mathcal{A}_{scal}(--++)$

Amplitud  $\mathcal{A}_{spin}(--++)$

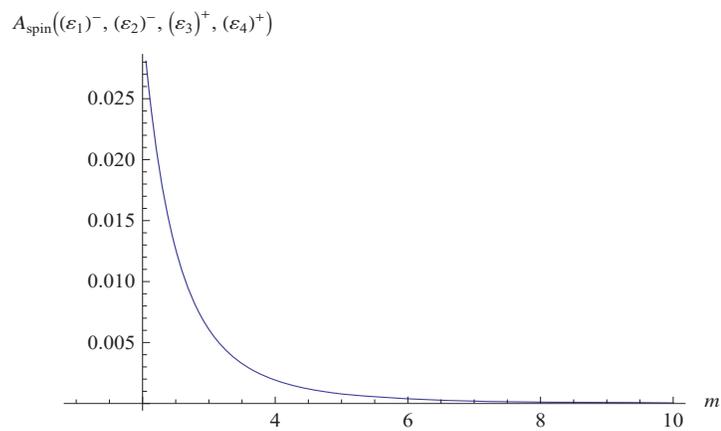


Figura 4.4: Resultado numérico para  $\mathcal{A}_{spin}(--++)$

#### 4.2. Términos Subdominantes

Anteriormente ya se ha calculado el término dominante en la expansión para masa grande (Martin et al., 2003), en este caso ellos calcularon el primer término para la amplitud de  $N$ -puntos. Tomando  $N = 4$ , el resultado de ellos sólo aplica para los casos  $(+++)$  y  $(- - ++)$ , que tienen el término dominante en el orden  $m^{-4}$ . El término dominante para el caso  $(- + ++)$  no lo tienen en su análisis, ya que este sólo aparece a orden  $m^{-6}$ . En esta sección, se calcularán los términos dominantes y también términos subdominantes para las amplitudes de 4-puntos con las tres polarizaciones convencionales.

El formalismo línea de mundo se presta para el cálculo de estos términos en la expansión de masa grande, especialmente porque todos los diagramas están contenidos en una sola integral y el integrando tiene la masa localizada en un solo lugar, teniendo éste la siguiente forma

$$\frac{A}{(m^2 + B)^2} = \frac{A}{m^4} - \frac{2AB}{m^6} + \frac{3AB^2}{m^8} - \frac{4AB^3}{m^{10}} + \frac{5AB^4}{m^{12}} - \frac{6AB^5}{m^{14}} + \frac{7AB^6}{m^{16}} - \frac{8AB^7}{m^{18}} + \dots$$

es fácilmente expandible como se ve. En este caso  $A$  es el  $Q_4$  correspondiente a la polarización dada y  $B$  el denominador usado en el caso no masivo. Como en el caso anterior, las polarizaciones  $(+++)$  y  $(- + ++)$  se tratan igual en el caso escalar y espinorial.

Recordando también los invariantes bajo permutaciones de los  $k$ 's definidos en el capítulo anterior  $\sigma_n \equiv s^n + t^n + u^n$  (ver Apéndice B), el comportamiento obtenido para las amplitudes a masas grandes es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{++++}(m, \sigma_2, \sigma_3) &= \frac{1}{m^{45!!}} \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{m^{67!!}} \frac{5}{9} \sigma_3 + \frac{1}{m^{89!!}} \frac{1}{2} \sigma_2^2 + \frac{1}{m^{1011!!}} \frac{7}{4} \sigma_2 \sigma_3 \\ &\quad + \frac{1}{m^{1213!!}} \frac{3}{10} \left( \frac{109}{9} \sigma_3^2 + \frac{75}{8} \sigma_3^3 \right) + \frac{1}{m^{1415!!}} \frac{81}{8} \sigma_2^2 \sigma_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{-+++}(m, \sigma_2, \sigma_3) &= -\frac{1}{m^{67!!}} \frac{2}{9} \sigma_3 - \frac{1}{m^{1011!!}} \frac{1}{6} \sigma_2 \sigma_3 - \frac{1}{m^{1213!!}} \frac{4}{15} \sigma_3^2 - \frac{1}{m^{1415!!}} \frac{3}{8} \sigma_2^2 \sigma_3 \\ &\quad - \frac{1}{m^{1617!!}} \frac{5}{3} \sigma_3^2 \sigma_2 - \frac{1}{m^{1819!!}} \frac{1}{14} \left( \frac{89}{3} \sigma_3^6 + 22 \sigma_2^3 \sigma_3 \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

En los casos anteriores, como se puede notar, los términos de la expansión se pueden escribir en función de los invariantes  $\sigma_n$ . En el caso  $(+++)$  esto viene gracias a la invariancia bajo permutaciones en cualquiera de los momenta,  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ . Para  $(- + ++)$  se tiene una invariancia bajo permutaciones en los tres últimos momenta,  $(k_1, (k_2, k_3, k_4))$ , aunque con éstos es suficiente para obtener una expresión invariante. La diferencia con el caso anterior es que se tiene un  $\sigma_3$  global, lo cual no permite que existan los términos con  $m^{-4}$  y  $m^{-8}$ . Para los casos de  $(- - ++)$  escalar y espinorial, esta dependencia respecto a los  $\sigma_n$ 's ya no está presente, pero se tiene otro comportamiento particular:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{---++}^{\text{scal}}(m, s, tu) &= -\frac{1}{m^4 5!!} \frac{8}{3} s^2 - \frac{1}{m^6 7!!} 2s^3 - \frac{1}{m^8 9!!} \frac{1}{5} s^2 (22s^2 - 5tu) \\
&\quad - \frac{1}{m^{10} 11!!} \frac{2}{5} s^3 (20s^2 + 3tu) \\
&\quad - \frac{1}{m^{12} 13!!} \frac{1}{5} s^2 (825s^4 - 7tu(25s^2 - 12tu)) \\
&\quad - \frac{1}{m^{14} 15!!} \frac{3}{14} s^3 (315s^4 + 8tu(6s^2 - 7tu)),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{---++}^{\text{spin}}(m, s, tu) &= \frac{1}{m^4 5!!} \frac{22}{3} s^2 + \frac{1}{m^6 7!!} \frac{8}{3} s^3 \\
&\quad + \frac{1}{m^8 9!!} \frac{1}{10} s^2 (91s^2 - 50tu) + \frac{1}{m^{10} 11!!} \frac{1}{5} s^3 (48s^2 + 49tu) \\
&\quad + \frac{1}{m^{12} 13!!} \frac{1}{10} s^2 (2900s^4 - 7tu(340s^2 - 171tu)) \\
&\quad + \frac{1}{m^{14} 15!!} \frac{3}{14} s^3 (360s^4 + tu(477s^2 - 490tu)) \\
&\quad + \frac{1}{m^{16} 17!!} \frac{1}{8} s^2 (3283s^6 - 6tu(549s^2 - 8tu(100s^2 + 23tu))).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora la dependencia es de  $s$  y del producto  $tu$ , los cuales son los invariantes bajo permutaciones de los dos últimos momenta,  $((k_1, k_2), (k_3, k_4))$ .

#### 4.3. Comparación entre los Términos Subdominantes y el Resultado Numérico

Ahora se tomarán los términos de la expansión de masa grande, desde el primero, y se irán sumando progresivamente; cada una de las expresiones resultantes se graficará junto con el resultado numérico. La comparación se realizará en diferentes rangos de la masa;  $m$  grande ( $m \in [1, 10]$ ) y  $m$  pequeña ( $m \in [0.8, 1.8]$ ), esto para ver como los términos subdominantes se alejan mucho más del resultado numérico para masas pequeñas y, por otro lado, el dominio que pueden tener estos para masas grandes. Se emplearán los mismos valores fijos de  $(s, t, u)$  anteriores  $(1, 2, -3)$ .

Amplitud  $\mathcal{A}(-+++)$

Para esta amplitud, en el caso de las masas grandes, el primer término de la expansión es dominante sobre ésta. En el caso de masas pequeñas, el comportamiento no es muy predecible al tomar mas términos en la expansión.

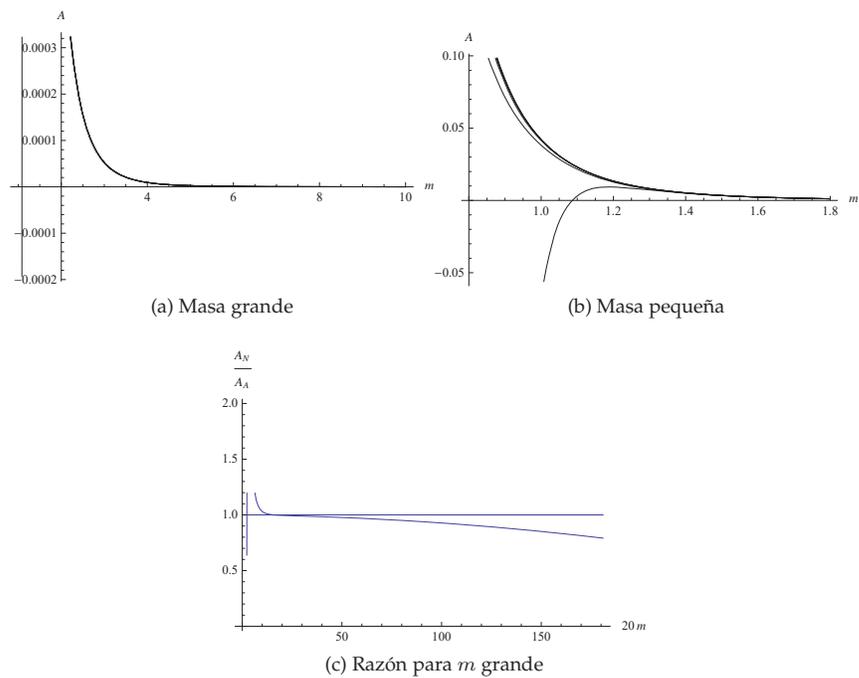


Figura 4.5:  $\mathcal{A}(- + ++)$ . La línea punteada representa el resultado numérico. Las líneas sólidas representan la expansión para masa grande. En (a), masa grande, el primer término de la expansión domina y traslapa el resultado numérico. En (b), comportamiento de la amplitud a medida que se le suman mas términos de la expansión, con masas pequeñas (algunas curvas se traslapan). En (c) se puede visualizar mejor la diferencia entre el resultado numérico y la expansión en masa grande, al tomar la razón entre las dos y compararlas con 1.

Amplitud  $\mathcal{A}_{spin}(- - ++)$

En este caso la evaluación numérica presenta el mejor comportamiento con respecto a las otras amplitudes.

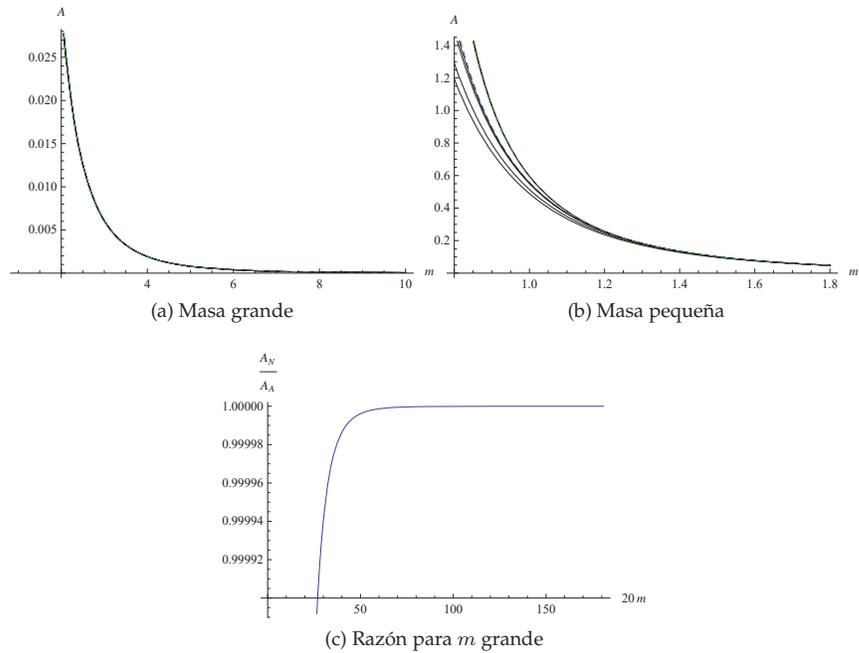


Figura 4.6:  $\mathcal{A}_{spin}(- - ++)$  La línea punteada representa el resultado numérico. Las líneas sólidas representan la expansión para  $m$  grande. Para masa grande (a), el primer término de la expansión domina y traslapa el resultado numérico. Para masas pequeñas ya no se presenta tal dominio en la expansión. En la parte (c) se ve como la razón entre el resultado numérico y el analítico tienden a uno.

Amplitud  $\mathcal{A}_{scal}(- - ++)$

En este caso el comportamiento es tan bueno como en el anterior. La evaluación numérica, aunque no se aleja mucho del valor analítico, es de alguna forma inestable como se verá.

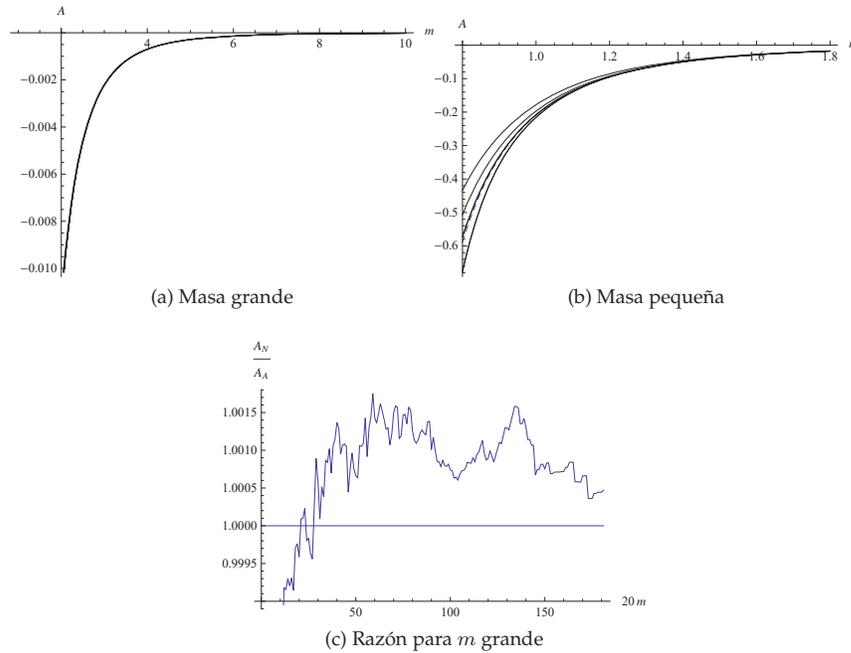
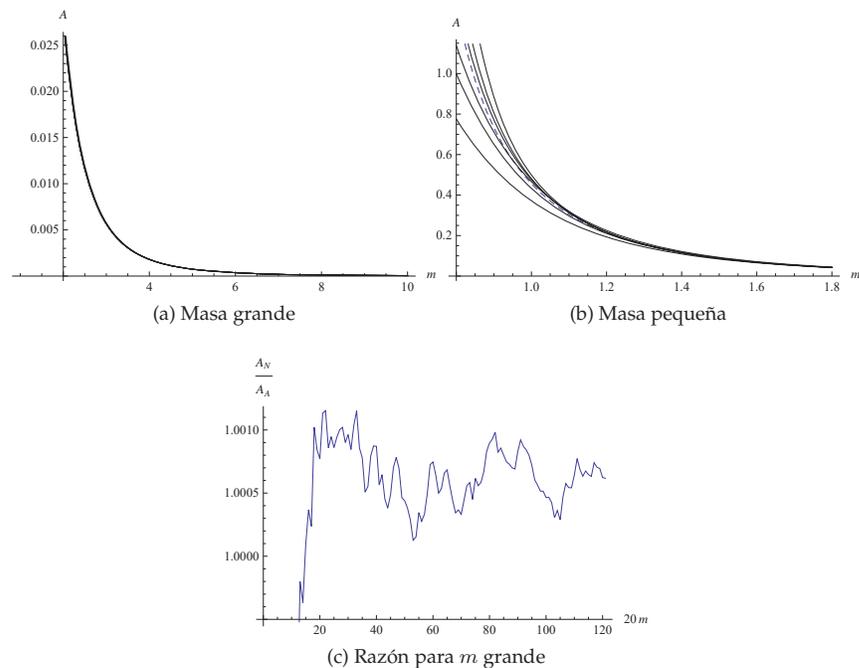


Figura 4.7:  $\mathcal{A}_{scal}(- - ++)$ . La línea punteada representa el resultado numérico. Las líneas sólidas representan la expansión para masa grande. En (a), masa grande, el primer término de la expansión domina el comportamiento y traslapa el resultado numérico. Para masas pequeñas, parte (b), el comportamiento de la amplitud a medida que se le suman más términos de la expansión. En la parte (c) se muestra la diferencia entre el resultado numérico y la expansión en masa grande, no se aleja mucho de uno pero no se tiene un comportamiento suave para la razón entre los resultados.

Amplitud  $\mathcal{A}(+++)$

Por último se va a realizar un análisis mas completo para el caso  $(+++)$ , ya que se cuenta con un resultado exacto para esta amplitud.



**Figura 4.8:**  $\mathcal{A}(+++)$ . La línea punteada representa el resultado numérico. Las líneas sólidas representan la expansión para masa grande. En la parte (a), cuando  $m$  es grande, el primer término de la expansión domina el comportamiento y esta en gran acuerdo con el resultado numérico. Para masas pequeñas, parte (b), el comportamiento cambia a medida que se le suman mas términos de la expansión y hay coincidencia con el resultado numérico. En la parte (c) se puede visualizar mejor la diferencia entre el resultado numérico y la expansión en masa grande, tambien se puede ver que la integración numérica no es muy estable aunque el resultado no se aleja mucho del resultado analítico.

A continuación se van a comparar los resultados obtenidos para la amplitud  $(+++)$  con el resultado exacto para la misma.

Comparación con el Resultado Exacto para  $\mathcal{A}(+++)$

Ahora, para  $\mathcal{A}(+++)$  masiva, se van a comparar las gráficas del resultado numérico y la de la expansión para masa grande con la gráfica del resultado exacto de (Bernicot, 2008. La gráfica del resultado exacto fué proporcionada por J.M. Dávila). En este caso se toma ( $s = 1.42658$ ,  $t =$

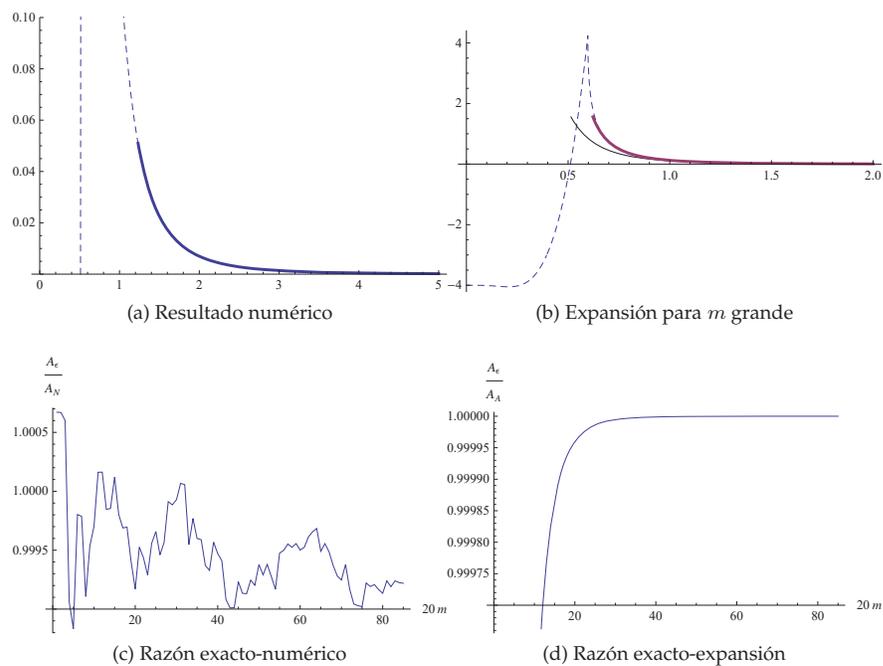


Figura 4.9:  $\mathcal{A}_{scat}(+++)$ . La línea punteada representa el resultado exacto en las partes (a) y (b). En la parte (a), la línea sólida representa el resultado numérico, también se puede ver concordancia con el resultado exacto. En la parte (b), las líneas sólidas representan las expansiones en masa grande, la curva que se aleja de la punteada es la que se obtiene tomando solamente el término dominante. Al tomar todos los términos de la expansión se obtiene un mejor acercamiento con el resultado exacto, y también se puede llegar a masas más pequeñas que con la evaluación numérica. En la parte (c), aparece la razón entre el resultado exacto y el numérico, aunque la evaluación numérica no es muy coherente el resultado permanece muy cerca del exacto. En la parte (d), se muestra la razón entre el resultado exacto y la expansión para masa grande, se puede apreciar la gran concordancia entre el resultado exacto y la expansión, mostrando esto que tomando hasta este orden en la expansión es suficiente para evaluar esta amplitud, en este rango de masas. En el resultado exacto la parte que está antes del pico representa el umbral, donde la amplitud desarrolla una parte imaginaria.

$-0.38596, u = 1.81254$ )

En el caso numérico, no se puede realizar la integración para  $m < 1$  con los rutinas construidas de MATHEMATICA. Como se puede ver la expansión en  $m$  se aproxima mucho al resultado exacto para esta amplitud, pero el término dominante con  $m^{-4}$  no es suficiente. Para esta amplitud, el resultado numérico está muy de acuerdo con el exacto. El lado izquierdo antes del pico en la gráfica del resultado exacto representa el umbral donde la amplitud empieza a desarrollar una parte imaginaria, en los resultados numéricos de este trabajo no aparece esa parte ya que en las amplitudes se sacó un factor de fase global y también se trabajó con masas por arriba de este umbral.

Continuando con la amplitud de 4 fotones on-shell, se estudió el caso masivo. En el capítulo siguiente se estudiará el caso off-shell de la amplitud de 4 fotones cuando la masa es grande.

## Capítulo 5

### Términos Dominantes para 4 Fotones Off-Shell

En la amplitud de 4 fotones completamente off-shell es muy poco el avance que se ha hecho, el mayor avance ha sido tomando sólo dos de los fotones off-shell (Constantini et-al., 1971). El problema de esta amplitud radica principalmente en que la integral en parámetros de Feynman es áltamente no trivial. Un intento de resolver esta integral con fuerza bruta lleva a expresiones de cientos de páginas, lo cual no es aceptable. Una de las principales motivaciones para calcular esta amplitud es que, en el caso sin masa, es finita e invariante conforme, por lo cual debe exhibir unas interesantes características (se debe poder escribir en términos de “conformal-cross-ratios”, lo que debe llevar a grandes simplificaciones).

En este capítulo se van a estudiar los primeros términos de la expansión en el límite de masa grande cuando los cuatro fotones son off-shell. Se podrá ver como aparece de manera manifiesta la invariancia de calibración término por término, lo cual tampoco era conocido hasta el momento. Nuevamente la métrica se toma con signatura  $(-+++)$

En el caso off-shell el cambio mas importante aparece en el denominador. Cuando se trabajó en el caso on-shell éste se podía dejar de una manera muy simple con variables de Mandelstam. En parámetros de Feynman  $a_i$  y sin masa la expresión que va al cuadrado en el denominador tiene la siguiente forma:

$$\sum_{i<j} G_{Bij} k_i \cdot k_j = -a_1 a_3 2k_1 \cdot k_2 - a_2 a_4 2k_2 \cdot k_3. \quad (5.1)$$

En el caso off-shell, a expresión toma la forma

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} G_{Bij} k_i \cdot k_j &= k_1 \cdot k_4 (|u_1| - u_1^2) + k_1 \cdot k_2 (|u_1 - u_2| - (u_1 - u_2)^2) + k_2 \cdot k_4 (|u_2| - u_2^2) \\ &+ k_1 \cdot k_3 (|u_1 - u_3| - (u_1 - u_3)^2) + k_2 \cdot k_3 (|u_2 - u_3| - (u_2 - u_3)^2) \\ &+ k_3 \cdot k_4 (|u_3| - u_3^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde se ha tomado  $u_4 = 0$  y se puede retornar a los parámetros de Feynman usando

$$a_1 = 1 - u_1, \quad a_2 = u_1 - u_2, \quad a_3 = u_2 - u_3, \quad a_4 = u_3. \quad (5.3)$$

Aún teniendo este denominador se puede realizar la expansión realizada anteriormente para masa grande, y realizar la integración.

Se define

$$\mathcal{Q}_4^m \equiv \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 \left[ \frac{Q_4^m(\dot{G}_{Bij})}{m^4} + \frac{2Q_4^m(\dot{G}_{Bij}) \sum_{i < j=1}^4 G_{Bij} k_i \cdot k_j}{m^6} + \dots \right]. \quad (5.4)$$

En este caso se integra sólo el primer término de las  $Q_4^{m'}$ 's, ya que se generan los que siguen por medio de permutaciones (como se discutió en el capítulo 3). Para el caso escalar, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_4^4 &= \frac{Z_4(1234)}{3m^{45}!!} + \frac{Z_4(1234)}{3m^{67}!!} (6k_1 \cdot k_2 + 5k_1 \cdot k_3 + 6k_1 \cdot k_4 \\ &\quad + 6k_2 \cdot k_3 + 5k_2 \cdot k_4 + 6k_3 \cdot k_4) + 2 \text{ perm.} \\ \mathcal{Q}_4^3 &= -Z_3(123) \left[ \frac{1}{3m^{67}!!} (k_2 \cdot F_4 \cdot k_1 + k_1 \cdot F_4 \cdot k_3 + k_3 \cdot F_4 \cdot k_2) \right. \\ &\quad + \frac{3}{10m^{89}!!} \left( 2((k_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_1 \cdot k_2 + (k_1 \cdot F_4 \cdot k_2)k_1 \cdot k_3 + (k_2 \cdot F_4 \cdot k_3)k_1 \cdot k_2 \right. \\ &\quad + (k_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_2 \cdot k_3 + (k_2 \cdot F_4 \cdot k_3)k_1 \cdot k_3 + (k_1 \cdot F_4 \cdot k_2)k_2 \cdot k_3) \\ &\quad + ((k_2 \cdot F_4 \cdot k_3)k_3 \cdot k_4 + (k_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_3 \cdot k_4 + (k_2 \cdot F_4 \cdot k_3)k_2 \cdot k_4 \\ &\quad \left. \left. + (k_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_1 \cdot k_4 + (k_1 \cdot F_4 \cdot k_2)k_2 \cdot k_4 + (k_1 \cdot F_4 \cdot k_2)k_1 \cdot k_4) \right) \right] + 3 \text{ perm.} \\ \mathcal{Q}_4^2 &= -Z_2(12) \left[ \frac{1}{3m^{67}!!} \left( 7(k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1 + k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1 + k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2) \right) + \frac{1}{10m^{89}!!} \left( 10(k_1 \cdot F_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot F_4 \cdot k_1) \right. \right. \\ &\quad - 20((k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_1 \cdot k_3 + (k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2)k_2 \cdot k_3 + (k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1)k_1 \cdot k_4 \\ &\quad + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_2 \cdot k_4) - 31((k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_2 \cdot k_3 + (k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2)k_1 \cdot k_3 \\ &\quad + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1)k_2 \cdot k_4 + (k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_1 \cdot k_4) - 18((k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1)k_1 \cdot k_3 \\ &\quad + (k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1)k_2 \cdot k_4 + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_3 \cdot k_4 + (k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2)k_3 \cdot k_4 \\ &\quad + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_2 \cdot k_3 + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_1 \cdot k_4) - 30((k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2)k_2 \cdot k_4 \\ &\quad + (k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1)k_1 \cdot k_3 + (k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_1 \cdot k_4 + (k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2)k_2 \cdot k_3 \\ &\quad + (k_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_1)k_3 \cdot k_4 + (k_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot k_2)k_3 \cdot k_4) - 6k_1 \cdot k_2(k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1 \\ &\quad \left. \left. + k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2) - 21k_1 \cdot k_2(k_2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_2 + k_1 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot k_1) \right) \right] + 5 \text{ perm.} \\ \mathcal{Q}_4^{22} &= \frac{5Z_2(12)Z_2(34)}{3m^{45}!!} + \frac{7Z_2(12)Z_2(34)}{9m^{67}!!} (5(k_1 \cdot k_3 + k_1 \cdot k_4 + k_2 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4) \\ &\quad + 3(k_1 \cdot k_2 + k_3 \cdot k_4)) + 2 \text{ perm..} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tomando la expansión hasta estos órdenes se pueden identificar las estructuras invariantes

que son: los  $Z_n$ 's que son proporcionales a  $\text{tr}(F^n)$  y los productos  $(k \cdot F \cdot k)$ , y  $(k \cdot F \cdot F \cdot k)$ . A mayores órdenes estas estructuras invariantes se mantienen y sólo se multiplican por más productos  $k \cdot k$ .

Con este capítulo termina el análisis de la amplitud de 4 fotones en este trabajo, donde se trataron varios casos de ésta. En el siguiente y último capítulo se realizara un análisis numérico de algunos casos de la amplitud de 6 fotones on-shell con masa.

## Capítulo 6

### Amplitud de 6 Fotones On-Shell con $m \neq 0$

En este último capítulo se tratará la amplitud de 6 fotones con masa. Como ya se comentó en la introducción, esta amplitud sólo se ha calculado recientemente en el caso sin masa (Mahlon, 1994b; Binoth et~al., 2007; Bernicot and Guillet, 2008) y existe un cálculo exacto del caso masivo para las polarizaciones (+ + + + +) (Bernicot, 2008; aunque este trabajo se encuentra en versión preliminar en arXiv). El tratamiento que se va a realizar aquí es numérico, donde se usarán las rutinas de integración que vienen construidas en MATHEMATICA 7.01 sólamente.

Los casos que se tomarán aquí son (+++++) y (+++++) para QED escalar y (+ + - - -) para QED espinorial. Particularmente en los dos casos escalares resulta mejor usar la fórmula maestra de Bern y Kosower (Bern and Kosower, 1992),

$$\Gamma_{\text{scal}}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] = (-ie)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum k_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \times \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \exp \left[ \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{1}{2} G_{Bij} k_i \cdot k_j - i \dot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right) \right] \Bigg|_{\text{multi-lin}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)}, \quad (6.1)$$

más adelante se verá por que. En el caso espinorial sí se utilizará la expresión obtenida despues del proceso de integración por partes con unas modificaciones.

Nuevamente se regresa a la sifnatura para la métrica (+ - - -). En el cálculo de todas las amplitudes se evaluarán en los siguientes momenta (Ossola et~al., 2007):

$$\begin{aligned} k_1 &= (3, -2.12132, -1.06066, -1.83712), \\ k_2 &= (3, 2.12132, 1.06066, 1.83712), \\ k_3 &= (-2, -2, 0, 0), \\ k_4 &= (-0.857143, 0.315789, -0.796851, 0), \\ k_5 &= (-1, 0.184211, -0.46483, -0.866025), \\ k_6 &= (-2.14286, 1.5, 1.26168, 0.866025), \end{aligned} \quad (6.2)$$

y momenta de referencia adecuados para obtener mayor simplicidad en el integrando. Momenta de referencia como estos re refieren a un proceso tipo 2  $\rightarrow$  4 (dos partículas entrantes y cuatro

salientes). Las partículas entrantes se identifican por tener energía positiva ( $k_i^0 > 0$ ) y las salientes negativa ( $k_j^0 < 0$ ).

En este capítulo se utilizarán también las siguientes abreviaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{G}_{ij} &\equiv \dot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot k_j, \\
\dot{\underline{G}}_{ij} &\equiv \dot{G}_{Bij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j, \\
\dot{Q}_{ij} &\equiv \dot{G}_{Bij} k_i \cdot k_j.
\end{aligned}
\tag{6.3}$$

Amplitud  $\mathcal{A}_{scal}(- + + + +)$

Para el cálculo numérico de esta amplitud, se usa la fórmula de Bern y Kosower antes de la integración por partes. Para los  $\varepsilon$ 's se toman los momenta de referencia ( $k_6, k_1, k_1, k_1, k_1, k_1$ ). Esta escogencia lleva a las siguientes cancelaciones

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j &= 0, & i, j = 1, \dots, 6. \\
\varepsilon_i \cdot k_1 &= 0, & i = 2, \dots, 6. \\
\varepsilon_1 \cdot k_6 &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.4}$$

El numerador adquiere entonces la forma más simple que puede imaginarse para una amplitud de 6 puntos

$$P_6(- + + + +) = \sum_{i_k=1}^6 \dot{G}_{1i_1} \dot{G}_{2i_2} \dot{G}_{3i_3} \dot{G}_{4i_4} \dot{G}_{5i_5} \dot{G}_{6i_6}.
\tag{6.5}$$

Para la evaluación numérica, es más práctico dejar las expresiones factorizadas, por lo que las sumas de este tipo se toman mejor como  $(\sum_{i_1} \dot{G}_{1i_1})(\sum_{i_2} \dot{G}_{2i_2})(\sum_{i_3} \dot{G}_{3i_3})(\sum_{i_4} \dot{G}_{4i_4})(\sum_{i_5} \dot{G}_{5i_5})(\sum_{i_6} \dot{G}_{6i_6})$ . El resultado en un rango de masas  $m \in [4, 15]$  es el siguiente:

Amplitud  $\mathcal{A}_{scal}(+ + + + +)$

Se continúa en este caso usando la fórmula de Bern y Kosower. Los  $\varepsilon$ 's se toman todos con el mismo momentum de referencia  $q = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$ , lo que lleva a las siguientes cancelaciones:

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6.
\tag{6.6}$$

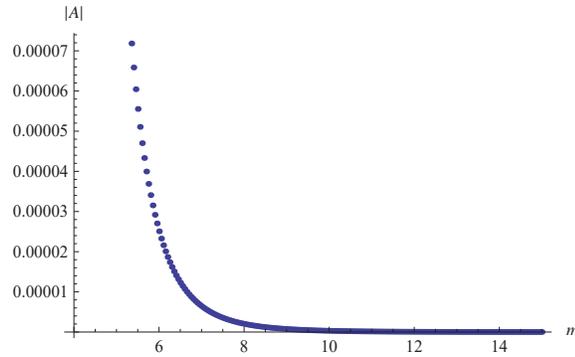


Figura 6.1: Resultado numérico para  $\mathcal{A}_{scal}(- + + + +)$

El numerador adquiere la siguiente forma similar al caso anterior, pero con más términos ya que no se cancela ningún  $\varepsilon_i \cdot k_j$ ,

$$P_6(+ + + + +) = \sum_{i_k=1}^6 \dot{G}_{1i_1} \dot{G}_{2i_2} \dot{G}_{3i_3} \dot{G}_{4i_4} \dot{G}_{5i_5} \dot{G}_{6i_6}. \quad (6.7)$$

Para esta amplitud se puede tomar el primer término de la expansión para masa grande y comparar su comportamiento con el resultado numérico; el resultado obtenido es como sigue:

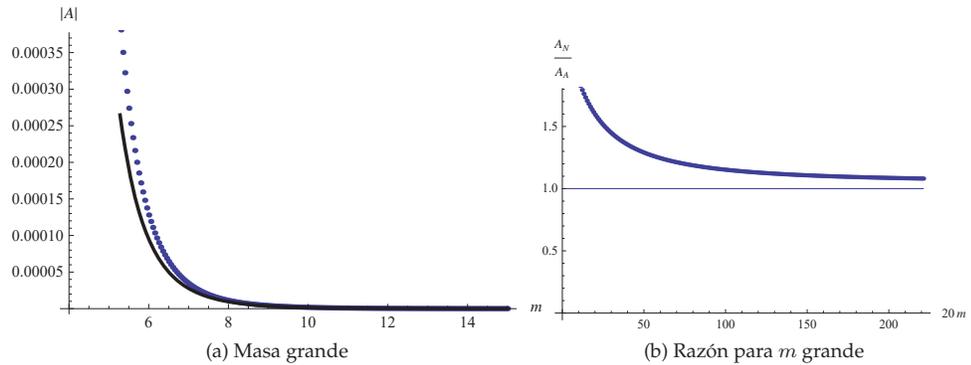


Figura 6.2:  $\mathcal{A}_{scal}(+ + + + +)$ . (a) La línea punteada representa el resultado numérico. La línea sólida representa el primer término de la expansión en masa grande. (b) Comparación más detallada entre los dos resultados, la línea gruesa, que es la razón, tiende a 1.

Amplitud  $\mathcal{A}_{spin}(+ + - - -)$

En un caso como este ya no es muy práctico el uso de la fórmula de Bern y Kosower por lo siguiente:

1. Cuando se tienen productos  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$  diferentes de cero, éstos vienen acompañados por una  $\dot{G}_{Bij}$  que trae una función delta, la cual no está bien implementada para cálculo numérico.
2. En el caso espinorial, se debe supersimetrizar la fórmula de Bern y Kosower, lo cual lleva a implementar variables de Grassmann e integración de Berezin.
3. Después de la integración por partes simétrica el numerador queda listo para hacer el reemplazo que lleva de escalar a espinorial

$$\dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} \longrightarrow \dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} - G_{Fi_1i_2}G_{Fi_2i_3}\cdots G_{Fi_ni_1}. \quad (6.8)$$

En este caso es el resultado obtenido después de la integración por partes el que se debe implementar. Para 6-puntos en QED escalar, el numerador después de la integración por partes tiene la siguiente forma compacta

$$Q_6 = q_6^6 + q_6^5 + q_6^4 + q_6^3 + q_6^2 - q_6^{42} - q_6^{33} - q_6^{32} - q_6^{22} + q_6^{222} \quad (6.9)$$

donde, con las abreviaciones que se introdujeron anteriormente para los ciclos (cada cadena de  $\dot{G}_{Bij}$ 's va acompañada por su respectivo ciclo de Lorentz) y las colas, la expresión para cada término es como se muestra a continuación (Schubert, 2001)

$$\begin{aligned} q_6^6 &= \dot{G}(123456) + \text{permutaciones} \quad \left(\frac{5!}{2} = 60 \text{ en total}\right) \\ q_6^5 &= \dot{G}(12345)T_1(6) + \text{perm.} \quad \left(\frac{4!}{2}\binom{6}{1} = 72 \text{ en total}\right) \\ q_6^4 &= \dot{G}(1234)T_2(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\ q_6^3 &= \dot{G}(123)T_3(456) + \text{perm.} \quad (20 \text{ en total}) \\ q_6^2 &= \dot{G}(12)T_4(3456) + \text{perm.} \quad (15 \text{ en total}) \\ q_6^{42} &= \dot{G}(1234)\dot{G}(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\ q_6^{33} &= \dot{G}(123)\dot{G}(456) + \text{perm.} \quad (10 \text{ en total}) \\ q_6^{32} &= \dot{G}(123)\dot{G}(45)T_1(6) + \text{perm.} \quad (60 \text{ en total}) \\ q_6^{22} &= \dot{G}(12)\dot{G}(34)T_2(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\ q_6^{222} &= \dot{G}(12)\dot{G}(34)\dot{G}(56) + \text{perm.} \quad (15 \text{ en total}). \end{aligned}$$

(6.10)

En esta amplitud aparecen nuevas estructuras. Aparte de los ciclos más grandes, hasta orden 6, aparecen también la 3-cola y la 4-cola. Las 1-colas y 2-colas ya se introdujeron en el capítulo 2, aunque en ese capítulo la 2-cola que se mostró es aquella a la que se le han removido los ciclos, cuando ésta tiene ciclos adentro es de la forma

$$T_2(ab) = \dot{G}_{aj}\dot{G}_{bi} + \frac{1}{2}\dot{G}_{ab}(\dot{G}_{ai} - \dot{G}_{bi}). \quad (6.11)$$

La 3-cola tiene la siguiente estructura

$$T_3(abc) = \dot{G}_{ai}\dot{G}_{bj}\dot{G}_{ck} + \frac{1}{2}\left[\dot{G}_{ab}(\dot{G}_{ck}(\dot{G}_{ai} - \dot{G}_{bi}) + \dot{G}_{ci}(\dot{G}_{ca} - \dot{G}_{cb})) + 3 \text{ permutaciones}\right]. \quad (6.12)$$

En estas expresiones como en la que sigue, se suma sobre  $i, j, k, l$ . Finalmente se tiene la expresión más complicada, la 4-cola

$$\begin{aligned} T_4(abcd) = & \dot{G}_{ai}\dot{G}_{bj}\dot{G}_{ck}\dot{G}_{dl} + \left[\frac{1}{2}\dot{G}_{ab}(\dot{G}_{ci}\dot{G}_{dj}(\dot{G}_{ak} - \dot{G}_{bk}) + [\dot{G}_{ci}(\dot{G}_{da} - \dot{G}_{db})\dot{G}_{dk} + (c \leftrightarrow d)])\right. \\ & \left. + [(\dot{G}_{ca} - \dot{G}_{cb})\dot{G}_{dc}\dot{G}_{dk} + (c \leftrightarrow d)] + 5 \text{ perm.}\right] \\ & + \left[\frac{1}{4}\dot{G}_{ab}\dot{G}_{cd}((\dot{G}_{ai} - \dot{G}_{bi})(\dot{G}_{cj} - \dot{G}_{dk})\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\dot{G}_{ac} - \dot{G}_{bc} - \dot{G}_{ad} + \dot{G}_{bd})(\dot{G}_{ai} + \dot{G}_{bi} - \dot{G}_{ci} - \dot{G}_{di})) + 2 \text{ perm.}\right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dentro de estas colas no debe aparecer ningún ciclo, como ya se comentó. Para el caso escalar las cancelaciones de estos ciclos dentro de las colas se pueden lograr gracias al arreglo de los signos que aparece en  $Q_6$ . El arreglo de signos se puede cambiar a todos “+” siempre y cuando se remuevan los ciclos de las colas de alguna manera. Esto se puede lograr con la introducción de algunos símbolos que se hagan cero para ciertos índices (como los usados en la 2-cola en el capítulo 2); el inconveniente es que se deben expandir los productos de las sumas, lo cual no es lo deseado.

Desafortunadamente el arreglo de signos que ayuda a remover los ciclos de las colas en  $Q_6$  escalar, no funciona para el caso espinorial. Como se mostró anteriormente para pasar de escalar a espinorial, se deben cambiar los ciclos de la forma

$$\dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} \longrightarrow \dot{G}_{Bi_1i_2}\dot{G}_{Bi_2i_3}\cdots\dot{G}_{Bi_ni_1} - G_{Fi_1i_2}G_{Fi_2i_3}\cdots G_{Fi_ni_1},$$

pero este cambio tiene sentido mientras se garantice que no hay ningún ciclo dentro de las colas, lo cual no se está haciendo al recurrir al arreglo de signos.

Para lograr quitar los ciclos de las colas, se analiza la estructura de éstas y se sustraen los términos correspondientes, tratando de mantener las estructuras lo más compactas posible. Así, para el caso de 6-puntos en QED espinorial, el numerador adquiere la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
Q_6 &= Q_6^6 + Q_6^5 + Q_6^4 + Q_6^3 + Q_6^2 + Q_6^{42} + Q_6^{33} + Q_6^{32} + Q_6^{22} + Q_6^{222} \\
Q_6^6 &= G^{(s)}(123456) + \text{perm.} \quad \left(\frac{5!}{2} = 60 \text{ en total}\right) \\
Q_6^5 &= G^{(s)}(12345)T_1(6) + \text{perm.} \quad \left(\frac{4!}{2} \binom{6}{1} = 72 \text{ en total}\right) \\
Q_6^4 &= G^{(s)}(1234)T_2(56) - G^{(s)}(1234)\dot{G}(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\
Q_6^3 &= G^{(s)}(123)T_3(456) - G^{(s)}(123)\dot{G}(456) - G^{(s)}(123)\dot{G}(45)T_1(6) + \text{perm.} \quad (20 \text{ en total}) \\
Q_6^2 &= G^{(s)}(12)T_4(3456) - 2G^{(s)}(12)\dot{G}(34)\bar{T}_2(56) - 3G^{(s)}(12)\dot{G}(34)\dot{G}(56) \\
&\quad - G^{(s)}(12)\dot{G}(3456) - G^{(s)}(12)\dot{G}(345)T_1(6) + \text{perm.} \quad (15 \text{ en total}) \\
Q_6^{42} &= G^{(s)}(1234)G^{(s)}(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\
Q_6^{33} &= G^{(s)}(123)G^{(s)}(456) + \text{perm.} \quad (10 \text{ en total}) \\
Q_6^{32} &= G^{(s)}(123)G^{(s)}(45)T_1(6) + \text{perm.} \quad (60 \text{ en total}) \\
Q_6^{22} &= G^{(s)}(12)G^{(s)}(34)T_2(56) - 3G^{(s)}(12)G^{(s)}(34)\dot{G}(56) + \text{perm.} \quad (45 \text{ en total}) \\
Q_6^{222} &= G^{(s)}(12)G^{(s)}(34)G^{(s)}(56) + \text{perm.} \quad (15 \text{ en total}),
\end{aligned} \tag{6.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
G^{(s)}(i_1 i_2 i_3 \cdots i_n) &\equiv Z_n(i_1 i_2 i_3 \cdots i_n)(\dot{G}_{B i_1 i_2} \dot{G}_{B i_2 i_3} \cdots \dot{G}_{B i_n i_1} - G_{F i_1 i_2} G_{F i_2 i_3} \cdots G_{F i_n i_1}), \\
\dot{G}(i_1 i_2 i_3 \cdots i_n) &\equiv \dot{G}_{B i_1 i_2} \dot{G}_{B i_2 i_3} \cdots \dot{G}_{B i_n i_1},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$\bar{T}_2(ij)$  es la 2-cola sin ciclos que se introdujo en el capítulo 2,

$$\bar{T}_2(ab) = \left[ \lambda_{ijab} \dot{G}_{Baj} \varepsilon_a \cdot k_j \dot{G}_{Bbi} \varepsilon_b \cdot k_i + \frac{1}{2} \dot{G}_{Bab} \varepsilon_l \cdot \varepsilon_b \left( \kappa_{ib} \dot{G}_{Bai} k_a \cdot k_i - \kappa_{ia} \dot{G}_{Bmi} k_b \cdot k_i \right) \right]. \tag{6.16}$$

Ésta no es una estructura muy grande como para traer problemas en la evaluación numérica. Con la modificación en el denominador para el caso espinorial se procede a implementar la integración numérica.

Los momenta de referencia para los  $\varepsilon$ 's de la forma  $(k_6, k_6, k_1, k_1, k_1, k_1)$ , llevan a las siguientes cancelaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_1 &= 0, & i &= 2, \dots, 6, \\ \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_6 &= \varepsilon_4 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_5 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_6 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_5 \cdot \varepsilon_4 = \varepsilon_6 \cdot \varepsilon_4 = \varepsilon_6 \cdot \varepsilon_5 = 0, \\ \varepsilon_1 \cdot k_6 &= \varepsilon_2 \cdot k_6 = \varepsilon_3 \cdot k_1 = \varepsilon_4 \cdot k_1 = \varepsilon_5 \cdot k_1 = \varepsilon_6 \cdot k_1 = 0. \end{aligned}$$

(6.17)

Reuniendo todo lo anterior se obtiene el siguiente resultado:

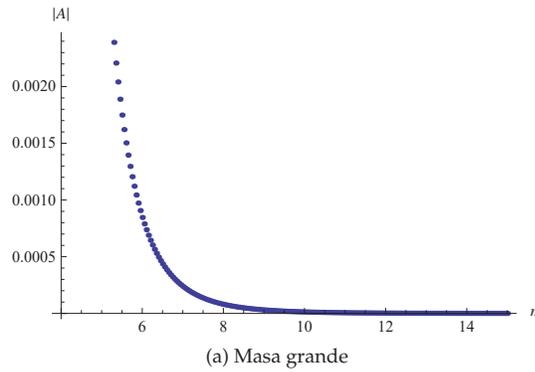


Figura 6.3: Resultado numérico  $\mathcal{A}_{spin}(++--)$

En esta amplitud todavía se puede trabajar mas a fin de optimizar la evaluación numérica.

En este capítulo, se calculó por primera vez una amplitud de 6 fotones utilizando MATHEMATICA, algo que es impensable con el formalismo tradicional. Se espera entonces que los resultados de este trabajo motiven a la comunidad a mirar hacia el formalismo línea de mundo, a la hora de realizar cálculos perturbativos en teoría de campos.

## Capítulo 7

### Conclusiones

Se mostró como utilizando el formalismo línea de mundo para el cálculo de las amplitudes, se pueden obtener resultados que con el formalismo tradicional sería una tarea muy complicada.

En el segundo capítulo vió una introducción al formalismo línea de mundo para calcular las amplitudes haciendo uso de éste, empesando a notarse las ventajas de este ante el tradicional (p.e. en el paso de QED escalar a espinorial, no hay que sumar sobre permutaciones de los diagramas, no hay que regularizar). En el tercer capítulo se usó el resultado del capítulo anterior para calcular amplitudes de 4 fotones on-shell sin masa con las polarizaciones usuales, recuperando resultados conocidos. Se calculó esta misma amplitud tomando polarizaciones arbitrarias, algo que no se había realizado antes. En el cuarto capítulo se fué al caso masivo para la amplitud de 4 fotones on-shell, se realizó la integración numérica para las amplitudes usuales usando sólomente MATHEMATICA; en la otra parte se calcularon los terminos subdominates de la expansión para masa grande, los cuales no eran conocidos ,esto se hizo nuevamente para las polarizaciones usuales; al final de este capítulo se realizó una comparación entre estos dos resultados (la expansión en masa grande y el numérico). En el quinto capítulo calculó la expansión para masa grande de la amplitud de 4 fotones off-shell, viendo de manera manifiesta la invariancia de calibración en esta expansión. Cabe anotar que para la amplitud de 4 fotones off-shell no se tiene casi nungún resultado, por tanto este es un aporte nuevo también. En el capítulo final de nuevo se realizó un analisis numérico para algunos casos de la amplitud de 6 fotones on-shell masiva, siendo esta la primera vez que se realiza un cálculo numérico de una amplitud de este orden usando un programa como MATHEMATICA sólomente, esto con el propósito de mostrar las ventajas del formalismo línea de mundo.

## Apéndice A

### Técnica Spinor-Helicity

En este trabajo se han usado las mismas convenciones en Spinor-Helicity que son empleadas en (Dixon, 1996). Las matrices de  $\gamma$  se toman en la representación de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Se tienen las soluciones de la ecuación de Dirac sin masa

$$u_+(k) = v_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} e^{i\varphi_k} \\ \sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} e^{i\varphi_k} \end{bmatrix}, \quad u_-(k) = v_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{k^-} e^{-i\varphi_k} \\ -\sqrt{k^+} \\ -\sqrt{k^-} e^{-i\varphi_k} \\ \sqrt{k^+} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$e^{\pm i\varphi_k} = \frac{k^1 \pm ik^2}{\sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}} = \frac{k^1 \pm ik^2}{\sqrt{k^+ k^-}}, \quad k^\pm = k^0 \pm k^3. \quad (\text{A.3})$$

Se adopta ahora una notación para los espinores, en el caso donde se tienen varios momenta

$$|i\rangle \equiv |k_i\rangle \equiv u_+(k_i) = v_-(k_i), \quad |i] \equiv |k_i] \equiv u_-(k_i) = v_+(k_i) \quad (\text{A.4})$$

$$\langle i| \equiv \langle k_i| \equiv \overline{u_-(k_i)} = \overline{v_+(k_i)}, \quad [i| \equiv [k_i| \equiv \overline{u_+(k_i)} = \overline{v_-(k_i)}. \quad (\text{A.5})$$

Con esto ya se pueden definir los productos spinoriales como sigue

$$\begin{aligned} \langle ij \rangle &\equiv \overline{u_-(k_i)} u_+(k_j) = \sqrt{k_i^- k_j^+} e^{i\varphi_{k_i}} + \sqrt{k_i^- k_j^-} e^{i\varphi_{k_j}} = \sqrt{|s_{ij}|} e^{i\phi_{ij}} \\ [ij] &\equiv \overline{u_+(k_i)} u_-(k_j) = -\sqrt{k_i^- k_j^+} e^{-i\varphi_{k_i}} + \sqrt{k_i^+ k_j^-} e^{-i\varphi_{k_j}} = \sqrt{|s_{ij}|} e^{-i(\phi_{ij} + \pi)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

aquí  $k_i^0 > 0, k_j^0 > 0, s_{ij} = (k_i + k_j)^2 = 2k_i \cdot k_j$ , y

$$\cos(\phi_{ij}) = \frac{k_i^1 k_j^+ - k_j^1 k_i^+}{\sqrt{|s_{ij}| k_i^+ k_j^+}}, \quad \sin(\phi_{ij}) = \frac{k_i^2 k_j^+ - k_j^2 k_i^+}{\sqrt{|s_{ij}| k_i^+ k_j^+}}. \quad (\text{A.7})$$

El producto espinorial para el caso de energías negativas se define por continuación analítica del caso de energía positiva, en la fórmula (A.6) se reemplaza  $k_i$  por  $-k_i$  si  $k_i^0 < 0$ , igualmente para  $k_j$ ; y con un factor extra multiplicativo de  $i$  por cada partícula con energía negativa. Para  $[ij]$  se usa

$$\langle ij \rangle [j\bar{i}] = \text{tr} \left( \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \not{k}_i \not{k}_j \right) = 2k_i \cdot k_j = s_{ij}. \quad (\text{A.8})$$

Spinor-Helicity trae consigo una gran cantidad de identidades útiles.

Tomando el cuadrado de la ecuación de Dirac no-masiva se obtiene la ecuación de Klein-Gordon no masiva también, los vectores que satisfacen esa ecuación se pueden escribir en términos de espinores como

$$[i|\gamma^a|i\rangle = \langle i|\gamma^a|i] = k_i^a. \quad (\text{A.9})$$

Usando el proyector quiral

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \quad (\text{A.10})$$

se tiene también

$$\begin{aligned} |i\rangle [i] &= P_+ \not{k}_i \\ [i] \langle i| &= P_- \not{k}_i, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y con esta se deriva

$$\not{k}_i = |i\rangle [i] + [i] \langle i| \quad (\text{A.12})$$

Los espinores utilizados aquí tienen una propiedad adicional en el producto, antisimetría

$$\langle ij \rangle = -\langle ji \rangle, \quad [ij] = -[ji], \quad \langle ii \rangle = [ii] = 0. \quad (\text{A.13})$$

A continuación algunas identidades

1) Arreglo de Fierz:

$$[i|\gamma^a|j][k|\gamma_a|l] = 2[ik]\langle lj\rangle. \quad (\text{A.14})$$

2) Conjugación de la carga de la corriente:

$$[i|\gamma^a|j] = \langle j|\gamma^a|i\rangle. \quad (\text{A.15})$$

3) Identidad de Schouten:

$$\langle ij\rangle\langle kl\rangle = \langle ik\rangle\langle jl\rangle + \langle il\rangle\langle kj\rangle \quad (\text{A.16})$$

La conservación del momentum  $\sum_i^n k_i^a = 0$  trae al juego otras identidades

$$\sum_i^n [ji]\langle il\rangle = 0. \quad (\text{A.17})$$

La identidad de Schouten lleva a la cancelación del siguiente determinante, en los casos  $N=4,6$ :

$$\det([ij]) = \det(\langle ij\rangle) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Los vectores de polarización para un bosón de calibración no masivo en términos de espinores se definen como sigue

$$\varepsilon_a^+(k, q) = \frac{\langle q|\gamma_a|k\rangle}{\sqrt{2}\langle qk\rangle}, \quad \varepsilon_a^-(k, q) = -\frac{[q|\gamma_a|k\rangle}{\sqrt{2}[qk]}, \quad (\text{A.19})$$

donde  $k$  es el momentum del bosón y  $q$  es un vector auxiliar no masivo, llamado momentum de referencia. La libertad de escogencia de éste está relacionada con la invariancia de calibración. Estos vectores de helicidad cumplen con las propiedades deseadas

$$\varepsilon^\pm(k, q) \cdot k = 0. \quad (\text{A.20})$$

En la conjugación compleja se invierte la helicidad

$$(\varepsilon_a^+)^* = \varepsilon_a^-. \quad (\text{A.21})$$

El denominador que aparece en la definición da la normalización,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^+ \cdot (\varepsilon^+)^* &= \varepsilon^+ \cdot \varepsilon^- = -\frac{1}{2} \frac{\langle q|\gamma^a|k\rangle\langle q|\gamma_a|k\rangle}{\langle qk\rangle[qk]} = -1 \\
\varepsilon^+ \cdot (\varepsilon^-)^* &= \varepsilon^+ \cdot \varepsilon^+ = \frac{1}{2} \frac{\langle q|\gamma^a|k\rangle\langle q|\gamma_a|k\rangle}{\langle qk\rangle^2} = 0l
\end{aligned}
\tag{A.22}$$

los resultados se obtienen utilizando el arreglo de Fierz y la conjugación de la carga.

La efectividad de la técnica se obtiene al escoger momenta de referencia  $q$  adecuados, que lleven a la cancelación de un gran número de términos en las amplitudes. Las siguientes identidades llevan a las cancelaciones

$$\varepsilon_i^\pm(q) \cdot q = 0, \tag{A.23}$$

$$\varepsilon_i^+(q) \cdot \varepsilon_j^+(q) = \varepsilon_i^-(q) \cdot \varepsilon_j^-(q) = 0, \tag{A.24}$$

$$\varepsilon_i^+(k_j) \cdot \varepsilon_j^-(q) = \varepsilon_i^+(q) \cdot \varepsilon_j^-(k_i) = 0, \tag{A.25}$$

$$\not{\varepsilon}_i^+(k_j)|j\rangle = \not{\varepsilon}_i^-(k_j)|j\rangle = 0, \tag{A.26}$$

$$[j|\not{\varepsilon}_i^-(k_j) = \langle j|\not{\varepsilon}_i^+(k_j) = 0. \tag{A.27}$$

Según como convenga, se deben buscar momenta de referencia adecuados, para las polarizaciones dadas.

## Apéndice B

### Identidades

En este apéndice se muestran algunas identidades usadas, otras encontradas, a lo largo del trabajo.

1) Identidad asociada a la conservación del momentum

$$\sum_{i<j}^N [ij]^2 = \sum_{i<j}^N \langle ij \rangle^2 = 0. \quad (\text{B.1})$$

La anterior se demuestra utilizando la definición del producto espinorial y luego la conservación del momentum (ver Apéndice C).

2) Identidades que involucran al tensor  $F$

• Como el momentum de referencia  $q$  está asociado a la invariancia de calibración, el tensor invariante  $F_{ab}$  no depende de  $q$ . Con  $\varepsilon_i^\pm(q) \equiv \varepsilon^\pm(k_i, q)$ , y realizando un poco de álgebra se obtiene

$$F_i^{+ab} = k_i^{[a} \varepsilon_i^{+b]} = \frac{[i|\gamma^a \gamma^b|i]}{2\sqrt{2}} \quad (\text{B.2})$$

independiente de  $q$ . En este caso se tomó  $F^+$ , pero funciona análogamente para  $F^-$

$$F_i^{-ab} = -\frac{\langle i|\gamma^a \gamma^b|i\rangle}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.3})$$

• Identidades con (anti)conmutadores y traza:

$$\{F_i^+, F_j^+\}^{ab} = -\frac{1}{2}[ij]^2 \eta^{ab}, \quad (\text{B.4})$$

$$\{F_i^-, F_j^-\}^{ab} = -\frac{1}{2}\langle ij \rangle^2 \eta^{ab}, \quad (\text{B.5})$$

$$[F_i^+, F_j^-]^{ab} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{tr}(F_i^+ F_j^-) = 0. \quad (\text{B.7})$$

• Productos:

$$\begin{aligned} (F_1^+ F_2^+)^{ab} &= \frac{[12]}{2\langle 12 \rangle} [k_1^a k_2^b - k_2^a k_1^b + k_1 \cdot k_2 \eta^{ab} - i\epsilon^{abcd} k_{1c} k_{2d}] \\ &= \frac{[12]}{4\langle 12 \rangle} \text{tr}(P_+ \not{k}_1 \not{k}_2 \gamma^a \gamma^b), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}
(F_1^- F_2^-)^{ab} &= \frac{\langle 12 \rangle}{2[12]} [k_1^a k_2^b - k_2^a k_1^b + k_1 \cdot k_2 \eta^{ab} + i\epsilon^{abcd} k_{1c} k_{2d}] \\
&= \frac{\langle 12 \rangle}{4[12]} \text{tr} (P_- \not{k}_1 \not{k}_2 \gamma^a \gamma^b),
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$(F_1^+ F_2^-)^{ab} = (F_1^- F_2^+)^{ab} = -\frac{1}{4} [1|\gamma^a|2\rangle [1|\gamma^b|2\rangle]. \tag{B.10}$$

• trazas de productos de  $F'$ s:

$$\text{tr} (F_1^+ F_2^+ \cdots F_n^+) = 2^{1-n/2} (-1)^n [12][23] \cdots [n1] \tag{B.11}$$

$$\text{tr} (F_1^- F_2^- \cdots F_n^-) = 2^{1-n/2} \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \cdots \langle n1 \rangle \tag{B.12}$$

$$\text{tr} (F_1^+ F_2^+ \cdots F_k^+ F_1^- F_2^- \cdots F_l^-) = \frac{1}{4} \text{tr} (F_1^+ F_2^+ \cdots F_k^+) \text{tr} (F_1^- F_2^- \cdots F_l^-). \tag{B.13}$$

Estas trazas son equivalentes a los ciclos de lorentz utilizados en las amplitudes de fotones en el formalismo línea de mundo.

3) Propiedades de los invariantes de permutaciones  $\sigma_n$

Recordando los  $\sigma_n$  que se introdujeron anteriormente para las amplitudes de 4 fotones

$$\sigma_n := s^n + t^n + u^n \tag{B.14}$$

donde  $s + t + u = 0 = \sigma_1$ . Éstos tienen unas características peculiares, los siete primeros tienen la forma

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= s^2 + t^2 + u^2, \\
\sigma_3 &= 3stu, \\
\sigma_4 &= \frac{1}{2}\sigma_2^2, \\
\sigma_5 &= \frac{5}{6}\sigma_2\sigma_3, \\
\sigma_6 &= \frac{1}{3}\sigma_3^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^3, \\
\sigma_7 &= \frac{7}{12}\sigma_2^2\sigma_3.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Como se puede ver, sólomente se necesitan los dos primeros para generar los que siguen.

## Apéndice C

### Implementaciones en MATHEMATICA Para el Cálculo de la Amplitud de 6-fotones

A continuación de adjuntan las implementaciones realizadas en MATHEMATICA para calcular:

- Productos espinoriales con `spinor.helicity`;
- Amplitud  $(+ + - - --)$  espinorial;
- Demostración de la nueva identidad (B.1) mencionada en el apéndice.

## Spinor - helicity products

```

(*implementation of the spinor products with the same conventions of Dixon*)

(*metric and inner product*)
η := {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, -1}}

kkp := {kk[i_, j_] → k[i].η.k[j]}

(*k_ & k_*)

p[k_] := Part[k, 1] + Part[k, 4]
m[k_] := Part[k, 1] - Part[k, 4]

(*k^t & k^-t*)

tp[k_] := Part[k, 2] + i Part[k, 3]
tm[k_] := Part[k, 2] - i Part[k, 3]

(*angular brackets spinor products
(here p indicates positive energy and m indicates negative energy,
on the corresponding argument)*)

App[i_, j_] := 
$$\frac{tp[k[i]] p[k[j]] - tp[k[j]] p[k[i]]}{\sqrt{p[k[i]] p[k[j]]}}$$


Apm[i_, j_] := i 
$$\frac{tp[k[i]] p[-k[j]] - tp[-k[j]] p[k[i]]}{\sqrt{p[k[i]] p[-k[j]]}}$$


Amp[i_, j_] := i 
$$\frac{tp[-k[i]] p[k[j]] - tp[k[j]] p[-k[i]]}{\sqrt{p[-k[i]] p[k[j]]}}$$


Amm[i_, j_] := - 
$$\frac{tp[-k[i]] p[-k[j]] - tp[-k[j]] p[-k[i]]}{\sqrt{p[-k[i]] p[-k[j]]}}$$


(*square brackets spinor products (same as before for p and m)*)

Spp[i_, j_] := 
$$\frac{2 * kk[i, j]}{App[j, i]} /. kkp$$


Spm[i_, j_] := 
$$\frac{2 * kk[i, j]}{Apm[j, i]} /. kkp$$


Smp[i_, j_] := 
$$\frac{2 * kk[i, j]}{Amp[j, i]} /. kkp$$


Smm[i_, j_] := 
$$\frac{2 * kk[i, j]}{Amm[j, i]} /. kkp$$


(*product epsilon.k (ek[i,j]) evaluation (e plus)
(here the m and p go to the corresponding argument, q is the reference momentum)*)

```

$$\text{ekppp}[q, i, j] := \frac{\text{App}[q, j] * \text{Spp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{App}[q, i]}$$

$$\text{ekppm}[q, i, j] := \frac{\text{Apm}[q, j] * \text{Smp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{App}[q, i]}$$

$$\text{ekpmm}[q, i, j] := \frac{\text{Apm}[q, j] * \text{Smm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Apm}[q, i]}$$

$$\text{ekmmm}[q, i, j] := \frac{\text{Amm}[q, j] * \text{Smm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Amm}[q, i]}$$

$$\text{ekmmp}[q, i, j] := \frac{\text{Amp}[q, j] * \text{Spm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Amm}[q, i]}$$

$$\text{ekmpp}[q, i, j] := \frac{\text{Amp}[q, j] * \text{Spp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Amp}[q, i]}$$

$$\text{ekpmp}[q, i, j] := \frac{\text{App}[q, j] * \text{Spm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Apm}[q, i]}$$

$$\text{ekmpm}[q, i, j] := \frac{\text{Amm}[q, j] * \text{Smp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Amp}[q, i]}$$

(\*ek[i,j] evaluation (e minus) the conventions are the same as before\*)

$$\text{nekppp}[q, i, j] := - \frac{\text{Spp}[q, j] * \text{App}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Spp}[q, i]}$$

$$\text{nekppm}[q, i, j] := - \frac{\text{Spm}[q, j] * \text{Amp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Spp}[q, i]}$$

$$\text{nekpmm}[q, i, j] := - \frac{\text{Spm}[q, j] * \text{Amm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Spm}[q, i]}$$

$$\text{nekmmm}[q, i, j] := - \frac{\text{Smm}[q, j] * \text{Amm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Smm}[q, i]}$$

$$\text{nekmmp}[q, i, j] := - \frac{\text{Smp}[q, j] * \text{Apm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Smm}[q, i]}$$

$$\text{nekmpp}[q, i, j] := - \frac{\text{Smp}[q, j] * \text{App}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Smp}[q, i]}$$

$$\text{nekpmp}[q, i, j] := - \frac{\text{Spp}[q, j] * \text{Apm}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Spm}[q, i]}$$

$$\text{nekmpm}[q, i, j] := - \frac{\text{Smm}[q, j] * \text{Amp}[j, i]}{\sqrt{2} \text{Smp}[q, i]}$$

(\*ee[i,j] evaluation (e[i] minus, e[j] plus)\*)

$$\text{eepmmp}[q1, i1, q2, i2] := - \frac{\text{Spp}[q1, i2] * \text{Amm}[q2, i1]}{\text{Spm}[q1, i1] * \text{Amp}[q2, i2]}$$

## Spinor (++)

### momenta for the evaluation of the amplitude

```
k[1] = {3.~, -2.1213203435596424~, -1.0606601717798212~, -1.8371173070873834~}
k[2] = {3.~, 2.1213203435596424~, 1.0606601717798212~, 1.8371173070873834~}
k[3] = {-2.~, -2.~, 0.~, 0.~}
k[4] = {-0.8571428571428571~, 0.3157894736842105~, -0.796850604480708~, 0.~}
k[5] = {-1.~, 0.18421052631578946~, -0.464829519280413~, -0.8660254037844386~}
k[6] = {-2.142857142857143~, 1.5~, 1.261680123761121~, 0.8660254037844386~}
```

### e.k products rules, reference momenta for the e -> (k[6], k[6], k[1], k[1], k[1], k[1])

```
kk[i_, j_] := 0
kk[i_, i_] := kk[j, i] /; i > j
```

```
ee[i_, j_] := 0
ee[j_, i_] := ee[i, j] /; i > j
```

```
ek[l_, l_] := 0
```

(\*this is the rule taht will lead to the cancelations\*)

```
ekval := {ek[1, 2] → ekmp[6, 1, 2], ek[1, 3] → ekmp[6, 1, 3], ek[1, 4] → ekmp[6, 1, 4],
  ek[1, 5] → ekmp[6, 1, 5], ek[1, 6] → 0, ek[2, 1] → ekmp[6, 2, 1], ek[2, 3] → ekmp[6, 2, 3],
  ek[2, 4] → ekmp[6, 2, 4], ek[2, 5] → ekmp[6, 2, 5], ek[2, 6] → 0, ek[3, 1] → 0,
  ek[3, 2] → nekmp[1, 3, 2], ek[3, 4] → nekmp[1, 3, 4], ek[3, 5] → nekmp[1, 3, 5],
  ek[3, 6] → nekmp[1, 3, 6], ek[4, 1] → 0, ek[4, 2] → nekmp[1, 4, 2], ek[4, 3] → nekmp[1, 4, 3],
  ek[4, 5] → nekmp[1, 4, 5], ek[4, 6] → nekmp[1, 4, 6], ek[5, 1] → 0, ek[5, 2] → nekmp[1, 5, 2],
  ek[5, 3] → nekmp[1, 5, 3], ek[5, 4] → nekmp[1, 5, 4], ek[5, 6] → nekmp[1, 5, 6], ek[6, 1] → 0,
  ek[6, 2] → nekmp[1, 6, 2], ek[6, 3] → nekmp[1, 6, 3], ek[6, 4] → nekmp[1, 6, 4],
  ek[6, 5] → nekmp[1, 6, 5], ee[2, 1] → 0, ee[3, 1] → 0, ee[4, 1] → 0, ee[5, 1] → 0, ee[6, 1] → 0,
  ee[3, 2] → eekmp[1, 3, 6, 2], ee[4, 2] → eekmp[1, 4, 6, 2], ee[5, 2] → eekmp[1, 5, 6, 2],
  ee[6, 2] → 0, ee[4, 3] → 0, ee[5, 3] → 0, ee[6, 3] → 0, ee[5, 4] → 0, ee[6, 4] → 0, ee[6, 5] → 0}
```

### green functions

```
G[i_, j_] := Abs[u[i] - u[j]] - (u[i] - u[j])^2
Gp[i_, j_] := Sign[u[i] - u[j]] - 2 * (u[i] - u[j])
Gf[i_, j_] := Sign[u[i] - u[j]]
```

(\*properties\*)

```
G[i_, j_] := G[j, i] /; i > j
G[i_, i_] := 0
Gp[i_, j_] := -Gp[j, i] /; i > j
Gp[i_, i_] := 0
Gf[i_, j_] := -Gf[j, i] /; i > j
Gf[i_, i_] := 0
```

(\*with company\*)

```
Gek[i_, j_] := Gp[i, j] * ek[i, j]
Gee[i_, j_] := Gp[i, j] * ee[i, j]
Gkk[i_, j_] := Gp[i, j] * kk[i, j]
```

```
Gek[i_, i_] := 0
Gee[i_, i_] := 0
Gkk[i_, i_] := 0
```

(\*m-cycles for the scalar case\*)

```
Gek[i_, j_] := Gp[i, j] * ek[i, j]
Gp6[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, m] * Gp[m, n] * Gp[n, i]
Gp42[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, i] * Gp[m, n] * Gp[n, m]
Gp33[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i] * Gp[l, m] * Gp[m, n] * Gp[n, l]
Gp222[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Gp[i, j] * Gp[j, i] * Gp[k, l] * Gp[l, k] * Gp[m, n] * Gp[n, m]
Gp5[i_, j_, k_, l_, m_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, m] * Gp[m, i]
Gp4[i_, j_, k_, l_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, i]
Gp32[i_, j_, k_, l_, m_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i] * Gp[l, m] * Gp[m, l]
Gp3[i_, j_, k_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i]
Gp22[i_, j_, k_, l_] := Gp[i, j] * Gp[j, i] * Gp[k, l] * Gp[l, k]
Gp2[i_, j_] := Gp[i, j] * Gp[j, i]
```

(\*m-cycles for the spinor case\*)

```
Gs6[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, m] * Gp[m, n] * Gp[n, i] -
  Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, l] * Gf[l, m] * Gf[m, n] * Gf[n, i]
Gs42[i_, j_, k_, l_, m_, n_] :=
  (Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, i] - Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, l] * Gf[l, i]) *
  (Gp[m, n] * Gp[n, m] - Gf[m, n] * Gf[n, m])
Gs33[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := (Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i] - Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, i]) *
  (Gp[l, m] * Gp[m, n] * Gp[n, l] - Gf[l, m] * Gf[m, n] * Gf[n, l])
Gs222[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := (Gp[i, j] * Gp[j, i] - Gf[i, j] * Gf[j, i]) *
  (Gp[k, l] * Gp[l, k] - Gf[k, l] * Gf[l, k]) * (Gp[m, n] * Gp[n, m] - Gf[m, n] * Gf[n, m])
Gs5[i_, j_, k_, l_, m_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, m] * Gp[m, i] -
  Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, l] * Gf[l, m] * Gf[m, i]
Gs4[i_, j_, k_, l_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, l] * Gp[l, i] -
  Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, l] * Gf[l, i]
Gs32[i_, j_, k_, l_, m_] := (Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i] - Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, i]) *
  (Gp[l, m] * Gp[m, l] - Gf[l, m] * Gf[m, l])
Gs3[i_, j_, k_] := Gp[i, j] * Gp[j, k] * Gp[k, i] - Gf[i, j] * Gf[j, k] * Gf[k, i]
Gs22[i_, j_, k_, l_] :=
  (Gp[i, j] * Gp[j, i] - Gf[i, j] * Gf[j, i]) * (Gp[k, l] * Gp[l, k] - Gf[k, l] * Gf[l, k])
Gs2[i_, j_] := Gp[i, j] * Gp[j, i] - Gf[i, j] * Gf[j, i]
```

## ■ lorentz cycles

```

z2[α_, β_] := ek[α, β] * ek[β, α] - ee[α, β] * kk[α, β]
z3[α_, β_, γ_] := ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, α] - ek[α, γ] ek[β, α] ek[γ, β] +
  ee[β, γ] ek[α, γ] kk[α, β] - ee[α, γ] ek[β, γ] kk[α, β] - ee[β, γ] ek[α, β] kk[α, γ] +
  ee[α, β] ek[γ, β] kk[α, γ] + ee[α, γ] ek[β, α] kk[β, γ] - ee[α, β] ek[γ, α] kk[β, γ]
z4[α_, β_, γ_, δ_] := ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, α] + ek[α, δ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] +
  ee[γ, δ] ek[α, δ] ek[β, γ] kk[α, β] - ee[α, δ] ek[β, γ] ek[γ, δ] kk[α, β] -
  ee[β, γ] ek[α, δ] ek[δ, γ] kk[α, β] - ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] kk[α, δ] +
  ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] kk[α, δ] - ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] kk[α, δ] -
  ee[γ, δ] ek[α, δ] ek[β, α] kk[β, γ] + ee[α, δ] ek[β, α] ek[γ, δ] kk[β, γ] -
  ee[α, β] ek[γ, δ] ek[δ, α] kk[β, γ] + ee[α, β] ee[γ, δ] kk[α, δ] kk[β, γ] -
  ee[α, δ] ek[β, α] ek[γ, β] kk[γ, δ] - ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, α] kk[γ, δ] +
  ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, α] kk[γ, δ] + ee[α, δ] ee[β, γ] kk[α, β] kk[γ, δ]
z5[α_, β_, γ_, δ_, ε_] := ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, α] -
  ek[α, ε] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] +
  ee[δ, ε] ek[α, ε] ek[β, γ] ek[γ, δ] kk[α, β] - ee[α, ε] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[α, β] -
  ee[γ, δ] ek[α, ε] ek[β, γ] ek[ε, δ] kk[α, β] + ee[β, γ] ek[α, ε] ek[δ, γ] ek[ε, δ] kk[α, β] -
  ee[δ, ε] ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] kk[α, ε] + ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[ε, δ] kk[α, ε] -
  ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] kk[α, ε] + ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] kk[α, ε] -
  ee[δ, ε] ek[α, ε] ek[β, α] ek[γ, δ] kk[β, γ] + ee[α, ε] ek[β, α] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[β, γ] -
  ee[α, β] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, α] kk[β, γ] + ee[γ, δ] ek[α, ε] ek[β, α] ek[ε, δ] kk[β, γ] +
  ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, δ] kk[α, ε] kk[β, γ] - ee[α, β] ee[γ, δ] ek[ε, δ] kk[α, ε] kk[β, γ] +
  ee[δ, ε] ek[α, ε] ek[β, α] ek[γ, β] kk[γ, δ] - ee[α, ε] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, ε] kk[γ, δ] -
  ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, ε] ek[ε, α] kk[γ, δ] + ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, ε] ek[ε, α] kk[γ, δ] -
  ee[β, γ] ee[δ, ε] ek[α, ε] kk[α, β] kk[γ, δ] + ee[α, ε] ee[β, γ] ek[δ, ε] kk[α, β] kk[γ, δ] +
  ee[δ, ε] ee[δ, ε] ek[α, β] kk[α, ε] kk[γ, δ] - ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, β] kk[α, β] kk[γ, δ] +
  ee[α, ε] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] kk[δ, ε] - ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[ε, α] kk[δ, ε] +
  ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] ek[ε, α] kk[δ, ε] - ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, α] kk[δ, ε] +
  ee[α, ε] ee[γ, δ] ek[β, γ] kk[α, β] kk[δ, ε] - ee[α, ε] ee[β, γ] ek[δ, γ] kk[α, β] kk[δ, ε] -
  ee[α, ε] ee[γ, δ] ek[β, α] kk[β, γ] kk[δ, ε] + ee[α, β] ee[γ, δ] ek[ε, α] kk[β, γ] kk[δ, ε]
z6[α_, β_, γ_, δ_, ε_, φ_] := ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, φ] ek[φ, α] +
  ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] +
  ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[α, β] -
  ee[α, φ] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, φ] kk[α, β] -
  ee[δ, ε] ek[α, φ] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[φ, ε] kk[α, β] +
  ee[γ, δ] ek[α, φ] ek[β, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, β] -
  ee[β, γ] ek[α, φ] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, β] -
  ee[ε, φ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[α, φ] +
  ee[δ, ε] ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] -
  ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] +
  ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] -
  ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] -
  ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[β, γ] +
  ee[α, φ] ek[β, α] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, φ] kk[β, γ] -
  ee[α, β] ek[γ, δ] ek[δ, ε] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[β, γ] +
  ee[δ, ε] ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, δ] ek[φ, ε] kk[β, γ] -
  ee[γ, δ] ek[α, φ] ek[β, α] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[β, γ] +
  ee[α, β] ee[ε, φ] ek[γ, δ] ek[δ, ε] kk[α, φ] kk[β, γ] -

```

```

ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] kk[β, γ] +
ee[α, β] ee[γ, δ] ek[ε, δ] ek[φ, ε] kk[α, φ] kk[β, γ] +
ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, ε] kk[γ, δ] -
ee[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, ε] ek[ε, φ] kk[γ, δ] -
ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, ε] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[γ, δ] +
ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, ε] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[γ, δ] -
ee[δ, ε] ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[φ, ε] kk[γ, δ] -
ee[β, γ] ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[δ, ε] kk[α, β] kk[γ, δ] +
ee[α, φ] ee[β, γ] ek[δ, ε] ek[ε, φ] kk[α, β] kk[γ, δ] +
ee[β, γ] ee[δ, ε] ek[α, φ] ek[φ, ε] kk[α, β] kk[γ, δ] +
ee[β, γ] ee[ε, φ] ek[α, β] ek[δ, ε] kk[α, φ] kk[γ, δ] -
ee[α, β] ee[ε, φ] ek[γ, β] ek[δ, ε] kk[α, φ] kk[γ, δ] -
ee[β, γ] ee[δ, ε] ek[α, β] ek[φ, ε] kk[α, φ] kk[γ, δ] +
ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, β] ek[φ, ε] kk[α, φ] kk[γ, δ] -
ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] kk[δ, ε] +
ee[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, φ] kk[δ, ε] -
ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[δ, ε] +
ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[δ, ε] -
ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[δ, ε] -
ee[γ, δ] ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, γ] kk[α, β] kk[δ, ε] +
ee[β, γ] ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[δ, γ] kk[α, β] kk[δ, ε] +
ee[α, φ] ee[γ, δ] ek[β, γ] ek[ε, φ] kk[α, β] kk[δ, ε] -
ee[α, φ] ee[β, γ] ek[δ, γ] ek[ε, φ] kk[α, β] kk[δ, ε] +
ee[γ, δ] ee[ε, φ] ek[α, β] ek[β, γ] kk[α, φ] kk[δ, ε] -
ee[β, γ] ee[ε, φ] ek[α, β] ek[δ, γ] kk[α, φ] kk[δ, ε] +
ee[α, β] ee[ε, φ] ek[γ, β] ek[δ, γ] kk[α, φ] kk[δ, ε] +
ee[γ, δ] ee[ε, φ] ek[α, φ] ek[β, α] kk[β, γ] kk[δ, ε] -
ee[α, φ] ee[γ, δ] ek[β, α] ek[ε, φ] kk[β, γ] kk[δ, ε] +
ee[α, β] ee[γ, δ] ek[ε, φ] ek[φ, α] kk[β, γ] kk[δ, ε] -
ee[α, β] ee[γ, δ] ee[ε, φ] kk[α, φ] kk[β, γ] kk[δ, ε] -
ee[α, φ] ek[β, α] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] kk[ε, φ] -
ee[δ, ε] ek[α, β] ek[β, γ] ek[γ, δ] ek[φ, α] kk[ε, φ] +
ee[γ, δ] ek[α, β] ek[β, γ] ek[ε, δ] ek[φ, α] kk[ε, φ] -
ee[β, γ] ek[α, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, α] kk[ε, φ] +
ee[α, β] ek[γ, β] ek[δ, γ] ek[ε, δ] ek[φ, α] kk[ε, φ] +
ee[α, φ] ee[δ, ε] ek[β, γ] ek[γ, δ] kk[α, β] kk[ε, φ] -
ee[α, φ] ee[γ, δ] ek[β, γ] ek[ε, δ] kk[α, β] kk[ε, φ] +
ee[α, φ] ee[β, γ] ek[δ, γ] ek[ε, δ] kk[α, β] kk[ε, φ] -
ee[α, φ] ee[δ, ε] ek[β, α] ek[γ, δ] kk[β, γ] kk[ε, φ] +
ee[α, φ] ee[γ, δ] ek[β, α] ek[ε, δ] kk[β, γ] kk[ε, φ] +
ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, δ] ek[φ, α] kk[β, γ] kk[ε, φ] -
ee[α, β] ee[γ, δ] ek[ε, δ] ek[φ, α] kk[β, γ] kk[ε, φ] +
ee[α, φ] ee[δ, ε] ek[β, α] ek[γ, β] kk[γ, δ] kk[ε, φ] +
ee[β, γ] ee[δ, ε] ek[α, β] ek[φ, α] kk[γ, δ] kk[ε, φ] -
ee[α, β] ee[δ, ε] ek[γ, β] ek[φ, α] kk[γ, δ] kk[ε, φ] -
ee[α, φ] ee[β, γ] ee[δ, ε] kk[α, β] kk[γ, δ] kk[ε, φ]

```

## ■ tails

```
(*tails that contain cycles within them*)
```

```
(*1 & 2-tails*)
```

```
T1[i_] := Sum[Gek[i, j], {j, 1, 6}]
```

```
T2[i_, j_] := Sum[Gek[i, l], {l, 1, 6}] * Sum[Gek[j, m], {m, 1, 6}] +
  1/2 * Gee[i, j] * (Sum[Gkk[i, l], {l, 1, 6}] - Sum[Gkk[j, m], {m, 1, 6}])
```

```
(*3-tail*)
```

```

t3b[i_, j_, k_] :=
  1
  - * Gee[i, j] * (Sum[Gek[k, p], {p, 1, 6}] * (Sum[Gkk[i, m] - Gkk[j, m], {m, 1, 6}])) +
  2
    Sum[Gkk[k, p], {p, 1, 6}] * (Gek[k, i] - Gek[k, j]))

T3[i1_, j2_, k3_] :=
  Sum[Gek[i1, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gek[j2, m], {m, 1, 6}] * Sum[Gek[k3, n], {n, 1, 6}] +
  t3b[i1, j2, k3] + t3b[i1, k3, j2] + t3b[j2, k3, i1]

(*4-tails*)

t4b[i_, j_, k_, h_] := 1/2 * Gee[i, j] *
  (Sum[Gek[k, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gek[h, m], {m, 1, 6}] * Sum[Gkk[i, n] - Gkk[j, n], {n, 1, 6}] +
  (Sum[Gek[k, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gkk[h, m], {m, 1, 6}] * (Gek[h, i] - Gek[h, j]) +
  (Sum[Gek[h, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gkk[k, m], {m, 1, 6}] * (Gek[k, i] - Gek[k, j]))) +
  ((Gek[k, i] - Gek[k, j]) * Gek[h, k] * Sum[Gkk[h, 1], {1, 1, 6}]) +
  ((Gek[h, i] - Gek[h, j]) * Gek[k, h] * Sum[Gkk[k, 1], {1, 1, 6}]))

t4c[i_, j_, k_, h_] := 1/4 * Gee[i, j] * Gee[k, h] *
  (
    (Sum[Gkk[i, 1] - Gkk[j, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gkk[k, m] - Gkk[h, m], {m, 1, 6}]) +
    1/2 * (Gkk[i, k] - Gkk[j, k] - Gkk[i, h] + Gkk[j, h]) *
    Sum[Gkk[i, n] + Gkk[j, n] - Gkk[k, n] - Gkk[h, n], {n, 1, 6}])

T4[i_, j_, k_, h_] :=
  Sum[Gek[i, 1], {1, 1, 6}] * Sum[Gek[j, m], {m, 1, 6}] * Sum[Gek[k, n], {n, 1, 6}] *
  Sum[Gek[h, o], {o, 1, 6}] + t4b[i, j, k, h] + t4b[i, k, j, h] + t4b[i, h, j, k] + t4b[j, k, i, h] +
  t4b[j, h, i, k] + t4b[k, h, i, j] + t4c[i, j, k, h] + t4c[i, k, j, h] + t4c[i, h, j, k]

(*cycles free 2-tail*)

(*symbols for the cancelation of the cycles on the tail*)

c[i_, j_] := 1
c[i_, i_] := 0
λ[i_, j_, k_, l_] := 1
λ[i_, j_, i_, j_] := 0

(*2-tails*)

Ta2[i_, j_] := Sum[λ[1, m, j, i] * Gek[i, 1] * Gek[j, m], {1, 1, 6}, {m, 1, 6}] +
  1/2 * Gee[i, j] * (Sum[c[1, j] * Gkk[i, 1], {1, 1, 6}] - Sum[c[m, i] * Gkk[j, m], {m, 1, 6}])

(*rules for the substraction of cycles from the tails*)

r1 := {Gs4[i_, j_, k_, l_] T2[m_, n_] → Gs4[i, j, k, l] T2[m, n] - Gs4[i, j, k, l] Gp2[m, n]}
r2 := {Gs3[i_, j_, k_] T3[l_, m_, n_] →
  Gs3[i, j, k] T3[1, m, n] - Gs3[i, j, k] Gp2[1, m] T1[n] - 2 Gs3[i, j, k] Gp3[1, m, n]}
r3 := {Gs2[i_, j_] T4[k_, l_, m_, n_] → Gs2[i, j] T4[k, l, m, n] - 2 Gs2[i, j] Gp2[k, l] Ta2[m, n] -
  3 Gs2[i, j] Gp2[k, l] Gp2[m, n] - Gs2[i, j] Gp4[k, l, m, n] - Gs2[i, j] Gp3[k, l, m] T1[n]}
r4 := {Gs22[i_, j_, k_, l_] T2[m_, n_] → Gs22[i, j, k, l] T2[m, n] - 3 Gs22[i, j, k, l] Gp2[m, n]}

```

## ■ construction of the numerator

```

(*Cycles*)

(*here the m-cycles are multiplied by the corresponding lorenz
cycle. Since there is not an automatic way to get the inequivalent cycles,
then all of the permutations are taken and then divided by a suitable factor*)

(*after the permutations then it comes the
application of the rules for e.k and k.k products*)

(*Q6*)
Qs6a := Permutations[f[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. f[i_, j_, r_, l_, m_, n_] →
      z6[i, j, r, l, m, n] * Gs6[i, j, r, l, m, n] / 12 /. ekval /. kkp // Total

(*Q42*)
Qs42a := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i_, j_, r_, l_, m_, n_] →
      z4[i, j, r, l] z2[m, n] * Gs42[i, j, r, l, m, n] / 16 /. ekval /. kkp // Total

(*Q222*)
Qs222a := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i_, j_, r_, l_, m_, n_] →
      z2[i, j] z2[r, l] z2[m, n] * Gs222[i, j, r, l, m, n] / 48 /. ekval /. kkp // Total

(*Total Cycles*)

(*here u[6] is taken 0 in order to reduce one integration*)

pca := Qs6a + Qs42a + Qs222a /. u[6] → 0

(*Tails*)

(*here the estategy to get the terms is the same that the previuos case,
but after getting the terms there goes the alications of the rules
for the substraction of cycles from the tails, according to the case*)

(*Q5*)
Qs5a := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_] →
      z5[i1, i2, i3, i4, i5] * Gs5[i1, i2, i3, i4, i5] * T1[i6] / 10 /. ekval /. kkp // Total

(*Q32*)
Qs32a := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_] →
      z3[i1, i2, i3] z2[i4, i5] * Gs32[i1, i2, i3, i4, i5] * T1[i6] / 12 /. ekval /. kkp // Total

(*Q4*)
Qs4b := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_] →
      z4[i1, i2, i3, i4] * Gs4[i1, i2, i3, i4] * T2[i5, i6] / 16 /. ekval /. kkp // Total

Qs4a := Qs4b /. r1

(*Q22*)
Qs22b := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_] →
      z2[i1, i2] z2[i3, i4] * Gs22[i1, i2, i3, i4] * T2[i5, i6] / 48 /. ekval /. kkp // Total

Qs22a := Qs22b /. r4

(*Q3*)

```

```

Qs3b := Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_] →
      z3[i1, i2, i3] * Gs3[i1, i2, i3] * T3[i4, i5, i6] / 36 /. ekval /. kkp // Total

Qs3a := Qs3b /. r2

(*Q2*)

Qs2b :=
  Permutations[h[1, 2, 3, 4, 5, 6]][[{1, 289, 313, 337, 433, 457, 577}]] /. h[i1_, i2_, i3_, i4_,
      i5_, i6_] → z2[i1, i2] * Gs2[i1, i2] * T4[i3, i4, i5, i6] /. ekval /. kkp // Total

Qs2a := Qs2b /. r3

(*Total Tails, again one integration is taken out*)

pta := Qs5a + Qs4a + Qs3a + Qs2a + Qs32a + Qs22a /. u[6] → 0

(*Full numerator*)

(*now the sum of the tails and cycles*)

P6 := pca + pta

```

## ■ denominator

```

(*this is obtained,
just by evaluating the k.k products in the formula for the denominator*)

d[m_] :=
  (m2 + 1 / 2 (0.6347735975251538~ (Abs[u[1]] - u[1]2) + 36.~ (Abs[u[1] - u[2]] - (u[1] - u[2])2) +
  25.07951211676056~ (Abs[u[2]] - u[2]2) -
  20.485281374238568~ (Abs[u[1] - u[3]] - (u[1] - u[3])2) -
  3.5147186257614305~ (Abs[u[2] - u[3]] - (u[2] - u[3])2) - 14.571428571428571~
  (Abs[u[3]] - u[3]2) - 5.4934512713032495~ (Abs[u[1] - u[4]] - (u[1] - u[4])2) -
  4.792263014411034~ (Abs[u[2] - u[4]] - (u[2] - u[4])2) +
  4.69172932330827~ (Abs[u[3] - u[4]] - (u[3] - u[4])2) - 4.7368421052631575~
  (Abs[u[4]] - u[4]2) - 9.386493756933026~ (Abs[u[1] - u[5]] - (u[1] - u[5])2) -
  2.6135062430669738~ (Abs[u[2] - u[5]] - (u[2] - u[5])2) +
  4.7368421052631575~ (Abs[u[3] - u[5]] - (u[3] - u[5])2) + 0.8571428571428571~
  (Abs[u[4] - u[5]] - (u[4] - u[5])2) - 6.406015037593985~ (Abs[u[5]] - u[5]2))4

```

## ■ Integration

```

(*for the integration the montecarlo method is the fastest*)

sixpsnum[m_] := 3! * NIntegrate[P6 / d[m], {u[1], 0, 1}, {u[2], 0, 1},
  {u[3], 0, 1}, {u[4], 0, 1}, {u[5], 0, 1}, Method → "QuasiMonteCarlo"]

```

new identity

(\*Starting with the identity to demonstrate,  $\sum_{i < j} \langle i | j \rangle = ? 0$ , A: angular brackets, with the conventions of the program for spinor-helicity products\*)

$Sp[1, 2]^2 + Sp[1, 3]^2 + Sp[1, 4]^2 + Sp[1, 5]^2 + Sp[1, 6]^2 + Sp[2, 3]^2 + Sp[2, 4]^2 + Sp[2, 5]^2 + Sp[2, 6]^2 + Sp[3, 4]^2 + Sp[3, 5]^2 + Sp[3, 6]^2 + Sp[4, 5]^2 + Sp[4, 6]^2 + Sp[5, 6]^2$  /. evspinsA

$Amm[3, 4]^2 + Amm[3, 5]^2 + Amm[3, 6]^2 + Amm[4, 5]^2 + Amm[4, 6]^2 + Amm[5, 6]^2 + Apm[1, 3]^2 + Apm[1, 4]^2 + Apm[1, 5]^2 + Apm[1, 6]^2 + Apm[2, 3]^2 + Apm[2, 4]^2 + Apm[2, 5]^2 + Apm[2, 6]^2 + App[1, 2]^2$

(\*application of the definition of spinor product, defining:  $p[k] := k^+ := k^0 + k^3$ ,  $tp[k] := k^t := k^1 + ik^2$ \*)

$Amm[3, 4]^2 + Amm[3, 5]^2 + Amm[3, 6]^2 + Amm[4, 5]^2 + Amm[4, 6]^2 + Amm[5, 6]^2 + Apm[1, 3]^2 + Apm[1, 4]^2 + Apm[1, 5]^2 + Apm[1, 6]^2 + Apm[2, 3]^2 + Apm[2, 4]^2 + Apm[2, 5]^2 + Apm[2, 6]^2 + App[1, 2]^2$

$$\frac{(p[k[2]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[k[2]])^2}{p[k[1]] p[k[2]]} - \frac{(p[-k[3]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[3]])^2}{p[k[1]] p[-k[3]]} - \frac{(p[-k[3]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[3]])^2}{p[k[2]] p[-k[3]]} - \frac{(p[-k[4]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[4]])^2}{p[k[1]] p[-k[4]]} - \frac{(p[-k[4]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[4]])^2}{p[k[2]] p[-k[4]]} + \frac{(p[-k[4]] tp[-k[3]] - p[-k[3]] tp[-k[4]])^2}{p[-k[3]] p[-k[4]]} - \frac{(p[-k[5]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[5]])^2}{p[k[1]] p[-k[5]]} - \frac{(p[-k[5]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[5]])^2}{p[k[2]] p[-k[5]]} + \frac{(p[-k[5]] tp[-k[3]] - p[-k[3]] tp[-k[5]])^2}{p[-k[3]] p[-k[5]]} + \frac{(p[-k[5]] tp[-k[4]] - p[-k[4]] tp[-k[5]])^2}{p[-k[4]] p[-k[5]]} - \frac{(p[-k[6]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[6]])^2}{p[k[1]] p[-k[6]]} - \frac{(p[-k[6]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[6]])^2}{p[k[2]] p[-k[6]]} + \frac{(p[-k[6]] tp[-k[3]] - p[-k[3]] tp[-k[6]])^2}{p[-k[3]] p[-k[6]]} + \frac{(p[-k[6]] tp[-k[4]] - p[-k[4]] tp[-k[6]])^2}{p[-k[4]] p[-k[6]]} + \frac{(p[-k[6]] tp[-k[5]] - p[-k[5]] tp[-k[6]])^2}{p[-k[5]] p[-k[6]]} // FullSimplify$$

(\*change of notation in vectors:  $k[i] \rightarrow k_i$  \*)

$$\begin{aligned}
& - \frac{p[-k[6]] tp[k[1]]^2}{p[k[1]]} - \frac{p[-k[6]] tp[k[2]]^2}{p[k[2]]} + \frac{(p[k[2]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[k[2]])^2}{p[k[1]] p[k[2]]} + \\
& \frac{p[-k[6]] tp[-k[3]]^2}{p[-k[3]]} - \frac{(p[-k[3]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[3]])^2}{p[k[1]] p[-k[3]]} - \\
& \frac{(p[-k[3]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[3]])^2}{p[k[2]] p[-k[3]]} + \frac{p[-k[6]] tp[-k[4]]^2}{p[-k[4]]} - \\
& \frac{(p[-k[4]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[4]])^2}{p[k[1]] p[-k[4]]} - \frac{(p[-k[4]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[4]])^2}{p[k[2]] p[-k[4]]} + \\
& \frac{(p[-k[4]] tp[-k[3]] - p[-k[3]] tp[-k[4]])^2}{p[-k[3]] p[-k[4]]} + \frac{p[-k[6]] tp[-k[5]]^2}{p[-k[5]]} - \\
& \frac{(p[-k[5]] tp[k[1]] - p[k[1]] tp[-k[5]])^2}{p[k[1]] p[-k[5]]} - \frac{(p[-k[5]] tp[k[2]] - p[k[2]] tp[-k[5]])^2}{p[k[2]] p[-k[5]]} + \\
& \frac{(p[-k[5]] tp[-k[3]] - p[-k[3]] tp[-k[5]])^2}{p[-k[3]] p[-k[5]]} + \frac{(p[-k[5]] tp[-k[4]] - p[-k[4]] tp[-k[5]])^2}{p[-k[4]] p[-k[5]]} + \\
& \frac{2 (tp[k[1]] + tp[k[2]] - tp[-k[3]] - tp[-k[4]] - tp[-k[5]]) tp[-k[6]] +}{p[-k[6]]} \\
& \frac{(-p[k[1]] - p[k[2]] + p[-k[3]] + p[-k[4]] + p[-k[5]]) tp[-k[6]]^2}{p[-k[6]]} \quad /. k[i_] \to k_i
\end{aligned}$$

(\*p[k] and tp[k] are linear in their arguments\*)

$$\begin{aligned}
& - \frac{p[-k_6] tp[k_1]^2}{p[k_1]} - \frac{p[-k_6] tp[k_2]^2}{p[k_2]} + \frac{(p[k_2] tp[k_1] - p[k_1] tp[k_2])^2}{p[k_1] p[k_2]} + \\
& \frac{p[-k_6] tp[-k_3]^2}{p[-k_3]} - \frac{(p[-k_3] tp[k_1] - p[k_1] tp[-k_3])^2}{p[k_1] p[-k_3]} - \frac{(p[-k_3] tp[k_2] - p[k_2] tp[-k_3])^2}{p[k_2] p[-k_3]} + \\
& \frac{p[-k_6] tp[-k_4]^2}{p[-k_4]} - \frac{(p[-k_4] tp[k_1] - p[k_1] tp[-k_4])^2}{p[k_1] p[-k_4]} - \frac{(p[-k_4] tp[k_2] - p[k_2] tp[-k_4])^2}{p[k_2] p[-k_4]} + \\
& \frac{(p[-k_4] tp[-k_3] - p[-k_3] tp[-k_4])^2}{p[-k_3] p[-k_4]} + \frac{p[-k_6] tp[-k_5]^2}{p[-k_5]} - \frac{(p[-k_5] tp[k_1] - p[k_1] tp[-k_5])^2}{p[k_1] p[-k_5]} - \\
& \frac{(p[-k_5] tp[k_2] - p[k_2] tp[-k_5])^2}{p[k_2] p[-k_5]} + \frac{(p[-k_5] tp[-k_3] - p[-k_3] tp[-k_5])^2}{p[-k_3] p[-k_5]} + \\
& \frac{(p[-k_5] tp[-k_4] - p[-k_4] tp[-k_5])^2}{p[-k_4] p[-k_5]} + 2 (tp[k_1] + tp[k_2] - tp[-k_3] - tp[-k_4] - tp[-k_5]) tp[-k_6] + \\
& \frac{(-p[k_1] - p[k_2] + p[-k_3] + p[-k_4] + p[-k_5]) tp[-k_6]^2}{p[-k_6]} \quad /. p[-(1_)] \to -p[1] \quad /. tp[-(1_)] \to -tp[1]
\end{aligned}$$

(\*momentum conservation  $\sum k_i=0$ \*)

$$\begin{aligned}
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_1]^2}{p[k_1]} + \frac{p[k_6] \text{tp}[k_2]^2}{p[k_2]} + \frac{(p[k_2] \text{tp}[k_1] - p[k_1] \text{tp}[k_2])^2}{p[k_1] p[k_2]} + \\
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_3]^2}{p[k_3]} + \frac{(-p[k_3] \text{tp}[k_1] + p[k_1] \text{tp}[k_3])^2}{p[k_1] p[k_3]} + \frac{(-p[k_3] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_3])^2}{p[k_2] p[k_3]} + \\
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_4]^2}{p[k_4]} + \frac{(-p[k_4] \text{tp}[k_1] + p[k_1] \text{tp}[k_4])^2}{p[k_1] p[k_4]} + \frac{(-p[k_4] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_4])^2}{p[k_2] p[k_4]} + \\
& \frac{(p[k_4] \text{tp}[k_3] - p[k_3] \text{tp}[k_4])^2}{p[k_3] p[k_4]} + \frac{p[k_6] \text{tp}[k_5]^2}{p[k_5]} + \frac{(-p[k_5] \text{tp}[k_1] + p[k_1] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_1] p[k_5]} + \\
& \frac{(-p[k_5] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_2] p[k_5]} + \frac{(p[k_5] \text{tp}[k_3] - p[k_3] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_3] p[k_5]} + \\
& \frac{(p[k_5] \text{tp}[k_4] - p[k_4] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_4] p[k_5]} - 2 (tp[k_1] + tp[k_2] + tp[k_3] + tp[k_4] + tp[k_5]) \text{tp}[k_6] - \\
& \frac{(-p[k_1] - p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5]) \text{tp}[k_6]^2}{p[k_6]} /.
\end{aligned}$$

$$\text{tp}[k_1] \rightarrow -\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6] /. p[k_1] \rightarrow -p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]$$

(\*then the simplification\*)

$$\begin{aligned}
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_2]^2}{p[k_2]} + \frac{p[k_6] \text{tp}[k_3]^2}{p[k_3]} + \frac{(-p[k_3] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_3])^2}{p[k_2] p[k_3]} + \\
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_4]^2}{p[k_4]} + \frac{(-p[k_4] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_4])^2}{p[k_2] p[k_4]} + \frac{(p[k_4] \text{tp}[k_3] - p[k_3] \text{tp}[k_4])^2}{p[k_3] p[k_4]} + \\
& \frac{p[k_6] \text{tp}[k_5]^2}{p[k_5]} + \frac{(-p[k_5] \text{tp}[k_2] + p[k_2] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_2] p[k_5]} + \frac{(p[k_5] \text{tp}[k_3] - p[k_3] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_3] p[k_5]} + \\
& \frac{(p[k_5] \text{tp}[k_4] - p[k_4] \text{tp}[k_5])^2}{p[k_4] p[k_5]} + \text{ta} (-(-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]) \text{tp}[k_2] + \\
& \quad p[k_2] (-\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6]))^2 / \\
& \quad (p[k_2] (-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6])) + ((-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]) \text{tp}[k_3] - \\
& \quad p[k_3] (-\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6]))^2 / \\
& \quad (p[k_3] (-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6])) + ((-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]) \text{tp}[k_4] - \\
& \quad p[k_4] (-\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6]))^2 / \\
& \quad (p[k_4] (-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6])) + ((-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]) \text{tp}[k_5] - \\
& \quad p[k_5] (-\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6]))^2 / \\
& \quad (p[k_5] (-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6])) + \\
& \quad \frac{p[k_6] (-\text{tp}[k_2] - \text{tp}[k_3] - \text{tp}[k_4] - \text{tp}[k_5] - \text{tp}[k_6])^2}{-p[k_2] - p[k_3] - p[k_4] - p[k_5] - p[k_6]} + \\
& \text{tp}[k_6]^2 // FullSimplify
\end{aligned}$$

0

(\*Q.E.D.\*)

### Bibliografia

- Barducci, A., F. Bordi, and R. Casalbuoni (1981). PATH INTEGRAL QUANTIZATION OF SPINNING PARTICLES INTERACTING WITH CROSSED EXTERNAL ELECTROMAGNETIC FIELDS. *Nuovo Cim.*, **B64**, pp. 287–315. doi:10.1007/BF02903290.
- Bern, Z. and D. C. Dunbar (1992). A Mapping between Feynman and string motivated one loop rules in gauge theories. *Nucl. Phys.*, **B379**, pp. 562–601. doi:10.1016/0550-3213(92)90135-X.
- Bern, Z. and D. A. Kosower (1992). The Computation of loop amplitudes in gauge theories. *Nucl. Phys.*, **B379**, pp. 451–561. doi:10.1016/0550-3213(92)90134-W.
- Bernicot, C. (2008). Light-by-light scattering amplitudes from generalized unitarity in massive QED. *2008arXiv0804.0749B*.
- Bernicot, C. and J. P. Guillet (2008). Six-Photon Amplitudes in Scalar QED. *JHEP*, **01**, p. 059. doi:10.1088/1126-6708/2008/01/059.
- Binoth, T., E. W. Ń. Glover, P. Marquard, and J. J. van der Bij (2002). Two-loop corrections to Light-by-Light scattering in Supersymmetric QED. *JHEP*, **05**, p. 060.
- Binoth, T., J. P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon, and T. Reiter (2009). Golem95: a numerical program to calculate one-loop tensor integrals with up to six external legs. *Comput. Phys. Commun.*, **180**, pp. 2317–2330. doi:10.1016/j.cpc.2009.06.024.
- Binoth, T., G. Heinrich, T. Gehrmann, and P. Mastrolia (2007). Six-Photon Amplitudes. *Phys. Lett.*, **B649**, pp. 422–426. doi:10.1016/j.physletb.2007.04.032.
- Brandhuber, A., G. Travaglini, and M. Vincon (2009). A Note on Loop Amplitudes in QED.
- Constantini, V., B. De Tollis, and G. Pistoni (1971). Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. *Nuovo Cim.*, **2A,N.3**, p. 733.
- De Tollis, B. (1964). *Nuovo Cim.*, **32**, p. 757.
- Dixon, L. J. (1996). Calculating scattering amplitudes efficiently. *hep-ph/9601359*.
- Duff, M. J. and C. J. Isham (1979). SELFDUALITY, HELICITY, AND SUPERSYMMETRY: THE SCATTERING OF LIGHT BY LIGHT. *Phys. Lett.*, **B86**, p. 157. doi:10.1016/0370-2693(79)90807-4.
- Dunne, G. V. and C. Schubert (2002a). Two-loop self-dual Euler-Heisenberg Lagrangians. I: Real part and helicity amplitudes. *JHEP*, **08**, p. 053.

- Dunne, G. V. and C. Schubert (2002b). Two-loop self-dual Euler-Heisenberg Lagrangians. II: Imaginary part and Borel analysis. *JHEP*, **06**, p. 042.
- Ellis, R. K. and J. C. Sexton (1986). QCD Radiative Corrections to Parton Parton Scattering. *Nucl. Phys.*, **B269**, p. 445. doi:10.1016/0550-3213(86)90232-4.
- Euler, H. and B. Kockel (1935). Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie. *Naturwissenschaften*, **23**, pp. 246–247. doi:10.1007/BF01493898.
- Fradkin, E. (1966). Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics (II). *Nucl. Phys.*, **76**, pp. 588–624. doi:10.1016/0029-5582(66)90200-8.
- Ginzburg, I. F. (2009). Physical problems for future Photon Colliders. *2009arXiv0912.4841*.
- Hahn, T. (2005). CUBA: A library for multidimensional numerical integration. *Comput. Phys. Commun.*, **168**, pp. 78–95. doi:10.1016/j.cpc.2005.01.010.
- Heisenberg, W. and H. Euler (1936). Consequences of Dirac's theory of positrons. *Z. Phys.*, **98**, pp. 714–732.
- Itzykson, C. and J. B. Zuber (1980). QUANTUM FIELD THEORY. New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).
- Jikia, G. and A. Tkabladze (1994). Photon-photon scattering at the photon linear collider. *Phys. Lett.*, **B323**, pp. 453–458. doi:10.1016/0370-2693(94)91246-7.
- Karplus, R. and M. Neuman (1950). Non-Linear Interactions between Electromagnetic Fields. *Phys. Rev.*, **80**, pp. 380–385. doi:10.1103/PhysRev.80.380.
- Karplus, R. and M. Neuman (1951). The scattering of light by light. *Phys. Rev.*, **83**, pp. 776–784. doi:10.1103/PhysRev.83.776.
- Mahlon, G. (1994a). One loop multi - photon helicity amplitudes. *Phys. Rev.*, **D49**, pp. 2197–2210. doi:10.1103/PhysRevD.49.2197.
- Mahlon, G. (1994b). Use of recursion relations to compute one loop helicity amplitudes.
- Martin, L. C., C. Schubert, and V. M. Villanueva Sandoval (2003). On the low-energy limit of the QED N-photon amplitudes. *Nucl. Phys.*, **B668**, pp. 335–344. doi:10.1016/S0550-3213(03)00578-9.
- Nagy, Z. and D. E. Soper (2006). Numerical integration of one-loop Feynman diagrams for N-photon amplitudes. *Phys. Rev.*, **D74**, p. 093006. doi:10.1103/PhysRevD.74.093006.
- Neveu, A. and J. Scherk (1972). Connection between Yang-Mills fields and dual models. *Nucl. Phys.*, **B36**, pp. 155–161. doi:10.1016/0550-3213(72)90301-X.

- Ossola, G., C. G. Papadopoulos, and R. Pittau (2007). Numerical Evaluation of Six-Photon Amplitudes. *JHEP*, **07**, p. 085. doi:10.1088/1126-6708/2007/07/085.
- Polyakov, A. M. (1987). GAUGE FIELDS AND STRINGS. CHUR, SWITZERLAND: HARWOOD (1987) 301 P. (CONTEMPORARY CONCEPTS IN PHYSICS, 3).
- Scherk, J. (1971). Zero-slope limit of the dual resonance model. *Nucl. Phys.*, **B31**, pp. 222–234. doi:10.1016/0550-3213(71)90227-6.
- Schubert, C. (1998). The structure of the Bern-Kosower integrand for the N- gluon amplitude. *Eur. Phys. J.*, **C5**, pp. 693–699. doi:10.1007/s100520050311.
- Schubert, C. (2001). Perturbative quantum field theory in the string-inspired formalism. *Phys. Rept.*, **355**, pp. 73–234. doi:10.1016/S0370-1573(01)00013-8.
- Strassler, M. J. (1992). Field theory without Feynman diagrams: One loop effective actions. *Nucl. Phys.*, **B385**, pp. 145–184. doi:10.1016/0550-3213(92)90098-V.
- Weisskopf, V. (1936). Über die Elektrodynamik des Vakuums auf Grund der Quantentheorie des Elektrons. *Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat. fys. Medd. XIV*, **6**, pp. 1–39.
- Yoneya, T. (1973). Quantum gravity and the zero slope limit of the generalized Virasoro model. *Nuovo Cim. Lett.*, **8**, pp. 951–955.