



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Algunas propiedades del espacio de poliedros.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

JUAN AHTZIRI GONZÁLEZ LEMUS

Director: Dr. Jorge Luis López López

MORELIA, MICHOACÁN - FEBRERO DE 2010.

Índice general

Agradecimientos	iii
INTRODUCCIÓN	v
Capítulo 1. Una forma hermitiana en el espacio de polígonos.	1
1. La forma hermitiana de área.	1
2. El espacio de polígonos módulo semejanza orientada.	5
Capítulo 2. La región de polígonos simples.	9
1. Polígonos simples.	9
2. Poligonales.	11
3. La región de polígonos simples.	14
Capítulo 3. Definición de poliedro y algunas de sus propiedades.	17
1. Conos.	17
2. Poliedros.	19
3. La aplicación desarrolladora.	24
4. Los poliedros vistos como polígonos.	26
Capítulo 4. El espacio de Poliedros.	31
1. El espacio de poliedros con ángulos fijos.	32
2. El espacio de poliedros.	34
Capítulo 5. Ejemplos.	37
1. El espacio de triángulos dobles.	37
2. El espacios de tetraedros con ángulos cónicos iguales a π .	38
Bibliografía	43

Agradecimientos

A mis padres por obvias razones.

A mis hermanos por el apoyo que me han brindado durante toda la vida.

A los sinodales que realizaron por su excelente revisión de tesis.

A Jorge por todo su apoyo incondicional durante toda la maestría.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es estudiar el espacio de poliedros con vértices de ángulos cónicos entre 0 y 2π . Por poliedro entenderemos una superficie homeomorfa a la esfera provista de una métrica plana salvo en un número finito de puntos que llamaremos singularidades cónicas o vértices.

La idea básica para estudiar el espacio de poliedros es la siguiente.

Dado un poliedro P con $n + 1$ vértices:

1. Se escoge un vértice v_0 de P .
2. Se escogen curvas de longitud mínima $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ que unen v_0 con cada uno de los demás vértices de P .
3. Se corta P a lo largo de estas curvas.
4. La superficie $P \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n\}$ se desdobra en el plano euclidiano, obteniendo así un polígono bien definido salvo isometrías de \mathbb{R}^2 .
5. Este polígono tiene $2n$ vértices cuyas coordenadas determinan un punto en $(\mathbb{R}^2)^{2n}$. Llamaremos Ω_{n+1} a la región en $(\mathbb{R}^2)^{2n}$ delimitada por los polígonos que se pueden obtener de esta forma.
6. La ambigüedad que existe al escoger otro vértice v_i u otras curvas $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$ determina distintos polígonos asociados a cada poliedro.
7. De manera que a cada poliedro P podemos asociarle una familia de polígonos con ciertas propiedades decretadas por P .

En esta tesis se explican con detalle ciertos puntos dentro de este esquema. Por ejemplo:

1. Existencia y propiedades de las geodésicas en un poliedro.
2. El desdoblamiento isométrico de $P \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n\}$ en el plano euclidiano.
3. Descripción topológica de la región Ω_{n+1} .
4. Las dificultades combinatorias que provocan las ambigüedades mencionadas en 6.

Respecto al punto 4, en esta tesis se muestran explícitamente las dificultades provocadas por las ambigüedades y se menciona cómo son los distintos polígonos que obtienen de ellas. En este

trabajo trataremos con detalle el caso de poliedros con tres vértices (caso $n = 2$) y calculamos algunos espacios de tetraedros con ángulos fijos (poliedros con 4 vértices, caso $n = 3$).

Esta tesis consta de cinco capítulos. En el primero de ellos se habla del espacio de polígonos y la forma hermitiana en él determinada por el área. En el segundo se demuestran algunas propiedades que satisface la región determinada por los polígonos simples. El tercero muestra la forma en que se desdobra un poliedro para obtener un polígono. En el capítulo 4 se estudian algunas propiedades de la región Ω_{n+1} y se menciona que polígonos en ella están asociados al mismo poliedro. Por último, en el capítulo 5 se describen algunas propiedades del espacio de tetraedros.

Una forma hermitiana en el espacio de polígonos.

Supongamos que n es un entero mayor o igual que 3 y P es un polígono de n lados (también llamado n -ágono) con vértices consecutivos en $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{C}$. Entonces la n -ada de números complejos (p_1, p_2, \dots, p_n) determina completamente a P , ya que podemos recobrar el polígono considerando los segmentos de recta que unen a p_i con p_{i+1} . Nótese que pensamos en los subíndices módulo n . De manera que $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ determina al único polígono en \mathbb{C} con vértices consecutivos en los puntos z_1, z_2, \dots, z_n . Por lo tanto podemos pensar a \mathbb{C}^n como el espacio de n -ágonos contenidos en \mathbb{C} .

Al considerar a un polígono sólo como una n -ada de complejos, permitimos cualquier tipo de degeneración en sus lados, además de cruces entre ellos. Algunas consecuencias de ver a los polígonos como puntos de \mathbb{C}^n son:

- Automáticamente dotamos al espacio de polígonos con una estructura de espacio vectorial complejo, *i.e.* está bien definida la suma de polígonos y la multiplicación de un escalar complejo por un polígono.

- Cualquier base de \mathbb{C}^n es una base para el espacio de polígonos. Por ejemplo, todo n -ágono es una combinación lineal compleja de los polígonos $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ya que

$$E := \{e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}_{i=1}^n$$

es la base canónica de \mathbb{C}^n .

1. La forma hermitiana de área.

El área con signo de un triángulo contenido en \mathbb{R}^2 y con vértices en los puntos (a, b) , (c, d) , (e, f) , está dada por la fórmula:

$$\frac{ad + cf + eb - af - ed - cb}{2}.$$

Si $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ y $z_3 = e + if$, entonces un cálculo elemental muestra que el área con signo de $T = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ es

$$\mathcal{A}(T) = \frac{i}{4}(z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_3).$$

Nótese que el término $z_i \bar{z}_j - z_j \bar{z}_i$, calcula el área con signo comprendida en el triángulo $(0, z_i, z_j)$. Así $\mathcal{A}((0, z_i, z_i)) = 0$ y $\mathcal{A}((0, z_i, z_j)) = -\mathcal{A}((0, z_j, z_i))$. Entonces el signo en el área de un triángulo está dado por la orientación que determina el orden en sus vértices, de manera que el área es positiva si giramos en el sentido contrario a las manecillas del reloj (en el resto de esta tesis tomaremos este como el sentido positivo) al recorrer el triángulo de forma creciente en la numeración de sus vértices.

Por la observación anterior, tenemos que el área con signo de un triángulo T es igual a la suma de las áreas con signo de los triángulos que se forman con las aristas de T y el origen. Esto sugiere definir el área con signo de un polígono de la siguiente forma.

DEFINICIÓN 1.1. Si $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, el área con signo del polígono Z es

$$\mathcal{A}(Z) := \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (z_k \bar{z}_{k+1} - z_{k+1} \bar{z}_k)$$

donde $z_{n+1} = z_1$.

Observaciones: Sea $Z = (z_1, \dots, z_n)$ un polígono.

1.- $\mathcal{A}(Z) \in \mathbb{R}$, ya que es suma de imaginarios puros multiplicada por i .

2.- $\mathcal{A}(Z)$ no depende del vértice en el que se comienza a enumerar a Z , mientras lo hagamos cíclicamente y en el mismo sentido. Además, si $Z^- = (z_1, z_n, z_{n-1}, \dots, z_2)$ es el polígono Z pero enumerado en sentido contrario al original, entonces $\mathcal{A}(Z^-) = -\mathcal{A}(Z)$.

3.- $\mathcal{A}(Z)$ es invariante bajo rotaciones, traslaciones y tiene módulo invariante por reflexiones: Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es de la forma $f(z) = e^{i\theta}z + a$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ¹, entonces para todo $Z \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f(Z)) &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n [(e^{i\theta}z_k + a)(e^{-i\theta}\bar{z}_{k+1} + \bar{a}) - (e^{i\theta}z_{k+1} + a)(e^{-i\theta}\bar{z}_k + \bar{a})] = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n [(z_k \bar{z}_{k+1} - z_{k+1} \bar{z}_k) + ae^{-i\theta}(\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k) + \bar{a}e^{i\theta}(z_k - z_{k+1})] = \mathcal{A}(Z), \end{aligned}$$

pues claramente los términos segundo y tercero de cada sumando se anulan cuando variamos k de 1 a n . Además como toda reflexión sobre una recta de \mathbb{C} se puede escribir de la forma $g(z) = e^{-i\theta}\bar{z} + \bar{a}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $a \in \mathbb{C}$, tenemos que $\mathcal{A}(Z) = -\mathcal{A}(g(Z))$.

4.- Supongamos que Z es un polígono convexo y q pertenece a la componente acotada por Z (i.e. q está dentro de Z). Como $\mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(Z - q)$ y $\mathcal{A}(Z - q)$ es la suma de las áreas de los triángulos

¹Notar que f actúa en un polígono vértice a vértice.

$(0, z_i, z_j)$ (que en este caso todas son del mismo signo), tenemos que la definición es congruente con la intuición que nos dice “el área de un polígono es la cantidad de superficie que este encierra”.

5.- $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma cuadrática hermitiana pues $\mathcal{A}(\lambda Z) = |\lambda|^2 \mathcal{A}(Z)$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}$. Además para todos $Z, W \in \mathbb{C}^n$, la forma sesquilineal hermitiana

$$\langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} := \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (z_k \bar{w}_{k+1} - z_{k+1} \bar{w}_k), \quad (1)$$

es tal que $\langle Z, Z \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(Z)$.

Observaciones: Sean $Z = (z_1, \dots, z_n), W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.

5.1.- Si \Re y \Im son respectivamente las partes real e imaginaria de un número complejo, entonces

$$\Re \langle Z, iW \rangle_{\mathcal{A}} = \Re(-i \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}}) = \Im \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}}.$$

5.2.- Sea $n \geq 3$ un entero impar. Si $ZW = (z_1, w_2, z_3, \dots, w_{n-1}, z_n, w_1, \dots, z_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ es el polígono formado alternando los vértices de Z y W , entonces la forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ZW) &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (z_k \bar{w}_{k+1} - w_{k+1} \bar{z}_k) + (w_k \bar{z}_{k+1} - z_{k+1} \bar{w}_k) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (z_k \bar{w}_{k+1} - w_{k+1} \bar{z}_k) + \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (w_k \bar{z}_{k+1} - z_{k+1} \bar{w}_k) = \\ &= \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} + \langle W, Z \rangle_{\mathcal{A}} = 2\Re \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

y por 5.1 $\mathcal{A}(ZiW) = 2\Im \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}}$. Además de la observación 2 tenemos que $\mathcal{A}(ZW) = \mathcal{A}(WZ)$ y $\mathcal{A}(ZiW) = \mathcal{A}(iWZ)$. Concluimos que

$$\langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}(ZW) + i\mathcal{A}(ZiW)) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}(WZ) + i\mathcal{A}(iWZ)).$$

El caso n par es diferente por que no hay un polígono ZW bien definido, ya que alternando los vértices obtenemos los polígonos $(z_1, w_2, \dots, z_{n-1}, w_n)$ y $(w_1, z_2, \dots, w_{n-1}, z_n)$. Pero existe una relación similar a la anterior con estos polígonos ya que

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(z_1, w_2, \dots, z_{n-1}, w_n) + \mathcal{A}(w_1, z_2, \dots, w_{n-1}, z_n) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n [(z_k \bar{w}_{k+1} - w_{k+1} \bar{z}_k) + (w_k \bar{z}_{k+1} - z_{k+1} \bar{w}_k)] = 2\Re \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

nuevamente se utiliza la observación 5.1 par la parte imaginaria.

Proposición 1.1. Si $n \geq 3$ es un entero. Entonces la forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ en \mathbb{C}^n tiene signatura:

$$\left(1, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \text{ para } n \text{ impar}, \quad \left(2, \frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}\right) \text{ para } n \text{ par}$$

DEMOSTRACIÓN. Considerar en $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$ los polígonos:

$$\{P_l = (1, e^{\frac{2\pi il}{n}}, (e^{\frac{2\pi il}{n}})^2, (e^{\frac{2\pi il}{n}})^3, \dots, (e^{\frac{2\pi il}{n}})^{n-1})\}_{l=0}^{n-1}.$$

El producto entre parejas de estos n -ágonos está dado por:

$$\begin{aligned} \langle P_l, P_m \rangle_{\mathcal{A}} &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n ((e^{\frac{2\pi il}{n}})^{k-1} (e^{-\frac{2\pi im}{n}})^k - (e^{\frac{2\pi il}{n}})^k (e^{-\frac{2\pi im}{n}})^{k-1}) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi ik(l-m)}{n}} (e^{-\frac{2\pi il}{n}} - e^{\frac{2\pi im}{n}}) = \frac{i(e^{-\frac{2\pi il}{n}} - e^{\frac{2\pi im}{n}})}{4} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi ik(l-m)}{n}} \quad (*) \end{aligned}$$

y ahora existen dos casos a considerar:

Caso $l \neq m$: Hacemos $\lambda = e^{\frac{2\pi i(l-m)}{n}}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi ik(l-m)}{n}} = \sum_{k=1}^n \lambda^k = 0,$$

ya que λ es una raíz n -ésima de la unidad (distinta de 1), por lo tanto anula al polinomio $z^n - 1 = (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)(z - 1)$, de forma que la suma de las primeras n potencias de λ debe anularse (ya que $\lambda - 1 \neq 0$). Concluimos que el conjunto de los P_l forma una base de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$ tal que $\langle P_l, P_m \rangle_{\mathcal{A}} = 0$ para toda $l \neq m$.

Caso $l = m$: En este caso $\langle P_l, P_m \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(P_l)$ y:

$$(*) = \frac{n}{2} \left(\frac{e^{\frac{2\pi il}{n}} - e^{-\frac{2\pi il}{n}}}{2i} \right) = \frac{n}{2} \operatorname{sen}(2\pi l/n) \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < l < n/2 \\ = 0 & \text{si } l = 0 \text{ ó } l = n/2 \text{ (para } n \text{ par)} \\ < 0 & \text{si } n/2 < l \leq n \end{cases}$$

Ahora se concluye que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ es degenerada y su signatura es la buscada. \square

Ayudándonos del conjunto mencionado en esta proposición, construimos la base:

$$\mathcal{B} = \{P'_l\}_{l=0}^{n-1} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} P'_l = P_l / \mathcal{A}(P_l) & \text{si } l \neq 0, n/2 \\ P'_l = P_l & \text{si } l = 0 \text{ o } l = n/2 \text{ (sólo para } n \text{ par)}. \end{cases}$$

En esta base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ tiene una expresión sencilla, ya que para todos $Z, W \in \mathbb{C}^n$ existen z_l y w_l con $l = 0, 1, \dots, n-1$ tales que:

$$\langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} = \left\langle \sum_l z_l P'_l, \sum_l w_l P'_l \right\rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{0 < l < n/2} z_l \overline{w_l} - \sum_{n/2 < l < n} z_l \overline{w_l}.$$

Notar que hasta el momento hemos mencionado 2 bases para el espacio $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$, estas son

$$E = \{e_i\}_{i=1}^n \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{P_l\}_{l=0}^{n-1},$$

Estas bases se estarán utilizando durante el resto de la tesis.

2. El espacio de polígonos módulo semejanza orientada.

Diremos que $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ son equivalentes si y sólo si existe una transformación afín compleja $f(a) = az + b$ con $a \neq 0$ tal que $f(z_i) = w_i$. Escribiremos $Z \sim W$ para decir que los polígonos Z y W son equivalentes (claramente \sim define una relación de equivalencia en \mathbb{C}^n). De las observaciones 3 y 5 de la sección anterior, tenemos que si $Z \sim W$, entonces el signo de $\mathcal{A}(Z)$ es igual al de $\mathcal{A}(W)$.

Llamaremos al cociente $\mathcal{P}(n) := \mathbb{C}^n / \sim$ *el espacio de polígonos módulo semejanza orientada*. Notar que, salvo traslación, cada clase de equivalencia tiene un representante (z_1, z_2, \dots, z_n) tal que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. En efecto, para encontrarlo basta trasladar el centro de gravedad del representante escogido al origen. Entonces, en el hiperplano

$$V(n) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0\}$$

los únicos polígonos equivalentes son de la forma λZ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Se sigue que el espacio de polígonos módulo semejanza orientada se identifica con $\mathbb{P}(V(n))$, la proyectivización compleja del espacio vectorial $V(n)$.

Obsérvese que los polígonos $P_l = (1, e^{2\pi il/n}, (e^{2\pi il/n})^2, (e^{2\pi il/n})^3, \dots, (e^{2\pi il/n})^{n-1})$ con $l \in \{1, \dots, n-1\}$, pertenecen a $V(n)$ (ya que la suma de las n potencias de una raíz n -ésima de la unidad es 0, ver página 4). Además forman una base para este espacio. Luego $V(n)$ es isomorfo, como espacio vectorial, a \mathbb{C}^{n-1} y por lo tanto:

$$\mathcal{P}(n) = \mathbb{P}(V(n)) \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n-1}) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}.$$

Ahora nos gustaría definir el producto (1) sobre $\mathcal{P}(n)$. Para hacer esto consideremos los siguientes subconjuntos:

$$V(n)^+ = \{Z \in V(n) \mid \mathcal{A}(Z) > 0\} \quad \text{y} \quad V(n)^- = \{Z \in V(n) \mid \mathcal{A}(Z) < 0\}.$$

Estos tienen las siguientes propiedades:

1.- Son abiertos pues la forma $\mathcal{A}: V(n) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $V(n)^+ = \mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R}^+)$ y $V(n)^- = \mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Además $\mathcal{A}^{-1}(0) \subset V(n)$ es una subvariedad ya que \mathcal{A} es forma cuadrática y por lo tanto el 0 es valor regular.

2.- Para cualesquiera $Z \in V(n)^+, W \in V(n)^-$ y $a \in \mathbb{C}^*$. Los productos $\langle aZ, aZ \rangle_{\mathcal{A}} = |a|^2 \mathcal{A}(Z)$ y $\langle aW, aW \rangle_{\mathcal{A}} = |a|^2 \mathcal{A}(W)$ no cambian de signo, por lo tanto las rectas $\mathbb{C}^*Z = \{aZ \mid a \in \mathbb{C}^*\}$ y $\mathbb{C}^*W = \{aW \mid a \in \mathbb{C}^*\}$ están contenidas en $V(n)^+$ y $V(n)^-$ respectivamente.

3.- Los abiertos $\mathbb{P}(V(n)^+) = \mathcal{P}^+(n)$, $\mathbb{P}(V(n)^-) = \mathcal{P}^-(n) \subset \mathcal{P}(n)$ tienen estructura de variedad hermitiana con la forma inducida por (1) de la siguiente manera.

Aquí trabajaremos solamente con $V(n)^+$ pero el lector notará que se puede proceder de manera análoga en $V(n)^-$. Denotaremos con $\pi: V(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$ a la proyección canónica y para todo $Z \in V(n)$, $Z^\perp := \{W \in V(n) \mid \langle Z, W \rangle_{\mathcal{A}} = 0\}$.

Sea $Z \in V(n)^+$. Supongamos que $Z'_1, \dots, Z'_{n-2} \in V(n)$ son tales que el conjunto $\{Z, Z'_1, \dots, Z'_{n-2}\}$ es linealmente independiente. Claramente los polígonos

$$Z_k = Z'_k - \frac{\langle Z'_k, Z \rangle_{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}(Z)} Z \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n-2,$$

satisfacen que el conjunto $\{Z_1, \dots, Z_{n-2}\}$ es linealmente independiente, además para toda $k = 1, 2, \dots, n-2$, $\langle Z_k, Z \rangle_{\mathcal{A}} = 0$. De aquí concluimos que Z_1, \dots, Z_{n-2} forma una base para Z^\perp y por lo tanto $V(n) = \mathbb{C}Z \oplus Z^\perp$.

Consideremos en $T_Z V(n)^+ = \mathbb{C}Z \oplus Z^\perp$ la forma hermitiana:

$$g_Z(U, V) := \frac{\langle U, V \rangle_{\mathcal{A}}}{|\langle Z, Z \rangle_{\mathcal{A}}|} = \frac{\langle U, V \rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(Z)|}.$$

Notemos que la homotecia $h_a(Z) = aZ$ con $a \neq 0$, se restringe al abierto $(V(n)^+, g_Z)$ preservando a g_Z . Ya que para todos $U, V \in T_Z V(n)^+$

$$g_{h_a(Z)}(h_a(U), h_a(V)) = g_{aZ}(aU, aV) = \frac{\langle aU, aV \rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(aZ)|} = \frac{|a|^2 \langle U, V \rangle_{\mathcal{A}}}{|a|^2 |\mathcal{A}(Z)|} = g_Z(U, V).$$

Luego $g_Z(U, V)$ no depende del representante en \mathbb{C}^*Z en el que se calcule, se sigue que g_Z baja al cociente $\mathcal{P}^+(n)$ (utilizaremos la misma notación para la forma hermitiana en el cociente). Sabemos que la transformación lineal $d\pi_Z: T_Z V(n)^+ \rightarrow T_{\pi(Z)} \mathcal{P}(n)^+$ tiene núcleo igual a $\mathbb{C}Z$, por lo tanto dados $(U_1, U_2), (V_1, V_2) \in T_Z V(n)^+$ con $U_1, V_1 \in \mathbb{C}Z$ y $U_2, V_2 \in Z^\perp$ tenemos que

$$g_Z(d\pi_Z(U_1, U_2), d\pi_Z(V_1, V_2)) = g_Z(U_2, V_2).$$

Se sigue que $d\pi_Z$ se restringe a Z^\perp preservando la forma hermitiana. Es claro que la definición de g_Z depende fuertemente de que $\mathcal{A}(Z) \neq 0$ (lo cual también pasa en $V(n)^-$), debido a esto sólo definimos esta forma en $\mathcal{P}^+(n)$ y $\mathcal{P}^-(n)$ y no en $\mathbb{P}(\mathcal{A}^{-1}(0)) \subset \mathcal{P}(n)$.

Ejemplo: El espacio de triángulos módulo semejanza orientada.

En este caso $\mathcal{P}(3) \cong \mathbb{P}(V(3)) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es la esfera de Riemann y una base de $V(3)$ está dada por:

$$B = \{P_1, P_2\} \quad \text{donde} \quad P_1 = (1, e^{2\pi i/3}, (e^{2\pi i/3})^2) \text{ y } P_2 = (1, e^{4\pi i/3}, (e^{4\pi i/3})^2).$$

Si la pareja (t_1, t_2) representa a $T \in V(3)$ en la base B , sabemos que $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(P_1)(|t_1|^2 - |t_2|^2)$. Por lo tanto los conjuntos:

$$V(3)^+ = \{(t_1, t_2) \in V(3) \mid |t_1| > |t_2|\} \quad \text{y} \quad S' = \{(t_1, t_2) \in V(3) \mid |t_1| = |t_2|\},$$

tienen como imagen bajo la carta afín $(t_1, t_2) \mapsto t_2/t_1$ al disco $\mathcal{P}^+(3) = \Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$ y al círculo $S^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$ respectivamente. El conjunto $\mathbb{C} \setminus (\Delta \cup S^1)$ es imagen de triángulos con área negativa, sólo faltaría $P_2 = (0, 1)$ (el equivalente $\infty \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$). Esto demuestra que S^1 divide a $\mathcal{P}(3)$ en dos componentes conexas que parametrizan a los triángulos² de área positiva y negativa.

Ahora consideremos $\zeta \in \Delta$ y $U, V \in T_\zeta\Delta$. Para calcular $g_\zeta(U, V)$, elegimos el representante $(1, \zeta) \in V(3)^+$. Por lo tanto $U = (0, \lambda), V = (0, \alpha)$. Como $(1, \zeta)^\perp$ es de dimensión 1 y $(\bar{\zeta}, 1)$ pertenece a él, existen $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$U = u_1(1, \zeta) + u_2(\bar{\zeta}, 1) \quad \text{y} \quad V = v_1(1, \zeta) + v_2(\bar{\zeta}, 1).$$

Multiplicando ambos vectores por $(\bar{\zeta}, 1)$ (respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$) para calcular la componente de U y V en $(1, \zeta)^\perp$ obtenemos:

$$u_2 = \frac{\lambda}{\mathcal{A}(\bar{\zeta}, 1)} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{\alpha}{\mathcal{A}(\bar{\zeta}, 1)},$$

por lo tanto:

$$g_{(1,\zeta)}(U, V) = \frac{\langle u_2(\bar{\zeta}, 1), v_2(\bar{\zeta}, 1) \rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(1, \zeta)|} = \frac{u_2 \bar{v}_2 \mathcal{A}(\bar{\zeta}, 1)}{|\mathcal{A}(1, \zeta)|} = \frac{\lambda \bar{\alpha}}{(1 - |\zeta|^2)^2}$$

Observaciones:

1.- Si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ tenemos que:

$$\Re g_Z(U, V) = \frac{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2}{(1 - |\zeta|^2)^2} \quad \text{y} \quad \Im g_Z(U, V) = \frac{\lambda_2 \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2}{(1 - |\zeta|^2)^2},$$

son respectivamente la métrica hiperbólica y la forma hiperbólica de área en el disco de Poincaré.

²Módulo semejanza orientada.

2.- En este caso utilizamos la base \mathcal{B} para calcular $\mathcal{P}(n)$ y la métrica en él. Aquí mostraremos que también podemos hacer esos cálculos en la base E .

Llamemos $V'(3)$ al espacio $\{(0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. Entonces $\mathcal{P}(3) \cong \mathbb{P}(V'(3)) \cong \mathbb{CP}^1$ y la base de $V'(3)$ en este caso es:

$$E = \{e_2, e_3\} \quad \text{donde} \quad e_2 = (0, 1, 0) \text{ y } e_3 = (0, 0, 1).$$

Ahora los conjuntos determinados por los triángulos de área positiva y los de área 0 se ven en el plano afín $\{(0, 1, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ (que puede pensarse como la imagen de la carta $(0, z_1, z_2) \mapsto z_2/z_1$) como $\mathbf{H} = \{(0, 1, z) \in V'(3) \mid \Im z > 0\}$ y \mathbb{R} respectivamente. Claramente el semiplano inferior representa triángulos de área negativa. Ahora \mathbb{R} es quien divide al plano en las componentes conexas determinadas por los triángulos de área positiva y negativa.

Consideremos $U, V \in T_\zeta \mathbf{H}$ con $\zeta = (0, 1, z)$, entonces $U = (0, 0, \lambda)$ y $V = (0, 0, \alpha)$. Como ζ^\perp es de dimensión 1 y $(0, 1, \bar{z}) = \bar{\zeta}$ pertenece a él, existen $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$U = u_1 \zeta + u_2 \bar{\zeta} \quad \text{y} \quad V = v_1 \zeta + v_2 \bar{\zeta}.$$

Para calcular la componente de U y V en ζ^\perp multiplicamos (respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$) ambos vectores por $\bar{\zeta}$, con esto obtenemos que

$$u_2 = \frac{\lambda}{\mathcal{A}(\bar{\zeta})} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{\alpha}{\mathcal{A}(\bar{\zeta})},$$

utilizando que $\mathcal{A}(\bar{\zeta}) = (\Im z)/2$ concluimos:

$$g_\zeta(U, V) = \frac{\langle u_2 \bar{\zeta}, v_2 \bar{\zeta} \rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(\bar{\zeta})|} = \frac{u_2 v_2 \mathcal{A}(\bar{\zeta})}{|\mathcal{A}(\bar{\zeta})|} = \frac{\lambda \bar{\alpha}}{(\mathcal{A}(\bar{\zeta}))^2} = \frac{4\lambda \bar{\alpha}}{(\Im z)^2}.$$

Capítulo 2

La región de polígonos simples.

En los siguientes capítulos trabajaremos con polígonos simples, debido a esto dedicaremos la sección 1 de este capítulo para demostrar los resultados que nos interesan de ellos. Cabe mencionar que aunque estos resultados son conocidos, decidimos integrar esta sección para fijar la notación que se utilizará en el resto de la tesis. En la sección 2 de este capítulo se define poligonal y se fija notación que será utilizada posteriormente, por último en la sección 3 se estudian algunas de las propiedades que tiene la región determinada por los polígonos simples en $V(n)$.

1. Polígonos simples.

Para nosotros un polígono es una n -ada de números complejos $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ con $n \geq 3$, las aristas de Z son los segmentos de recta orientados que unen a z_i con z_{i+1} (tomando los índices módulo n). Durante el resto de la tesis denotaremos con $\overline{z_i z_j}$ al segmento orientado que une a z_i con z_j y con $\overline{z_i z_j}^\circ$ al interior de tal segmento (i.e. $\overline{z_i z_j}^\circ = \overline{z_i z_j} \setminus \{z_i, z_j\}$).

DEFINICIÓN 2.1. Decimos que un polígono es singular si tiene vértices repetidos o el interior de alguna arista intersecta a otra, en caso contrario decimos que el polígono es simple. Denotaremos con $\mathcal{S}(n) \subset V(n)$ al subconjunto de polígonos simples. Sea $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{S}(n)$, entonces:

- *El interior de Z es la región que queda a la izquierda al caminar por los lados de Z en el sentido positivo (que no necesariamente es el determinado por el orden en sus vértices). Éste se denota Z° .*

- *Una diagonal de Z es un segmento $\overline{z_i z_j}$ con $j \neq i - 1, i, i + 1$.*
- *Decimos que $\overline{q_1 q_2}$ está contenido en Z , si q_1 y q_2 pertenecen a las aristas de Z y para todo $p \in \overline{q_1 q_2}^\circ$, $p \in Z^\circ$.*

Proposición 2.1. *Sea $n \geq 4$. Todo n -ágono simple tiene una diagonal que está contenida en él.* DEMOSTRACIÓN. Dado $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{S}(n)$, elegimos tres vértices consecutivos z_{i-1}, z_i, z_{i+1} .

Tomando a z_i como punto base, tracemos todos los segmentos que están contenidos en Z , estos segmentos llenan todo el ángulo del vértice z_i que pertenece a Z° . Entonces existen dos posibilidades:

Todos los segmentos terminan en una arista. En este caso la diagonal $z_{i-1}z_{i+1}$ está contenida en Z .

No todos los segmentos terminan en una arista. De manera que algún segmento termina en un vértice z_j , luego $\overline{z_i z_j}$ es una diagonal que está contenida en Z . \square

Corolario 1. Si Z es un n -ágono simple con $n \geq 4$. Entonces Z admite una triangulación con $n - 2$ triángulos, donde los lados de cada triángulo son aristas o diagonales de Z . DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción sobre el número de lados. Caso $n = 4$: La proposición anterior nos dice que existe una diagonal que está contenida en Z , esta diagonal divide a Z en $4 - 2 = 2$ triángulos. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 4$ y demostraremos para $n + 1$.

Por la proposición anterior existe una diagonal contenida en Z , esta diagonal divide a Z en dos polígonos Z_1 y Z_2 con m y $n - m + 2$ vértices respectivamente. Por hipótesis los polígonos Z_1 y Z_2 se pueden dividir en $m - 2$ y $n - m$ triángulos con algunas de sus diagonales, pero todas las diagonales de Z_1 y Z_2 son también diagonales de Z . Concluimos que Z se puede dividir con diagonales en $m - 2 + n - m = n - 2$ triángulos. \square

Corolario 2. Sea Z un n -ágono simple con $n \geq 4$. Existen al menos dos parejas de vértices z_j, z_{j+2} y z_i, z_{i+2} tales que las diagonales $\overline{z_j z_{j+2}}$ y $\overline{z_i z_{i+2}}$ están contenidas en Z . DEMOSTRACIÓN. Sea T una triangulación de Z con diagonales. Notar que cada arista de Z pertenece solamente a uno de los $n - 2$ triángulos de T y por la simpleza no existe triángulo formado con 3 aristas de Z . Por lo tanto existen al menos dos triángulos que tienen a dos aristas de Z como lados. \square

En lo que resta de esta sección sólo trabajaremos en la región $\mathcal{S}(n)^+ \subset V(n)$ de polígonos simples positivamente orientados, *i.e.* al recorrerlos en el orden dado por sus vértices, giramos en sentido contrario a las manecillas del reloj. Todos los resultados que obtendremos son válidos para polígonos simples negativamente orientados, para verificar esto basta adaptar de la manera obvia las definiciones.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $Z \in \mathcal{S}(n)^+$:

- El ángulo interior a Z en el vértice z_i , es el ángulo medido desde $\overline{z_i z_{i+1}}$ hasta $\overline{z_{i-1} z_i}$ en el sentido positivo. Este ángulo se denotará con θ_i .
- El ángulo exterior a Z en el vértice z_i es el ángulo $\alpha_i = \pi - \theta_i$.

Observaciones: Sea $Z \in \mathcal{S}(n)^+$:

1.- La suma de los ángulos interiores de Z es $(n-2)\pi$. Es inmediato del corolario 1 y del hecho que todo triángulo tiene suma de ángulos interiores igual a π .

2.- *Gauss-Bonnet para polígonos.* De la definición de ángulo exterior, concluimos que para todo Z (independientemente del número de lados):

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n (\pi - \theta_i) = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$$

3.- Notar que contrario a los interiores, los ángulos exteriores pueden ser negativos (basta que $\theta_i > \pi$). Para darnos una idea de lo que mide el ángulo exterior al vértice z_i , imaginar que recorremos el polígono Z en sentido positivo. Cuando vamos en la arista $\overline{z_{i-1}z_i}$ y llegamos al vértice z_i , el ángulo α_i nos dice cuanto y en qué sentido debemos girar para colocarnos de frente a la arista $\overline{z_i z_{i+1}}$ y comenzar a caminar a través de ella. Este ángulo comunmente se llama “el ángulo que gira la tangente”.

2. Poligonales.

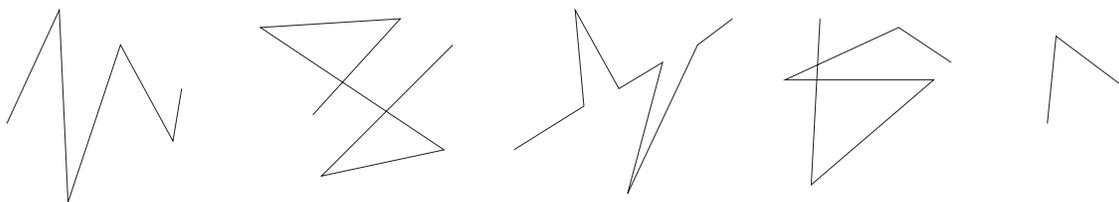
Una poligonal entre los puntos $p, q \in \mathbb{C}$, es un camino formado por un número finito de segmentos de recta que inicia en p y termina en q . Aquí, denotaremos con $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ a la poligonal formada con los segmentos $\overline{pz_1}, \overline{z_2z_1}, \dots, \overline{z_{n-1}z_n}, \overline{z_nq}$ y llamaremos vértices de L a los puntos z_i . Algunos ejemplos de poligonales se muestran en la figura 1.

DEFINICIÓN 2.3. Sea $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ una poligonal.

- L es simple si no tiene vértices repetidos ni se autointersecta.
- El ángulo exterior a L en el vértice z_i , es el ángulo con signo que gira la tangente al recorrer L de manera creciente en sus vértices. Este ángulo se denota con α_i .
- El ángulo final a L es el ángulo exterior entre los segmentos $\overline{z_nq}$ y ϖ donde $\varpi = \overline{pz_1} + (q-p)$ (el trasladado de $\overline{pz_1}$ a q), este ángulo se denota con α_q .
- La suma de los ángulos exteriores de L es $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_q$.

Observaciones: Sea $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ una poligonal.

1.- El ángulo α_i coincide con el ángulo exterior de cualquier polígono que tenga a $\overline{z_{i-1}z_i}$ y $\overline{z_i z_{i+1}}$ como aristas.

FIGURA 1. Ejemplos de poligonales en \mathbb{C} .

2.- Los ángulos exteriores a la poligonal $L^- = [q, z_n, \dots, z_1, p]$, son los negativos de los ángulos exteriores de L .

3.- Si los segmentos $\overline{pz_1}$ y $\overline{z_nq}$ son paralelos y tienen el mismo sentido entonces $\alpha_q = 0$, si tienen sentido contrario $\alpha_q = \pi$.

El siguiente resultado es el análogo para poligonales del corolario 2 de la sección anterior, este también es corolario de la proposición 2.1:

Corolario 3. En toda poligonal simple $L = [p, z_1, \dots, z_n, q]$ existe una pareja de vértices z_{j-1}, z_{j+1} , tal que la poligonal $L' = [p, z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n, q]$ es simple. DEMOSTRACIÓN. Completamos L en un polígono simple Z agregando el menor número de aristas posible. Del corolario 2 sabemos que en Z existen dos vértices v_j, v_2 no consecutivos, tales que las diagonales formadas con los vértices adyacentes a ellos están contenidas en Z . Estos vértices pertenecen a L , pues de lo contrario tomando alguna de estas diagonales y las aristas restantes, completaríamos a L en un polígono simple W de menor número de lados que Z . \square

En esta sección estudiaremos un tipo de poligonales que serán útiles en el desarrollo del siguiente capítulo. Estas poligonales se construyen de la siguiente manera:

Supongamos que $p, q, z_2 \in \mathbb{C}$ son distintos y están en posición general, *i.e.* z_2 no pertenece a la recta determinada por p y q . Consideremos tres puntos $z_1, w, z_3 \in \overline{pq}$ tales que $z_1 \in \overline{pw}$, $z_3 \in \overline{wq}$ y $w \in \overline{z_1z_3}$, puede ser que $z_1 = p$ ó $z_3 = q$. Deformemos \overline{pq} moviendo w por el segmento $\overline{wz_2}$ y fijando $\overline{pz_1}, \overline{z_3q}$, continuamos la deformación hasta obtener la poligonal $L = [p, z_1, z_2, z_3, q]$. En este caso decimos que L se obtiene de una deformación por un punto de \overline{pq} y a $\overline{z_1z_3}$ lo llamamos segmento base de la deformación.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ una poligonal.

- Decimos que L está en zig-zag si L se puede obtener de \overline{pq} con un número finito de deformaciones por un punto de manera que los segmentos base tienen interiores disjuntos.
- Dados $x, y \in L$, denotaremos con L_{xy} a la poligonal que determina L entre x y y .

Ejemplos:

1.- Sea $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ una poligonal. Entonces $L_{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$ y $L_{z_1 z_n} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$.

2.- Las poligonales 3 y la 5 mostradas en la figura 1 están en zig-zag.

3.- Si $L = [p, z_1, z_2, \dots, z_n, q]$ es una poligonal que está en zig-zag y $x, y \in L \cap \overline{pq}$, entonces L_{xy} está en zig-zag.

4.- Si $L = [p, z_1, q]$ es simple, entonces L está en zig-zag. Además α_1 y α_q tienen la misma magnitud pero sentido contrario ya que son ángulos entre una recta y dos paralelas. Por lo tanto $\alpha_1 + \alpha_q = 0$.

La propiedad que nos interesa de las poligonales que están en zig-zag es:

Proposición 2.2. *Toda poligonal que está en zig-zag tiene suma de ángulos exteriores igual a 0.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $L = [p, z_1, \dots, z_n, q]$ una poligonal que está en zig-zag. Supongamos que z_1, z_3 son extremos del segmento base de la primera deformación. Llamemos $L' = [p, z_3, z_4, \dots, q]$ y α'_3 al ángulo exterior a L' en el vértice z_3 . El ángulo α_2 , exterior a L en z_2 , también es ángulo exterior al triángulo $T = (z_1, z_2, z_3)$ y por lo tanto es la suma (con signo adecuado) de los ángulos interiores θ_1 y θ_3 . Se sigue que

$$\alpha_1 = -\theta_1 \quad \text{y} \quad \alpha'_3 = \alpha_2 - \theta_3$$

donde θ_1 y θ_3 tienen el signo determinado por α_2 . Luego la suma de los ángulos exteriores de L y L' coinciden. Procediendo de forma análoga en cada deformación, concluimos que la suma de los ángulos exteriores de L es igual a la de \overline{xy} , que claramente es 0. \square

Corolario. *Sea $L = [p, z_1, z_2, z_3, q]$ una poligonal simple que se obtiene de \overline{pq} con la deformación por un punto, tomando como segmento base a (z_1, z_3) . Entonces para cualesquiera $x, y \in L$ la poligonal L_{xy} tiene suma de ángulos exteriores igual a 0.*

DEMOSTRACIÓN. Del ejemplo 4 y la proposición anterior tenemos que los únicos casos que faltan por demostrar son cuando $x \in \overline{pz_1}$ y $y \in \overline{z_2 z_3}$ ó cuando $x \in \overline{z_1 z_2}$ y $y \in \overline{z_3 q}$. Aquí resolveremos el primer caso, el lector notará que se puede proceder de manera análoga para el otro caso.

Tracemos el segmento $\overline{z_1 y}$, por el ejemplo 4 tenemos que $L' = [x, z_1, y]$ tiene suma de ángulos exteriores igual a 0. Una vez más α_2 (el ángulo exterior a L en z_2) es ángulo exterior del triángulo $T = (z_1, z_2, y)$ y por lo tanto es igual a la suma de sus ángulos interiores θ_1 y θ_y . En este caso se satisface:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - \theta_1 \quad \text{y} \quad \alpha'_y = \alpha_y - \theta_y$$

donde θ_1, θ_y tienen el signo determinado por α_2 y α'_y y α_y son los ángulos exteriores finales de L_{xy} y L' respectivamente. Concluimos que la suma de los ángulos exteriores de L es igual a la de L' . \square

3. La región de polígonos simples.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Proposición 2.3. *La región $\mathcal{S}(n) \subset V(n)$ es abierta y tiene dos componentes conexas por trayectorias. DEMOSTRACIÓN.* Primero demostraremos que $\mathcal{S}(n) \subset V(n)$ es abierto. Supongamos que $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{S}(n)$.

Para toda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ hacemos $L_k = [z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{n-1}, z_n, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}]$; *i.e.* L_k es la poligonal contenida en Z que une z_{k-1} con z_{k+1} y no pasa por z_k . Llamemos r_k a la mínima distancia entre z_k y L_k , r_k es positivo ya que L_k es compacta y Z es simple. Entonces

$$\prod_{k=1}^n B_{\frac{r_k}{3}}(z_k) = \mathcal{U} \subset V(n)$$

es una vecindad abierta de Z que está formada con polígonos simples, *i.e.* $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(n) \subset V(n)$.

Las componentes mencionadas están determinadas por los polígonos de área positiva y negativa. Aquí sólo demostramos el resultado en $\mathcal{S}(n)^+ \subset V(n)$; el lector notará que se puede proceder de manera análoga para demostrar la conexidad por trayectorias de $\mathcal{S}(n)^- \subset V(n)$. Supongamos que $Z \in \mathcal{S}(n)^+$.

Basta demostrar que existe un camino $\Gamma_Z: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(n)^+$ tal que:

$$\Gamma_Z(0) = Z \quad \text{y} \quad \Gamma_Z(1) = (1, e^{2\pi i/n}, (e^{2\pi i/n})^2, (e^{2\pi i/n})^3, \dots, (e^{2\pi i/n})^{n-1}) = P_1$$

donde P_1 es el n -ágono regular. Para demostrar la existencia de Γ procederemos por inducción.

En el caso $n = 3$ es claro que todo triángulo $T \in \mathcal{S}(3)^+$ se puede unir con el equilátero de área positiva con una trayectoria que pertenece a $\mathcal{S}(3)^+$ (ver ejemplo, página 7). Supongamos que el resultado vale para n . Por demostrar el caso $n + 1$.

Sean z_{i-1}, z_i, z_{i+1} vértices tales que la diagonal $\overline{z_{i-1}z_{i+1}}$ está contenida en Z (ver corolario 2, página 10). Digamos que γ_1 es la deformación de $Z = (z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n)$ en el polígono $W = (z_1, \dots, z_{i-1}, (z_{i-1} + z_{i+1})/2, z_{i+1}, \dots, z_n)$, que mueve z_i en $(z_{i-1} + z_{i+1})/2$ mediante la recta que los une y fija a los vértices restantes. Es evidente que para todo t , $\gamma_1(t) \in \mathcal{S}(n)^+$. Sea W el $(n-1)$ -ágono $(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)$, (*i.e.* olvidemos el vértice que está en el punto medio de la arista $\overline{z_{i-1}z_{i+1}}$). Por hipótesis de inducción, existe deformación γ_2 entre W y $P'_1 = (1, e^{2\pi i/n}, \dots, (e^{2\pi i/n})^{i-2}, (e^{2\pi i/n})^i, \dots, (e^{2\pi i/n})^{n-1})$

que nunca se sale de $\mathcal{S}(n)^+$. Por último llamamos γ_3 a la deformación de P'_1 en P_1 que mueve el punto $[(e^{2\pi i/n})^{i-2} + (e^{2\pi i/n})^i]/2$ en $(e^{2\pi i/n})^{i-1}$ por el segmento que los une.

Entonces $\Gamma = \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$ es la trayectoria buscada. \square

Más propiedades de $\mathcal{S}(n) \subset V(n)$:

1.- *Ser simple es proyectivo:* Para cualesquiera $Z \in \mathcal{S}(n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$ el polígono $\lambda Z \in \mathcal{S}(n)$. Se excluye $\lambda = 0$ ya que $0Z = 0 \in V(n)$ es singular.

2.- *Existe involución en $\mathcal{S}(n)^+$:* Si $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{S}(n)^+$ entonces $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathcal{S}(n)^-$ (la región de polígonos simples negativamente orientados) y $\bar{\bar{Z}} = Z \in \mathcal{S}(n)^+$. Además esto vale para cualquier reflexión en una recta de \mathbb{C} , ya que las reflexiones son composición de transformaciones afines complejas (las cuales preservan la orientación) con la conjugación.

3.- *$\mathcal{S}(n)$ no es invariante bajo sumas:* Basta observar que para cualquier $Z \in \mathcal{S}(n)$ el polígono $Z + \bar{Z}$ es singular. Aún más, notar que $(0, 1, 1 + i, i), (1 + i, i, 0, 1) \in \mathcal{S}^+(4)$ pero la suma $(1 + i, 1 + i, 1 + i, 1 + i)$ es un cuadrilátero singular, por lo tanto la propiedad es cierta para $\mathcal{S}(n)^+$ y $\mathcal{S}(n)^-$.

4.- *Existen encajes de $\mathcal{S}(n-1)$ en $\mathcal{S}(n)$:* Definimos $e_i: \mathcal{S}(n-1) \rightarrow \mathcal{S}(n)$ tal que $(z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto (z_1, \dots, z_i, (z_i + z_{i+1})/2, z_{i+1}, \dots, z_{n-1})$, i.e. agregamos el punto medio de una de sus aristas como vértice. De esta manera definimos $n-1$ encajes.

Algunas propiedades de $V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$ la región de polígonos singulares.

1.- *Ser singular es proyectivo:* De hecho tenemos que para cualesquiera $Z \in V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ el polígono λZ pertenece a $V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$ (no se tiene que excluir $\lambda = 0$).

2.- *Ser singular es invariante bajo reflexiones:* Es claro.

3.- *$V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$ no es invariante bajo sumas:* Un ejemplo que ilustra esto es $(0, 0, 1, i) + (0, 1, 1 + i, 1 + i) = (0, 1, 2 + i, 1 + 2i) \in \mathcal{S}(n)$.

4.- *Existe encaje de $V(n-1) \setminus \mathcal{S}(n-1)$ en $V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$:* Procedemos de forma análoga al caso simple.

5.- *$V(n) \setminus \mathcal{S}(n)$ es cerrada y conexa por trayectorias:* La cerradura es clara y la conexidad se debe a que todo elemento se puede unir con el cero.

Capítulo 3

Definición de poliedro y algunas de sus propiedades.

En este capítulo definimos el concepto de poliedro y asociamos a cada poliedro una familia de polígonos simples con ciertas características. Esta idea de ver a los poliedros como polígonos nos será muy útil en el siguiente capítulo para definir el espacio de poliedros y entender un poco sobre su topología.

1. Conos.

En la definición de poliedro utilizaremos la noción de cono euclidiano, por este motivo dedicamos esta sección para demostrar algunas propiedades de los conos con ángulo entre $(0, 2\pi)$. Cabe mencionar que se pueden definir conos de ángulo mayor pero estos están fuera de las necesidades de este trabajo. En el desarrollo de esta sección denotaremos con $e^{i\theta}\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}$ al rayo que emana del origen con argumento $\theta \in (0, 2\pi)$ y con A_θ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg z \leq \theta\} \cup \{0\}$.

DEFINICIÓN 3.1. Dado $\theta \in (0, 2\pi)$. El cono euclidiano de ángulo θ es el cociente:

$$C_\theta = A_\theta / \{z \mapsto e^{i\theta}z\}.$$

Al punto $J(0) \in C_\theta$ donde $J: A_\theta \rightarrow C_\theta$ es la proyección al cociente, lo llamamos vértice del cono y lo denotaremos con 0.

Observaciones: Sean $\theta \in (0, 2\pi)$ y C_θ el cono euclidiano correspondiente.

1.- Sean $\beta \in (0, 2\pi)$ y $e^{i\beta}A_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \arg z \leq (\theta + \beta)\} \cup \{0\}$. El cociente

$$e^{i\beta}A_\theta / \{z \mapsto e^{i\theta}z\},$$

define un cono isométrico a C_θ ya que la función $f(z) = e^{i\beta}z$ es una isometría de \mathbb{C} .

2.- C_θ es un espacio métrico: El conjunto $C_\theta^* = C_\theta \setminus \{0\}$ admite un atlas con cambios de coordenadas que son isometrías de \mathbb{C} (en el ejemplo de la página 25 se muestra explícitamente un atlas), se excluye al $0 \in C_\theta$ ya que éste no tiene vecindades isométricas a abiertos de \mathbb{C} . Por lo tanto en C_θ^* está bien definida la métrica plana de \mathbb{C} . Sean $x, y \in C_\theta^*$ y $m'(x, y)$ la distancia geodésica entre x y y , i.e. $m'(x, y)$ es el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen a x y y . Extendiendo m' al 0 de manera continua, obtenemos una distancia m definida en todo C_θ .

3.- Para todos $\theta, \beta \in (0, 2\pi)$ distintos los conos C_θ y C_β son no isométricos: Nótese que una isometría $f: C_\theta \rightarrow C_\beta$, se levanta a las secciones angulares $A_\theta \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ y $A_\beta \setminus e^{i\beta}\mathbb{R}^+$ ya que ahí J es biyección. Sabemos que estas secciones angulares son isométricas si y sólo si $\theta = \beta$. Concluimos que el espacio de conos euclidianos está parametrizado por el intervalo $(0, 2\pi)$ y tiene como conos límite a $C_0 = \mathbb{R}^+$ y $C_{2\pi} = \mathbb{C}$.

4.- Para todo $x \in A_\theta$ se cumple que $|x| = m(0, J(x))$: Nótese que los puntos $x, y \in A_\theta$ que están relacionados, tienen la misma norma (o distancia euclidiana al origen), por lo tanto la distancia al 0 no cambia bajo la proyección J . De la observación 2 sabemos que el segmento $J(\overline{0x})$ es la curva de menor longitud en C_θ que une a $J(x)$ con 0.

5.- En C_θ está definida una función argumento: Cómo J preserva rayos por el origen y ángulos, podemos bajar el argumento de \mathbb{C} a C_θ . De esta manera cualquier $x \in C_\theta^*$ satisface que $\arg x \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$. Por ejemplo el rayo $J(\mathbb{R}^+)$ tiene argumentos $k\theta$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Nótese que para cada $m_0 \in \mathbb{Z}$, el rayo $R \subset C_\theta$ de argumentos $\beta + m\theta$, define en $C_\theta \setminus (R \cup \{0\})$ la rama de la función argumento que toma valores en el intervalo $(\beta + m_0\theta, \beta + (m_0 + 1)\theta)$.

6.- C_θ tiene coordenadas polares: De las observaciones 4 y 5 tenemos que todo $x \in C_\theta^*$ se puede escribir de la forma $re^{2i\pi\beta/\theta}$, donde $r = m(0, x)$ y $\beta = \arg x \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$. Además al quitar un rayo, las coordenadas en la rama de la función argumento correspondiente son continuas. Por ejemplo, la proyección del rayo a argumento $\beta < \theta$ se expresa en estas coordenadas de la siguiente manera:

$$J(e^{i\beta}\mathbb{R}^+) = \{re^{(2i\pi\beta+k\theta)/\theta} \in C_\theta \mid r > 0\}.$$

7.- Sea $R \subset C_\theta$ es el rayo de argumento $\beta \in (0, \theta)$. La sección angular $C_\theta \setminus (R \cup \{0\})$ se identifica naturalmente vía las coordenadas polares definidas en 6 con el dominio en el plano complejo dado por $(e^{i\beta}A_\theta)^\circ$. Por lo tanto los segmentos de recta contenidos en $(e^{i\beta}A_\theta)^\circ$ definen segmentos de recta (geodésicas) en C_θ .

1.1. 1.1. Geodésicas en los conos. Aquí demostraremos el siguiente resultado que nos dice como son todas las geodésicas de C_θ .

Proposición 3.1 Si $\theta \in (0, 2\pi)$ y $x, y \in C_\theta$, entonces existe una geodésica de C_θ que une a x con y . DEMOSTRACIÓN. La observación 4 muestra el resultado cuando $x = 0$ ó $y = 0$, falta demostrar el caso $x, y \in C_\theta^*$. Elegimos un rayo R tal que $x, y \notin R$ y $\arg R = \beta \in (0, \theta)$, por lo tanto R determina la rama de la función argumento tal que $\arg x, \arg y \in (\beta, \beta + \theta)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\arg x \leq \arg y$. Entonces existen dos casos:

Caso 1.- $\arg y - \arg x < \pi$.- Por 7 sabemos que existe identificación (vía las coordenadas polares) entre $C_\theta \setminus (R \cup \{0\})$ y $(e^{i\beta}A_\theta)^\circ$. Claramente \overline{xy} está contenido en $(e^{i\beta}A_\theta)^\circ$. Por lo tanto \overline{xy} define la geodésica buscada en C_θ .

Caso 2.- $\arg y - \arg x > \pi$.- Como $\theta < 2\pi$, tenemos que $\theta + \arg x - \arg y < \pi$. Ahora quitemos un rayo $R' \subset C_\theta$ tal que $\arg R' \in (\arg x, \arg y)$. Entonces en la rama de la función argumento definida por R' , los valores de x y y cumplen $\arg' y = \arg y$ y $\arg' x = \arg x + \theta$. Procediendo análogamente al caso anterior obtenemos el resultado. \square

Corolario. Sean $\theta \in (0, 2\pi)$ y $x, y \in C_\theta^*$. La geodésica de longitud mínima que une a x con y no pasa por $0 \in C_\theta$. DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior existe geodésica γ_{xy} entre x y y que no pasa por 0 . Aplicando la desigualdad del triangular en el triángulo euclidiano formado con las geodésicas γ_{xy} , γ_{y0} y γ_{0x} , concluimos que el camino γ_{xy} es más corto que $\gamma_{y0} \circ \gamma_{0x}$. \square

2. Poliedros.

Los ejemplos más conocidos de poliedros son las superficies determinadas por los sólidos platónicos, es por esto que nos ayudaremos de algunas propiedades en estas superficies para dar nuestra definición precisa de poliedro. La primera propiedad a mencionar es topológica y dice:

- *Todo sólido platónico es homeomorfo a la esfera S^2 .*

Ésta es una propiedad que pediremos a todos los poliedros independientemente de su número de vértices. Las siguientes propiedades que nos interesan se satisfacen en todos los sólidos platónicos pero dependen del número vértices, debido a ello aquí utilizaremos el tetraedro \mathcal{T} para ilustrarlas mejor. Recordemos que \mathcal{T} es un poliedro con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 que se forma al pegar 4 triángulos equiláteros por sus aristas. Las propiedades que nos interesan de \mathcal{T} son:

- *El conjunto $\mathcal{T} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tiene métrica plana:*
- *Las vecindades de un $v_i \in \mathcal{T}$ son isométricas a las vecindades de $0 \in C_\pi$.*

Si consideráramos otro sólido platónico, lo que cambiaría en el enunciado de estas propiedades es el número de vértices y el ángulo en ellos. Esto nos conduce a la siguiente:

DEFINICIÓN 3.2. Un poliedro es una superficie P con n puntos especiales v_1, v_2, \dots, v_n , homeomorfa a S^2 y que satisface:

1. El subconjunto $P^* = P \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tiene métrica plana¹.
2. Para toda i , existe vecindad de v_i isométrica a una vecindad del vértice de un cono euclidiano C_{θ_i} .

A los puntos v_i los llamaremos vértices o “singularidades cónicas”, al ángulo θ_i lo llamaremos “ángulo cónico en v_i ” y al ángulo $\kappa_i = 2\pi - \theta_i$ lo llamaremos “curvatura en v_i ”.

Observaciones: Sea P un poliedro con vértices en los puntos v_1, v_2, \dots, v_n .

1.- P es un espacio métrico: Basta extender continuamente la métrica de P^* (definida por la distancia geodésica) a los v_i . Denotaremos con μ a la métrica obtenida de esta manera. La compacidad de S^2 implica que (P, μ) es un espacio métrico completo.

2.- Para todos $x, y \in P$ existe una poligonal que los une y no pasa por ningún vértice: Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow P$ una curva simple tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ y para todo $t \in (0, 1)$, $\alpha(t) \in P^*$ (α existe ya que P^* es conexo por trayectorias). Sea

$$r_0 = \min_{v_i \neq x} \{\mu(x, v_i)\}, \quad \text{es claro que } r_0 > 0,$$

llamemos $t_1 \in [0, 1]$ al ínfimo de los $t \in [0, 1]$ tales que para todo $s \geq t$, $\alpha(s) \in P \setminus B_{r_0}(x)$. Por continuidad $z_1 = \alpha(t_1) \in \partial B_{r_0}(x)$, por lo tanto existe “segmento” que une x con z_1 (tiene sentido decir segmento pues $B_{r_0}(x)$ es isométrica a un abierto de \mathbb{C} , o de un cono si x es vértice), denotaremos con $\overline{xz_1}$ a dicho segmento. Ahora hacemos $r_1 = \min\{\mu(z_1, v_i)\}$ y llamamos t_2 al ínfimo de los $t \in [0, 1]$ tales que para todo $s \geq t$, $\alpha(s) \in P \setminus B_{r_1}(z_1)$. Entonces $z_2 = \alpha(t_2) \in \partial B_{r_1}(z_1)$ y por lo tanto existe segmento entre z_1 y z_2 . Continuando con este proceso, la compacidad de α nos dice que vamos a terminar en k pasos. Luego para todo $t \in [t_k, 1]$ se satisface que $\alpha(t) \in B_{r_k}(z_k)$, lo cual implica que existe segmento que une a z_k con y .

Concluimos que la poligonal $L = [x, z_1, \dots, z_k, y] \subset P$ une x con y , no pasa por ningún vértice y su longitud es menor que la longitud de α ya que localmente lo es.

2.1. Geodésicas en los poliedros: Por definición de poliedro, sabemos que las curvas que localmente minimizan la distancia son los segmentos de recta (incluso cerca de los vértices, ver sección anterior), *i.e.* curvas para las cuales existe carta local en la que se ven como segmentos de recta en \mathbb{C} . Ahora demostraremos que las curvas que minimizan la distancia (de forma global) en P también son de esta forma, para hacer esto utilizaremos la siguiente definición de longitud de una curva continua (ver [DYS], página 34).

¹Métrica plana en el sentido que admite un atlas con cambios de coordenadas que son isometrías de \mathbb{C} que preservan orientación, ver [Thu1].

DEFINICIÓN 3.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ una curva continua. Considere una partición $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ de $[a, b]$ tal que $a = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$. El supremo de las sumas

$$\sum_{i=1}^N d(\gamma(y_{i-1}), \gamma(y_i)),$$

sobre todas las particiones Y de $[a, b]$, se llama la longitud de γ con la métrica d y se denota $\ell(\gamma)$. Decimos que una curva es rectificable si tiene longitud finita.

Propiedades del funcional $\ell: C([a, b], X) \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $\gamma \in C([a, b], X)$ es una curva continua (ver [DYS], página 34). Se cumplen las siguientes:

1. Si γ es C^1 y g es una métrica riemanniana en X , entonces $\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \ell(\gamma)$ (por lo tanto la igualdad es válida para curvas diferenciables a trozos).
2. $\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.
3. Si $c \in (a, b)$, entonces $\ell(\gamma_{ac}) + \ell(\gamma_{cb}) = \ell(\gamma)$ (donde γ_{ac} denota la curva que define γ entre $\gamma(a)$ y $\gamma(c)$).
4. ℓ es inferiormente semicontinuo con respecto a la topología uniforme (C^0 -topología), i.e. si $\{\gamma_i: [a, b] \rightarrow X\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de curvas rectificables que convergen a γ , entonces $\liminf \ell(\gamma_i) \geq \ell(\gamma)$.
5. Toda curva rectificable admite una parametrización por longitud de arco.

Proposición 3.2. Sean P un poliedro y $x, y \in P$. Entonces existe una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ de longitud mínima (i.e. $\ell(\gamma) = \mu(x, y)$) tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Además para todo $t \in (0, 1)$, existe carta (ϕ, U) alrededor de $\gamma(t)$ tal que $\phi(U \cap \gamma) \subset \mathbb{C}$ es un segmento de recta. DEMOSTRACIÓN. Por definición de $\mu(x, y)$, existe una sucesión $\{\tilde{\alpha}_n: [0, l_n] \rightarrow P\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas parametrizadas por longitud de arco que unen a x con y , tales que la sucesión de sus longitudes $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en el intervalo $(\mu(x, y), \mu(x, y) + 1)$ y converge a $\mu(x, y)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos $\alpha_n: [0, 1] \rightarrow P$ a la parametrización de $\tilde{\alpha}_n$ tal que $\alpha_n(t) = \tilde{\alpha}_n(l_n t)$, entonces $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], P)$. Claramente para cada $t \in [0, 1]$ la cerradura de $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un subconjunto compacto de P (pues es un cerrado en un compacto).

Por demostrar que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en $t_0 \in (0, 1)$. Sea $\epsilon > 0$. Haciendo $\delta = \epsilon / (\mu(x, y) + 1)$ tenemos que:

$$\mu(\alpha_n(t_0), \alpha_n(t)) = \mu(\tilde{\alpha}_n(l_n t_0), \tilde{\alpha}_n(l_n t)) \leq l_n |t_0 - t| < l_n \epsilon / (\mu(x, y) + 1) < \epsilon.$$

El teorema de Arzela-Ascoli implica que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente a una curva $\gamma \in C([0, 1], P)$. Por continuidad sabemos que γ une a x con y y por la semicontinuidad inferior de ℓ tenemos que $\ell(\gamma) \leq \lim \ell(\alpha_n) = \mu(x, y)$.

Aplicando el método utilizado en la observación 2 a la curva γ , obtenemos una poligonal $L = [x, \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k), y]$ tal que $\ell(L) \leq \ell(\gamma)$. De la propiedad 2 se sigue que $\ell(L) = \ell(\gamma)$. Por construcción de L sabemos que existe una vecindad plana U alrededor de x tal que $\gamma_{0t_1}, L_{x\gamma(t_1)} \subset \overline{U}$ (la cerradura de U), por lo tanto $\gamma_{0t_1} = L_{x\gamma(t_1)}$ ya que de lo contrario $\ell(L_{x\gamma(t_1)}) < \ell(\gamma_{0t_1})$, y entonces la curva $\gamma_{t_1,1} \circ L_{x\gamma(t_1)}$ tendría menor longitud que γ . Procediendo de forma análoga en cada intervalo (t_i, t_{i+1}) concluimos que $\gamma = L$.

Claramente los puntos $p \in L^\circ$ distintos de los $\gamma(t_i) = z_i$ se ven localmente como segmentos de recta. Sea (ϕ, U) una carta plana alrededor de z_1 . Supongamos que el ángulo θ (cualquiera de los dos que definen) entre los segmentos $\phi(\overline{xz_1} \cap U)$ y $\phi(\overline{z_1z_2} \cap U)$ es distinto de π . Entonces existen puntos $p \in \phi(\overline{xz_1} \cap U)$ y $q \in \phi(\overline{z_1z_2} \cap U)$ tales que el segmento \overline{pq} tiene menor longitud que L_{pq} , luego la curva $L_{pq} \circ \overline{pq} \circ \overline{xp}$ une a x con y y tiene menor longitud que L . Esto contradice que L es la curva de menor longitud, se sigue que $\theta = \pi$ y que L alrededor de z_1 se ve como un segmento. Procediendo análogamente en todos los z_i obtenemos el resultado. \square

La propiedad que menciona esta proposición sobre curvas que minimizan la distancia nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.4. Sean P un poliedro y $\gamma: [a, b] \rightarrow P$. Decimos que γ es una geodésica de P si para todo punto $p \in \gamma^\circ$ existe una carta local (compatible con la estructura plana de P) (ϕ, U) tal que $p \in U$ y $\phi(\gamma \cap U) \subset \mathbb{C}$ es un segmento de recta.

Ejemplos: Pueden existir muchas geodésicas entre dos puntos. Con estos ejemplos intentamos ilustrar las siguientes dos cosas.

I - Las geodésicas mínimas no son únicas (curvas en rojo de la figura 1).

II - En general existen muchas geodésicas de distintas longitudes entre dos puntos (curvas en azul de la figura 1).

1. En el cubo considerar p y q los centros de 2 caras adyacentes. Aquí hay varias geodésicas pero sólo una mínima, ver figura 1 - a.
2. Considerar en el tetraedro un vértice y el centroide del triángulo no adyacente a él. Entre estos dos puntos hay sólo 3 geodésicas mínimas, ver figura 1 - b.
3. En el octaedro considerar dos vértices entre los que no hay arista. Entre ellos existen sólo 4 geodésicas mínimas, ver figura 1 - c.
4. En el cubo consideremos los puntos p, q como se muestra en la figura 1 - d. Entre estos dos puntos existen varias geodésicas pero sólo dos mínimas, ver figura 1 - d.

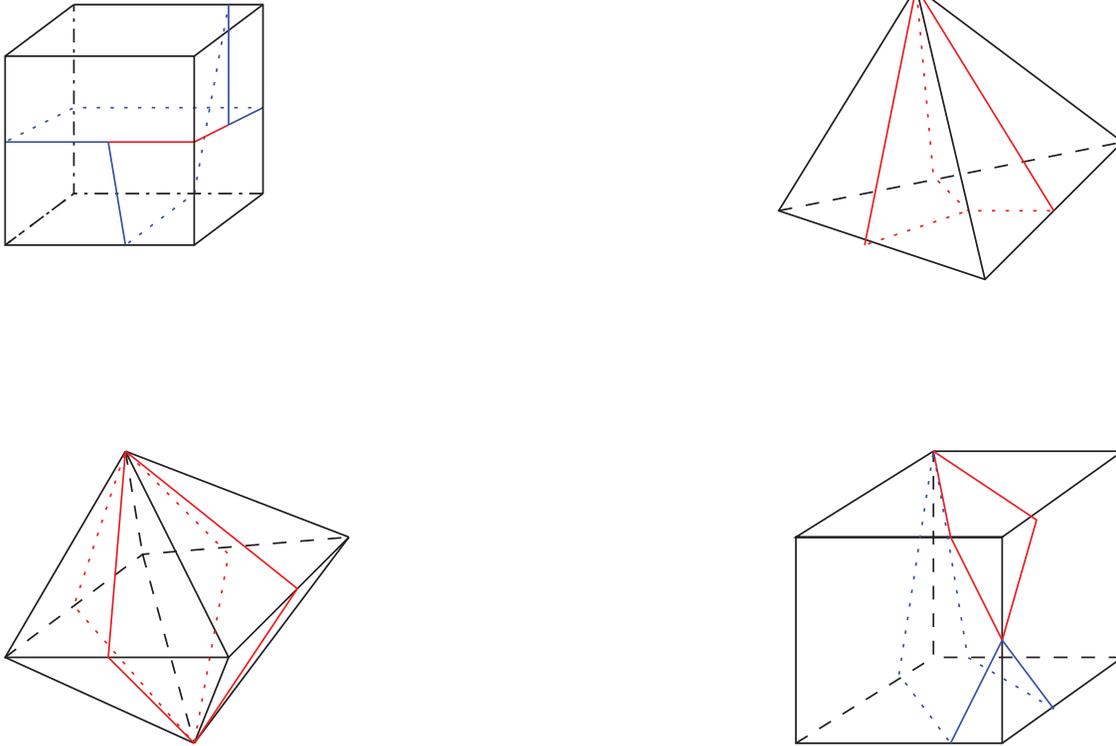


FIGURA 1. Ejemplos de geodésicas en poliedros.

Proposición 3.3 Sean P un poliedro con vértices v_0, v_1, \dots, v_n . Si para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, γ_i es una geodésica mínima que une v_0 con v_i , entonces para $i \neq j$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$. DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\gamma_i \neq \gamma_j$ ya que $v_i \neq v_j$, además por el corolario de la sección anterior, las γ_i no pasan por vértices diferentes a v_0 y v_i . Procediendo por contradicción demostraremos que las geodésicas no se intersectan en su interior. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{x\}$. Sea $r = \min_i \{\mu(x, v_i)\}$.

En la vecindad plana $B_r(x) \subset P$ las intersecciones $\gamma_1 \cap B_r(x)$ y $\gamma_2 \cap B_r(x)$ son geodésicas mínimas, pasan a través de x y cruzan a $B_r(x)$, por lo tanto son diámetros. Pensando que las γ_i van de v_0 a v_i , denotemos con p_i, s_i a los puntos primero y segundo en $\gamma_i \cap B_r(x)$ y con l_i a la longitud de la curva que define γ_i entre v_0 y x , ver figura 2. Supongamos que $l_1 < l_2$ (procedemos análogamente si $l_2 < l_1$), entonces la curva entre v_0 y v_2 definida al seguir γ_1 de v_0 a x y γ_2 de x a v_2 tiene menor longitud que γ_2 , lo cual no puede suceder. Se sigue que $l_1 = l_2$ y que las longitudes de los pedazos de γ_1 y γ_2 comprendidos entre v_0 y p_1, p_2 respectivamente miden lo mismo, ya que a las dos les falta un radio de $B_r(x)$ para llegar a x .

La longitud de $\overline{p_2 s_1}$ es menor que la de $\overline{p_1 s_1}$, pues las cuerdas de mayor longitud en un círculo son los diámetros, ver figura 2. Entonces la curva que se define al seguir γ_2 de v_0 a p_2 , después $\overline{p_2 s_1}$

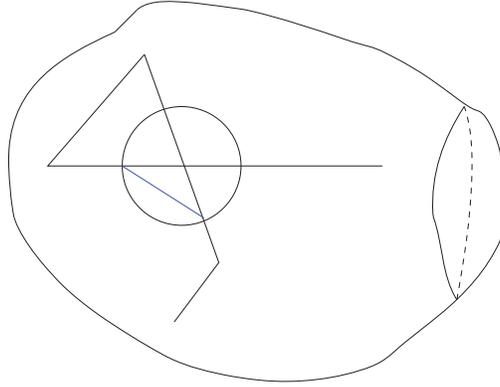


FIGURA 2. Las geodésicas mínimas no se intersectan.

y por último γ_1 de s_1 a v_1 tiene longitud menor que γ_1 , esto es una contradicción. De manera la intersección no puede ser sólo un punto.

La $\gamma_1 \cap \gamma_2$ no puede ser una geodésica γ , ya que entonces existe $x \in \gamma$ tal que γ_1 (ó tal vez por γ_2) en x no tiene una carta local en la que se vea como un segmento de recta. Concluimos que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. \square

Corolario. Sean P un poliedro, $x, y \in P$ y γ una geodésica mínima que une a x con y . Entonces γ es única salvo clases de homotopía en P^* . DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{L} \subset P$ es una geodésica mínima que une a x con y y es homotópica a γ . Procediendo de forma análoga que en la proposición anterior, concluimos que $\gamma \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Por lo tanto el lazo $\Gamma = \mathcal{L}^{-1} \circ \gamma$ divide a P en dos componentes abiertas B_1 y B_2 . En una de estas componentes no debe haber singularidades, pues de lo contrario γ y \mathcal{L} no serían homotópicas. Sin pérdida de generalidad supongamos que B_1 es dicha componente. Entonces B_1 es isométrica a abierto $B \subset \mathbb{C}$ que está limitado por segmentos de recta. Esto es una contradicción pues en el plano sólo existe una geodésica entre dos puntos. \square

Observación: Nótese que entre los puntos p y q de la figura 1 – a, no hay una geodésica que los una y pase entre los vértices v_1, v_2 en el cubo. De manera que dados cualesquiera x, y en un poliedro P y una clase de homotopía en P^* , no necesariamente existe geodésica de P que una a x con y y pertenezca a la clase de homotopía escogida.

3. La aplicación desarrolladora.

En esta sección definiremos la aplicación desarrolladora de una estructura analítica (*i.e.* los cambios de coordenadas son funciones que admiten expansión en serie de Taylor) en una variedad analítica simplemente conexa.

DEFINICIÓN 3.5.² Sean M una variedad analítica, (ϕ_0, U_0) una carta de M , $x_0 \in U_0$ y $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ una curva tal que $\alpha(0) = x_0$. La continuación analítica de (ϕ_0, U_0) a lo largo de α , es una familia de cartas $\mathcal{F} = \{(\phi_t, U_t) \mid t \in [0, 1]\}$ que satisface:

- 1) $\alpha(t) \in U_t$, para todo $t \in [0, 1]$.
- 2) Para cada $t \in [0, 1]$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $|t - s| < \epsilon$ entonces $\phi_t = \phi_s$ en $U_t \cap U_s$.
- 3) Las cartas (U_t, ϕ_t) pertenecen a la estructura analítica de M .

Ejemplo: Continuación analítica a lo largo del círculo unitario en C_θ .

En este caso $M = C_\theta$ y la estructura plana está definida por las cartas (ψ, V) y (ρ, W) donde $V = J(A_\theta^\circ)$, $W = \{re^{i\beta} \in C_\theta \mid \beta \in (\theta/2, \theta/2 + \theta)\}$ y las funciones $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$, $\rho: W \rightarrow \mathbb{C}$ son tales que:

$$\psi(re^{i\beta}) = re^{i\beta}, \quad \rho(re^{i\beta}) = \begin{cases} re^{i(\beta+\theta)} & \text{si } 0 \leq \beta < \theta/2 \\ re^{i\beta} & \text{si } \theta/2 < \beta \leq \theta \end{cases}.$$

Además $x_0 = e^{i\theta/2}$ y $\alpha(t) = \begin{cases} e^{i\theta(2t+1)/2} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e^{i\theta(2t-1)/2} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ es el círculo unitario de C_θ .

Es claro que la carta (ϕ_0, B_0) con B_0 una vecindad pequeña de x_0 y ϕ_0 la restricción de ψ a B_0 , es compatible con la estructura en C_θ . Procedemos a calcular la continuación analítica de (ϕ_0, B_0) a lo largo de $\alpha = \alpha([0, 1])$.

Para todo $t < 1/2$ las continuaciones analíticas son vecindades alrededor del punto $\alpha(t)$ encajadas en \mathbb{C} con la restricción de ψ . Nótese que la continuación analítica para $t = 1/2$ es una carta $(\phi_{1/2}, B_{1/2})$, donde $B_{1/2}$ es una vecindad de $\alpha(1/2) \in C_\theta$ y $\phi_{1/2}: B_{1/2} \rightarrow \mathbb{C}$ es tal que $\phi_{1/2}(re^{i\beta}) = re^{i\beta}$ con $\beta \in (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \subset \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$ (notar que $B_{1/2}$ no pertenece al dominio de ψ). Finalmente para todo $t > 1/2$ las cartas que sirven como continuación analítica son vecindades alrededor del punto $\alpha(t)$ con funciones

$$\phi_t(re^{i\beta}) = re^{i\beta} \quad \text{con } \beta \in (\theta, 2\theta).$$

Observaciones del ejemplo:

1.- Al realizar continuación analítica de la carta (ϕ_0, B_0) , la curva α se mapea en un semicírculo de longitud θ contenido en \mathbb{C} que comienza en el punto x_0 .

2.- Si $2\alpha \subset C_\theta$ es el círculo unitario recorrido 2 veces. Procediendo de forma análoga tenemos que la imagen de 2α es el semicírculo de longitud 2θ contenido en \mathbb{C} . Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ para

²Ver [V].

el cual la imagen de $n\alpha$ (el círculo unitario recorrido n veces) bajo las cartas que son continuación analítica de (ϕ_0, B_0) cubre a $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Proposición 3.4 Sean M una variedad analítica, (ϕ_0, U_0) una carta de M , $x_0 \in U_0$ y $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ una curva tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Entonces existe $\mathcal{F} = \{(\phi_t, U_t) \mid t \in [0, 1]\}$ que es continuación analítica de (ϕ_0, U_0) a lo largo de α . Además si η es otra trayectoria tal que $\eta(0) = x_0$, $\eta(1) = x_1$ y es homotópica a α , entonces la continuación analítica $\mathcal{F} = \{(\psi_t, U_t) \mid t \in [0, 1]\}$ de (ϕ_0, U_0) a lo largo de η satisface que $\psi_1 = \phi_1$ en una vecindad de x_1 .

La demostración de esta proposición es muy técnica y por lo tanto no se muestra en esta tesis (ver demostración en [V]). Nótese que esta proposición utiliza el principio de continuación analítica para “desarrollar” una carta a toda la variedad, además muestra que la continuación analítica a lo largo de una curva depende de su clase de homotopía. Aquí sólo nos interesa el caso M simplemente conexa por lo tanto evitamos problemas con la clase de homotopía.

DEFINICIÓN 3.6. Sean M una variedad analítica simplemente conexa de dimensión n , (ϕ_0, U_0) una carta compatible con la estructura y $x_0 \in U_0$. La aplicación desarrolladora de M es la función $D: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x \mapsto \psi_1(x)$ con ψ_1 la última función de la familia $\{(\psi_t, U_t) \mid t \in [0, 1]\}$ que es continuación analítica de (ϕ_0, U_0) a lo largo de un camino que une x_0 con x .

Ejemplo: La aplicación desarrolladora de $V = J(A_\theta^\circ)^3$.

Ahora debemos calcular la continuación analítica de (ϕ_0, B_0) a lo largo de toda curva contenida en $V \subset C_\theta$ (ver ejemplo página anterior). Notar que toda carta que es continuación analítica es de la forma $(\psi|_B, B)$ con $B \subset V$ una pequeña vecindad. Se sigue que en este caso D coincide con ψ , luego $D(V) = \psi(V)$ que es el interior de la sección de ángulo θ contenida en \mathbb{C} .

Notar que por continuidad podemos extender D a $\partial V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset C_\theta$. Entonces $D(0) = 0 \in \mathbb{C}$ y para cada $r \in \mathbb{R}^+ \subset C_\theta$ los posibles valores en \mathbb{C} para $D(t)$ son r ó $e^{i\theta}r$, dependiendo de por dónde nos aproximamos. De esta manera concluimos que la extensión es univaluada en el vértice y 2 valuada en el rayo que emana de él.

4. Los poliedros vistos como polígonos.

Durante toda esta sección, P será un poliedro con vértices v_0, v_1, \dots, v_n y $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \subset P$ serán geodésicas mínimas tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, γ_i une a v_0 con v_i . Llamaremos araña al

³Notar que C_θ pues no tiene estructura plana, aunque es simplemente conexo.

conjunto $A := \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n\}$, punto base de la araña a la singularidad cónica v_0 y denotaremos con Δ a la superficie $P \setminus A$.

Observaciones:

1.- De las proposiciones 3.3 y 3.2 y los ejemplos de la sección 2 en este capítulo, sabemos que siempre existe una $A \subset P$ pero que no necesariamente es única.

2.- Δ es simplemente conexa, por lo tanto podemos calcular la aplicación desarrolladora de la estructura plana que ésta hereda de P . Para hacer esto debemos elegir $p \in \Delta$ y (ϕ, U) carta alrededor de p . Llamaremos $D: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ a la aplicación desarrolladora obtenida a partir de estas condiciones iniciales $(p$ y $(\phi, U))$ ⁴.

3.- Es claro de la definición que D preserva ángulos y es isometría local. Se sigue que D es inmersión y manda geodésicas en geodésicas. De manera que si $p, q \in \Delta$ son tales que existe una geodésica $\mathcal{L} \subset \Delta$ que los une, entonces $D(p) \neq D(q)$.

Proposición 3.5. Sean $p, q \in \Delta$. Si existe una geodésica $\mathcal{L}: [0, 1] \rightarrow P$ que los une y tal que $\mathcal{L} \cap A = \{a\}$, entonces $D(p) \neq D(q)$. DEMOSTRACIÓN. Procederemos por contradicción, supongamos que $D(p) = D(q)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in \gamma_1$ y que \mathcal{L} está parametrizada por longitud de arco. Sea

$$r_1 = \inf_{x \in (A \setminus \gamma_1)} \mu(v_1, x) \quad \text{por la compacidad el ínfimo se alcanza y } r_1 > 0.$$

De la sección 1 sabemos que γ_1 define un argumento en $B_{r_1}(v_1)$, por lo tanto hay un rayo en $B_{r_1}(v_1)$ que es bisectriz del ángulo definido por γ_1 . Llamemos z_1 al punto en tal rayo tal que $\mu(z_1, v_1) = r_1/2$. Sean $t \in (0, \ell(\mathcal{L}))$ el tiempo tal que $\mathcal{L}(t) = a$. Escojemos $\epsilon_1 > 0$ tal que la poligonal $L' = [p, \mathcal{L}(t - \epsilon_1), z_1, \mathcal{L}(t + \epsilon_1), q]$ está contenida en Δ (existe ϵ_1 ya que las γ_i son disjuntas), nótese que la poligonal L' está en zig-zag.

Sea $L: [0, \ell(L')] \rightarrow P$ la parametrización por longitud de arco de L' . Llamemos $s' \in [0, \ell(L')]$ al mínimo número tal que $D(L(s')) = D(L(s))$ para algún $s < s'$, s' existe ya que por hipótesis $s' = \ell(L')$ y $s = 0$ cumplen. Entonces $D(L_{L(s)L(s')}) \subset \mathbb{C}$ es un polígono simple y por lo tanto la suma de sus ángulos exteriores es 2π . Esto es una contradicción ya que D preserva ángulos y la suma de los ángulos exteriores a $L_{L(s)L(s')}$ es 0 (ver corolario de la proposición 2.2, página 13). Concluimos que la restricción de la aplicación desarrolladora a L es inyectiva. \square

Corolario. Supongamos que P es un tetraedro (poliedro con cuatro vértices), entonces $D: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ es un encaje. DEMOSTRACIÓN. Como se mostró en el ejemplo de la sección anterior, utilizando la continuidad podemos extender D a A . Sea \bar{D} dicha extensión. Nótese que para demostrar el

⁴Despues mencionaremos como cambia D cambiando las condiciones iniciales

resultado es suficiente demostrar que \bar{D} es inyectiva en \mathbf{A} , ya que si existen puntos $a, b \in \Delta$ tales que $D(a) = D(b)$, entonces también existen $p, q \in \mathbf{A}$ tales que $\bar{D}(p) = \bar{D}(q)$. Una vez más, procederemos por contradicción, supongamos que existen $p, q \in \mathbf{A}$ tales que $\bar{D}(p) = \bar{D}(q)$. De la observación 3, sabemos $p \in \gamma_i$ y $q \in \gamma_j$ con $i \neq j$. Sea $\mathcal{L} \subset P$ una geodésica mínima que une a p con q . Entonces hay dos posibilidades:

- * $\mathcal{L} \cap \mathbf{A} = \emptyset$. En este caso tenemos una contradicción con la observación 3.
- * $\mathcal{L} \cap \mathbf{A} = \{a\}$. Ahora la contradicción es con la proposición anterior.

El interior de la geodésica \mathcal{L} no puede intersectar a \mathbf{A} en más de un punto, ya que esto implicaría que \mathcal{L} intersecta a alguna de las γ_i en más de un punto. Lo cual no puede suceder, ver proposición 3.3 página 22. \square

Estos últimos 2 resultados son corolarios del siguiente teorema, que es el resultado principal de la sección.

Teorema. *Sean P un poliedro y $\mathbf{A} \subset P$ una araña. La aplicación desarrolladora $D: P \setminus \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{C}$ es un encaje.*

Este resultado no se demostrará aquí, el lector interesado puede ver la proposición 7.1 en la página 541 de [Thu1].

- *Propiedades de $\bar{D}(\mathbf{A})$:*

1. Como muestra el ejemplo de la sección anterior, los vértices v_i con $i \neq 0$ tienen una sola imagen bajo \bar{D} y las γ_i tienen a dos segmentos como imagen. Además el ángulo entre dichos segmentos es θ_i (el ángulo cónico en el vértice v_i).
2. El vértice v_0 (o punto base de la araña) tiene n imágenes distintas bajo \bar{D} , pues la intersección de cada pareja consecutiva de geodésicas γ_i , define una imagen diferente.
3. Por lo tanto $\bar{D}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ (la imagen de \mathbf{A} bajo una función multivaluada) es un $2n$ -ágono simple con interior $D(\Delta)$. Denotaremos con $D_P(\mathbf{A})$ a tal $2n$ -ágono y le llamaremos el polígono desdoblado de P por medio de la araña \mathbf{A} , notar que por el momento $D_P(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ es sólo un conjunto (no tiene coordenadas).

Llamemos z_1 a un vértice de $D_P(\mathbf{A})$ que es imagen de v_0 , procedemos a enumerar los vértices restantes de manera creciente al recorrer $D_P(\mathbf{A})$ en el sentido positivo. Ayudándonos de esta convención⁵, obtenemos un $2n$ -ágono Z_P que es simple, positivamente orientado y satisface:

⁵En el siguiente capítulo se menciona que sucede cuando la cambiamos.

- Para k par, las aristas $\overline{z_{k-1}z_k}$ y $\overline{z_kz_{k+1}}$ tienen la misma longitud. Esto se debe a que ambas son imagen bajo \bar{D} de alguna de las γ_i .
- Las singularidades cónicas distintas de v_0 , tienen a los vértices pares de Z_P como imágenes. Además los ángulos internos en dichos vértices, son los ángulos cónicos en la singularidad correspondiente.
- La suma de los ángulos interiores a los vértices impares de Z_P , es igual a θ_0 .

Corolario, (Gauss-Bonnet poliedrico). *En todo poliedro P con $n+1$ singularidades cónicas de ángulos cónicos θ_i , se cumple que $\kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_n = 4\pi$. DEMOSTRACIÓN.* Recordemos que $\kappa_i = 2\pi - \theta_i$. De lo anterior tenemos que

$$\sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi(n-1), \text{ por lo tanto } \sum_{i=0}^n (2\pi - \theta_i) = 2\pi(n+1) - 2\pi(n-1) = 4\pi.$$



El espacio de Poliedros.

Sean P un poliedro con $n + 1$ singularidades cónicas en v_0, v_1, \dots, v_n y $\mathbf{A} = \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n\}$ una araña de P con punto base en v_0 (*i.e.* las γ_i son geodésicas mínimas de P tales que cada γ_i une a v_0 con v_i). En la última sección del capítulo anterior se demostró que cortando P a través de \mathbf{A} , obtenemos un $2n$ -ágono simple $D_P(\mathbf{A})$ con aristas de longitudes $\ell(\gamma_i)$ y suma de ángulos internos igual a la suma de los ángulos cónicos en P . Este procedimiento tiene las siguientes ambigüedades:

1. El punto p en que comenzamos a calcular la aplicación desarrolladora.
2. El vértice v_0 (elección del cuerpo de la araña).
3. Las geodésicas γ_i (elección de las patas de la araña fijando el cuerpo).
4. La numeración de los vértices en $D_P(\mathbf{A})$ (esto una vez que se quiere dar coordenadas a $D_P(\mathbf{A})$).

Ahora mencionamos como son los diferentes polígonos que se obtienen al cambiar las elecciones en 1 y 4. Para hacer esto pensaremos que Z_P es una numeración de $D_P(\mathbf{A})$ que inicia en un vértice que es imagen del punto base de \mathbf{A} y se realiza en sentido positivo.

1. *Elegimos un punto $x \in \Delta := P \setminus \mathbf{A}$ distinto de p :* Si W_P es el $2n$ -ágono imagen de P bajo la aplicación desarrolladora calculada iniciando en x . Entonces W_P tiene la misma numeración en los vértices (suponemos que sólo cambia el punto p), los mismos ángulos internos y las mismas longitudes en los lados que Z_P . Por lo tanto existe una función $f(z) = az + b$ con $|a| = 1$, tal que $f(w_i) = z_i$. En este caso decimos que W_P y Z_P son isométricos bajo f .

4. *Numerar de otra manera el polígono Z_P :* Hay $4n$ maneras distintas de numerar al polígono $D_P(\mathbf{A})$, ya que podemos avanzar en ambos sentidos (positivo o negativo) una vez elegido el vértice inicial. Notar que cada una de estas numeraciones define polígonos W_P que son iguales a Z_P como subconjuntos de \mathbb{C} , pero en general son diferentes como polígonos, *i.e.* no hay semejanza orientada entre ellos. Para eliminar algunas de estas formas tomaremos la siguiente convención:

“Numerar en el sentido positivo y comenzar en un vértice que sea imagen de la singularidad que es punto base de la araña.”

Con esta convención, solamente quedan n posibilidades distintas de numerar.

En la siguiente sección se muestran las consecuencias que trae el poder numerar desde vertices distintos y se menciona cuales son las dificultades combinatorias que provocan las ambigüedades 2 y 3.

1. El espacio de poliedros con ángulos fijos.

Nótese que todo poliedro P tiene ángulos cónicos dados por algún elemento del hiperplano:

$$\Theta_{n+1} := \{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi(n-1) \text{ y para toda } k, \theta_k \in (0, 2\pi)\}.$$

Sean P un poliedro con $n+1$ singularidades cónicas y $A \subset P$ una araña con punto base v_0 . Sea $Z_P = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ un $2n$ -ágono que se obtiene al numerar a $D_P(A)$ de alguna de las n formas permitidas (decimos que Z_P es un polígono asociado a P). Si $X = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_{n+1}$ es el elemento tal que para toda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, θ_k es el ángulo interior a Z_P en el vértice z_{2k} , entonces decimos que X determina los ángulos interiores de Z_P (notar que esto implica que θ_0 es el ángulo cónico en la singularidad v_0). Sabemos que para toda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\ell(\overline{z_{2k-1}z_{2k}}) = \ell(\overline{z_{2k}z_{2k+1}})$ (tomando los subíndices módulo $2n$), por lo tanto las entradas de Z_P satisfacen las ecuaciones $z_{2k-1} - z_{2k} = e^{i\theta_k}(z_{2k+1} - z_{2k})$.

Para todo $X = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_{n+1}$, hacemos:

$$V'_X := \{(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \text{para toda } k \in \{1, 2, \dots, n\}, z_{2k} = \frac{e^{i\theta_k} z_{2k+1} - z_{2k-1}}{e^{i\theta_k} - 1}\}.$$

Por definición tenemos que todo $Z \in V'_X$ está determinado por sus coordenadas impares, por lo tanto $V'_X \subset \mathbb{C}^{2n}$ es un subespacio vectorial de dimensión n . Una base de V'_X está dada por:

$$\beta = \left\{ P_l(X) = (1, a_2, \lambda^l, \dots, \lambda^{l(k-1)}, a_{2k}, \lambda^{lk}, \dots, \lambda^{l(n-1)}, a_{2n}) \right\}_{l=0}^{n-1}$$

donde $\lambda = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ (ver proposición 1.1, página 3) y los complejos a_{2k} se pueden calcular de la definición.

Recordemos que $V(2n) \subset \mathbb{C}^{2n}$ es el subespacio vectorial determinado por los $2n$ -ágonos tales que su centro de gravedad está en el origen. Al considerar los representantes de los polígonos $P_l(X)$ en $V(2n)$ (i.e. trasladar su centro de gravedad al origen), se anula el polígono $P_0(X) = (1, 1, \dots, 1)$. Entonces el subespacio V_X determinado por V'_X en $V(2n)$ tiene dimensión $n-1$.

Observación. Sean P un poliedro con $n+1$ singularidades cónicas y $\{\theta_0, \dots, \theta_n\}$ el conjunto (sin orden) de ángulos cónicos en P . Si $X = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_{n+1}$, entonces no necesariamente existe un polígono en V_X que sea asociado a P . Inversamente, no todo $Z \in V_X$ simple y positivamente

orientado, proviene de un poliedro cortado a través de una araña. Ejemplos de esto se muestran en la sección 2 del siguiente capítulo.

DEFINICIÓN 4.1. Para $X \in \Theta$, denotaremos con $\mathcal{P}_X \subset V_X$ al subconjunto determinado por los polígonos que provienen de desdoblar poliedros por medio de arañas.

Como se mostrará en la sección 2 del siguiente capítulo, el conjunto $\mathcal{P}_X \subset V_X$ no necesariamente es abierto. Ahora con ayuda de la notación introducida en esta sección, mostraremos las complicaciones generadas por las ambigüedades 2, 3 y 4 mencionadas al principio de este capítulo.

Supondremos que P es un poliedro con singularidades cónicas v_0, v_1, \dots, v_n , $A \subset P$ es una araña con punto base v_0 , $Z_P = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ es una numeración de $D_P(A)$ y $X = (\theta_0, \dots, \theta_n)$ es el elemento en Θ_{n+1} tal que $Z_P \in \mathcal{P}_X$.

2. Cambiar las geodésicas: Supongamos que $A' \subset P$ es una araña con punto base v_0 tal que $A \neq A'$ (notar que para que exista A' alguno de los v_i debe tener dos geodésicas mínimas que lo unan con v_0). Sean Z'_P una numeración del polígono $D_P(A')$ y $X' \in \Theta_{n+1}$ tal que $Z'_P \in \mathcal{P}_{X'}$. Entonces X y X' tienen la misma primera coordenada y las siguientes n difieren por a permutación no cíclica (salvo cuando hay ángulos que son iguales). En este caso no sólo los elementos en \mathcal{P}_X para los que existe la araña A' tienen un polígono equivalente en $\mathcal{P}_{X'}$ (en la sección 2 del capítulo siguiente se muestran ejemplos de esto).

3. Cambiar el punto base de la araña: Supongamos que $A' \subset P$ es una araña con punto base en v_1 y W_P es una numeración del polígono $D_P(A')$. Sea $Y \in \Theta$ tal que $W_P \in \mathcal{P}_Y$. Entonces las coordenadas de Y están determinadas por una permutación de longitud $n + 1$ de las coordenadas de X .

4. Numerar de otra manera el polígono $D_P(A)$: Si W_P es el polígono obtenido al numerar de manera distinta a $D_P(A)$ (digamos comenzando en el vértice $z_3 \in Z_P$). Entonces $W_P \in \mathcal{P}_{X'}$, donde $X' \in \Theta_{n+1}$ tiene primera coordenada igual a la de X y las siguientes n coordenadas son un corrimiento de las coordenadas en X (siguiendo con el ejemplo, tenemos que $X' = (\theta_0, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n, \theta_1)$). La conclusión es que esta ambigüedad define una identificación $f: \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_{\sigma(X)}$ donde $\sigma \in S_n^1$ es una permutación de longitud n que actúa en las últimas n coordenadas, *i.e.* si $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$, entonces $\sigma(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) = (\theta_0, \theta_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$.

La dificultad de las ambigüedades 2 y 3, radica en que en un poliedro no necesariamente existe una geodésica mínima para cada clase de homotopía, (ver observación página 24). Por lo tanto no sabemos ¿Cuántas arañas hay en un poliedro con el mismo punto base?, mucho menos sabemos ¿Cuántas arañas hay en un poliedro con cualquier punto base?.

¹ S_n el grupo de permutaciones de n elementos.

Observación. Sea P un poliedro con $n + 1$ vértices tal que n de sus ángulos cónicos son iguales a $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Sea A una araña con punto base en el vértice de ángulo cónico diferente (en caso de que los $n + 1$ ángulos sean iguales se puede elegir cualquier vértice). Cortando a P a través de A y numerando el polígono desdoblado, obtenemos un $2n$ -ágono que pertenece a $\mathcal{P}_{\bar{\vartheta}}$ donde $\bar{\vartheta} := (\theta_0, \vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta) \in \Theta_{n+1}$. Además, en este caso las ambigüedades de numerar de forma distinta y elegir distinta araña con el mismo punto base, definen polígonos diferentes en $\mathcal{P}_{\bar{\vartheta}}$.

2. El espacio de poliedros.

DEFINICIÓN 4.2. El espacio de prepoliedros con $n + 1$ singularidades cónicas es

$$\Omega_{n+1} := \bigcup_{X \in \Theta_{n+1}} \mathcal{P}_X.$$

Notemos que en Ω_{n+1} existe un número finito de polígonos no isométricos asociados a un poliedro P , ya que en P sólo hay un número finito de arañas y por la convención tomada, para cada araña hay sólo n numeraciones del polígono desdoblado.

Proposición 4.1. *La topología que Ω_{n+1} hereda de $V(2n)$, es localmente como la de $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $Z \in \Omega_{n+1}$ y $X = (\theta_0, \dots, \theta_n) \in \Theta_{n+1}$ tales que $Z \in V_X$. Nótese que para cualquier valor de θ_1 , la ecuación $z_1 - z_2 = e^{i\theta_1}(z_3 - z_2)$ implica que el vértice z_2 pertenece a la mediatriz η_2 del segmento $\overline{z_1 z_3}$. Análogamente sucede en todo vértice par.

Claramente $Z \in \mathcal{S}(2n)^+$ (el conjunto de polígonos simples positivamente orientados) y por lo tanto existe una vecindad abierta $U \subset \mathcal{S}(2n)^+ \subset V(2n)$ (proposición 2.3, página 14) tal que $z \in U$. Nótese que la vecindad U define intervalos $I_{2k} \subset \eta_{2k}$ (la mediatriz del segmento $\overline{z_{2k-1} z_{2k+1}}$) alrededor de cada vértice $z_{2k} \in Z$.

Si movemos el vértice z_2 a través de I_2 , cambian solamente los ángulos internos a Z en los vértices z_1, z_3 y z_2 . Procediendo de manera análoga en cada uno de los vértices pares de Z , obtenemos que los n movimientos determinados por los intervalos I_2, I_4, \dots, I_{2n} son independientes (*i.e* podemos modificar el ángulo interno a un vértice par dejando fijos los restantes). Notar que los polígonos obtenidos mediante estos movimientos, pertenecen a Ω_{n+1} y tienen las mismas coordenadas en los vértices impares.

Por la sección anterior sabemos que la función $(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) \mapsto (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1})$ es un isomorfismo entre V_X y $V(n)$. Por lo tanto todo punto en Ω_{n+1} cercano a Z , está determinado por una pareja $[W, Y]$ tal que $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in V(n)$ y $Y = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_{n+1}$. \square

Ayudándonos de la notación introducida en la proposición anterior, definimos para todo $Z \in V(n)$ el conjunto

$$\Theta_Z := \{X \in \Theta_{n+1} \mid [Z, X] \in \Omega_{n+1}\}.$$

Observación: Sean $Z \in V(n)$ y $X = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) \in \Theta_Z$ tal que $[Z, X] \in \Theta_Z$. Si movemos z_2 a través de η_2 hacia el interior de $[Z, X]$ hasta llegar al punto $z'_2 \in \eta_2 \cap [Z, X]$, obtenemos un polígono singular $[Z, Y]$ con $Y = (\theta'_0, \theta'_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$ tal que $\theta'_0 < \theta_0$ y $\theta'_1 > \theta_1$. Y pertenece a Θ pues $\theta_0 + \theta_1 = \theta'_0 + \theta'_1$. Concluimos que para todo $Z \in V(n)$, $\Theta_Z \neq \Theta$.

Por lo tanto, Ω_{n+1} también está dividido en espacios de la forma Θ_Z .

2.1. El espacio de formas de poliedros. Sean P un poliedro con $n+1$ singularidades cónicas, A una araña contenida en P y $D_P(A)$ el polígono desdoblado de P a través de A .

Supongamos que Q es un poliedro tal que existe isometría $F: P \rightarrow Q$. Denotaremos con $D_Q(A)$ al polígono cortado de Q a través de la araña $F(A)$. Sea que Z_P es la numeración de $D_P(A)$ tal que la proyección de v_1 es el segundo vértice de Z_P . Llamemos Z_Q a la numeración de $D_Q(A)$ de manera que $F(v_1)$ define el segundo vértice, de esta manera obtenemos que Z_P y Z_Q son polígonos isométricos. *i.e.* existe $f(z) = az + b$ con $|a| = 1$ tal que $f(Z_P) = Z_Q$.

Ahora supongamos que Q es un polígono tal que existe homotecia $H: P \rightarrow Q$ (función que en cartas se ve como una función afín compleja). Entonces cortando Q a través de la araña $H(A)$ y numerando como antes, tenemos que los polígonos Z_P y Z_Q son semejantes, *i.e.* existe $h(z) = az + b$ con $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $h(Z_P) = Z_Q$.

Decimos que $Z, W \in \Omega_{n+1}$ están relacionados (escribimos $Z \sim_p W$) si son polígonos no semejantes que están asociados al mismo poliedro P . Es claro que \sim_p define una relación de equivalencia en Ω_{n+1} , además por las observaciones anteriores tenemos que \sim_p baja al proyectivo $\mathbb{P}\Omega_{n+1}$.

DEFINICIÓN 4.3. El espacio de formas de poliedros con $n+1$ singularidades es

$$\Upsilon(n+1) := \mathbb{P}\Omega_{n+1} / \sim_p.$$

Observaciones:

1.- El espacio $\Upsilon(n+1)$ tiene dimensión real $2(n-2)+n$. Al hacer la proyectivización (compleja), baja en dos la dimensión real de Ω_{n+1} . Nótese que cada clase en $\Upsilon(n+1)$, tiene un número finito de representantes en $\mathbb{P}\Omega_{n+1}$, por lo tanto estos dos espacios tienen dimensiones iguales.

2.- Por la última observación de la sección anterior (página 33), tenemos que el espacio de formas de poliedros con $n+1$ singularidades y ángulos cónicos determinados por $\bar{\vartheta}$ es $\Upsilon_{\bar{\vartheta}}(n+1) := \mathbb{P}\mathcal{P}_{\bar{\vartheta}} / \sim_p$

Capítulo 5

Ejemplos.

Sea P un poliedro con $n + 1$ vértices de ángulos cónicos $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$. Al final del capítulo 3 se mostró que la suma de las curvaturas $\kappa_i = 2\pi - \theta_i$ es igual a 4π , luego el mínimo número de vértices en un poliedro es 3 (recordemos que sólo estamos considerando $\theta_i \in (0, 2\pi)$).

Los objetivos de este capítulo son los siguientes:

1. Calcular con todo detalle el espacio de poliedros con 3 vértices (caso $n = 2$).
2. Calcular el espacios de tetraedros con ángulos cónicos de la forma (π, π, π, π) .

1. El espacio de triángulos dobles.

Supongamos que P es un poliedro con 3 singularidades cónicas v_0, v_1, v_2 de ángulos cónicos $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ respectivamente. Nótese que entre cualesquiera dos vértices de P , existe sólo una clase de homotopía de caminos en P^* . Por lo tanto sólo existe una araña $A \subset P$ con punto base en v_0 , análogamente para otro vértice.

Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es la numeración del cuadrilátero $D_P(A)$ (el polígono desdoblado) tal que z_2 es la imagen de v_1 , entonces $Z \in \mathcal{P}_X$ con $X = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$. Observar que la diagonal $\overline{z_2 z_4}$ está contenida en Z y divide a este en 2 triángulos congruentes. Además para construir a P , se deben pegar los triángulos mencionados doblando a través $\overline{z_2 z_4}$. Esto demuestra que todo poliedro con 3 vértices es el doble de un triángulo.

En este caso el espacio vectorial V_X tiene dimensión compleja igual a 1. Proyectivizando concluimos que existe sólo un poliedro con 3 singularidades cónicas de ángulos cónicos $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ módulo homotecias. Entonces, cada punto en la variedad:

$$\Theta_3 = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \text{ y para toda } k, \theta_k \in (0, 2\pi)\}.$$

determina un cuadrilátero (módulo semejanza orientada) que proviene de un triángulo doble. Se sigue que para calcular el espacio de formas de poliedros don 3 vértices basta entender que elementos de Θ_3 determinan el mismo triángulo doble. La pregunta es:

¿En que cuadriláteros se puede desdoblar P al cambiar algunas de las ambigüedades?

Cambiando la numeración: Es claro que hay solamente dos formas de numerar (de acuerdo a la convención tomada), además al numerar a Z comenzando en z_3 , obtenemos el cuadrilátero cuyos ángulos están determinados por $(\theta_0, \theta_2, \theta_1)$. Por lo tanto esta terna determina el mismo triángulo doble que X .

Cambiando de punto base: Supongamos que A' es una araña con punto base en v_1 , procediendo de manera análoga que con A obtenemos que las ternas $(\theta_1, \theta_0, \theta_2), (\theta_1, \theta_2, \theta_0) \in \Theta_3$ determinan cuadriláteros asociados al mismo triángulo doble que X . Análogamente al elegir a v_2 como punto base, obtenemos que las ternas $(\theta_2, \theta_1, \theta_0), (\theta_2, \theta_0, \theta_1) \in \Theta_3$ también determinan el mismo triángulo doble que X .

Como antes se menciona, en este caso no hay ambigüedad para elegir una araña dado el punto base. Entonces tenemos que hay 6 cuadriláteros diferentes que se obtienen desdoblado P (salvo cuando algunos de los ángulos son iguales). Por lo tanto el espacio de formas de triángulos dobles es:

$$\Upsilon(3) = \Theta_3/S_3.$$

Donde S_3 actúa en Θ_3 permutando las entradas (*i.e.* si $\sigma = (0, 1, 2) \in S_3$ entonces $\sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = (\theta_2, \theta_0, \theta_1)$). Para concluir mencionamos algunas propiedades geométricas de este espacio.

- $\Upsilon(3)$ es un triángulo rectángulo sin el mayor de sus catetos, los ángulos interiores de $\Upsilon(3)$ son $\pi/3$ y $\pi/6$ (ver figura 1).
- La hipotenusa de $\Upsilon(3)$ parametriza a los triángulos dobles con 2 ángulos iguales y menores que $2\pi/3$.
- El cateto menor de $\Upsilon(3)$ parametriza a los triángulos dobles con 2 ángulos iguales y mayores que $2\pi/3$. Cabe mencionar que la longitud del cateto menor es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa y que el vértice formado entre el cateto menor y la hipotenusa es el triángulo doble determinado por el triángulo equilátero (ver figura 1).
- El cateto mayor no pertenece a $\Upsilon(3)$ pues sus elementos equivalen a que un ángulo cónico se haga 0 (no son compactos).

2. El espacios de tetraedros con ángulos cónicos iguales a π .

En esta sección describiremos con detalle el espacio de tetraedros con ángulos cónicos de la forma $\bar{\pi} = (\pi, \pi, \pi, \pi)$. Antes de pasar al ejemplo particular hacemos los siguientes comentarios del caso general.

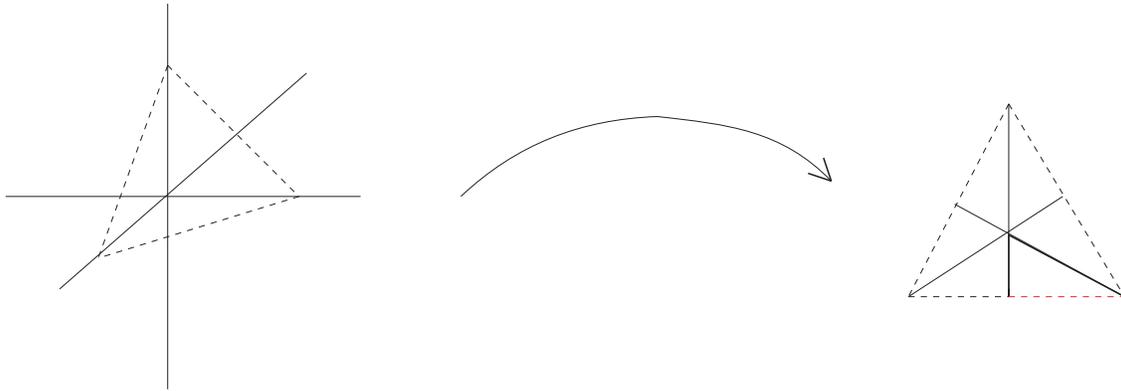


FIGURA 1. El espacio de formas de poliedros con 3 vértices.

- Nótese que puede haber a lo más 2 geodésicas mínimas que unan a v_0 y con otro vértice v_i , pues entre vértices sólo hay 2 clases de homotopía en $\mathcal{T} \setminus \mathbf{A}$ de curvas que los unen. Supongamos que \mathcal{T} es tal que existe $\gamma'_1 \neq \gamma_1$ geodésica mínima entre v_0 y v_1 . Entonces no puede existir $\gamma'_2 \neq \gamma_2$ geodésica mínima entre v_0 y v_2 , ya que si existiera esta debería intersectar a γ'_1 y esto contradiría la proposición 3.3 del capítulo 3 (página 22). Procediendo análogamente con v_3 concluimos que “en \mathcal{T} hay máximo dos arañas con punto base en v_0 ”.

- Sin pérdida de generalidad supongamos que $\gamma'_1 \neq \gamma_1$ es una geodésica mínima entre v_0 y v_1 . Sea Z la numeración de $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ tal que el vértice z_2 es la proyección de v_1 . Entonces γ'_1 se proyecta en la diagonal $\overline{z_5 z_2} \subset Z$ y por lo tanto $\ell(\overline{z_5 z_2}) = \ell(\overline{z_1 z_2})$. Si trazamos las diagonales $\overline{z_2 z_6}$ y $\overline{z_2 z_4}$, entonces los triángulos (z_2, z_1, z_6) , (z_2, z_3, z_4) son congruentes con (z_2, z_5, z_6) y (z_2, z_5, z_4) respectivamente (ver figura 2). Sabemos que \mathcal{T} se construye identificando las aristas de Z que provienen de la misma geodésica mínima, nótese que al hacer esto obtenemos el doble del cuadrilátero (z_2, z_6, z_5, z_4) . Procediendo de forma análoga cuando existen dos geodésicas mínimas entre v_0 y otro vértice, concluimos que “los tetraedros en los que hay dos arañas con el mismo punto base son dobles de cuadriláteros”.

Siempre supondremos que \mathcal{T} es un tetraedro con vértices v_0, v_1, v_2, v_3 , $\mathbf{A} = \{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3\} \subset \mathcal{T}$ es una araña con punto base en v_0 y $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ es el polígono desdoblado de \mathcal{T} al cortar por \mathbf{A} . Ayudándonos de la última observación del capítulo anterior (página 13), sabemos que $\Upsilon_{\pi}(4)$ se obtiene identificando los hexágonos en $\mathbb{P}\mathcal{P}_{\pi}$ que son asociados al mismo poliedro.

Notemos que $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ es un hexágono que tiene 3 ángulos interiores y alternados iguales a π y tal que la suma de los otros 3 ángulos interiores es π , por lo tanto $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ es un triángulo con los puntos medios de sus aristas marcados. Por la sección 1 del capítulo anterior sabemos que V_{π} es isomorfo

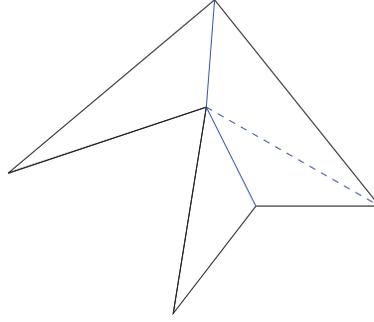


FIGURA 2. Hexágono desdoblado de un tetraedro con dos geodésicas mínimas entre 2 vértices.

a $V(3)$. En este caso olvidando los puntos medios de las aristas dicho isomorfismo se ve como la identidad en $V(3)$.

Observaciones: Sea $Z \in V_{\bar{\pi}}$ la numeración de $D_P(\mathbf{A})$ tal que z_2 es la proyección de la singularidad v_1 .

1.- Supongamos que Z es un triángulo obtusángulo con el ángulo obtuso (ángulo mayor que $\pi/2$) en z_5 . Entonces la mediana $\overline{z_2 z_5}$ que proviene de una geodésica de \mathcal{T} entre v_1 y v_0 distinta de γ_1 , tiene longitud menor que $\ell(\overline{z_1 z_2})$. Esto contradice que $\mathbf{A} \subset \mathcal{T}$ esta formada con geodésicas mínimas. Si el ángulo obtuso estuviera en cualquier otro vértice impar de Z , entonces sucedería lo mismo con el punto medio de la arista no adyacente a dicho ángulo. En conclusión, los triángulos obtusángulos en $V(3)$ no son asociados de ningún tetraedro.

2.- Si Z es un triángulo acutángulo (todos sus ángulos son menores que $\pi/2$), entonces todas sus medianas tienen longitudes mayores que la mitad de la longitud de la arista de Z que intersectan en su punto medio. De hecho es fácil demostrar que hay una mediana con longitud igual a la mitad de la longitud de la arista correspondiente si y sólo si Z es un triángulo rectángulo. Concluimos que la región $\mathcal{P}_{\bar{\pi}} \subset V(3)$ es la determinada por los triángulos acutángulos y los rectángulos.

Por la última observación del capítulo 1 (página 7), sabemos que $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{P}V(3)$ es el espacio de triángulos módulo semejanza orientada y que los triángulos positivamente orientados están parametrizados por las tercias $(0, 1, Z)$ con $Z \in \mathbf{H}$, donde \mathbf{H} es el semiplano superior. Es claro que los parámetros en \mathbf{H} que equivalen a triángulos rectángulos son los que pertenecen al conjunto $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup C$ donde

$$\mathcal{L}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}, \quad \mathcal{L}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 1\} \quad \text{y} \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| = 1/2\}.$$

Además los triángulos acutángulos corresponden a los parámetros en la región R que se muestra en la figura 3. De manera que en este caso $\mathbb{P}\mathcal{P}_{\bar{\pi}} = \bar{R}$ con \bar{R} la cerradura de R .

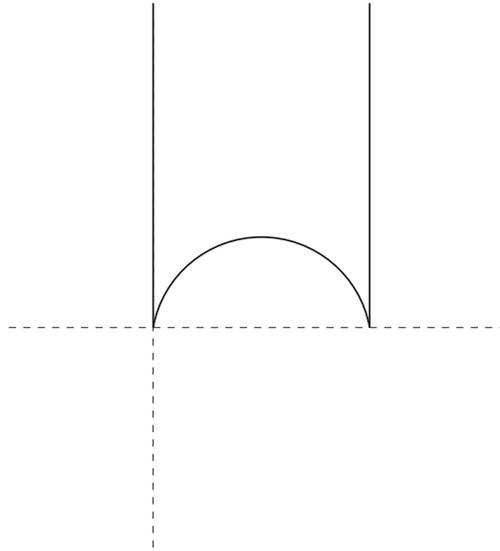


FIGURA 3. La región R determinada por los triángulos rectángulos y los acutángulos.

Para calcular $\Upsilon_\pi(4)$, necesitamos entender cuáles son los distintos triángulos rectángulos en $\partial R = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup C$ que son asociados al mismo tetraedro, *i.e.* hay que calcular qué triángulos rectángulos se pueden obtener del mismo tetraedro cambiando las ambigüedades. Para hacer esto supongamos que \mathcal{T} es un tetraedro tal que $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ es un triángulo rectángulo.

- *Distintas forma de numerar.*

Las posibles maneras de enumerar a $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ implican que el ángulo recto puede estar en cualquiera de los vértices. Por lo tanto en cada una de las tres componentes de ∂R debe haber un triángulo asociado a \mathcal{T} , ya que cada una de estas determina triángulos con el ángulo recto en distintos vértices. De manera que la función de Möbius f que identifica a los triángulos rectángulos que se obtienen al numerar de formas diferentes debe satisfacer $f(0) = 1$, $f(1) = \infty$ y $f(\infty) = 0$, se sigue que

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Observar que f es una rotación hiperbólica de $2\pi/3$ (ver [V]) con centro en $\lambda = e^{2i\pi/6} \in \mathbf{H}$.

- *Cortar por arañas distintas.*

Sean $Z_{\mathcal{T}}$ la numeración de $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A})$ que tiene como segundo vértice a la proyección de v_1 y $Z \in \mathbf{H}$ el parámetro que determina a $Z_{\mathcal{T}}$.

Supongamos que el ángulo recto está en 0, por lo tanto $Z \in \mathcal{L}_1$. Sea $\mathbf{A}' \subset \mathcal{T}$ la otra araña que existe con punto base en v_0 . Si numeramos a $D_{\mathcal{T}}(\mathbf{A}')$ de manera que la proyección de v_1 sea el segundo vértice, obtenemos un triángulo con el ángulo recto en 1 tal que las longitudes de sus

aristas son iguales a las de $Z_{\mathcal{T}}$. Por lo tanto la función que identifica los triángulos obtenidos al cortar a través de arañas distintas pero con el mismo punto base es $h(z) = 1 - \bar{z}$.

De esta forma concluimos que el espacio móduli de poliedros con ángulos cónicos determinados por $\bar{\pi}$ es el cociente:

$$\Upsilon_{\pi}(4) = \bar{R} / \langle f(z), h(z) \rangle$$

donde $\langle f(z), h(z) \rangle$ es el grupo generado por las funciones f y h .

Para entender el espacio $\Upsilon_{\pi}(4)$ notemos que los puntos i , $(1+i)/2$ y $1+i$ equivalen al triángulo rectángulo isóceles y $f(i) = (1+i)/2$, $f((1+i)/2) = 1+i$ y $f(1+i) = i$. Como f es una isometría hiperbólica (ver [Ver]), las rectas hiperbólicas entre λ y cada uno de dichos puntos también se identifican con f (ver figura 12). Se sigue que la acción de f en \bar{R} identifica las regiones delimitadas por los cuadriláteros hiperbólicos con vértices

$$I. - \{\infty, 1+i, \lambda, i\}, \quad II. - \{0, i, \lambda, (1+i)/2\} \quad \text{y} \quad III. - \{1, (1+i)/2, \lambda, 1+i\}.$$

Notar que el cuadrilátero I sirve como región fundamental para el cociente $\bar{R} / \langle f(z), h(z) \rangle$.

Bibliografía

[DYS] Burago Demitri, Burago Yuri y Ivanov Sergei. A course in metric geometry, American Mathematical Society Volume 33, 2001.

[Hof] Hoffman Kennet y Kunze Ray. Algébra lineal, Prentice-Hall 1973.

[Lóp] López Jorge L. The area as a natural hermitian structure on the spaces of plane polygons and curves, pre impresión, 2010.

[Thu1] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere, Geometry and Topology Monographs, Volume 1: The Epstein Birthday Schrift páginas 511-549.

[Thu2] William P. Thurston. Three dimensional geometry and topology, Princeton University, Press 1997.

[V] Verjovsky Alberto, “Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas”, Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas, IPN, 1982.