Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Curvatura Promedio en Haces Fibrados Principales

TESINA

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

César Alejandro Soto Posada

Director:
José Antonio Zapata Ramírez

Morelia; Michoacán - Junio de 2010

Índice general

Introducción

En esta tesina estudiamos los aspectos básicos de los haces fibrados principales, los cuales son indispensables para estudiar geometría diferencial, ya que es allí donde es posible definir las conexiones y por lo tanto hablar de transporte paralelo, holonomías y curvatura. Ahora, si consideramos un haz fibrado principal $P(M, G)$ y una 1-forma de conexión $\mathfrak{g}$-valuada ω con la cual tenemos la 2-forma de curvatura $\mathfrak{g}$-valuada Ω, el grupo de holonomía $Hol_u(\omega)$ se relaciona con la curvatura por medio de su álgebra de Lie $\mathfrak{hol}_u(\omega) = Span\{\Omega_u(X, Y) : X, Y \in T_uP\}$, esta relación está dada por el teorema de Ambrose-Singer. En este caso estamos considerando todos los lazos posibles basados en $x = \pi(u)$. Dado un lazo basado en x la relación entre la curvatura y la holonomía no es directa y esta depende en general del grupo G. Por ejemplo si $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, $G = SO(2)$ y $F(M^2, SO(2))$ es el haz de marcos, dado un lazo, el elemento $W \in \mathfrak{hol}_u(\omega)$ es la integral de la curvatura en la superficie encerrada por este, donde $exp(W)$ es el elemento en el grupo de holonomía que corresponde al transporte paralelo alrededor del lazo. Definimos entonces la curvatura promedio como el elemento en el álgebra de Lie con las propiedades descritas anteriormente. Discutimos las dificultades al definir esta cantidad y mostramos las condiciones en las cuales se puede definir en $SU(2)$.

1

Grupos de Lie

Uno de los objetos fundamentales en topología diferencial y geometría diferencial son los grupos de Lie. Daremos a continuación su definición y sus propiedades básicas con el propósito de fijar notación y de resaltar el enfoque diferencial que estos tienen.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1. *Un grupo de Lie G es un grupo dotado con una estructura de variedad diferenciable la cual es compatible con sus operaciones de grupo, i.e. las aplicaciones $(a, b) \to ab$, $a \to a^{-1}$ son diferenciables.*

Las aplicaciones $R_a : G \to G$ y $L_a : G \to G$ dadas por $R_a x := xa$ y $L_a x := ax$ se llamaran traslaciones derecha e izquierda respectivamente.

Observación 1.1.1. *Nótese que las aplicaciones R_a y L_a son difeomorfismos, con $R_{a^{-1}} = R_a^{-1}$ y $L_{a^{-1}} = L_a^{-1}$. Esto implica que toda vecindad U de $x \in G$ es difeomorfa a una vecindad U_0 de $e \in G$, e elemento identidad del grupo. Así mismo la componente conexa de e, G°, es un subgrupo normal generado por cualquier vecindad U de e (ver [2]). También notamos que $R_{ab} = R_b R_a$ y $L_{ab} = L_a L_b$.*

Es natural esperar que las propiedades topológicas y diferenciables de un grupo de Lie G visto como variedad estén restringidas por su estructura algebraica de grupo. Ejemplos de estas restricciónes son el hecho que para todo grupo de Lie G su grupo fundamental $\pi_1(G)$ es abeliano y su haz tangente TG es trivial.

Definición 1.1.2. *Sean G, H grupos de Lie. Una aplicación de grupos de Lie, $\varphi : G \to H$, es un homomorfismo de grupos que también es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables.*

Definición 1.1.3. *Un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G, es un subgrupo algebraico $H < G$ tal que la inclusión $i : H \to G$ es un encaje, i.e. una aplicación diferenciable inyectiva con diferencial inyectiva y propia.*

Ejemplo 1.1.1. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Con la identificación natural de $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ con $\mathbb{K}^{n^2}$ tenemos que $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ es variedad diferenciable. Consideremos la función $det : L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}$, como es polinomial es contínua, por lo tanto $det^{-1}(0) \subset L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ es cerrado, luego el grupo $GL(n, \mathbb{K}) = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \backslash det^{-1}(0)$ es abierto y por lo tanto variedad diferenciable. Las operaciones de producto de matrices e inverso son* *polinomiales, luego diferenciables. Tenemos que $GL(n,\mathbb{K})$ es grupo de Lie. Considerando la aplicación de grupos de Lie $\varphi : GL(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K})$ dada por $\varphi(A) = AA^T$ observamos que $O(n,\mathbb{K}) := \varphi^{-1}(I)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $GL(n,\mathbb{K})$. Además, como $AA^T = I$ si $A = (a_{ij})$ se tiene que $|a|_{ij} \leq 1$ y por lo tanto es compacto. Sea $det : O(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^\times$ una aplicación de grupos de Lie, $SO(n,\mathbb{K}) := det^{-1}(1)$ subgrupo de Lie cerrado en $O(n,\mathbb{K})$ y por lo tanto compacto. Con $det : GL(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^\times$ tenemos el grupo de Lie $SL(n,\mathbb{K}) := det^{-1}(1)$.*

Observación 1.1.2. *Aunque en el ejemplo previo, para mostrar que estos grupos son de Lie no ha sido relevante el campo, en general son diferentes los grupos de Lie reales a los complejos y no se puede pensar que tienen las mismas propiedades.*

Observación 1.1.3. *Es importante notar que no todo subgrupo algebraico de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie. Un ejemplo es $H \subset T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donde H es la imágen de una recta con pendiente irracional en T^2, como H es denso en T^2 no es subvariedad.*

Observación 1.1.4. *Aunque los grupos de Lie más importantes en geometría y en física son grupos de matrices, es importante señalar que no todo grupo de Lie es isomorfo a uno de estos. Un ejemplo es el cubriente universal del grupo $SL(2,\mathbb{R})$ (ver[3]).*

Observación 1.1.5. *Si $G_1, \ldots, G_k$ son grupos de Lie, entonces $G_1 \times \cdots \times G_k$ es un grupo de Lie. Donde naturalmente la estructura diferenciable está dada por el producto, así mismo su estructura de grupo.*

1.2. Representación adjunta

Ahora, para mezclar el aspecto diferenciable y algebraico de los grupos de Lie definimos una nueva aplicación, $Ad_a : G \to G$, dada por $Ad_a(x) = axa^{-1}$ y llamada el adjunto por a. Es importante señalar que $Ad_a(e) = e$ para todo $a \in G$, i.e. deja fijo a la identidad. Tenemos que Ad_a es un automorfismo de grupos, $Ad_{ab} = Ad_a Ad_b$, y un difeomorfismo de variedades diferenciables. Denotando $\mathfrak{g} := T_e G$ observamos que $(Ad_a)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde $(Ad_a)_*$ es la diferencial de la aplicación Ad_a tomada en $e \in G$. Tenemos entonces la representación adjunta

$$ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$$

dada por $ad(a) := (Ad_a)_*$. Si $n = dim(\mathfrak{g})$ entonces $Aut(\mathfrak{g}) = GL(n,\mathbb{K})$ y tenemos una representación de G en el grupo general lineal. Esta representación no es en general inyectiva o sobreyectiva.

Ejemplo 1.2.1. *Como ejemplos de la representación adujunta tomemos primero a G un grupo de Lie abeliano. En este caso $ad(a) = (Ad_a)_* = (I_G)_* = I$, donde $(I_G)(x) = x$ para todo $x \in G$, I es la identidad en $GL(n,\mathbb{K})$. Luego todo grupo de Lie abeliano tiene la representación adjunta trivial. El recíproco de esta afirmación es cierto y en general se tiene que $Z(G) = ker(ad)$, con $Z(G)$ el centro del grupo. Ahora supongamos que $G = GL(n,\mathbb{K})$. Con la identificación del ejemplo anterior tenemos que $\mathfrak{g} = L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$. Denotemos por η este isomorfismo. Luego con la conmutatividad del diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "ad(a)"] & \mathfrak{g} \\
L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n) \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "Ad_a"] & L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n) \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

y con el hecho que $GL(n,\mathbb{K}) \subset L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$ obtenemos que $ad = Ad$.

La representación adjunta es un morfismo de grupos de Lie, luego tomando la diferencial obtenemos

$$ad_* : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

con el cual definimos el corchete de Lie $[X, Y] := ad_*(X)(Y)$. Nótese que $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ define un producto en $\mathfrak{g}$.

Definición 1.2.1. *El espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado con este producto se llama el álgebra de Lie del grupo de Lie G.*

Hay otra forma de ver el álgebra de Lie, la cual veremos a continuación. Sea X un campo vectorial en G. Decimos que X es invariante a izquierda si $X_a = (L_a)_* X_e$. El conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda con la suma y multiplicación escalar usual forman un espacio vectorial isomorfo a $\mathfrak{g}$. El isomorfismo está dado por $X \to X_e$. Por lo tanto los elementos de $\mathfrak{g}$ se pueden interpretar como aplicaciones que actúan sobre las funciones diferenciables real valuadas definidas en una vecindad de $e \in G$, las cuales denotaremos por $\mathfrak{F}(e)$, esto es si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X : \mathfrak{F}(e) \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal que satisface la regla de Leibniz, entonces desde este punto de vista con $X, Y \in \mathfrak{g}$ el corchete de Lie $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ también es una aplicación lineal la cual satisface la regla de Leibniz, la cual está dada por $X(Y(f)) - Y(X(f))$ donde $f \in \mathfrak{F}(e)$, como se puede verificar fácilmente.

Ejemplo 1.2.2. *Para $O(n, \mathbb{R})$ su álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ está dada por las matrices antisimétricas. Se deduce el resultado de la aplicación definida en el ejemplo 1.1.1. Como I es un valor regular de φ sabemos que $ker(\varphi_*)_I = T_I(O(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ y como $ker(\varphi_*)_I = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A + A^t = 0\}$ se tiene el resultado. De forma análoga se tiene para $SL(n, \mathbb{R})$ que el álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : Tr(A) = 0\}$ son todas las matrices de tamaño $n \times n$ con traza cero. En estos dos ejemplos el corchete de Lie está dado por $[X, Y] = XY - YX$.*

1.3. Aplicación exponencial

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el grupo de Lie G están fuertemente relacionados. Esta relación está dada por la aplicación exponencial, la cual es una consecuencia de la estructura diferencial de G. Para ello es necesario la noción de grupo uniparamétrico en una variedad diferenciable M, lo cual no es más que una aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$ es un difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi_t(\varphi_s) = \varphi_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Fijando $p \in M$ la órbita de p es la imágen de $\varphi(\cdot, p)$, la cual es una curva en M con $\varphi_0(p) = p$. Denotando el vector tangente a esta curva en p por X_p notamos que está bien definido para todo $p \in M$ y por lo tanto se tiene un campo vectorial X en M, al cual llamaremos el campo vectorial inducido por el grupo uniparamétrico φ. Lo anterior prueba que todo grupo uniparamétrico induce un campo vectorial en M, en general el recíproco de esta afirmación es válido localmente. Una propiedad importante de los grupos de Lie es que el recíproco es cierto globalmente para vectores invariantes a izquierda o derecha, es decir todo campo vectorial invariante a izquierda (a derecha) es inducido por un grupo uniparamétrico; esto es una consecuencia de $L_a \varphi_t = \varphi_t L_a$ ($R_a \varphi_t = \varphi_t R_a$) donde $\varphi : \mathbb{R} \times U \to G$ es un grupo uniparamétrico que induce un campo vectorial invariante a izquierda (a derecha) en $\varphi_t(U)$, $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3.1. *Sea $\varphi_t(e)$ el grupo uniparamétrico correspondiente a $A \in \mathfrak{g}$, a la aplicación $exp : \mathfrak{g} \to G$ dada por $expA := \varphi_1(e)$ se le llama la aplicación exponencial. En general para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $exp_t : \mathfrak{g} \to G$ dado por $exp(tA) = \varphi_t(e)$.*

Observación 1.3.1. *Como $a_t := \varphi_t(e)$ es una curva cuyo vector tangente en e es $X_e := A$, donde X es un campo vectorial invariante a izquierda o derecha en G, lo cual implica que su vector tangente en a_t es*

$(L_{a_t})_*A$, esta satisface la ecuación diferencial $\dot{a}_t = (L_{a_t})_*A$ que se puede escribir $(L_{a_t})_*^{-1}\dot{a}_t = A$, en el caso de un grupo de Lie de matrices toma la forma $a_t^{-1}\dot{a}_t = A$, lo cual justifica el nombre de aplicación exponencial.

Observación 1.3.2. *Dado que $(exp_t)_*(A)|_0 = A$, $(exp_t)_*|_0 = I$, la aplicación exponencial es un difeomorfismo local. Como en todo grupo topológico la componente conexa de la identidad e está generada por cualquier vecindad que la contenga, entonces hay una vecindad abierta U de $0 \in \mathfrak{g}$ tal que el grupo generado por $exp[U]$ es G°.*

Ejemplo 1.3.1. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Si $G = GL(n, \mathbb{K})$ entonces $exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ es una solución a la ecuación diferencial $\dot{a}_t = a_t A$ y por lo tanto es el mapeo exponencial.*

1.4. Cubriente universal de un grupo de Lie

Sabemos que si un espacio topológico es conexo por trayectorias y localmente simplemente conexo entonces este tiene cubriente universal. En particular un grupo de Lie conexo, al ser variedad, tiene cubriente universal. Veremos que este cubriente universal resulta ser también un grupo de Lie.

Definición 1.4.1. *Sea (G, e) un grupo de Lie, e su elemento identidad como punto base. El espacio*[1] *$P(e, G) = (G, e)^{(I,0)}$ dotado de la topología de convergencia uniforme se llama espacio de caminos de G.*

Como G es un grupo, entonces podemos dotar a $P(e, G)$ de estructura de grupo con la multiplicación puntual, i.e. $(\gamma \cdot \gamma')(t) := \gamma(t)\gamma'(t)$. Al espacio de lazos lo llamamos $\Omega(e, G) := \{\gamma \in P(e, G) : \gamma(1) = e\}$ y al espacio de lazos contraibles lo llamamos $\Omega^\circ(e, G)$. Que este último sea subgrupo es trivial y que sea normal se obtiene del hecho que $\gamma \cdot \gamma_1 \cdot \gamma^{-1} \in \Omega(e, G)$ con $\gamma \in P(e, G)$ y $\gamma_1 \in \Omega(e, G)$, además es cerrado en $P(e, G)$.

Definición 1.4.2. *El cubriente universal de G se define como $\widetilde{G} := P(e, G)/\Omega^\circ(e, G)$, el cual por las observaciones anteriores es grupo y variedad diferenciable (ver [2]) compatible con las operaciones de grupo, y definimos la proyección $\pi : \tilde{G} \to G$ por $\pi[\gamma] = \gamma(1)$, la cual claramente es una aplicación de grupos de Lie. En general la aplicación π no es inyectiva. Claramente $ker\pi = \pi_1(G)$.*

Denotando al espacio de curvas continuas $c : I \to \mathfrak{g}$ dotado con la norma del supremo, respecto a una norma $|| \cdot ||$ en $\mathfrak{g}$, por $P(\mathfrak{g})$, tenemos :

Proposition 1.4.1. *Sea G un grupo de Lie conexo. La aplicación*

$$f : P(e, G) \to P(\mathfrak{g})$$

dada por $f(\gamma) := \gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)$ es una biyección.

Demostración. Sea $c \in P(\mathfrak{g})$, veamos que existe una única $\gamma \in P(e, G)$ tal que $c(t) = \gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)$. Como c es contínua, entonces el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales nos dice que la solución γ existe y es única, lo cual prueba que f es biyectiva. □

Observación 1.4.1. *La aplicación f de la proposición 1.4.1 es un homeomorfismo (ver [2]).*

Observación 1.4.2. *Una gran importancia que tiene el cubriente universal es la siguiente: Sean X, Y, W espacios topológicos, $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación cubriente, si W es simplemente conexo y $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ función contínua, entonces existe una única función contínua $g : (W, w_0) \to (Y, y_0)$ tal que $pg = f$, fijando $g(w_0) \in p^{-1}(x_0)$ (ver [8]). Luego toda curva en G se puede levantar a una curva en $\widetilde{G}$.*

[1] Para espacios topológicos basados $(X, x_0), (Y, y_0)$ se define $(Y, y_0)^{(X,x_0)} := \{f : X \to Y : f(x_0) = y_0\}$.

Algunos ejemplos de cubrientes universales en grupos de Lie son:

Grupo de Lie G	Cubriente universal $\widetilde{G}$
$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$	$\mathbb{R}^n$
$SO(3, \mathbb{R})$	$SU(2)$
$SO(n, \mathbb{R})$	$Spin(n)$

2

Haces Fibrados Principales

Los haces fibrados principales surgen naturalmente en muchas situaciones en topología diferencial y son objetos indispensables para estudiar la geometría diferencial de las variedades diferenciables, como veremos en la próxima sección las conexiones viven de forma natural en haces fibrados principales y son estas las que nos permiten comparar vectores que se encuentren en diferentes espacios tangentes y por lo tanto, son las que permiten estudiar cualquier aspecto geométrico o dotar de "estructura geométrica" a las variedades diferenciables.

Veamos a continuación su definición y propiedades básicas. Seguiremos principalmente a [1].

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. *Un haz fibrado principal consiste en variedades diferenciables P, M, un grupo de Lie G y una acción de G sobre P tal que*

- *La acción $G \times P \to P$ definida por $(a, u) \to ua$ es libre.*
- *$M = P/G$ y la proyección cociente $\pi : P \to M$ es diferenciable.*
- *Para todo $x \in M$ existe una vecindad U de x y un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}[U] \to U \times G$ el cual satisface $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$ con $\varphi : \pi^{-1}[U] \to G$ tal que $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ para todo $u \in \pi^{-1}[U]$ y $a \in G$. Esta es la condición de trivialización local.*

  Una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M tal que para cada abierto U_α existe una trivialización local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ con $\psi_\alpha(u) = (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$ se llama una base trivializadora. Denotaremos al haz fibrado principal por $P(M, G)$.

Observación 2.1.1. *Sea $P(M, G)$ un haz fibrado principal, $x \in M$, entonces la restricción de una trivialización $\psi_| : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times G$ es un difeomorfismo entre la fibra y G. Explícitamente, fijando $u_0 \in \pi^{-1}(x)$ se tiene que $\varphi(u_0 a) = \varphi(u_0)a$ y como la acción en la fibra es transitiva, entonces fijar el valor de u_0 en G da el difeomorfismo. En particular, $\varphi(u_0) = e$, establece un difeomorfismo entre la fibra y el grupo. Este difeomorfismo no es natural ya que depende de la escogencia de u_0.*

Observación 2.1.2. *En la definición de haz fibrado principal podemos observar que se relacionan en un solo objeto la acción libre de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable y su espacio de órbitas dado por esta acción.*

Veamos a continuación unos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Claramente el haz trivial dado por* $M \times G$ *con la acción* $(x,g)a \mapsto (x,ga)$ *satisface las condiciones de la definición 2.1.1. Un ejemplo más interesante, el cual se estudia en geometría Riemanniana es el haz de marcos* $F(M)$ *asociado a una variedad diferenciable* M^n*, el cual se construye de la siguiente forma:*

Para $x \in M$*, un marco* u *en* x *es una base* $\{e_i\}$ *de* T_xM*. Con* $F_x(M) = \{u : u \text{ marco en } x\}$ *definimos* $F(M) := \bigcup_{x\in M} F_x(M)$ *y la proyección* $\pi : F(M) \to M$ *por* $\pi(u) = x$ *donde* u *es un marco en* x*. La acción de* $G = GL(n,\mathbb{R})$ *en* $F(M)$ *está dada por* $((a_{ij}),\{e_i\}) \mapsto \{\sum_j a_{ij}e_j\}$*. Sea* (U,φ) *una carta de* x *tal que las coordenadas locales están dadas por* $\{x^i\}$*, luego* T_xM *tiene base* $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$*. Si* u *es un marco en* x*, entonces existe* $(a_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$ *tal que* $e_i = \sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}$*, por lo tanto tenemos la aplicación* $\psi : \pi^{-1}[U] \to U \times GL(n,\mathbb{R})$ *dada por* $u \mapsto (x,(a_{ij}))$*. La estructura diferenciable en* $F(M)$ *se obtiene exigiendo que todas las aplicaciones como* ψ *sean difeomorfismos. Dotado con esta estructura diferencial* $F(M)$ *es el haz de marcos de la variedad* M*.*

Ejemplo 2.1.2. *Consideremos* $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *y sea* L *una recta que pasa por el origen en* $\mathbb{C}^{n+1}$*, veamos que* $S^{2n+1} \cap L = S^1$*; sean* $a_i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le n$ *fijos, no todos cero , entonces* $L := \{(z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_i = a_it, \quad t \in \mathbb{R}\}$ *es una línea recta que pasa por el origen, ahora como algún* $a_i \neq 0$ *entonces sin pérdidad de generalidad podemos escoger* $a_0 \neq 0$*, luego tenemos que* $z_i = a_it = \frac{a_i}{a_0}z_0$*, entonces* $L \cap S^{2n+1} = \{(z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 = (\sum \left|\frac{a_i}{a_0}\right|^2)|z_0|^2\} = S^1$*. Como* $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$*, entonces definiendo la proyección* $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ *como la restricción de la proyección* $\pi' : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}P^n$ *a los puntos de* S^{2n+1}*, i.e.* $\pi := \pi'|_{S^{2n+1}}$*, tenemos un haz fibrado principal con fibra* S^1 *dado que* $\pi^{-1}(x) = S^{2n+1} \cap L = S^1$*, donde* $\pi'[L\backslash\{0\}] = x$*, para todo* $x \in \mathbb{C}P^n$*. La acción de* S^1 *en* S^{2n+1} *está dada por multiplicación. Este haz se llama el fibrado de Hopf. En el caso particular de* $n = 1$ *el mapeo está dado por* $\pi(z_0,z_1) = \frac{z_0}{z_1}$ *para* $z_1 \neq 0$ *y* $\pi(z_0,z_1) = \frac{z_1}{z_0}$ *para* $z_0 \neq 0$*, como* $\mathbb{C}P^1 = S^2$ *entonces* $\pi : S^3 \to S^2$*.*

Ejemplo 2.1.3. *Sea* $H \subset G$ *un subgrupo cerrado de Lie. Entonces* $\pi : G \to G/H$ *con* $\pi(a) := aH$ *define un haz fibrado principal con fibra* H*. Si tomamos* $G = O(n+1)$ *y* $H = O(n)$ *entonces* $\pi : O(n+1) \to S^n$ *es un haz fibrado principal con fibra* $O(n)$*.*

2.2. Morfismos entre haces fibrados principales

Como un haz fibrado principal consiste de varios objetos, entonces las aplicaciones entre estos deben satisfacer ciertas condiciones de compatibilidad. Veamos.

Definición 2.2.1. *Sean* $P(M,G), P'(M',G')$ *dos haces fibrados principales, una aplicación* $f : P(M,G) \to P'(M',G)$ *entre estos consiste en una aplicación diferenciable* $f' : P \to P'$ *y una aplicación* $f'' : G \to G'$ *tal que* $f'(ua) = f'(u)f''(a)$*. Usualmente se denotan a* f' *y* f'' *por* f*.*

Observación 2.2.1. *Una aplicaión* $f : P(M,G) \to P'(M',G')$ *induce una aplicación* $f : M \to M'$ *dada por* $f(x) := \pi'(f(u))$ *donde* $u \in \pi^{-1}(x)$*. Si se elige otro punto en la fibra* $u' \in \pi^{-1}(x)$ *se tiene* $u' = ua$ *para algun* $a \in G$*, entonces* $\pi'(f(u')) = \pi'(f(u)f(a)) = \pi'(f(u))$ *lo cual muestra que está bien definida. Claramente esta aplicación es diferenciable.*

Definición 2.2.2. *Decimos que* $P(M,G)$ *es un subhaz de* $P'(M',G')$ *si existe un encaje* $f : P(M,G) \to P'(M',G')$ *esto es, si* $f : P \to P'$ *es un encaje y* $f : G \to G'$ *es inyectivo. Si* $M = M'$ *y* $f : M \to M$ *es la identidad, entonces el subhaz correspondiente se llama un haz reducido.*

Observación 2.2.2. *Notemos que si* $f : P(M,G) \to P'(M',G')$ *es un encaje, entonces* $f : M \to M'$ *también lo es, ya que* $f(x) = \pi'(f(u))$.

Observación 2.2.3. *Un haz reducido se puede pensar como un haz sobre* M *tal que el grupo de Lie* G' *se restringe a* $f''(G)$.

Establecemos a continuación la noción de equivalencia de haces fibrados principales con la misma variedad base y la misma fibra.

Definición 2.2.3. *Dos haces fibrados principales* $P(M,G)$ *y* $P'(M,G)$ *se dicen equivalentes si existe una aplicación* $f : P(M,G) \to P'(M,G)$ *tal que la aplicación inducida* $f : M \to M$ *es la identidad.*

Se siguen de esta definición las siguientes proposiciones (ver [4]).

Proposition 2.2.1. *Los haces fibrados principales* $P(M,G)$ *y* $P'(M,G)$ *son equivalentes si y sólo si existen aplicaciones continuas* $\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$ *tales que* $\psi'_{\alpha\beta}(x) = \lambda_i^{-1}(x)\psi_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x)$ *para todo* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Con la noción de equivalencia de haces fibrados principales, una de las primeras preguntas que se quieren responder es cuando un haz $P(M,G)$ es equivalente al haz trivial $M \times G$.

Proposition 2.2.2. *Un haz fibrado principal es trivial si y sólo si admite una sección, i.e.* $s : M \to P$ *con* $\pi(s(x)) = x$ *para todo* $x \in M$.

Demostración. Basta tomar $\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$ como $\lambda_\alpha(x) = \varphi_\alpha(s(x))$ y notar que $\lambda_\alpha\lambda_\beta^{-1} = \psi_{\alpha\beta}$. La otra implicación es inmediata. □

2.3. Haces fibrados principales en coordenadas locales

Hasta el momento hemos estudiado los haces fibrados principales de forma global, veamos ahora su descripción localmente. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora de M. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ entonces definimos $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ por $\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}$ con $u \in \pi^{-1}(x)$. Como $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ entonces esta función está bien definida. A las funciones $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ se les llama funciones de transición del haz $P(M,G)$ respecto a la cubierta $\{U_\alpha\}$. Se observa de inmediato que las funciones de transición satisfacen:

$$\psi_{\alpha\alpha}(x) = e \tag{2.1a}$$

$$\psi_{\alpha\gamma}(x)\psi_{\gamma\beta}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x) \tag{2.1b}$$

Las funciones de transición $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ determinan completamente al haz .

Proposition 2.3.1. *Sea* M *una variedad,* $\{U_\alpha\}$ *una cubierta de* M *y* $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ *funciones* $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ *tal que satisfacen (2.1a) y (2.1b), entonces existe un haz* $P(M,G)$ *tal que* $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ *son sus funciones de transición.*

Demostración. Sea $P = (\bigcup U_\alpha \times G)/\sim$, donde $(x,a) \sim (y,b)$ si $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $a = \psi_{\alpha\beta}(x)b$, la proyección $\pi : P \to M$ está dada por $\pi([x,a]) = x$ y la estructura diferenciable en P se obtiene al exigir que $\pi^{-1}[U_\alpha]$ y $U_\alpha \times G$ sean difeomorfas. Definiendo las trivializaciones locales $\psi_\alpha : \pi^{-1}[U_\alpha] \to U_\alpha \times G$ con $u := [x,a]$, por $\psi_\alpha(u) = (x,a)$, con $\varphi_\alpha(u) = a$ se tiene que si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ entonces $\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} = ba^{-1}$ con $\varphi_\beta(u) = b = \psi_{\beta\alpha}a$, es decir $\psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ y por lo tanto $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ son las trivializaciones locales del haz fibrado principal $P(M,G)$. □

3

Conexiones

3.1. Definición y ejemplos

Hasta el momento todo lo que hemos visto se refiere a cuestiones de topología diferencial. En geometría Riemanniana es necesario introducir la derivada covariante la cual nos permite comparar vectores que esten en diferentes puntos de la variedad. En general es necesario transportar vectores entre espacios tangentes para comparar las cualidades geométricas que tiene la variedad en dos puntos dados, para ello es necesario que la información buscada no se pierda con el"transporte", esta clase de transporte se llama transporte paralelo, lo cuál esta profundamente ligado con el concepto de conexión. Es importante notar que el concepto de conexión es más general que el concepto de derivada covariante y el lugar natural en el cual se define es en haces fibrados principales.

Definición 3.1.1. *Sea $P(M,G)$ un haz fibrado principal. Una conexión Γ es una distribución $u \mapsto Q_u \subset T_uP$, $u \in P$, la cual satisface:*

- *Para todo $u \in P$ se tiene que $Q_u \oplus G_u = T_uP$ donde G_u es el espacio tangente a la fibra en u.*
- *La distribución Γ es diferenciable.*
- *Es invariante a derecha, i.e. $(R_a)_*Q_u = Q_{ua}$.*

Dada una conexión en $P(M,G)$ todo vector $X_u \in T_uP$ se descompone como $X_u = hX_u + vX_u$ donde $hX_u \in Q_u$ se llama la componente horizontal de X_u y $vX_u \in G_u$ se llama la componente vertical de X. Ahora, notemos que G_u es isomorfo como espacio vectorial a $\mathfrak{g}$, el isomorfismo está dado de la siguiente forma. Sea $A \in \mathfrak{g}$ y $\varphi_t = exp(tA)$ el grupo uniparamétrico correspondiente, para todo $u \in P$ sea A_u^* el vector tangente a la curva $x(t) = \varphi_t(u)$. Por lo tanto tenemos un campo vectorial inducido en P el cual denotamos por A^*. Notemos que $A_u^* \in G_u$ dado que $\varphi_t(\pi^{-1}(x)) \subset \pi^{-1}(x)$ para todo $x \in M$. Para ver que esta asignación es un isomorfismo lineal simplemente hay que recordar que la acción de G sobre P es libre y por lo tanto A_u^* es cero si y solo si $A = 0$ y es sobre porque $dim(\mathfrak{g}) = dimker + dimIm = dimIm$, luego $\mathfrak{g} \cong G_u$. Con este isomorfismo definimos la siguiente 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada.

Definición 3.1.2. *Sea $P(M,G)$ un haz fibrado principal y Γ una conexión. Definimos la 1-forma de conexión (correspondiente a Γ) ω como*

$$\omega : TP \to \mathfrak{g}$$

dada por $\omega(u,X) := A_u$ donde $A_u^* = vX_u$.

Proposition 3.1.1. *De las propiedades de* Γ *se tiene que* ω *satisface*

- $\omega(A^*) = A$ *para todo* $A \in \mathfrak{g}$.
- $(R_a)^*\omega = ad(a^{-1})\omega$ *para todo* $a \in G$.

Demostración. La primera propiedad es consecuencia de su definición. Ahora sea $X_u = hX_u + vX_u$ luego $\omega(X_u) = \omega(vX_u)$ porque $\omega(hX_u) = 0$. Sea $vX_u = A_u^*$, entonces $(R_a)^*\omega(A_u^*) = \omega((R_a)_*A_u^*)$ pero sabemos que el campo vectorial $(R_a)_*A^*$ es inducido por $ad(a^{-1})A^*$ luego $ad(a^{-1})A_u^* = ad(a^{-1})\omega(A_u^*)$. □

Observación 3.1.1. *Es importante notar que estas dos propiedades caracterizan completamente a la conexión* Γ *definida en* $P(M,G)$*, basta definir la distribución en* P *por* $u \mapsto Q_u := ker\omega_u$ *(ver [1]). Es por lo tanto equivalente definir la conexión como una distribución o como una* 1*-forma* $\mathfrak{g}$ *valuada que satisfaga las propiedades correspondientes.*

Observación 3.1.2. *Para toda conexión* Γ *en un haz fibrado principal* $P(M,G)$ *se tiene que* $\pi_* : TP \rightarrow TM$ *induce un isomorfismo* $\pi_*(Q_u) = T_xM$.

Observación 3.1.3. *Dada una conexión en* $P(M,G)$*, la restricción a un subhaz* $P'(M,G)$ *define a su vez a una conexión en* $P'(M,G)$*. Si* U *es un abierto trivializador tenemos una sección local* $\sigma : U \rightarrow P$ *con la cual tenemos una* 1*-forma de conexión definida en* U*,* $\sigma^*\omega$*, la cual llamaremos una* 1*-forma de conexión local en* U*. Como veremos en la próxima sección es posible definir una conexión en* $P(M,G)$ *a partir de conexiones locales.*

Ejemplo 3.1.1. *Para* $P = M \times G$ *el haz trivial, una conexión fácil de encontrar es* $u = (x,a) \rightarrow T_xM \times \{a\}$.

Ejemplo 3.1.2. *Dado que* $S^7/S^3 \cong S^4$ *entonces la proyección cociente* $\pi : S^7 \rightarrow S^4$ *define un haz fibrado principal con fibra* $S^3 \cong SU(2)$*. Para definir una conexión en este haz notamos que* $S^7 \subset \mathbb{H}^2$*, entonces primero definimos la conexión* $\widetilde{\omega}$ *sobre* $\mathbb{H}^2$ *y con* $i : S^7 \rightarrow \mathbb{H}^2$*, la inclusión, definimos la* 1*-forma de conexión* ω *sobre* S^7 *por* $\omega := i^*\widetilde{\omega}$*. Sean* (x_1, x_2) *las coordenadas de* $\mathbb{H}^2$*, definimos* $\tilde{\omega} : \mathbb{H}^2 \rightarrow Im\mathbb{H}$ *por* $\tilde{\omega} := Im(\bar{x}_1dx_1 + \bar{x}_2dx_2)$*. Para ver que* $\widetilde{\omega}$ *es en efecto una conexión identificamos* $S^3 \cong Sp(1)$*, donde* $Sp(1) := SO(1,\mathbb{H})$*, luego la acción* $Sp(1)\times\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ *está dada por* $(a,(x_1,x_2)) \mapsto (x_1a, x_2a)$*. Ahora* $\tilde{\omega}$ *debe satisfacer la proposición 3.1.1. Sea* $(X,Y) \in T_{x_1}\mathbb{H} \times T_{x_2}\mathbb{H}$ *luego* $(R_a)^*\tilde{\omega}(X,Y) = \tilde{\omega}((R_a)_*X, (R_a)_*Y) = \tilde{\omega}(Xa, Ya) = Im(\bar{x}_1v_1a + x_2w_2a)$ *donde* $X = v_1e_1$*,* $Y = w_2e_2$ *con* $\{e_1, e_2\}$ *base de* $\mathbb{H}^2$ *y* $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$*, por otro lado tenemos que* $\omega(X,Y) = Im(\overline{x_1a^{-1}}v_1 + \overline{x_2a^{-1}}w_2)$ *luego* $ad(a^{-1})\omega(X,Y) = a^{-1}Im(\overline{a^{-1}}\bar{x}_1v_1 + \overline{a^{-1}}\bar{x}_2w_2)a$ *como* $Sp(1) = \{a \in \mathbb{H}^\times : |a| = 1\}$ *claramente tenemos que* $a^{-1} = \bar{a}$ *entonces* $\overline{a^{-1}} = a$*, luego* $ad(a^{-1})\omega(X,Y) = Im(\bar{x}_1av_1 + \bar{x}_2aw_2)$*, es decir*

$$(R_a)^*\omega = ad(a^{-1})\omega$$

porque si $h \in \mathbb{H}$ *entonces* $a^{-1}Im(h)a = Im(a^{-1}ha)$ *para todo* $a \in Sp(1)$*. Para ver la segunda condición que define a una conexión tomamos* $A \in \mathfrak{sp}(1) \cong Im\mathbb{H}$ *sea* A^* *el campo vectorial inducido en* S^7 *cuyo grupo uniparamétrico es* $\varphi_t(x) = xexp(tA) = (x_1exp(tA), x_2exp(tA))$*, entonces* $\omega(A_p^*) = \omega(x_1A, x_2A) = Im((x_1^2 + x_2^2)A) = ImA = A$*, esto es*

$$\omega(A^*) = A$$

para todo $A \in \mathfrak{sp}(1)$*. Podemos concluir que* ω *define una conxión en el haz fibrado principarl* $S^7(S^4, S^3)$.

3.2. Conexión en coordenadas locales

La conexión también se puede caracterizar localmente. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora de $P(M,G)$. Como tenemos las aplicaciones $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ y $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ dados por $\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}$ y $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x,e)$, entonces se tienen las aplicaciones inducidas $\psi^*_{\alpha\beta}$ y σ^*_α con las cuales se tienen las formas $\theta_{\alpha\beta} := \psi^*_{\alpha\beta}\theta$ y $\omega_\alpha := \sigma^*_\alpha\omega$ donde θ es una 1-forma $\mathfrak{g}$ valuada difinida en G por $\theta(A) = A$ para todo $A \in \mathfrak{g}$. Las formas $\{\omega_\alpha\}$ definen una conexión local para cada U_α por medio de la sección σ_α, si queremos tener una conexión definida en todo P entonces es necesario que las conexiones locales sean consistentes con el "pegado" dado por las funciones de transición $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ las cuales están de forma implícita en $\{\theta_{\alpha\beta}\}$, esta consistencia es la siguiente relación entre las formas definidas.

Proposition 3.2.1. *Sea $P(M,G)$ una haz fibrado principal y ω una 1-forma de conexión. Las formas $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ satisfacen*

$$\omega_\beta = ad(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Demostración. Notemos primero que para $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ se tiene $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$. Sea $u = \sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x,e)$ esto es $\psi_\alpha(u) = (x, \varphi_\alpha(u)) = (x,e)$, tenemos

$$\psi_\beta(u\psi_{\alpha\beta}(x)) = (x, \varphi_\beta(u\psi_{\alpha\beta}(x))) = (x, \varphi_\beta(u)\varphi_\alpha(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}) = (x, \varphi_\beta(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}) = (x,e),$$

esto es

$$\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x) = u\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_\beta(x)^{-1}(x,e) = \sigma_\beta(x).$$

Luego podemos pensar a $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$ como una aplicación $P \times G \to P$, con $a = \psi_{\alpha\beta}(x)$ y $u = \sigma_\alpha(x)$ dada por $(u,a) \mapsto ua$, para todo $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Su diferencial está dado por

$$(\sigma_\beta)_*(X) = (R_a)_*(\sigma_\alpha)_*(X) + (\sigma_\alpha(x))_*(\psi_{\alpha\beta})_*(X)$$

con $(\sigma_\alpha(x))_* : T_aG \to T_{ua}P$, obtenemos

$$\sigma^*_\beta(\omega)(X) = \omega((R_a)_*(\sigma_\alpha)_*(X)) + \omega((\sigma_\alpha(x))_*(\psi_{\alpha\beta})_*(X))$$

como $\omega((R_a)_*(\sigma_\alpha)_*(X)) = \sigma^*_\alpha(R_a)^*\omega(X) = \sigma^*_\alpha ad(a^{-1})\omega(X) = ad(a^{-1})\sigma^*_\alpha\omega(X) = ad(a^{-1})\omega_\alpha(X)$ y dado que $\omega((\sigma_\alpha(x))_*A) = \omega(A^*) = A$ porque $\sigma_\alpha(x) : G \to P$ dado por $\sigma_\alpha(x)(a) = \sigma_\alpha(x)a$, la imágen es la órbita de $\sigma_\alpha(x)$ en P luego la imágen del diferencial de campos invariantes a izquierda A en G son los campos vectoriales inducidos A^* en P, luego $(\sigma_\alpha(x))^*\omega(\psi_{\alpha\beta}(\cdot)) = \theta_{\alpha\beta}$.

□

3.3. Transporte paralelo

Veamos ahora una de las principales aplicaciones de las conexiones. Dado un campo vectorial X en M, como $\pi : P \to M$ induce un isomorfismo entre Q_u y T_xM con $x = \pi(u)$, podemos levantarlo a un campo vectorial horizontal $\widetilde{X}$ en P, esto es $\widetilde{X}_u \in Q_u$ para todo $u \in P$. De la misma forma dada una curva $c(t)$ en M considerando todos los vectores tangentes a ella, podemos levantarlos a vectores horizontales en P tal que si fijamos un punto en $\tilde{c}(0) \in \pi^{-1}(c(0))$ existe una única curva $\tilde{c}$ cuyos vectores tangentes son horizontales y $\pi(\tilde{c}) = c$. Esta curva se llama el levantamiento horizontal de la curva c. Veamos que este levantamiento siempre existe.

Proposition 3.3.1. *Sea $x : I \to M$ una curva diferenciable, sea $x(0) = x_0$. Dado un punto $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ existe un único levantamiento horizontal de x que inicia en u_0*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora de M, $x_0 \in U_\alpha$ luego con la trivialización local $\psi_\alpha : \pi^{-1}[U_\alpha] \to U_\alpha \times G$ tal que $\psi_\alpha(u_0) = (x, e)$ obtenemos un levantamiento de la curva x en U_α dado por $\psi_\alpha^{-1}(x[I] \cap U_\alpha \times \{e\})$, ahora consideremos un punto $x_1 \in U_\alpha \cap U_\beta$, $x_1 \neq x_0$, y sea $u_1 = \psi_\alpha^{-1}((x_1, e))$, luego con $\psi_\beta(u_1) = (x_1, a_1)$ obtenemos el levantamiento de la curva x en U_β dado por $\psi_\beta^{-1}(x[I] \cap U_\beta \times \{a_1\})$, si continuamos de esta forma por un número finito de pasos obtenemos un levantamiento $v : I \to P$ de la curva x, i.e. $\pi v = x$. Este levantamiento no tiene por que ser horizontal. Ahora supongamos que existe una curva $a : I \to G$ tal que la curva $u : I \to P$, dada por $u(t) = v(t)a(t)$, es horizontal. De ser así, al tomar la diferencial se tiene

$$\dot{u}(t) = (R_{a(t)})_* \dot{v}(t) + (v(t))_* \dot{a}(t)$$

donde consideramos a $v(t) : G \to P$ como la aplicación dada por $v(t)(a) = v(t)a$. Luego con la 1-forma conexión obtenemos

$$0 = ad(a(t)^{-1})\omega(\dot{v}(t)) + a(t)^{-1}\dot{a}(t)$$

por lo tanto es necesario que $a(t)$ satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{a}(t)a(t)^{-1} = -\omega(\dot{v}(t)).$$

Dado que la 1-forma conexión ω es diferenciable, el teorema de existencia y unicidad de la solución de esta ecuación diferencial (ver [1]) nos da la existencia y unicidad del levantamiento horizontal de la curva x. $\square$

Observación 3.3.1. *Si la curva $x : I \to M$ es diferenciable a pedazos, entonces claramente obtenemos que el lvantamiento hoizontal es diferenciable a pedazos.*

Definición 3.3.1. *Sea $x : I \to M$ una curva diferenciable y $u : I \to P$ su levantamiento horizontal, con $u(0) = u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Ahora $u(1) = u_1 \in \pi^{-1}(x_1)$,$x_1 := x(1)$, permite definir una aplicación entre las fibras $\pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x(1))$ dado por $u_0 \mapsto u_1$, al variar la condición inicial u_0 por toda la fibra $\pi^{-1}(x_0)$. Esta aplicación $\tau : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$ se llama el transporte paralelo a lo largo de la curva x.*

Observación 3.3.2. *La aplicación τ es un isomorfismo, τ^{-1} corresponde al transporte paralelo a lo largo de la curva $x'(t) = x(1-t)$, además si $x(t)$ y $z(t)$ son curvas que se pueden componer, i.e. $x(1) = z(0)$, entonces el transporte paralelo a lo largo de $x * z$, con*

$$x * z = \begin{cases} x(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ z(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es $\tau_x \tau_z$, con τ_x y τ_z los transportes paralelos correspondientes.

3.4. Grupo de holonomía

La última observación nos muestra que los transportes paralelos tienen "inversos", además se pueden componer cuando los caminos correspondientes en M lo puedan hacer. Claramente con esto no tenemos una estructura de grupo, dado que no todo par de tranportes paralelos se pueden componer. Podemos restringirnos a una situación en la cual esto si sea posible, como el caso de lazos basados en un punto $\Omega(x_o, M)$, para obtener así un grupo. Esto es lo que definimos a continuación.

Definición 3.4.1. *Sea $\Omega(x, M)$ el espacio de lazos basados en el punto x y $\Omega^\circ(x, M)$ el espacio de lazos contraibles alrededor del punto x. El grupo formado por los transportes paralelos a lo largo de los lazos se llama el grupo de holonomía de Γ ó ω referente a x, y lo denotamos por $Hol_x(\omega)$. Si todos los lazos son contraibles entonces lo llamamos el grupo de holonomía restringido $Hol_x^\circ(\omega)$*

Observación 3.4.1. *Fijando* $u \in \pi^{-1}(x)$ *tenemos que* $\tau(u) = ua$ *para* $\tau \in Hol_x(\omega)$. *Podemos identificar* τ *con* a. *Con esta identificación obtenemos un grupo, el cual depende del elemento* $u \in \pi^{-1}(x)$ *y lo denotamos por* $Hol_u(\omega)$. *Es claro que* $Hol_u(\omega) < G$.

Veamos que tanto depende el grupo de Holonomía del punto $u \in \pi^{-1}(x)$.

Proposition 3.4.1. *Sea* $P(M,G)$ *un haz fibrado principal,* ω *una* 1*-forma de conexión.*

- *Si* $v = ua$, $a \in G$ *entonces* $Hol_v(\omega) = Ad(a^{-1})Hol_u(\omega)$.
- *Sean* $u, v \in P$, *si existe una curva horizontal entre* u *y* v *entonces* $Hol_v(\omega) = Hol_u(\omega)$.

Demostración. Sea $\tau \in Hol_v(\omega)$, $\tau(v) = vb = uab = \tau(u)a = uca$, como la acción es libre $b = a^{-1}ca = ad(a^{-1})c$, esto es $Hol_v(\omega) \subset ad(a^{-1})Hol_u(\omega)$. Ahora con $\tau(u) = uc$ tenemos $\tau(v) = uca = va^{-1}ca = ad(a^{-1})c$ por lo tanto $Hol_v(\omega) = ad(a^{-1})Hol_u(\omega)$. Para la segunda parte solo debemos notar que si existe una curva horizontal entre u y v entonces también entre ua y va para todo $a \in G$. $\square$

Uno de los resultados principales respecto al grupo de holonomía es (ver [1]):

Teorema 3.4.2. *Sea* $P(M,G)$ *un haz fibrado principal.* M *conexo y paracompacto y* ω *una* 1*-forma de conexión. El grupo de holonomía* $Hol_u(\omega)$ *es un subgrupo de Lie de* G, *donde la componente conexa de la identidad es* $Hol_u^{\circ}(\omega)$.

3.5. Curvatura

Una de las principales características del estudio de la geometría diferencial es el estudio de la curvatura, lo cual veremos a continuación. Sea $h : T_uP \to Q_u$ dada por $h(X) = hX$ la proyección horizontal.

Definición 3.5.1. *Sea* $P(M,G)$ *una haz fibrado principal y* ω *una* 1*-forma de conexión. Definimos la* 2*-forma de curvatura* $\mathfrak{g}$*-valuada de* ω *por*

$$\Omega := d\omega h$$

donde $d\omega$ *es la derivada exterior de la forma* ω.

La siguiente relación nos dice que tanto se aleja Ω de $d\omega$ o en otras palabras, cual es la diferencia al considerar la parte vertical de los vectores en T_uP

Proposition 3.5.1. *Sea* $P(M,G)$ *un haz fibrado principal,* ω *y* Ω *las formas de conexión y de curvatura correspondientes. Se satisface:*

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega,\omega] + \Omega$$

Demostración. Si $X, Y \in G_u$, esto es si $X = A^*$ y $Y = B^*$ con $A, B \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\Omega(X,Y) = 0$ y $[\omega(A^*), \omega(B^*)] = [A,B]$, como

$$d\omega(X,Y) = \frac{1}{2}\left(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\right)$$

se tiene $2d\omega(A^*,B^*) = -\omega([A^*,B^*]) = -\omega([A,B]^*) = -[A,B]$ con lo cual obtenemos la igualdad para este caso. Si $X, Y \in Q_u$ entonces $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ y tenemos así la definición de Ω ya que $hX = X$ y $hY = Y$. Si $A^* = X \in G_u$ y $Y \in Q_u$ tenemos que $2d\omega(A^*,Y) = -\omega([A^*,Y]) = 0$ porque $[A^*,Y]$ es horizontal y $\Omega(A^*,Y) = d\omega(0,Y) = 0$. Con estos casos concluimos la igualdad para todo $X, Y \in T_uP$. $\square$

Ahora concluiremos esta sección con el teorema de Ambrose-Singer que relaciona el álgebra de Lie del grupo de holonomía $\mathfrak{hol}_u(\omega)$ con el subespacio generado por todos los elementos $\Omega(X,Y)$ en $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.5.2. *Sea $P(M, G)$ un haz fibrado principal, ω y Ω las formas de conexión y curvatura. Para todo $u \in P$ se tiene que*

$$\mathfrak{hol}_u(\omega) = Span\{\Omega(X, Y) : X, Y \in T_uP\} \subset \mathfrak{g}$$

4

Definición de F

4.1. Holonomía y curvas en G

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n \geq 2$ y G un grupo de Lie. Consideremos el haz fibrado principal $P(M,G)$. Sea Γ una conexión sobre P y ω la 1-forma conexión correspondiente. Consideremos $\sigma : I^2 \to M$ un encaje, observemos que $S := Im\sigma$ es contraible. Podemos exigir además que ∂S sea una curva suave a pedazos.

Consideremos los puntos base $x_0 \in M$ y $s_0 \in S$. Dada una homotopía suave h entre s_0 y S, esto es

$$h : I^2 \times I \to M \tag{4.1}$$

con $h(x,0) = s_0$ y $h(x,1) = \sigma(x)$ tal que $\partial(Imh_t)$ es suave a pedazos, vamos a definir la siguiente familia de curvas. Sea $\gamma_t : I \to M$ una curva suave a pedazos tal que $Im\gamma_t = \partial(Imh_t)$, con $h_t := h(\cdot, t)$. γ_t sólo cubre una vez a $\partial(Imh_t)$. Ahora, fijando $u_0 \in \pi^{-1}(s_0)$ cada γ_t tiene un único levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}_t$ con $\tilde{\gamma}_t(0) = u_0$ y $\tilde{\gamma}_t(1) = u_0 a_t$, $a_t \in G$. Dado que $\tilde{\gamma}_0(1) = u_0$, entonces por medio de las curvas $\tilde{\gamma}_t$ podemos definir la curva $c : (I,0) \to (G,e)$ como $c(t) = a_t$. Veamos que en efecto c es una curva suave a pedazos. Sabemos que γ_t es suave a pedazos. Como la conexión es suave, entonces $\tilde{\gamma}_t$ es suave a pedazos (ver [1]), lo cual implica que la curva c es suave a pedazos.

Recordemos ahora como se construye el levantamiento horizontal de curvas (proposición 3.3.1). Dada una curva $\gamma_t : I \to P$ existe el levantamiento horizontal si y solo si existe una curva en G, $a_t : I \to G$, tal que la curva $\tilde{\gamma}_t : I \to P$ dada por $\tilde{\gamma}_t(s) := v_t(s)a_t(s)$ es horizontal para todo $s \in I$. Derivando esta ecuación y aplicando la 1-forma conexión llegamos a la conclusión de que esta condición es equivalente a que se satisfaga la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{da_t(s)}{ds} a_t^{-1}(s) = -\omega\left(\frac{dv_t(s)}{ds}\right) \tag{4.2}$$

para todo $s \in I$. Como la conexión es suave, entonces (4.2) tiene solución [1], la cual es suave a pedazos tanto en s como en t, lo cual implica que la curva c es suave a pedazos.

Ahora veamos de que forma depende la curva c de la escogencia de la homotopía h. Sea h' otra homotopía entre s_0 y S que satisface las mismas condiciones que h y sea $c' : I \to G$ la curva correspondiente a esta homotopía. Veamos que c y c' son curvas homotópicas en G. Como S es contraible, entonces para todo $t \in I$ las curvas γ_t y γ'_t son homotópicas. Sea $H'_t : I \times I \to M$ una homotopía entre estas con $H'_t(s,0) = \gamma_t(s)$ y $H'_t(s,1) = \gamma'_t(s)$. Ahora para cada curva intermedia dada por esta homotopía tenemos el levantamiento horizontal $\widetilde{H'}_t(s', s)$ $0 \leq s' \leq 1$ con s fijo, y el transporte paralelo a lo largo de la misma, esto es $\widetilde{H'}_t(1, s) = u_t(s)$ con $u_0(s) = u_0$. La curva $u_t(s)$ es suave a pedazos en s y en t. Esto implica lo siguiente: $u_t(s) = u_0 b_t(s)$ porque G actúa transitivamente en $\pi^{-1}(s_0)$, entonces la suavidad a pedazos de $u_t(s)$ implica la suavidad a pedazos de $b_t(s)$, la cual es una curva en G entre los puntos $b_t(0) = a_t$ y $b_t(1) = a'_t$. Como esta curva es suave en t entonces podemos definir $H : I \times I \to G$ por $H(t, s) := b_t(s)$, tenemos entonces $H(t, 0) = a_t = c(t)$ y $H(t, 1) = a'_t = c'(t)$, es decir H define una homotopía suave entre c y c'. Concluimos entonces que c es única salvo homotopía para una superficie dada.

Teorema 4.1.1. *Sean h y h' dos homotopías entre s_0 y S, c y c' las curvas correspondientes en G. Entonces existe una homotopía suave entre c y c'.*

4.2. Levantamiento de curvas y *exp*

Para definir el objeto en el cual estamos interesados es necesario levantar la curva c a una curva $\tilde{c}$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[d, "exp"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{c}"] \arrow[r, "c"'] & G \end{tikzcd}$$

Para grupos abelianos como $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ el cubriente universal es $\mathbb{R}^n = Lie(T^n)$, luego la teoría de cubrientes garantiza que dado $\tilde{c}(0) \in exp^{-1}(c(0))$ existe una única curva $\tilde{c}$ que hace el diagrama conmutativo. Para un grupo de Lie G arbitrario el cubriente universal no es siempre el álgebra de Lie, por ejemplo $SU(2) \to SO(3, \mathbb{R})$, y en general $exp : \mathfrak{g} \to G$ no es sobreyectivo, por ejemplo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$. Entonces la existencia de $\tilde{c}$ y sus propiedades analíticas no son consecuencia inmediata de la teoría de cubrientes universales. En el caso en el cual la aplicación exponencial es sobreyectiva podemos levantar la curva en los puntos en los cuales esta aplicación es un difeomorfismo. Sabemos que es difeomorfismo local alrededor de $0 \in \mathfrak{g}$ pero no sabemos cual es el tamaño máximo de la vecindad donde esto sucede. Claramente el tamaño depende del grupo G. Los puntos en los cuales $(exp)_*$ no es un difeomorfismo se llaman puntos conjugados. En todo grupo de Lie G paracompacto tenemos una métrica riemanniana, con esta el estudio de la vecindad máxima se conoce como el radio máximo de inyectividad del mapeo exponencial. El tamaño de esta vecindad está directamente relacionado con el estudio de los puntos conjugados en el grupo de Lie o en una variedad riemanniana arbitraria (ver [5]).

Si la curva $c : I \to G$ está contenida en $exp[U]$, con U abierto en el cual exp es difeomorfismo, entonces si c es suave a pedazos, una forma explícita de la curva $\tilde{c}$ en $\mathfrak{g}$ está dada por $exp^{-1}[c[I]]$, si c es suave satisface la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\tilde{c}(t)}{dt} = (exp^{-1})_*(\dot{c}(t))$$

con condición inicial $\tilde{c}(0) = 0$.

El radio de inyectividad depende de cada grupo de Lie y por lo tanto las curvas que se pueden levantar con este procedimiento.

4.3. Curvatura promedio

La curva $c : I \to G$ tiene información del grupo de holonomía $Hol_{s_0}(\omega)$ la cual queremos relacionar con la curvatura en S de forma implícita, como veremos a continuación.

Consideraremos una curva $c : I \to G$ tal que $c[I]$ está en la imagen del dominio de inyectividad de exp. Sea $\tilde{c} : I \to \mathfrak{g}$ dada por $\tilde{c}(t) := exp^{-1}(c(t))$, como $exp(0) = e$ entonces $\tilde{c}(0) = exp^{-1}(e) = 0$. Notemos que $\tilde{c}(1) \in \mathfrak{g}$ está bien definido.

Definición 4.3.1. *Dado un haz fibrado principal $P(M, G)$ con conexión Γ y una superficie $S \subset M$ definimos la curvatura promedio de Γ en S por $F_S(\Gamma) = \tilde{c}(1)$.*

Ejemplo 4.3.1. *Consideremos $G = SU(2)$, en este caso particular estudiaremos los puntos conjugados de la aplicación exponencial y veremos que casi todas las curvas en $SU(2)$ se pueden levantar a curvas en $\mathfrak{su}(2)$. Relacionaremos luego este levantamiento con la curvatura dada por la conexión.*

Sabemos que $SU(2)$ es difeomorfo a S^3 y el álgebra de Lie está dada por:

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

el cual es un subespacio vectorial de $L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de dimensión 3 que puede ser identificado con $\mathbb{R}^3$.

La aplicación exponencial para $SU(2)$ es (ver [2])

$$exp(X) = cos(t)I + \frac{sen(t)}{t} X$$

con $t = \sqrt{\alpha^2 + |\beta|^2}$, entonces se tiene

$$exp^{-1}(-I) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \alpha^2 + |\beta|^2 = (2n+1)^2\pi^2; n \geq 0 \right\}$$

identificando a $\mathfrak{su}(2)$ con $\mathbb{R}^3$ se tiene que $exp^{-1}(-I) = \bigcup_{r_i} S_i$ con S_i esfera centrada en el origen con radio $(2i+1)\pi$. $SU(2)$ sólo tiene el punto conjugado $-I$. Para $\widetilde{V} = B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ con $r = \pi$ y V la vecindad correspondiente en $\mathfrak{su}(2)$ tenemos que exp es un difeomorfismo entre V y $SU(2) \backslash \{-I\}$.

Con $c : I \to SU(2)$ tal que $-I \notin c[I]$ y $\tilde{c} : I \to \mathfrak{su}(2)$ dada por $\tilde{c}(t) := exp^{-1}(c(t))$, tenemos que $F_S(\Gamma) = \tilde{c}(1)$.

En el caso en el cual $-I \in c[I]$ es posible perturbar la curva c para que ésta no pase por $-I$ y de esta forma obtener la definición anterior para curvas arbitrarias en $SU(2)$.

Observación 4.3.1. *Consideremos el caso de conexiones en el haz de marcos de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, $G = S^1$ y $s_0 \in \partial S$ un punto fijo. Dado un vector $v \in T_{s_0}S$ al transportarlo paralelamente a lo largo de ∂S obtenemos un nuevo vector $v' \in T_{s_0}S$. Si φ es el ángulo entre v y v', entonces se satisface que*

$$\varphi = \int_S K$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie (ver [7]). Este resultado no depende del punto s_0 que se elija en la superficie S. Ahora si $P(S, SO(2, \mathbb{R}))$ es haz de marcos sobre S y Γ la conexión de Levi-Civita, entonces si $\gamma : I \to S$ con $Im\gamma = \partial S$ se tiene $\tilde{\gamma}(1) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R} = \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$. Con la notación anterior $F_S(\Gamma) = \tilde{c}(1) = \varphi$ que no es nada mas que la integral de la curvatura en la superficie.

$$\tilde{c}(1) = \int_S K$$

Teniendo en cuenta la observación anterior $F_S(A)$ generaliza la integral de la curvatura en la superficie, i.e. es una integral "no abeliana" de la curvatura en S. La curva $\tilde{c}$ nos da información intuitiva sobre que tan "homogénea" es la curvatura en S.

Observamos entonces que $F_S(\Gamma)$ puede definirse sin restricciones sobre la superficie S (respecto a la conexión Γ) en el caso $G = U(1)$. En el caso $G = SU(2)$ podemos considerar que la curva c evade el punto $-I \in SU(2)$ y por lo tanto $F_S(\Gamma)$ está bien definido, esto implica que también está bien definido en $SO(3)$, dado que $SU(2)$ es su cubriente universal.

Bibliografía

[1] S. Kobayashi & K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry Vol I*. Interscience New York 1963.

[2] J.J. Duistermaat & J.A.C. Kolk. *Lie Groups*. Springer (Universitext) 2000.

[3] B.A. Dubroniv, A.T. Fomenko & S.P. Novikov. *Modern Geometry, Methods and Applications*. Springer 1985.

[4] Norman E. Steenrod. *The topology of Fiber Bundles*. Princeton University Press 1951.

[5] Jeff Cheeger-David G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. Amsterdam : North-Holland 1975.

[6] Gerard Walschap. *Metric Structures in Differential Geometry*. Springer New York 2004

[7] Manfredo doCarmo. *Differential Forms and applications*. Springer Berlin 1994

[8] Glen Bredon. *Topology and Geometry*. Springer New york 1993