Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

# Ultrafiltros sobre $\omega$.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Salvador Mancilla Hernández

*Director:* Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán - agosto de 2010.

# Índice general

# Agradecimientos

Aquí se ponen los agradecimientos.

# INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo estudiar los ideales y filtros sobre conjuntos numerables, los que comúnmente conocemos como *filtros sobre $\omega$ o ideales sobre $\omega$*. Dentro de estos, nos enfocaremos en la clase de *$\mathcal{I}$-ultrafiltros* los cuales fueron estudiados por James Baumgartner en [**11**]. Y dentro de esta clase de ultrafiltros, nos concentraremos cuando $\mathcal{I}$ es $\{A \subseteq \omega : \sum_{n \in A} g(n) < \infty\}$, también conocido como *ideal sumable con respecto a $g$*, donde $g$ es una sucesión de números reales no negativos.

En el capítulo 1 hacemos enfásis en las herramientas que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, tales como familias casi ajenas maximales, árboles, invariantes cardinales, clases especiales de ultrafiltros y agregamos adeḿas una lista de ejemplos de ideales sobre $\omega$. También dedicamos una sección especial para el tema de $\mathcal{I}$-ultrafiltros donde estudiamos caracterizaciones de ultrafiltros selectivos, $p$-puntos, $q$-puntos en términos de $\mathcal{I}$-ultrafiltros

El capítulo está dedicado a estudiar un artículo de Jana Flašková titulado *More than* 0*-point*; en él estudiamos a detalle la construcción de un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro en ZFC, cuando $g$ es la sucesión $\frac{1}{n}$. También revisamos qué se tiene hasta el momento cuando $g$ es una sucesión de números reales arbitraria y miramos a través del vidrio del Axioma de Martin o a través de la Hipótesis del Continuo.

El cuarto capítiulo está dedicado a exponer los resultados que fueron encontrados al revisar y estudiar algunos artículos que han sido estudiados en los capitulos anteriores. Hablando específicamente, probamos que asumiendo $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}$ existen $2^{\mathfrak{d}}$ $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltros débiles; para esto, esencialmente las herramientas que usamos son: familias casi ajenas maximales, los invariantes cardinales $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{d}$, un teorema de caracterización sobre $\mathfrak{h}$, y un lema sobre las funciones finito a uno de $\omega$ en $\omega$ que rescatamos en el camino. También añadimos un bloque en donde damos una revisión entre cual es la relación entre los $p$-puntos, los ultrafiltros rápidos y los ultrafiltros sumables.

Finalmente el quinto capítulo está dedicado a estudiar un teorema de K. Kunen sobre ultrafiltros selectivos, para esto nos ligamos un poco con teoría de modelos y forcing. Dicho teorema, prueba que es consistente que los ultrafiltros selectivos no existan. Para esto, divimos el capítulo en tres secciones: en la primer sección introducimos las herramientas necesarias para probar el teorema, es decir, recordamos algunos teoremas de teoría de modelos y algunas nociones de forcing. La segunda sección, ya con el arsenal preparado para comenzar a probar el teorema damos pie a la demostración. Y, finalmente en la última sección hacemos un bloque en donde damos las conclusiones del presente trabajo.

Cabe notar que para comenzar con los primeros cuatro capítulos solo es necesario un curso básico de teoría de conjuntos, ánalisis, y tal vez un poco de topología, pero ya para el quinto capítulo sí es necesario estar familiarizado con teoría de modelos y forcing.

## 1. Preliminares

Decimos que un conjunto $x$ es *transitivo* si para todo $y \in x$, $y$ es un subconjunto de $x$; o sea, $y \subseteq x$. Un conjunto $x$ es un *número natural* si: $x$ es transitivo, $(x, \in)$ es un órden lineal estricto, todo subconjunto no vacío de $x$ tiene elementos mínimo y máximo en el órden $\in$. También, un conjunto $x$ es un *número ordinal* si y sólo si: $x$ es transitivo, $x$ es bien ordenado bajo la relación $\in$, es decir, para todo subconjunto $y$ no vacío de $x$, $y$ tiene elemento mínimo. Nótese que los números naturales son exactamente los números ordinales finitos, así, $\omega = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ es el primer ordinal más grande que cualquier número natural. El conjunto $\omega$, es el que conocemos como el de los números naturales.

Un conjunto $X$ se llama *numerable* si existe una función $f : \omega \to X$ biyectiva. Dados $A, B$ conjuntos, decimos que $A$ y $B$ tienen la misma cardinalidad, i.e. $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Por $[A]^{<X}$ denotamos al conjunto $\{A \subseteq X : |A| < |X|\}$. Por $\omega^{<\omega}$ denotamos al conjunto de todas las sucesiones finitas $s : n \to \omega$ donde es un número natural. Por $\omega^{\omega}$ entendemos el conjunto de todas las funciones $f$ de $\omega$ en sí mismo. Si $s \in \omega^{<\omega}$ tiene dominio $n \in \omega$ e $i \in \omega$, por $s \frown i$ denotamos la sucesión $t$ con dominio $n+1$ tal que $t_{|n} = s$ y $t(n) = i$.

Recordemos el cuasi-órden $\leq^*$ sobre $\omega^{\omega}$: Para $f, g \in \omega^{\omega}$, escribimos $f \leq^* g$ si y sólo si existe $N \in \omega$ tal que $f(n) \leq g(n)$ para cada $n \geq N$. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^{\omega}$ se dice que es una familia dominante si para cada $g \in \omega^{\omega}$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq \omega^{\omega}$ es acotada, si existe $f \in \omega^{\omega}$ tal que para todo $g \in \mathcal{F}$ se tiene que $g \leq^* f$. Algunos de los cardinales invariantes asociados a dicho cuasi-órden son:

$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^{\omega} \wedge \mathcal{F} \text{ es dominante }\}$$

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^{\omega} \wedge \mathcal{F} \text{ es no acotoda } (\leq^*)\}$$

que serán tratados en el presente trabajo.

Recordemos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es $k$-ligada, si para toda $\{A_n : n \leq k\} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap_{n \leq k} A_n$ es infinito. Decimos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es centrada si para todo $k \in \omega$ se tiene que $\mathcal{F}$ es $k$-ligada.

Si $A, B \in [\omega]^\omega$, decimos que $A$ está *casi contenido* en $B$ y lo denotamos $A \subseteq^* B$, si $A \setminus B$ es finito. Usando esta notación recordemos otro cardinal invariante, conocido como el *número de la pseudointersección*:

$$\mathfrak{p} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega, \mathcal{F} \text{ es centrada}, \mathcal{F} \text{ no tiene pseudointersecciones }\}.$$

Denotemos por $\aleph_0$ el cardinal de $\omega$ y por $\omega_1$ el conjunto formado por todos los números ordinales numerables; este también es el primer cardinal no numerable que a veces lo denotamos indistintamente por $\aleph_1$. La *cardinalidad del continuo*, es decir, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es denotada por $\mathfrak{c}$. Visto como conjunto, $\mathfrak{c}$ es un conjunto bien ordenado tal que cada segmento inicial de $\mathfrak{c}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{c}$.

## Hipótesis del Continuo y Axioma de Martin

No olvidemos que dado un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$, $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ de modo que $d \leq_{\mathbb{P}} p$ y también $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro si $p \in \mathcal{F}$ y $p \leq_{\mathbb{P}} q$, entonces $q \in \mathcal{F}$ y si $p, q \in \mathcal{F}$, entonces existe $r \in \mathcal{F}$ de modo que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ se dice que $p$ y $q$ son compatibles si existe $r$ en $\mathbb{P}$ de manera que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$, de otro modo se dice que $p, q$ son incompatibles y lo denotamos por $p \perp q$. Un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena si para todo $p, q \in \mathcal{A}$ se tiene que $p \perp q$. Decimos que $\mathbb{P}$ tiene la condición de la cadena contable (c.c.c) si toda anticadena $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es a lo más numerable. También, $\mathbb{P}$ es $\sigma$-centrado si existe familia de filtros $\langle \mathcal{F}_n : n \in \omega \rangle$ en $\mathbb{P}$ tal que $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$.

Si $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una colección de densos en $\mathbb{P}$, diremos que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{D}$-génerico si $\mathcal{F} \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. *El Axioma de Martin* respecto a un cardinal $\kappa$ es:

$\text{MA}_\kappa(\mathbb{P})$: Sea $\mathbb{P}$ un órden parcial con c.c.c y si $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathcal{D}$-génerico. MA es la sentencia que afirma que es válido para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, $\text{MA}_\kappa(\mathbb{P})$.

$\text{MA}^\kappa_{\sigma-\text{centrado}}(\mathbb{P})$: Sea $\mathbb{P}$ un órden parcial $\sigma$-centrado y si $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ filtro $\mathcal{D}-$génerico. $\text{MA}_{\sigma-\text{centrado}}$ es la sentencia que afirma que es válido para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, $\text{MA}^\kappa_{\sigma-\text{centrado}}(\mathbb{P})$. Similarmente, se define $\text{MA}^\kappa_{\text{contable}}(\mathbb{P})$ y $\text{MA}_{\text{contable}}$.

*La Hipótesis del Continuo* (CH) establece que no existen conjuntos $A$ para los cuales $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$. Otra forma de enunciar la Hipótesis del Continuo es con la afirmación $\mathfrak{c} = \omega_1$. Es bien conocido que CH es tanto consistente como independiente de la usual axiomática para la teoría de conjuntos, la axiomática de Zermelo-Fraenkel con Elección (ZFC).

Capítulo 1

# Nociones Elementales

## 1. Familias Casi Ajenas

Sea $\kappa$ un cardinal infinito. Si $x, y \subseteq \kappa$, decimos que $x$ y $y$ son *casi ajenos* si $|x \cap y| < \kappa$. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es *casi ajena* si para todo $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $|x| = \kappa$ y para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene que $x$ y $y$ son casi ajenos. Una familia $\mathcal{A}$ es MAD si esta es una familia casi ajena y maximal en el sentido $\subseteq$.

Sea $\kappa$ un cardinal infinito. Puesto que $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ existe $g : \kappa \to \kappa \times \kappa$ biyección. Luego, Sea $\alpha \in \kappa$ y considere $A_\alpha = \{\alpha\} \times \kappa$. Note que si $\alpha \neq \beta$, entonces $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$. Luego, pongamos $\mathcal{A} = \{g^{-1}[A_\alpha] : \alpha < \kappa\}$. Así $\mathcal{A}$ es una familia disjunta de cardinalidad $\kappa$.

Para cada $r \in \mathbb{R}$ escojasé una sucesión de racionales $\langle q_n^r : n \in \omega \rangle$ que converge a $r$. Sean $f : \omega \to \mathbb{Q}$ una función biyectiva y

$$A_r = \{k \in \omega : (\exists n \in \omega)(f(k) = q_n^r)\}$$

para cada $r \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Sea $\kappa \geq \omega$ un cardinal regular, entonces:

1. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es una familia casi ajena y $|\mathcal{A}| = \kappa$, entonces $\mathcal{A}$ no es maximal.
2. Existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ de cardinalidad $\geq \kappa^+$.

Demostración. 1) Sea $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \kappa\}$ familia casi ajena. Sea $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} A_\eta$. Note que $B_\xi \neq \emptyset$ ya que $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi \cap A_\eta)$, $|A_\xi| = \kappa$ y $|\bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi \cap A_\eta)| < \kappa$, por la regularidad de $\kappa$. Escojasé $\beta_\xi \in B_\xi$ y pongamos $D = \{\beta_\xi : \xi < \kappa\}$. Luego $D$ tiene cardinalidad $\kappa$ y $D \cap A_\eta \subseteq \{\beta_\xi : \xi \leq \eta\}$, así que $D$ y $A_\eta$ son casi ajenos para cada $\eta$.

2) Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ familia casi disjunta de cardinalidad $\kappa$, por 1) dicha familia no es maximal, así extendamos a una familia maximal usando el Lema de Zorn y obtenemos que $|\mathcal{B}| > \kappa$.

❑

(MA) Sea $\kappa < \mathfrak{c}$ un cardinal. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es casi ajena y es tal que $|\mathcal{A}| < \kappa$, entonces $\mathcal{A}$ no es maximal.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena de cardinalidad $\kappa < \mathfrak{c}$ y consideremos el siguiente órden parcial:

$$\mathbb{P} = \{\langle s, F\rangle : s \in [\omega]^{\omega}, F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$$

donde $\langle s_1, F_1\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle s_2, F_2\rangle$ si y sólo si $s_1 \supseteq s_2$, $F_1 \supseteq F_2$ y $x \cap s_1 \subseteq s_2$ para todo $x \in F_2$. Notemos que $\mathbb{P}$ es c.c.c puesto que si $\{\langle s_\alpha, F_\alpha\rangle : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}$ fuese una anticadena, tendriamos que $|[\omega]^{<\omega}| = \omega_1$ ya que si $\alpha \neq \beta$ entonces $s_\alpha \neq s_\beta$.

Ahora, para cada $A \in \mathcal{A}$ pongamos $D_A = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P} : A \in F\}$ y veamos que es denso: Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}$ y note que $\langle s, F \cup \{A\}\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle s, F\rangle$ y $\langle s, F \cup \{A\}\rangle \in D_A$, luego $D_A$ es denso.

Dado $n \in \omega$, consideremos $D_n = \{\langle s, F\rangle : s \nsubseteq n\}$ y veamos que es denso: Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}$, como $\mathcal{A}$ es casi ajena se tiene que $\omega \setminus \bigcup F$ es infinito y así elija $m \in \omega \setminus \bigcup F$ de modo que $m > n$. Luego $\langle s \cup \{m\}, F\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle s, F\rangle$ y $\langle s \cup \{m\}, F\rangle \in D_n$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$ y note que $|\mathcal{D}| = \kappa < \mathfrak{c}$, entonces existe $G$ filtro $\mathcal{D}$-génerico. Pongamos $X = \bigcup\{s \in [\omega]^{<\omega} : (\exists F \in [\mathcal{A}]^{<\omega})(\langle s, F\rangle \in G)\}$ y veamos que $\{X\} \cup \mathcal{A}$ es familia casi disjunta que extiende a $\mathcal{A}$. Dado $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $D_A \cap G \neq \emptyset$, entonces existe $\langle s, F\rangle$ con $A \in F$ y $\langle s, F\rangle \in G$. Basta probar que $X \cap A \subseteq s$: Sea $x \in X \cap A$ entonces existe $\langle s', F'\rangle \in G$ tal que $x \in s'$ y como $G$ es filtro existe $\langle s'', F''\rangle \in G$ tal que $\langle s'', F''\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle s, F\rangle$ y $\langle s'', F''\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle s', F'\rangle$ y por tal razón $x \in s' \subseteq s''$ y $A \cap s'' \subseteq s$, de aquí que $x \in s$.

Finalmente, $X$ es infinito puesto que $G \cap D_n \neq \emptyset$ lo que indica que $X \nsubseteq n$ para todo $n \in \omega$.

❏

## 2. Árboles

La teoría de árboles forma una parte rica e interesante de la combinatoria infinita, teniendo aplicaciones en otras áreas de la teoría de conjuntos así como en otras áreas de las matemáticas (en particular, topología general). En la presente sección abordamos los conceptos básicos de la teoría de árboles y tratamos de familiarizarnos un poco con la construcción de objetos através de estos.

Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $\langle T, \leq_T\rangle$ tal que para todo $x \in T$, el conjunto $\check{x} = \{y \in T : y <_T x\}$ es bien ordenado por $\leq_T$.

Sea $\mathbb{T} = (\omega^{<\omega}, \leq)$. Dados $s, t \in \omega^{<\omega}$, decimos que $s \leq t$ si y sólo si $s \supseteq t$. Entonces, $\mathbb{T}$ es un árbol.

Recordemos que para cualquier conjunto $(X, <)$ que es bien ordenado, existe un único número ordinal $\alpha$ tal que $(X, <)$ es isomorfo a $\alpha$ con el órden usual. Dicho $\alpha$ es llamado el tipo de órden de $(X, <)$.

El tipo de órden del conjunto $\check{x}$ bajo $<_T$ es llamada la altura de $x$ en $\mathbb{T}$, denotada por $ht_{\mathbb{T}}(x)$.

Si $\alpha$ es un ordinal, el $\alpha$-ésimo nivel de $\mathbb{T}$, es el conjunto

$$T_\alpha = \{x \in T : ht_{\mathbb{T}}(x) = \alpha\}.$$

Denotemos por $T_{|\alpha}$ el conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ y por $\mathbb{T}_{|\alpha}$ a la estructura $\mathbb{T}$ restringida a este conjunto.

Sea $\mathbb{T}$ un árbol. Un subconjunto linealmente ordenado $b$ de $T$ con la propiedad de que siempre que $x \in b$ y $y <_T x$, se tiene que $y \in b$, es llamado una rama de $\mathbb{T}$.

Sea $\theta$ un ordinal, $\lambda$ un cardinal. Un árbol $\mathbb{T}$ se dice que es un $(\theta, \lambda)$-árbol si y sólo si:

- $(\forall \alpha < \theta)(T_\alpha \neq \emptyset)$.
- $T_\theta = \emptyset$.
- $(\forall \alpha < \theta)(|T_\alpha| < \lambda$.

En otras palabras, un $(\theta, \lambda)$-árbol es un árbol de *altura* $\theta$ y *anchura* menos que $\lambda$.

Un árbol $\mathbb{T}$ se dice que tiene límites únicos si siempre que $\alpha$ es un ordinal límite y $x, y \in T_\alpha$, si $\check{x} = \check{y}$, entonces $x = y$.

Un $(\theta, \lambda)$-árbol $\mathbb{T}$ se dice que es *normal* si $\mathbb{T}$ tiene límites únicos y cada una de las siguientes condiciones se satisfacen

- $|T_0| = 1$.
- Si $\alpha, \alpha + 1 < \theta$ y $x \in T_\alpha$, entonces existen $y_1, y_2 \in T_{\alpha+1}$ de modo que $x <_T y_1$ y $x <_T y_2$.
- Si $\alpha < \beta < \theta$ y $x \in T_\alpha$, entonces existe $y \in T_\beta$ tal que $x <_T y$.

Sea $\kappa$ un cardinal infinito. Un $\kappa$-árbol es un $(\kappa, \kappa)$-árbol normal. Es fácil ver que todo $\omega$-árbol tiene una $\omega$-rama, pero no podemos aplicar el mismo razonamiento para deducir que cualquier $\omega_1$-árbol tiene una $\omega_1$-rama. De hecho, una construcción de tales árboles fue dada por N. Aronszajn y estos con conocidos como *árboles Aronszajn*.

[Aronszajn] Existe un árbol Aronszajn

Demostración. La idea es hacer que los elementos de $T_\alpha$ sean $\alpha$-sucesiones estríctamente creciente de números racionales y el órden del árbol estará dado por $x <_T y$ si y sólo si $x$ es un segmento inicial de $y$, i.e ($x \subseteq y$). Note que si $b$ fuese una $\omega_1$-rama, entonces $\bigcup b$ debería ser una $\omega_1$-sucesión estríctamente creciente de números racionales, lo cual es imposible. Ahora, veamos la construcción por recursión de tal árbol asegurandonos que en cada paso $\alpha < \omega_1$, $\mathbb{T}_{|\alpha}$ satisfaga lo siguiente:

$P(\alpha)$ : $\mathbb{T}_{|\alpha}$ es un $(\alpha, \omega_1)$-árbol normal y para cada $\beta < \gamma < \alpha$ y cada $x \in T_\beta$ y cada racional $q > \sup(x)$, existe $y \in T_\gamma$ tal que $x \subseteq y$ y $q \geq \sup(y)$.

Para comenzar la construcción, pongamos

$$T_0 = \{\emptyset\}$$

Si $\mathbb{T}_{|(\alpha+1)}$ está definido y satisface $P(\alpha + 1)$), definamos

$$T_{\alpha+1} = \{x \frown \langle q \rangle : x \in T_\alpha \wedge q \in \mathbb{Q} \wedge q > \sup(x)\}.$$

Claramente, $\mathbb{T}_{|(\alpha+2)}$ satisface $P(\alpha + 2)$.

Finalmente, supongamos que $\alpha$ es un ordinal límite y $\mathbb{T}_{|\alpha}$ ha sido definido y satisface $P(\alpha)$.

*Afirmación:* Para cada $x \in T_{|\alpha}$ y cada racional $q > \sup(x)$, existe una $\alpha$-rama $b$ de $\mathbb{T}_{|\alpha}$ tal que $x \in b$ y $\sup(\bigcup b) \leq q$:

Dado $x \in T_{|\alpha}$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q > \sup(x)$ escójase una $\omega$-sucesión estríctamente creciente de ordinales $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ cofinal en $\alpha$ tal que $x \in T_{|\alpha_0}$. Como $P(\alpha)$ es válido, podemos escoger recursivamente elementos $y_n \in T_{|\alpha_n}$ tal que $x \subset y_n \subset y_{n+1}$ para todo $n \in \omega$ y $\sup(y_n) < q$. Pongamos

$$b = \{y \in T_{|\alpha} : (\exists n \in \omega)(y \subset y_n)\}.$$

Claramente, $b$ es una $\alpha$-rama de $\mathbb{T}$ el cual contiene a $x$ y es tal que $\sup(\bigcup q) \leq q$. Ahora sí, estamos preparados para construir el nivel $T_\alpha$ como sigue:

Para cada $x \in T_{|\alpha}$ y cada racional $q > \sup(x)$, escójase una $\alpha$-rama $b(x, q)$ de $\mathbb{T}_{|\alpha}$ como en la afirmación anterior y considere

$$T_\alpha = \{\bigcup b(x, q) : x \in T_{|\alpha} \wedge q \in \mathbb{Q} \wedge q > \sup(x)\}$$

Así, $\mathbb{T}_{\alpha+1}$ satisface $P(\alpha + 1)$. En particular, $T_\alpha$ es numerable ya que tanto $\mathbb{Q}$ y $T_{|\alpha}$ lo son.

❏

## 3. Filtros e Ideales sobre $\omega$

Sea $S$ un conjunto no vacío. Un *filtro* sobre $X$ es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ que satisface las siguientes condiciones:

- $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset\mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Sea $X$ un conjunto no vacío y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces la colección $\mathcal{F} = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ es un filtro sobre $X$.

Distinguimos entre dos tipos de filtros:

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $S$, entonces decimos que $\mathcal{F}$ es *libre* si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ y es *fijo* de otro modo.

Considere $\mathcal{F} = \{A \subseteq \omega : |\omega \setminus A| < \omega\}$. Dicha colección es un filtro libre: Dado $n \in \omega$ consideresé $V_n = \omega \setminus \{n\}$ y note que $V_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \omega$, luego $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} V_n = \emptyset$. Dicha colección $\mathcal{F}$ es conocida como el filtro de *Fréchet*.

Veáse ejemplo 3 y note que dicho filtro es fijo.

Dado un conjunto $X$ no vacío y una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, recordemos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita si dada cualesquier subcolección finita $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. La siguiente proposición nos indica cuando una familia se puede extender a un filtro.

Sea $\mathcal{G}$ una colección de subconjuntos de $X$ tal que tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre $X$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos $A$ de $X$ con la propiedad que existe un subconjunto finito $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de $\mathcal{G}$ tal que

$$\bigcap_{i\leq n} X_i \subseteq A.$$

Claramente, $X$ está en $\mathcal{F}$ y $\emptyset$ no pertenece a $\mathcal{F}$ puesto que $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Dado $A, B \in \mathcal{F}$, entonces existen $A_i \in \mathcal{G}$ y $B_j \in \mathcal{G}$ tales que

$$\bigcap_{i\leq n} A_i \subseteq A$$

y

$$\bigcap_{j\leq m} B_j \subseteq B$$

consecuentemente $\bigcap_{i\leq n} A_i \cap \bigcap_{j\leq m} B_j \subseteq A \cap B$ y así $A \cap B \in \mathcal{F}$ y obviamente dicha colección es cerrada bajo superconjuntos, por lo tanto $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $X$.

❑

Hay filtros que son muy especiales, algunos tienen la propiedad de que dado cualquier subconjunto del conjunto base, este elige si tal elemento está en el filtro o bien está su complemento. Este tipo de filtros es el más importante por aplicaciones en diversas áreas, a estos filtros son los que conocemos como *ultrafiltros*.

Un filtro $\mathcal{U}$ sobre $X$ es un ultrafiltro si para cada $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

La siguiente proposición es una caracterización de ultrafiltros.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre $X$.
2. Si $A, B \subseteq X$ son tal que $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es maximal con respecto a $(\subseteq)$.

Demostración. 1)→2) Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $X$. Sean $A, B \subseteq X$ tal que $A \cup B \in \mathcal{F}$ entonces $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)\mathcal{F}$, luego $X \setminus A\mathcal{F}$ o $X \setminus B\mathcal{F}$ de aquí que $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

2)→1) Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X$ y $A \subseteq X$, entonces $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{F}$, luego $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre $X$.

2)→3) Suponga que $\mathcal{F}$ no es maximal, entonces existe filtro $\mathcal{F}'$ que contiene propiamente a $\mathcal{F}$, escójase $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es filtro sobre $X$ y $X = A \cup (X \setminus A)$ se tiene que $X \setminus A \in \mathcal{F}$, pero $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, así que $X \setminus A \in \mathcal{F}'$, lo cual es contradictorio.

3)→1) Suponga que existe $A \subseteq X$ tal que $A\mathcal{F}$ ni $X \setminus A\mathcal{F}$. Ahora, note que $\mathcal{F} \cup \{A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, puesto que si existierán $A_0, ..., A_n \in \mathcal{F}$ de modo que $\bigcap_{i\leq n} A_i \cap A = \emptyset$, entonces $\bigcap_{i\leq n} A_i \subseteq X \setminus A$, lo cual es contradictorio. Por lema existe filtro $\mathcal{F}'$ que extiende $\mathcal{F} \cup \{A\}$, por lo tanto $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

❑

Sea $n \in \omega$. Considerese la colección $\{A \subseteq \omega : n \in A\}$, dicha colección es un ultrafiltro sobre $\omega$.

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltros sobre $\omega$. Considerese la colección

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n \in \omega : \{m \in \omega : (n, m) \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}$$

tal colección es un ultrafiltro sobre $\omega \times \omega$.

El siguiente teorema establece que cualquier filtro puede extenderse a un ultrafiltro. La demostración usa una equivalencia del Axioma de Elección, y de hecho el teorema no puede ser probado sólo en Zermelo-Fraenkel (ZF). Recordemos el Teorema de Kuratowski-Zorn, aunque no será demostrado. Para una demostración consúltese [**7**].

[Kuratowski-Zorn] Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena $C$ tiene una cota superior. Entonces $\mathbb{P}$ tiene un elemento maximal.

Necesitaremos el siguiente resultado que hará posible aplicar el Teorema 3.

Si $C$ es un conjunto de filtros sobre $S$ y si para cada $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, entonces la unión de $C$ también es un filtro sobre $S$. Demostración. Sea $C$ un conjunto de filtros sobre $S$ tal que si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$:

1. $\emptyset \bigcup C$ pues si $\emptyset \in \bigcup C$ implica que $\emptyset \in \mathcal{F}$, para algún filtro $\mathcal{F}$ sobre $S$ en $C$, lo cual es contradictorio. $S \in \bigcup C$ pues $S \in \mathcal{F}$ para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre $S$ en $C$.
2. Sean $X, Y \in \bigcup C$, entonces $X \in \mathcal{F}_1$ y $Y \in \mathcal{F}_2$ para algunos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \bigcup C$ como $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$ sin pérdida de generalidad $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Tenemos que $X, Y \in \mathcal{F}_2$, luego $X \cap Y \in \mathcal{F}_2$. Así, $X \cap Y \in \bigcup C$.
3. Sean $X \in \bigcup C$ y $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces $X \in \mathcal{F}$ para algún $\mathcal{F}$ filtro, luego $Y \in \mathcal{F}$, de aquí que $Y \in \bigcup C$.

❑

(Tarski) Todo filtro sobre $S$ puede extenderse a un ultrafiltro sobre $S$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}_0$ un filtro sobre $S$ y $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los filtros $\mathcal{F}$ sobre $S$ tales que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \subseteq)$. Si $C$ es una cadena en $\mathbb{P}$ entonces por lema anterior, $C$ tiene una cota superior en $\mathbb{P}$. Aplicando el Teorema de Kuratowski-Zorn, existe $\mathcal{U}$ filtro maximal en $\mathbb{P}$ y por lema 3 $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $S$ tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U}$. ❑

Antes de enunciar el siguiente teorema notemos que el filtro de Fréchet (ver ejemplo 3) no es un ultrafiltro sobre $\omega$, pues $\omega = \{2n : n \in \omega\} \cup \{2n + 1 : n \in \omega\}$ y por teorema 3 se sigue que dicho filtro no es ultrafiltro. Sin embargo, para garantizar la existencia de un ultrafiltro libre sobre $\omega$ basta extender el filtro de Fréchet como veremos a continuación.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\omega$. Entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre si y sólo si este contiene al filtro de Fréchet.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\omega$. Sea $A \subset \omega$ tal que $\omega \setminus A$ es finito y note que $\omega = \omega \setminus A \cup A$, como $\omega \setminus A$ es finito y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre se tiene que $\omega \setminus A\mathcal{U}$ así que $A \in \mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro que extiene el filtro de Fréchet. Sea $A \in \mathcal{U}$ y considere $\{a_k : k \in \omega\}$ enumeración de A. Ahora, para todo $n \in \omega$ se tiene que $A_n = A \setminus \bigcup\{a_i : i \leq n\} \in \mathcal{U}$ y $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$, por lo tanto $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. ❑

Notemos que si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto $X$, entonces existen al menos dos ultrafiltros que lo extienden: Por lemma, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre $X$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, luego sea $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. Ahora, sea $x_F \in F \setminus A$ y pongamos $B = \{x_F : F \in \mathcal{F}\}$. Luego, $\mathcal{F} \cup \{B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, así existe $\mathcal{U}'$ ultrafiltro sobre $X$ que extiende $\mathcal{F}$ y $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$.

La noción dual de filtro es la de ideal, definida de la siguiente manera.

Sea $X$ un conjunto no vacío. Un ideal sobre $X$ es una colección $\mathcal{I}$ de subconjuntos de $X$ que satisface las siguientes condiciones:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.
- Si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}$, entonces $A \in \mathcal{I}$.

Note que si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $X$, entonces la colección $\mathcal{F}^* = \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal sobre $X$, conocido como el ideal dual a $\mathcal{F}$.

Denotemos por FIN la colección de todos los subconjuntos finitos de $\omega$. Dicha colección es un ideal sobre $\omega$ y de hecho su filtro dual $\mathcal{I}^*$ coincide con el filtro de Fréchet.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $X$. A partir de este momento decimos que $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $\omega$ si $X$ es un conjunto numerable y este contiene todos los subconjuntos finitos de $X$, i.e, FIN $\subseteq \mathcal{I}$. En general, podemos asumir que tal conjunto $X$ es $\omega$, el primer ordinal numerable.

*Densidad*. Sea $A$ un conjunto de números naturales. Para cada $n \in \omega$, sea $A(n) = |A \cap \{0, \ldots, n-1\}|$, el número de elementos de $A$ que son más pequeños que $n$. Si el límite

$$d(A) = \text{lím}_{n\to\infty} \tfrac{A(n)}{n}$$

existe, es llamado la *densidad* de $A$. Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares tiene densidad $1/2$. Todo conjunto finito tiene densidad 0, aunque existen conjuntos infinitos cuya densidad también es 0. (Como el conjunto de todas las potencias de 2, $\{2^n : n \in \omega\}$). Si $A \subseteq B \subseteq \omega$, entonces $A(n) \leq B(n)$ para todo $n$ y si tanto $A$ y $B$ tienen densidad entonces $d(A) \leq d(B)$. En particular, si $d(B) = 0$, entonces $d(A) = 0$. Asimismo, para cada $n$, $(A \cup B)(n) \leq A(n) + B(n)$ y si $A$ y $B$ son disjuntos entonces $(A \cup B)(n) = A(n) + B(n)$. Consecuentemente $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$ (siempre y cuando la densidad exista) y $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$ si $A$ y $B$ son disjuntos. Si $d(A)$ y $d(B)$ son cero, entonces $d(A \cup B) = 0$. *El ideal de los conjuntos con densidad* 0, es

$$\mathcal{I}_d = \{A \subseteq \omega : d(A) = 0\}.$$

Tenemos $\emptyset \in \mathcal{I}_d$ y que $\omega \mathcal{I}_d$, porque $d(\omega) = 1$. Si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}_d$ entonces $A \in \mathcal{I}_d$ y si tanto $A \in \mathcal{I}_d$ como $B \in \mathcal{I}_d$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}_d$. De aquí que $\mathcal{I}_d$ es un ideal. Este ideal contiene todos los conjuntos finitos, pero también algunos conjuntos infinitos como $\{2^n : n \in \omega\}$.

Otro ideal interesante sobre el conjunto de los números naturales que será utilizado posteriormente es el siguiente.

Sea $g : \omega \to [0, \infty)$ tal que:

- $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$.
- $g$ es estríctamente decreciente.
- $\sum_{n\in\omega} g(n) = \infty$.

Ahora, considere la siguiente colección $\mathcal{I}_g = \{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} g(n) < \infty\}$. Dicha colección es un ideal sobre el conjunto de los números naturales. Veamos que $\mathcal{I}_g$ tiene la propiedad de que si $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}_g$, entonces existe $A \in \mathcal{I}_g$ de manera que $A_k \subseteq^* A$ para todo $k \in \omega$ puesto que para todo $k \in \omega$ existe $n_k$ de tal modo que $\sum_{n\in A_k \setminus n_k} g(n) \leq \frac{1}{2^k}$ así haciendo $A = \bigcup_{k\in\omega} A_k \setminus n_k$ se tiene que $\sum_{n\in A} g(n) \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n}$ y $A_k \subseteq^* A$ para todo $k \in \omega$.

A los ideales que cumplen dicha propiedad se les conoce como *p-ideales*. Notemos que si $A \in [\omega]^\omega$, entonces existe $B \subseteq A$ infinito tal que $B \in \mathcal{I}_g$, para ver esto considere enumeración de $A = \{a_k : k \in \omega\}$ y pongamos $b_0 = \text{mín}\{m \in A : g(m) \leq 1\}$ y $b_{n+1} = \text{mín}\{m \in A : g(m) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\} \setminus \{b_i : i \leq n\}$ para $n \geq 0$.

La siguiente definición es crucial para consideraciones futuras de dicho trabajo.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\omega$. Entonces decimos que $\mathcal{I}$ es un ideal alto, si para todo $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $B \in \mathcal{I}$.

Sea $g : \omega \to [0, \infty)$ función como en ejemplo 3 . Ahora, $I_g$ es ideal alto si y sólo si $\text{lím}_{n\to\infty} g(n) = 0$: Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $\mathcal{I}_g$ es alto, entonces existe $A \subseteq \omega$ tal que $\sum_{n\in A} g(n) < \infty$ así podemos escoger $N$ suficientemente grande de modo que $\sum_{n\in A\setminus N} g(n) < \epsilon$. Luego, pongamos $N' = \text{mín}\{n \in A : n \geq N\}$ y note que si $n \geq N'$, entonces $g(n) < \epsilon$ pues $g$ es decreciente.

Ahora, supongamos que $\text{lím}_{n\to\infty} g(n) = 0$. Sea $A \subseteq \omega$ y asuma que $A\mathcal{I}_g$, en particular, $A$ es infinito. Sea

$$b_0 = \text{mín}\{n \in A : g(n) \leq 1\}$$

$$b_{n+1} = \text{mín}\{n \in A : g(n) \leq \frac{1}{2^n}\} \setminus \{b_i : i \leq n\}$$

Luego, $B = \{b_n : n \in \omega\} \subseteq A$ es infinito y $B \in \mathcal{I}_g$.

Antes de pasar a la siguiente sección, no olvidemos el ideal $\mathcal{ED}$ *(Eventually Different Ideal)* sobre $\omega \times \omega$.

Consideremos la siguiente la colección de subconjuntos de $\omega \times \omega$:

$$\mathcal{ED} = \{A \subseteq \omega \times \omega : (\exists m, n \in \omega)(\forall k \geq n)(|(A)_k| \leq m)\}$$

donde $(A)_k = \{n \in \omega : (k, n) \in A\}$. Dicha colección es un ideal sobre $\omega \times \omega$. Ademas dicho ideal es alto: Sea $A \subseteq \omega \times \omega$ infinito y sin pérdida de generalidad asumamos que $\exists^\infty k \in \omega$ de modo que $(A)_k \neq \emptyset$. Sea $b_0 = \text{mín}\{l \in \omega : A_l \neq \emptyset\}$. Escójase $\langle b_0, a_0\rangle$ donde $a_0 = \text{mín}\{l \in \omega : \langle b_0, l\rangle \in A\}$. Suponga que se ha definido $\langle b_n, a_n\rangle$. Así entonces, sea $b_{n+1} = \text{mín}\{l \in \omega : A_l \neq \emptyset \wedge l > b_n\}$ y pongamos $a_{n+1} = \text{mín}\{l \in \omega : \langle b_{n+1}, l\rangle \in A\}$. Luego, $\{\langle b_n, a_n\rangle : n \in \omega\}$ satisface lo requerido.

Consideremos la siguiente la colección de subconjuntos de $\omega \times \omega$:

$$\text{FIN} \times \text{FIN} = \{A \subseteq \omega : \{n \in \omega : \{m \in \omega : \langle n, m\rangle \in A\}\text{FIN}\} \in \text{FIN}\}.$$

Tal colección es un ideal sobre $\omega \times \omega$. Dicho ideal es alto: Sea $A \subseteq \omega \times \omega$ infinito de modo que $A\text{FIN} \times \text{FIN}$, entonces $\exists^\infty k \in \omega$ de modo que $(A)_k$ es infinito. Sea $j = \text{mín}\{l \in \omega : |(A)_l| = \omega\}$. Luego, $(A)_j$ satisface lo requerido.

## 4. Clases especiales de ultrafiltros sobre $\omega$

Resumimos en esta breve sección algunas clases de ultrafiltros sobre $\omega$ que serán usados en el estudio de $\mathcal{I}$-ultrafiltros , simplemente por la preocupación de saber cuál es la relación entre estos.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ libre sobre $\omega$ se dice que es *p-punto* si para toda partición $\{P_n : n \in \omega\}$ de $\omega$ existe $k \in \omega$ de modo que $P_k \in \mathcal{U}$ o bien existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap P_n|$ para todo $n \in \omega$. Una descripción combinatoria equivalente es la siguiente: $\mathcal{U}$ es $p$-punto si y sólo si para toda colección $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$.

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $\omega$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un p-punto.
2. Para cada partición $\{Y_n : n \in \omega\}$ de $\omega$, se tiene que existe $n \in \omega$ tal que $Y_n \in \mathcal{F}$ o existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $X \cap Y_n$ es finito para $n \in \omega$.

Demostración. (1)$\rightarrow$(2) Sea $\{Y_n : n \in \omega\}$ una partición de $\omega$. Supongamos que $Y_n\mathcal{F}$ para $n \in \omega$. Sea $X_n = \bigcup_{i \leq n} Y_i$. Notemos que $X_n\mathcal{F}$ y además obtenemos una sucesión de la forma $X_n \subseteq X_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, entonces $\omega \setminus X_n \in \mathcal{F}$ y además se tiene que $(\omega \setminus X_n) \supseteq (\omega \setminus X_{n+1})$ para todo $n \in \omega$. Así, por hipótesis, existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $X \subseteq^* (\omega \setminus X_n)$ para cada $n \in \omega$, pero $X \setminus (\omega \setminus X_n) = X \cap X_n$ para cada $n \in \omega$. Más aún,

$$
\begin{aligned}
X \cap X_n &= X \cap (Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n).\\
X \cap X_n &= (X \cap Y_1) \cup (X \cap Y_2) \cup \ldots \cup (X \cap Y_n),
\end{aligned}
$$

de aquí que $X \cap Y_n$ es finito para cada $n \in \omega$.

(2)$\rightarrow$(1) Supongamos que $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $X_n \supseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Sea $Y_0 = \omega \setminus X_{0,}$ y en general $Y_n = X_{n-1} \setminus X_n$. Es claro que $\{Y_n : n \in \omega\}$ es una partición de $\omega$ y, por hipótesis, existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $X \cap Y_n$ es finito para todo $n \in \omega$. Sabemos que $X \cap \bigcup_{i \leq n} Y_i$ es finito. Sin embargo, $X \cap \bigcup_{i \leq n} Y_i = X \setminus (\omega \setminus \bigcup_{i \leq n} Y_i) = X \setminus X_n$, dado que la sucesión $\{X_n : n \in \omega\}$ es decreciente. Por lo tanto, $X \setminus X_n$ es finito para cada $n \in \omega$. $\square$

Fue un problema abierto por muchos años saber si los $p$-puntos en $\omega^*$ podrían ser construidos en ZFC. Finalmente, S. Shelah demostró que es consistente que los $p$-puntos en $\omega^*$ no existan.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es *selectivo* si para toda partición $\{P_n : n \in \omega\}$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. También tenemos la siguiente caracterización de ultrafiltros selectivos: $\mathcal{U}$ es ultrafiltro selectivo si y sólo si para toda $f \in \omega^\omega$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f_{|A}$ es uno a uno o bien es constante.

(CH) Existe un ultrafiltro selectivo.

Demostración.

Enumeremos todas las particiones $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de $\omega$ y construyamos por recursión sobre $\omega_1$ bases de filtro $\mathcal{F}_\alpha$ como sigue:

1. $\mathcal{F}_0$ es el filtro de Fréchet.
2. $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ siempre que $\alpha < \beta$.
3. Para toda $\alpha < \omega_1$ existe $k \in \omega$ tal que $P_k^\alpha \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ o bien existe $A \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ tal que $|P_n^\alpha \cap A| \leq 1$.
4. $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{F}_\alpha$.
5. Para toda $\alpha < \omega_1$, se tiene que $|\mathcal{F}_\alpha| \leq \alpha \cdot \omega$.

Notemos que en 1) ya ha comenzado la recursión. Supongamos que se tiene definido $\mathcal{F}_\alpha$ y construyamos $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ como sigue:

- Caso A: Existe $A \in \mathcal{F}_\alpha$ y $k \in \omega$ de tal modo que $A \subseteq \bigcup_{i\leq k} P_i^\alpha$ Afirmación: Existe $m \in \{0,1,2,...,k\}$ de tal suerte que $\mathcal{F}_\alpha \cup \{P_m^\alpha\}$ es una familia centrada. Supongamos lo contrario, entonces existen $\{A_i : i \leq k\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ de tal modo que $|A_i \cap P_i^\alpha| < \omega$, luego $|A \cap \bigcap_{i\leq k} A_i| < \omega$, lo cual es contradictorio.
- Caso B: Para todo $A \in \mathcal{F}_\alpha$ se tiene que $\exists^\infty n \in \omega$ tal que $A \cap P_n^\alpha \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \omega\}$ (pues $\alpha < \omega_1$), consideremos $B_n = \bigcap_{i\leq n} A_i$ para $n \in \omega$ y construyamos el siguiente conjunto como sigue: Como $B_0 \in \mathcal{F}_\alpha$ se tiene que existe $k_0 \in \omega$ tal que $B_0 \cap P_{k_0}^\alpha \neq \emptyset$ y pongamos

$$b_0 = \text{mín}\, B_0 \cap P_{k_0}^\alpha$$

$$b_{n+1} = \text{mín}\, B_{n+1} \cap P_{k_{n+1}}^\alpha$$

donde $k_{n+1} = \text{mín}\{k \in \omega : (k > k_n) \wedge (P_k^\alpha \cap B_{n+1})\}$. Finalmente, pongamos $B = \{b_n : n \in \omega\}$ con lo cual obtenemos que $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{B\}$ es familia centrada y $|B \cap P_n^\alpha| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

Note que si $\gamma$ es límite no hay nada que hacer. Para concluir, pongamos $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$ y por construcción es centrada. Ahora, considere $\mathcal{U}$ cualquier ultrafiltro que extienda a $\mathcal{F}$, luego por teorema , $\mathcal{U}$ es libre y por lo tanto selectivo.

❑

Los ultrafiltros selectivos no necesariamente existen pues en el artículo *Some points of $\beta\omega$* de K. Kunen publicado en 1976, construye un modelo de ZFC en el cual no existen ultrafiltros selectivos, el cual será estudiado en el capítulo 4. De cualquier modo, si asumimos la Hipótesis del Continuo tales ultrafiltros son fácilmente construidos ya que la construcción en teorema 4 fue hecha para reflejar esto.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ se dice que es un *q-punto* si para toda partición $\{P_n : n \in \omega\}$ en piezas finitas existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $|A \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Una caracterización de $q$-punto es: Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es $q$-punto si para toda función $f \in \omega^\omega$ finito a uno, existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $f_{|A}$ es uno a uno.

Notemos que todo ultrafiltro selectivo es un $q$-punto. Sin embargo, no todo $q$-punto es selectivo.

Sea $\mathcal{U}$ un filtro sobre $\omega$. Decimos que $\mathcal{U}$ es *rápido* si para cada función $f \in \omega^\omega$ existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $|X \cap f(n)| \leq n$ para todo $n \in \omega$.

Observemos que si $\mathcal{F}$ es $q$-punto entonces $\mathcal{F}$ es rápido: Sea $f \in \omega^\omega$ estríctamente creciente y considerese $\mathcal{R} = \{[0, f(0))\} \cup \{[f(n), f(n+1)) : n \in \omega\}$ (sin pérdida de generalidad $f(0) > 0$). Note que $\mathcal{R}$ es partición de $\omega$ en conjuntos finitos, de aquí que existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que $|X \cap P| = 1$ para todo $P \in \mathcal{R}$, luego $X \setminus f(0) \in \mathcal{F}$ y $f \leq^* e_{(X \setminus f(0))}$, (donde $e_{(X \setminus f(0))}$ es la función de $\omega$ en sí mismo que enumera crecientemente los elementos de $X \setminus f(0)$). El nombre de filtros rápidos tiene su origen en la observación de que para cada $f : \omega \to \omega$ existe un $X \in \mathcal{F}$ que crece más rápido que $f$. En la sección 6 teorema 7 se hace esto explícito.

**Un ultrafiltro rápido no necesariamente es un $q$-punto.** Como antes mencionamos todos los $q$-puntos son ultrafiltros rápidos y también mencionamos que la hipótesis del continuo implica que los $q$-puntos existen, puesto que teorema 4 abarca este caso. La consistencia de que no existan ultrafiltros rápidos es debida a Arnold W. Miller. Por otro lado Bukovský y Copláková demostraron que no todo ultrafiltro rápido es un $q$-punto en el artículo nombrado así por obvias razones, *Rapid Ultrafiler need not be Q-point* el cual fue puede obetenerse más información cosultando: In Zdeněk Frolík (ed.) Proceedings of the 10th Winter School on Abstract Analysis. Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1982. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento No. 2. pp.[15]-20.

## 5. Acerca de $\mathcal{I}$-ultrafiltros

La definición de $\mathcal{I}$-ultrafiltro fue dada por James Baumgartner en su artículo *Ultrafiltros sobre* $\omega$ [**11**]. Sea $\mathcal{I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto $X$ tal que $\mathcal{I}$ contiene los singuletes y es cerrado bajo subconjuntos. Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\omega$, decimos que $\mathcal{U}$ es un *$\mathcal{I}$-ultrafiltro* si para toda función $F : \omega \to X$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $F[A] \in \mathcal{I}$.

Si solamente son consideradas las funciones $F : \omega \to X$ finito a uno, entonces nos referimos a los correspondientes ultrafiltros como *$\mathcal{I}$-ultrafiltros débiles* y si solamente consideramos las funciones $F : \omega \to X$ uno a uno, entonces nos referimos a tales ultrafiltros como *$\mathcal{I}$-ultrafiltros amigables*.

En el presente trabajo consideramos los $\mathcal{I}$-ultrafiltros cuando $X = \omega$ y asumimos que $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $\omega$ el cual contiene todos los subconjuntos finitos de $\omega$. Recordemos que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro fijo sobre $\omega$, entonces existe $n \in \omega$ de modo que $\mathcal{U} = \{A \subseteq \omega : n \in A\}$, así que si $f \in \omega^\omega$, entonces $f[\{n\}] \in \mathcal{I}$. A partir de este momento cualquier ultrafiltro sobre los naturales que consideremos asumimos que este contiene el filtro de Fréchet.

Si $\mathcal{I}$ no es un ideal alto, entonces los $\mathcal{I}$-ultrafiltros no existen.

Demostración. Supongamos $\mathcal{I}$ no es un ideal alto, pero que existe al menos un $\mathcal{I}$-ultrafiltro, digamos $\mathcal{U}$.

Como $\mathcal{I}$ no es un ideal alto, entonces existe $A \in [\omega]^\omega$ de modo que para todo $B \in \mathcal{P}(A) \cap [\omega]^\omega$ se tiene que $B\mathcal{I}$. Sea $e_A : \omega \to \omega$ la función que enumera crecientemente los elementos de $A$. Entonces, existe $C \in \mathcal{U}$ de modo que $e_A(C) \in \mathcal{I}$, pero $e_A(C) \subseteq A$, lo cual implica que $e_A(C)$ es finito, lo cual es contradictorio, pues $e_A$ es uno a uno y $C$ es infinito. ❑

Dado un espacio topológico $X$, recordemos que un subconjunto $A$ de $X$ es *disperso* si todo subespacio de $A$ tiene al menos un punto aislado. Para el siguiente teorema consideremos $X = 2^\omega$, si $\mathcal{I}$ consiste de todos los subconjuntos discretos de $2^\omega$, entonces nos referimos a un $\mathcal{I}$-ultrafiltro como un ultrafiltro discreto, similarmente cuando $\mathcal{I}$ es la familia todos los conjuntos dispersos de $2^\omega$.

Notemos que si $\mathcal{I}$ es la familia de todos los subconjuntos finitos de $\omega$, los $\mathcal{I}$-ultrafiltros son precisamente los ultrafiltros fijos: Puesto que si $\mathcal{U}$ es libre y $f : \omega \to \omega$ es finito a uno, entonces para todo $A \in \mathcal{U}$ se tiene que $f[A]$ es infinito. Antes del siguiente lema, dada $f \in \omega$ y $n \in \omega$ denotamos por $[f_{|n}]$ a la colección $\{g \in 2^\omega : g_{|n} = f_{|n}\}$.

(D. Booth) Si $\mathcal{I} = \{Y \subseteq 2^\omega : Y$ es finito o tiene tipo de órden $\omega$ o $\omega^*\}$, entonces los $\mathcal{I}$-ultrafiltros son exactamente los $p$-puntos.

Demostración.

Note que el tipo de órden de $Y$ es calculado con respecto a el órden lexicográfico. Recordemos quen un ultrafiltro es un $p$-punto si para toda colección $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un $p$-punto y $F : \omega \to 2^\omega$.

*Afirmación:* Existe $f : \omega \to 2$ tal que $F^{-1}([f_{|n}]) \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$.

Si $n = 0$, para $f \in 2^\omega$ se tiene que $f_{|0} = \emptyset$, luego $[f_{|0}] = 2^\omega$. Asuma que existe $f \in 2^\omega$ tal que para cada $i \leq n$ se tiene que $F^{-1}([f_{|i}]) \in \mathcal{U}$. Note que $F^{-1}([f_{|n}]) = F^{-1}([f_{|n} \frown (n, 0)]) \cup F^{-1}([f_{|n} \frown (n, 1)]) \in \mathcal{U}$, y por teorema 3, $F^{-1}([f_{|n} \frown (n, 0)]) \in \mathcal{U}$ o bien $F^{-1}([f_{|n} \frown (n, 1)]) \in \mathcal{U}$; sin pérdida de generalidad asuma que $F^{-1}([f_{|n} \frown (n, 0)]) \in \mathcal{U}$, así haciendo

$$g(k) = f(k)$$

si $k < n$, $g(n) = 0$ y $g(k) = 1$ si $k > n$ se tiene lo requerido.

Como $\mathcal{U}$ es $p$-punto, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq^* F^{-1}([f_{|n}])$ para todo $n \in \omega$. Afirmación: $f$ es el único punto límite de $F(A)$ es $f$. Si existiese otro punto límite, digamos $g$, considere $k = \text{mín}\{m \in$

$\omega : f(m) \neq g(m)\}$ y como $A \subseteq^* [f_k]$ se tiene que $F[A] \cap [g_{|k}]$ es finito, lo cual es contradictorio. Si $B = \{m \in A : F(m) < f\}$ y $C = \{m \in A : F(m) > f\}$, entonces $F(B) \in \mathcal{I}$, $F(C) \in \mathcal{I}$. Finalmente, como $A = B \cup C \cup F^{-1}[\{f\}]$ por teorema 3 $B, C$ o $F^{-1}[\{f\}] \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}$-ultrafiltro.

Ahora, supongamos que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}$-ultrafiltro y $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $A_{n+1} \supseteq A_n$ para todo $n \in \omega$ y que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$. Fijemos $f \in \omega^\omega$ y definasé $F : \omega \to 2$ tal que $F$ es uno a uno, y si $n \in \omega$ y $m$ es maximal con $n \in A_m$, entonces $F(n) \in [f_{|m}] \setminus [f_{|m+1}]$. Ahora, como $U$ es un $\mathcal{I}$-ultrafiltro existe $A \in \mathcal{U}$ de modo que $F[A] \in \mathcal{I}$, considere $A' = A \cap A_0 \in \mathcal{U}$ y note que $F[A'] \subseteq F[A]$, entonces $F[A']$ está en $\mathcal{I}$ y como $F$ es uno a uno se tiene que $F[A']$ tiene tipo de órden $\omega$ u $\omega^*$. Finalmente, $f$ es punto límite de $F[A']$, luego $A' \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$. ❑

Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre $\omega$. En la siguiente lista de condiciones sobre $\mathcal{U}$, se tiene que 1) $\to$ 2) $\to$ 3).

1. $\mathcal{U}$ es $p$-punto.
2. $\mathcal{U}$ es discreto.
3. $\mathcal{U}$ es disperso.

Demostración.

2) $\to$ 3). Sea $f : \omega \to 2^\omega$, ahora como $\mathcal{U}$ es discreto se tiene que existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $f[A]$ es discreto en $2^\omega$, luego si $B \subseteq f[A]$, se tiene que $B$ es discreto en $2^\omega$, luego $f[A]$ es disperso en $2^\omega$.

❑

Otra caracterización de ultrafiltros selectivos en términos de $\mathcal{I}$-ultrafiltros.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\mathcal{U}$ es selectivo.
2. $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{ED}$-ultrafiltro.
3. $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{ED}$-ultrafiltro débil.
4. $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{ED}$-ultrafiltro amigable.

Demostración. 1) $\to$ 2) Sea $F : \omega \to \omega \times \omega$ arbitraria y consideremos la partición $\{F^{-1}[\{n\} \times \omega] : n \in \omega\}$ de $\omega$. Como $\mathcal{U}$ es selectivo, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap F^{-1}[\{n\} \times \omega]| \leq 1$, luego $F[A] \in \mathcal{ED}$.

4) $\to$ 1) Sea $\{R_n : n \in \omega\}$ partición de $\omega$ en conjuntos infinitos. Defínase la siguiente función $F : \omega \to \omega \times \omega$ como sigue:

$$F(m) = \langle k, n\rangle \text{ si } m \text{ es el } k\text{-ésimo elemento de } R_n.$$

Note que $F$ es uno a uno y por hipótesis $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{ED}$-ultrafiltro amigable de aquí que existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $F[A] \in \mathcal{ED}$ y así que existen $V_1, V_2 \subseteq \omega \times \omega$ tal que $F[A] \subseteq V_1 \cup V_2$ donde $V_1 \subseteq [0, n_0] \times \omega$ para algún $n_0 \in \omega$ y existe $m \in \omega$ tal que $|V_2 \cap \{n\} \times \omega| \leq m$ para todo $n \in \omega$. Finalmente, como $U = F^{-1}[F[U]] \subseteq F^{-1}[V_1] \cup F^{-1}[V_2]$ y por teorema 3 se tiene que $F^{-1}[V_1] \in \mathcal{U}$ o bien $F^{-1}[V_2] \in \mathcal{U}$. Si $F^{-1}[V_1] \in \mathcal{U}$ obtenemos que existe $k \in \omega$ tal que $R_k \in \mathcal{U}$. Si $F^{-1}[V_2] \in \mathcal{U}$ tenemos que $|F^{-1}[V_2] \cap R_n| = m$ donde $m > 0$, y por teorema 3 se que existe $A' \subseteq F^{-1}[V_2]$ de manera que $|A' \cap R_n| = 1$ para todo $n \in \omega$.

❏

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es $p$-punto.
2. $\mathcal{U}$ es un FIN $\times$ FIN-ultrafiltro.
3. $\mathcal{U}$ es un FIN $\times$ FIN-ultrafiltro débil.
4. $\mathcal{U}$ es un FIN $\times$ FIN-ultrafiltro amigable

Demostración. 1) $\to$ 2) Sea $F : \omega \to \omega \times \omega$ y considere la partición $\{F^{-1}[\{n\} \times \omega] : n \in \omega\}$ de $\omega$. Como $\mathcal{U}$ es $p$-punto, existe $k \in \omega$ de modo que $F^{-1}[\{k\} \times \omega] \in \mathcal{U}$ o bien existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap F^{-1}[\{n\} \times \omega]| < \omega$ para todo $n \in \omega$. Si $F^{-1}[\{k\} \times \omega \in \mathcal{U}]$ entonces, $F[F^{-1}[\{k\} \times \omega]] \in \text{FIN} \times \text{FIN}$ y si $A$ es un elemento del ultrafiltro que satisface que $|A \cap F^{-1}[\{n\} \times \omega]| < \omega$ se tiene que $\{n \in \omega : \{m \in \omega : \langle n, m\rangle \in F[A]\}\text{FIN}\} = \emptyset \in \text{FIN}$.

4) $\to$ 1) Sea $\{R_n : n \in \omega\}$ partición de $\omega$. Defínase $F : \omega \to \omega \times \omega$ como sigue:

$$F(m) = \langle k, n\rangle \text{ si } m \text{ es el } k\text{-ésimo elemento de } R_n.$$

Notemos que $F$ es uno a uno y como $\mathcal{U}$ es un FIN $\times$ FIN-ultrafiltro amigable existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $F[A] \in \text{FIN} \times \text{FIN}$. Así que existen $V_1, V_2 \subseteq \omega \times \omega$ de manera que $F[A] \subseteq V_1 \cup V_2$ donde $V_1 \subseteq [0, n_0] \times \omega$ para algún $n_0 \in \omega$ y $|V_2 \cap \{n\} \times \omega| < \omega$ para todo $n \in \omega$. Si $F^{-1}[V_1] \in \mathcal{U}$ se tiene que existe $k \in \omega$ de modo que $R_k \in \mathcal{U}$ para algún $k \leq n_0$. Si $F^{-1}[V_2] \in \mathcal{U}$ se tiene que $|F^{-1}[V_2] \cap R_n| < \omega$ para todo $n \in \omega$.

❏

Denotemos por $\mathbf{R}$ el sistema de todas las particiones $\mathcal{R}$ de números naturales en piezas finitas. Dada una partición $\mathcal{R}$ de $\omega$ en piezas finitas, i.e, $\mathcal{R} \in \mathbf{R}$, consideremos la colección $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq \omega : (\exists k \in \omega)(\forall R \in \mathcal{R})(|R \cap X| \leq k)\}$. Note que dicha colección es un ideal sobre $\omega$ y además es alto:

Enumeremos la partición $\mathcal{R}$ como $\{R_n : n \in \omega\}$ y sea $A \in [\omega]^\omega \setminus \mathcal{I}_\mathcal{R}$ con lo que se tiene que $\exists^\infty n \in \omega$ de manera que $A \cap R_n \neq \emptyset$. Enumeremos $\{n \in \omega : R_n \cap A \neq \emptyset\}$ como $\{n_j : j \in \omega\}$. Finalmente, dado $j \in \omega$, sea $b_j = \text{mín}\, R_{n_j} \cap A$ y pongamos $B = \{b_j : j \in \omega\}$. Luego, $B$ satisface lo requerido.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es $q$-punto.
2. $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_\mathcal{R}$-ultrafiltro débil para toda $\mathcal{R} \in \mathbf{R}$
3. $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_\mathcal{R}$-ultrafiltro amigable para toda $\mathcal{R} \in \mathbf{R}$
4. $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_\mathcal{R} \neq \emptyset$ para todo $R \in \mathbf{R}$

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Supongamos que $f : \omega \rightarrow \omega$ es una función finito a uno y que $\mathcal{R}$ es una partición de $\omega$ en piezas finitas. Ahora, $\mathcal{R}_f = \{f^{-1}[R] : R \in \mathcal{R}\}$ es una partición de $\omega$ en piezas finitas y como $\mathcal{U}$ es $q$-punto se tiene que existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap f^{-1}[R]| = 1$. Notemos que $|f[A] \cap P| = 1$ para todo $P \in \mathcal{R}$, de aquí que $f[A] \in \mathcal{I}_\mathcal{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_\mathcal{R}$-utrafiltro débil.

4) $\rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{R}$ partición de $\omega$ en piezas finitas. Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_\mathcal{R} \neq \emptyset$ entonces existen $A \in \mathcal{U}$ y $k \in \omega$ de manera que $|A \cap R| = k$ para todo $R \in \mathcal{R}$. Note que $A$ lo podemos escribir como $A = \bigcup_{i \leq k-1} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $|A_i \cap R| = 1$ para todo $R \in \mathcal{R}$. Finalmente, por teorema 3 existe $m \leq k-1$ tal que $A_m \in \mathcal{U}$ con lo cual se tiene lo requerido. ❑

## 6. Algunos cardinales invariantes

Como lo hemos anticipado antes, trabajaremos con algunos cardinales invariantes y dedicamos esta sección para presentar algunos resultados importantes sobre estos.

Recordemos que $\omega^\omega$ es el conjunto de funciones de $\omega$ en $\omega$. Nos interesa dotar a tal conjunto de un órden parcial y estudiar las cardinalidades definidas anteriormente (veáse sección 1).

Primeramente, notemos que $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$: Dada una familia $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^\omega$ consideresé

$$h(n) = \text{máx}\{f_i(n) : i \leq n\}.$$

Luego, si $k \in \omega$ se tiene que $f_k(n) \leq h(n)$ para todo $n \geq k$.

Axioma de Martin implica $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Demostración.

Sean $\kappa < \mathfrak{c}$ y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$. Veamos que $\mathcal{F}$ no es una familia dominante, i.e, existe $g \in \omega^\omega$ de manera que $g \nleq^* f_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$.

Considere $\mathbb{P} = \omega^{<\omega}$, donde $s \leq_{\mathbb{P}} t$ si y sólo si $s \supseteq t$. Notemos que $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es un órden parcial numerable, así que $\mathbb{P}$ es c.c.c.

Para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$ definasé:

$$D_{\alpha,n} = \{s \in \mathbb{P} : |\mathrm{dom}(s)| > n \wedge (\forall m \in \mathrm{dom}(s) \setminus n)(s(m) > f_\alpha(m))\}$$

Veamos que $D_{\alpha,n}$ es denso para todo $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$: Sean $s \in \mathbb{P}$, $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$. Sea $k = |\mathrm{dom}(s)|$ definamos $t : k + n + 1 :\to \omega$ como sigue:

$$t(m) = s(m) \text{ si } m < n \text{ y } t(m) = f_\alpha(m) + 1 \text{ si } m \geq n$$

Note que $|\mathrm{dom}(t)| > n$, $t \supseteq s$ y $t(m) > f_\alpha(m)$ para todo $m \in \mathrm{dom}(t) \setminus n$ así que $t \in D_{\alpha,n}$ y $t \leq_{\mathbb{P}} s$, por lo tanto $D_{\alpha,n}$ es denso.

Consideremos $\mathcal{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha < \kappa, n \in \omega\}$ la cual es una colección de densos en $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| = \kappa$, así que existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathcal{D}$-génerico. Note primeramente que $\mathrm{dom}(\bigcup G) = \omega$ pues dado $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$ arbitrarios se tiene que $G \cap D_{\alpha,n} \neq \emptyset$, luego existe $s \in G \cap D_{\alpha,n}$ y en particular $|\mathrm{dom}(s)| > n$. Ahora, veamos que $\bigcup G$ es función: Sean $n \in \omega$ y $s_1, s_2 \in G$ de modo que $n \in \mathrm{dom}(s_1)$ y $n \in \mathrm{dom}(s_2)$, como $G$ es filtro, existe $s_3 \in G$ de manera que $s_3 \supseteq s_1, s_2$ y así $s_1(n) = s_2(n)$. Finalmente, dado $n \in \omega$ y $\alpha < \kappa$ arbitrarios tenemos otra vez que $G \cap D_{\alpha,n} \neq \emptyset$ así que existe $s \in G \cap D_{\alpha,n}$ y así $|\mathrm{dom}(s)| > n$ y $s(m) > f_\alpha(m)$ para todo $m \in \mathrm{dom}(s) \setminus n$ y como $n$ es arbitrario se tiene lo deseado.

❏

Ahora, notemos que si $\kappa < \mathfrak{b}$ y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$ entonces existe $g \in \omega^\omega$ de modo que $f_\alpha \leq^* g$ para todo $\alpha < \kappa$. Pongamos $h_g(n) = g(n) + 1$ y claro que $g \nleq^* f_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$, i.e, $\mathcal{F}$ no es una familia dominante, por lo tanto, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Antes de continuar con el siguiente número cardinal, recordemos algunas definiciones que usaremos.

Sean $\mathbb{B}$ un álgebra booleana y $\mu, \kappa.\lambda$ números cardinales. Decimos que $\mathbb{B}$ es $(\kappa, \lambda, \mu)$-distributiva si para cada familia $\langle P_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de particiones de $\mathbb{B}$ tal que $|P_\alpha| \leq \lambda$ para cada $\alpha < \kappa$, existe $P$ partición de $\mathbb{B}$ tal que si $p \in P$, entonces $|\{q \in P_\alpha : p \wedge q \neq 0\}| < \mu$ para todo $\alpha < \kappa$.

Dada un álgebra booleana $\mathbb{B}$, en el caso en que $\lambda$ de la definición 6 sea igual a $|\mathbb{B}|$, esto es que las particiones $P_\alpha$ pueden ser de cardinalidad arbitraria, diremos que $\mathbb{B}$ es $(\kappa, \cdot, \mu)$-distributiva.

La propiedad de $(\kappa, \cdot, \mu)$-distributividad nos permite introducir un número cardinal, el cual llamaremos el *número de distributividad*.

$\mathfrak{h} = \text{mín}\{\kappa : \mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$ no es $(\kappa, \cdot, 2)$-distributiva$\}$

Sea $\kappa$ un cardinal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\kappa < \mathfrak{h}$
2. Si $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una colección de familias casi ajenas maximales de subconjuntos infinitos de $\omega$ respecto a $\subseteq^*$, entonces existe $\mathcal{A}$ familia casi ajena maximal que es refinamiento común de tales familias.
3. Si $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos densos y abiertos en $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$, entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}_\alpha$ es no vacío.

Demostración. 1) $\to$ 2) Supongamos que $\kappa < \mathfrak{h}$ y sea $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de familias casi ajenas maximales de subconjuntos infinitos de $\omega$. Dado que $A_\alpha$ es MAD se tiene que $A_\alpha$ es partición de $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$ para todo $\alpha < \kappa$ y como $\kappa < \mathfrak{h}$ existe $\mathcal{A}$ partición de $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$ que refina a $A_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. Luego, como $\mathcal{A}$ es partición de $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$ se tiene que $\mathcal{A}$ es MAD.

2) $\to$ 3) Sea $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familia de densos y abiertos en $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{H}_\alpha$ maximal con la propiedad de que si $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$, entonces $|A \cap B| < \omega$.

Afirmación: $(\forall \alpha < \kappa)$ ($\mathcal{A}_\alpha$ es MAD): Suponga que existe $\beta < \kappa$ de modo que $\mathcal{A}_\beta$ no es MAD, entonces existe $\mathcal{A}'$ de manera que $\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{A}'$ y consideresé $B \in \mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}_\beta$ como $\mathcal{D}_\beta$ es denso entonces existe $C \in \mathcal{D}_\beta$ de modo que $C \subseteq^* B$, luego $\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{A}_\beta \cup \{C\}$ lo cual es contradictorio.

Sea $\mathcal{A}$ refinamiento común de $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Ahora, veamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$: Sea $A \in \mathcal{A}$ y $\alpha < \kappa$, como $\mathcal{A}$ es refinamiento de $\mathcal{A}_\alpha$ entonces existe $B \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $A \subseteq^* B$, luego $A \in \mathcal{D}_\alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\alpha$.

3) $\to$ 1) Sea $\{P_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familia de particiones en $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea

$$\mathcal{D}_\alpha = \{X \subseteq \omega : (\exists A \in P_\alpha)(X \subseteq^* A)\}$$

Afirmación: $(\forall \alpha < \kappa)(\mathcal{D}_\alpha$ es denso y abierto): Sean $\alpha < \kappa$, $X \in \mathcal{D}_\alpha$ y $B \subseteq^* X$, entonces existe $A \in P_\alpha$ de modo que $X \subseteq^* A$ de aquí que $B \subseteq^* A$, por lo tanto $\mathcal{D}_\alpha$ es abierto. Por otro lado, dado $X \in [\omega]^\omega$ como $P_\alpha$ es MAD (pues es partición de $\mathcal{P}(\omega)/\text{FIN}$) entonces existe $A \in P_\alpha$ tal que $X \cap A \in [\omega]^\omega$, luego $X \cap A \subseteq X$ y $X \in \mathcal{D}_\alpha$, así $\mathcal{D}_\alpha$ es denso.

Pongamos $\mathcal{D} = \bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}_\alpha$ y veamos que es denso y abierto. Sean $Y \in [\omega]^\omega$ y para cada $\alpha < \kappa$ defínase $\mathcal{D}'_\alpha = [Y]^\omega \cap \mathcal{D}_\alpha$. Notemos que $\mathcal{D}'_\alpha$ es denso y abierto en $\mathcal{P}(Y)/\text{FIN}$ para todo $\alpha < \kappa$ y por hipótesis existe $A \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}'_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}_\alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es denso. Luego, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ es MAD, entonces es refinamiento común de los $P_\alpha$.

□

Un árbol base para $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{FIN}$ es un árbol $\mathcal{T}$ que satisface:

1. Cada nivel de $\mathcal{T}$ es una familia casi ajena maximal (MAD).
2. $\mathcal{T}$ está ordenado por $\subseteq^*$.
3. Para cada $D \in \mathcal{T}$, este tiene $\mathfrak{c}$ sucesores inmediatos.
4. $\mathcal{T}$ es denso en $\mathcal{P}(\omega)$.

El siguiente teorema relaciona el número de distributividad con árboles como lo indica el siguiente teorema. Para ver más detalle de esto puede consultar [**1**].

[B. Balcar, J. Pelant y P. Simon] $\mathfrak{h}$ es la mínima altura de un árbol base para $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{FIN}$.

$\mathfrak{h} \leq \mathfrak{b}$.

Demostración. Sea $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ familia no acotada en $\omega^\omega$. Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ sea $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in [\omega]^\omega : e_A \geq^* f_\alpha\}$ ,donde $e_A$ es la única función que enumera crecientemente los elementos de $A$. Veamos que $\mathcal{D}_\alpha$ es denso y abierto para cada $\alpha < \mathfrak{b}$: Dado $A \in [\omega]^\omega$ y $\alpha < \mathfrak{b}$, construyasé una sucesión creciente de elementos de $A$ recursivamente como sigue: Sea

$$n_0 = \text{mín}\{n \in A : n > f_\alpha(0)\}$$

$$n_k = \text{mín}\{n \in A : n > f_\alpha(k)\} \setminus \{n_i : i \leq k-1\}, k > 0$$

Sea $B = \{n_k : k \in \omega\}$ y note que $B \in [\omega]^\omega$ y $e_B \geq^* f_\alpha$, por lo tanto $\mathcal{D}_\alpha$ es denso. Por otro lado, si $A \subseteq^* B$ entonces $e_A \geq^* e_B$ de lo cual se sigue que $\mathcal{D}_\alpha$ es abierto para cada $\alpha < \mathfrak{b}$. Finalmente, si ocurriera que $\bigcap_{\alpha<\mathfrak{b}} \mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset$, sea $A \in \bigcap_{\alpha<\mathfrak{b}} \mathcal{D}_\alpha$ y note que $e_A \geq^* f_\alpha$ para todo $\alpha < \mathfrak{b}$ lo cual es contradictorio. □

## 7. Conexión entre $\mathcal{I}$-Ultrafiltros y Ultrafiltros rápidos

En esta sección nos ocuparemos por revisar otros dos artículos uno de Peter Vojtáš y otro de J. Flašková los cuales están enfocados en investigar cual es la conexión entre los $\mathcal{I}$-ultrafiltros y los filtros rápidos.

Estudiaremos indirectamente la compactación de Čech-Stone $\beta\omega$ del espacio de los números naturales $\omega$ con la topología discreta. Este espacio es uno de los principales en la topología usado muchas veces para encontrar ejemplos y contraejemplos.

Recordemos que una compactación de un espacio topológico de Tychonoff $X$, es un espacio compacto Hausdorff $K$ junto con un encaje $e : X \to K$ con $e[X]$ denso en $K$. Usualmente identificamos a $X$ con $e[X]$ y consideramos a $X$ como un subespacio de $K$. Dado un espacio $X$ nosotros nos concentraremos en su compactación de *Čech-Stone*, $\beta X$, la cual tiene la propiedad de que para toda función real, continua y acotada sobre $X$ se extiende continuamente a su compactación. Equivalentemente si $f : X \to K$ es continua y $K$ compacto, entonces existe $\beta f : \beta X \to K$ continua tal que $\beta f_{|X} = f$.

Hay varias maneras de construir a $\beta\omega$, ver [**8**], en particular se le puede interpretar como:

$$\{p : p \text{ es un ultrafiltro sobre } \omega\}.$$

Denotemos $\beta\omega \setminus \omega$ por:

$$\omega^* = \{p : p \text{ es ultrafiltro libre}\}.$$

Un número natural $n \in \omega$ queda identificado con el ultrafiltro fijo

$$\{A \subseteq \omega : n \in A\}.$$

Para cualquier $A \subseteq \omega$, definamos:

$$\widehat{A} = \{p \in \beta\omega : A \in p\} \text{ y } A^* = \widehat{A} \setminus A.$$

A $\beta\omega$ la equiparemos con la topología generada por $\{\widehat{A} : A \subseteq \omega\}$ y la topología de $\omega^*$, como subespacio de $\beta\omega$, está generada por la familia $\{A^* : A \in [\omega]^\omega\}$.

A los ideales y filtros sobre $\omega$ los podemos ver como subconjuntos de $\omega^*$ en el siguiente sentido: Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\omega$ le asociamos $\sigma(\mathcal{I}) = \bigcup\{A^* : A \in \mathcal{I}\}$ y para $\mathcal{F}$ filtro sobre $\omega$ le asociamos $\delta(\mathcal{F}) = \bigcap\{A^* : A \in \mathcal{F}\}$ y así tanto $\sigma(\mathcal{I})$ como $\delta(\mathcal{I}^*)$ vistos como subespacio de $\omega^*$ adquieren derecho de tener propiedades topológicas; en este caso, estudiaremos la relación entre los ideales sumables y los subconjuntos nunca densos de $\omega^*$ en algun sentido.

Mary Ellen Rudin es una matemática norteamericana originaria de Texas y es reconocida como una de las mayores contribuyentes del conocimiento actual de $\beta\omega$ a través de su estudio de órdenes parciales de los tipos de ultrafiltros. Su monografía *Lectures on set theoretic topology* fue la referencia estándar por muchos años.

[Vojtáš] Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\sigma(\mathcal{I})$ es denso
2. $\delta(\mathcal{I}^*)$ es nunca denso
3. $\mathcal{I}$ es alto

Demostración. 1)→2) Sea $B \in [\omega]^\omega$, como $\sigma(\mathcal{I})$ es denso, entonces existe $p \in A^*$ y $p \in B^*$ para algún $A \in \mathcal{I}$. Luego $A \in p$ y $p\delta(\mathcal{I}^*)$ puesto que $\omega \setminus A \in \mathcal{I}^*$.

2)→3) Sea $A \in [\omega]^\omega$ y suponga que $A\mathcal{I}$. Como $\delta(\mathcal{I}^*)$ es nunca denso, entonces existe $p \in A^*$ tal que $p\delta(\mathcal{I}^*)$, así que existe $B \in \mathcal{I}^*$ tal que $pB^*$, luego $\omega \setminus B \in p$ y $\omega \setminus B \cap A \subseteq \omega \setminus B$. Por lo tanto, $\mathcal{I}$ es alto.

3)→1) Sea $A \in [\omega]^\omega$. Como $\mathcal{I}$ es alto, entonces existe $B \in [A]^\omega$ y $B \in \mathcal{I}$. Luego $B^* \subseteq A^*$ y $B^* \cap \sigma(\mathcal{I}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A^* \cap \sigma(\mathcal{I}) \neq \emptyset$.

$\square$

Estaremos concentrados en sucesiones con valores reales positivos, es decir, el espacio $[0, \infty)^\omega$. Denotaremos como:

$$l_1 = \{g \in [0, \infty)^\omega : \sum_{n \in \omega} g(n) < \infty\}$$

$$c_0 = \{g \in [0, \infty)^\omega : \lim_{n \to \infty} g(n) = 0\}$$

Recordemos que $\mathcal{I}_g$ es $\{A \subseteq \omega : \sum_{n \in A} g(n) < \infty\}$ donde $g \in c_0 \setminus l_1$. Observemos que $g \in c_0 \setminus l_1$ si y sólo si $\delta(\mathcal{I}_g^*) \neq \emptyset$ y nunca denso en $\omega^*$.

Antes de enunciar el siguiente lema definamos el siguiente par de funciones. Sean $f, g \in c_0 \setminus l_1$, entonces:

$$\text{mín}(f, g)(n) = \text{mín}\{f(n), g(n)\}.$$

$$\text{máx}(f, g)(n) = \text{máx}\{f(n), g(n)\}.$$

Sean $f, g \in [0, \infty)^\omega$. Entonces $\delta(\mathcal{I}_f^*) \cap \delta(\mathcal{I}_g^*) = \delta(\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}) = \delta(\langle \mathcal{I}_f^* \cup \mathcal{I}_g^* \rangle)$

Demostración. Veamos que $\delta(\mathcal{I}_f^*) \cap \delta(\mathcal{I}_g^*) \subseteq \delta(\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)})$: Sea $p \in \delta(\mathcal{I}_f^*) \cap \delta(\mathcal{I}_g^*)$, entonces $\mathcal{I}_f^* \cup \mathcal{I}_g^* \subseteq p$. Ahora, sea $A \in \mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}$, entonces

$$\sum_{n\in\omega\setminus A} \text{mín}\{f(n), g(n)\} < \infty$$

Consideremos $X_1 = \{n \in \omega \setminus A : f(n) < g(n)\}, X_2 = \{n \in \omega \setminus A : f(n) = g(n)\}$ y $X_3 = \{n \in \omega \setminus A : f(n) > g(n)\}$. Notemos que $X_1 \in \mathcal{I}_f$, pues $\sum_{n\in X_1} f(n) = \sum_{n\in X_1} \text{mín}\{f(n), g(n)\}$, $X_2 \in \mathcal{I}_f \cap \mathcal{I}_g$ y $X_3 \in \mathcal{I}_g$. Así que $\omega \setminus X_1 \in \mathcal{I}^*_f$, $\omega \setminus X_2 \in \mathcal{I}^*_f$ y $\omega \setminus X_3 \in \mathcal{I}^*_g$. Por lo tanto,

$$\omega \setminus (\omega \setminus A) = \omega \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \bigcap_{i\leq 3} \omega \setminus X_i \in p.$$

Ahora, sea $p \in \delta(\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)})$, entonces $\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)} \subseteq p$ y notemos que $\mathcal{I}^*_f \subseteq \mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}$ y $\mathcal{I}^*_g \subseteq \mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}$. Luego $\mathcal{I}^*_g \cup \mathcal{I}^*_f \subseteq \mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)} \subseteq p$.

$\square$

$\delta(\mathcal{I}^*_f) \cap \delta(\mathcal{I}^*_g) = \emptyset$ si y sólo si $\text{mín}(f, g) \in l_1$.

Demostración. Sean $f, g \in [0, \infty)^\omega$. Si $\text{mín}(f, g) \in l_1$, entonces $\mathcal{I}_{\text{mín}(f,g)}$ es ideal sobre $\omega$, así $\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}$ es filtro sobre $\omega$ y como consecuencia $\delta(\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}) \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $\text{mín}(f, g) \in l_1$, entonces $\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)} = \mathcal{P}(\omega)$, luego $\delta(\mathcal{I}^*_{\text{mín}(f,g)}) = \delta(\mathcal{I}^*_f) \cap \delta(\mathcal{I}^*_g) = \emptyset$.

$\square$

$\delta(\mathcal{I}^*_f) \cup \delta(\mathcal{I}^*_g) = \delta(\mathcal{I}^*_{\text{máx}(f,g)})$.

Demostración. Sea $p \in \omega^*$ de modo que $\mathcal{I}^*_{\text{máx}(f,g)} \subseteq p$ y suponga que $\mathcal{I}^*_f \nsubseteq p$ y $\mathcal{I}^*_g \nsubseteq p$. Entonces, existe $A \in \mathcal{I}^*_f$ tal que $Ap$ y $B \in \mathcal{I}^*_g$ de modo que $Bp$. Así que

$$\sum_{n\in\omega\setminus(A\cup B)} \text{máx}\{f(n), g(n)\} \leq \sum_{n\in\omega\setminus(A\cup B)} f(n) + \sum_{n\in\omega\setminus(A\cup B)} g(n)$$

luego $\omega \setminus (A \cup B) \in \mathcal{I}_{\text{máx}(f,g)} \subseteq p$, de aquí que $A \cup B \in \mathcal{I}^*_{\text{máx}(f,g)}$. Finalmente $A \cup B \in p$ y por la proposición 3 se tiene que $A \in p$, lo cual es contradictorio.

Por otro lado, sea $p \in \delta(\mathcal{I}^*_f) \cup \delta(\mathcal{I}^*_g)$ y sin pérdida de generalidad asumamos que $p \in \delta(\mathcal{I}^*_f)$, entonces $\mathcal{I}^*_f \subseteq p$ y notemos que $\mathcal{I}^*_{\text{máx}(f,g)} \subseteq \mathcal{I}^*_f$. Luego, $p \in \delta(\mathcal{I}^*_{\text{máx}(f,g)})$. $\square$

Sean $f \in c_0 \setminus l_1$ y $X \in [\omega]^\omega$. Definamos $f_{|X} : \omega \to [0, \infty)$ como sigue:

$$(f_{|X})(n) = f(n) \text{ si } n \in X,$$

$$(f_{|X})(n) = 0 \text{ si } nX.$$

Sea $f \in c_0 \setminus l_1$. Entonces,

1. $f \in c_0 \setminus l_1 \iff X \cap \delta(\mathcal{I}_f^*) \iff X \in \mathcal{I}_f^+$.
2. $\delta(\mathcal{I}_{f_{|X}}^*) = \delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^* = \delta(\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle)$.

Demostración.

1) Si $f_{|X} \in c_0 \setminus l_1$, entonces $\sum_{n \in \omega} f_{|X}(n) = \infty$ pero por definción de $f_{|X}$ se tiene que $f_{|X}(n) = 0$ para todo $n \in \omega \setminus X$, de aquí que $\sum_{n \in X} f_{|X}(n) = \infty$, luego $\sum_{n \in X} f(n) = \infty$ y así $X \in \mathcal{I}_f^*$. Por lo tanto, $\delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^* \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que $X \cap \delta(\mathcal{I}_f^*) \neq \emptyset$ y que $X \mathcal{I}_f^+$, luego $X \in \mathcal{I}_f$, entonces $\sum_{n \in \omega \setminus X} f(n) = \infty$, i.e, $\omega \setminus X \in \mathcal{I}_f^*$. Así que si $p$ es cualquier ultrafiltro libre sobre $\omega$ de modo que $\mathcal{I}_f^* \supseteq p$, se tiene que $Xp$. Por lo tanto, $\delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^* = \emptyset$, lo cual es contradictorio.

Si $X \in \mathcal{I}_f^+$, entonces $\sum_{n \in X} f(n) = \infty$, luego $\sum_{n \in X} f_{|X}(n) = \infty$. Por lo tanto, $f_{|X} l_1$.

2) Veamos que $\delta(\mathcal{I}_{f_{|X}}^*) = \delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^*$. ($\supseteq$) Sea $p \in \delta(\mathcal{I}_f^*)$, así que $\mathcal{I}_f^* \subseteq p$ y $x \in p$. Sea $A \in \mathcal{I}_{f_{|X}}^*$. Notemos que $f_{|X}(n) = 0$ para cada $n \in \omega \setminus (X \cup A)$. Tenemos que $\sum_{n \in \omega \setminus A} f_{|X}(n) < \infty$ y $X \setminus A \subseteq \omega \setminus A$. Luego, $X \setminus A \in \mathcal{I}_f$, entonces $\omega \setminus (X \setminus A) \in \mathcal{I}_f^* \subseteq p$ y $\omega \setminus (X \setminus A) \cap X = X \cap A \in p$. Por lo tanto, $A \in p$.

($\subseteq$) Como $f_{|X} \leq f$ y $X \in \mathcal{I}_{f_{|X}}^*$, se tiene lo requerido.

Finalmente, probemos que $\delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^* = \delta(\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle)$. ($\subseteq$) Sea $p \in \delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^*$, entonces $\mathcal{I}_f^* \subseteq p$ y $X \in p$. Ahora, veamos que $\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle \subseteq p$: Dado $A \in \langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle$, existe $\{A_i : i \leq n\} \subseteq \mathcal{I}_f^* \cup \{X\}$ de modo que $\bigcap_{i \leq n} A_i \subseteq A$, luego $A \in p$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle$.

($\supseteq$) Sea $p \in \delta(\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle)$, entonces $\langle \mathcal{I}_f^* \cup \{X\} \rangle \subseteq p$, de aquí que $X \in p$ y $\mathcal{I}_f^* \subseteq p$. Por lo tanto, $p \in \delta(\mathcal{I}_f^*) \cap X^*$.

❏

$(\forall g \in c_0 \setminus l_1)(\delta(\mathcal{I}_g^*)$ es denso en sí mismo$)$.

Demostración. Supongamos que $\delta(\mathcal{I}_g^*)$ tiene un punto aislado, entonces existe $X \in [\omega]^\omega$ de manera que $X^* \cap \delta(\mathcal{I}_g^*) = \{p\}$. Primeramente veamos que $\mathcal{I}_g^*$ no es ultrafiltro sobre $\omega$. Dado que $\sum_{n \in X} g(n) = \infty$, es posible encontrar $A, B \subseteq X$ disjuntos tal que $A \cup B = X$ de modo que $A, B \in \mathcal{I}_g^+$: Dado $N = 1$, existen $N_0, M_0 \in \omega$ tal que:

$$\sum_{n\in X\cap N_0} g(n) \geq 1$$

y

$$\sum_{n\in X\cap N_1\setminus N_0} g(n) \geq 1.$$

Así, dado $N = k$, existen $N_k, M_k \in \omega$ de manera que

$$\sum_{n\in X\cap N_k\setminus M_{k-1}} g(n) \geq \frac{1}{k}$$

y

$$\sum_{n\in X\cap M_k\setminus N_k} g(n) \geq \frac{1}{k}.$$

Finalmente, pongamos $A = \bigcup_{k\in\omega} X \cap N_k \setminus M_{k-1}$ y $B = \bigcup_{k\in\omega} X \cap M_k \setminus N_{k-1}$. Note que si $A \in \mathcal{I}_g^*$, entonces $\omega \setminus A \in \mathcal{I}_g$ pero $B \subseteq \omega \setminus A$, lo cual es contradictorio. Finalmente como todo filtro propio puede extenderse en al menos dos ultrafiltros distintos, se tiene que $|\delta(\mathcal{I}_g^*) \cap X^*| > 2$.

❏

Existen una gran variedad de cardinales estudiados en el ánalisis real, la topología, el álgebra, etc. Dada una relación binaria $R$, decimos que $D \subsetneq \mathrm{rng}(R)$ es $R$-dominante si $(\forall x \in \mathrm{dom}(R))(\exists y \in D)((x, y) \in R)$ y $B \subsetneq \mathrm{dom}(R)$ es $R$-no acotado si $(\forall y \in \mathrm{rng}(R))(\exists x \in B)((x, y)R)$. No olvidemos

$$\mathfrak{b}(R) = \text{mín}\{|B| : B \subsetneq \mathrm{dom}(R) \wedge B \text{ es no acotado}\}$$

$$\mathfrak{d}(R) = \text{mín}\{|D| : D \subsetneq \mathrm{rng}(R) \wedge D \text{ es } R \text{ dominante}\}$$

Ahora, hablaremos sobre relaciones binarias y veremos la conexión entre las series sumables y $(\omega^\omega, \leq^*)$. Recordemos que un par de funciones $(E, F)$ es conocida como una *conexión de Galois-Tukey* de $R$ a $S$, donde $R$ y $S$ son relaciones binarias si $E : \mathrm{dom}(R) \to \mathrm{dom}(S)$ y $F : \mathrm{rng}(S) \to \mathrm{rng}(R)$ son funciones y si $(E(x), v) \in S$ implica que $(x, F(v))$. Notemos que la existencia de una conexión Galois-Tukey de $R$ a $S$ trae como consecuencia que $\mathfrak{b}(R) \geq \mathfrak{b}(S)$ y $\mathfrak{d}(R) \leq \mathfrak{d}(S)$: Pues dado $\kappa < \mathfrak{b}(S)$ y $A \subsetneq R$ tal que $|A| = \kappa$ se tiene que $E[\mathrm{dom}(A)] \subset \mathrm{dom}(S)$, y $|E[\mathrm{dom}(A)]| = |A| = \kappa < \mathfrak{b}(S)$ de aquí que existe $y \in \mathrm{rng}(S)$ de manera que $(E(x), y) \in S$ con $x \in A$ lo que implica que $(x, F(v)) \in R$. La noción de Galois-Tukey fue introducida para expresar el contenido combinatorio de desigualdades entre cardinales investigados primeramente en el ánalisis real, para ver más sobre esto veáse [**8**].

Definamos una relación binaria CONV $\subseteq c_0 \times [\omega]^\omega$ como sigue:

$$(f, X) \in \text{CONV si y sólo si} \sum_{n \in X} f(n) < \infty.$$

Mostraremos que la relación CONV y $(\omega^\omega, \leq^*)$ son Galois-Tukey equivalentes, i.e, existe una conexión Galois-Tukey de CONV a $(\omega^\omega, \leq^*)$ y una conexión Galois-Tukey de $(\omega^\omega, \leq^*)$ a CONV, lo que implica que $\mathfrak{b}(\text{CONV}) = \mathfrak{b}(\omega^\omega, \leq^*)$ y $\mathfrak{d}(\text{CONV}) = \mathfrak{d}(\omega^\omega, \leq^*)$.

La relación CONV y $\{(f, g) \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega : f \leq^* g\}$ son Galois-Tukey equivalentes.

Demostración.

Dada $f \in \omega^\omega$ (sin pérdida de generalidad asumamos que $f$ es creciente), defínase

$$E(f)(i) = \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

si y sólo si $i \in [f(n-1), f(n))$ para $n > 0$. Dado $X \in [\omega]^\omega$ pongasé $F(X) = e_X$, donde $e_X$ es la única función que enumera crecientemente los elementos de $X$. Ahora, supongamos que $(E(f), X) \in$ CONV y que $e_X \not\leq^* f$, entonces existen $\exists^\infty n \in \omega$ de manera que $e_X(n) \leq f(n)$ y note que si $N \in \omega$, entonces

$$\sum_{i=0}^{N} E(f)(i) \geq (N+1)\frac{\log(N+1)}{N+1},$$

luego

$$\sum_{i \in X} E(f)(i) = \sum_{i=0}^{\infty} E(f)(e_X(i)) \geq \lim_{n \to \infty} (N+1)\frac{\log(N+1)}{N+1} = \infty.$$

Ahora, veamos la conexión Galois-Tukey en la otra dirección, i.e., de $\{(f, g) \subseteq \omega \times \omega : f \leq^* g\}$ a CONV. Defínase $E : c_0 \to \omega^\omega$ y $F : \omega^\omega \to [\omega]^\omega$ como sigue:

$$E(f) = h_f \text{ y } F(g) = \text{rng}(g)$$

donde $h_f(n) = \min\{i \in \omega : (\forall j \geq i)(f(j) < \frac{1}{2^n}\}$.

Sean $f \in c_0$, $g \in \omega^\omega$ y supongamos que $E(f) \leq^* g$ entonces existe $N \in \omega$ de modo que $\forall n \geq N$ se tiene que

$$\sum_{n\in\omega\setminus N} f(g(n)) \leq \sum_{n\in\omega\setminus N} \frac{1}{2^n}.$$

❑

Recordemos que un ultrafiltro $\mathcal{F}$ es rápido si para toda $f \in \omega^\omega$ existe $X \in \mathcal{F}$ de tal modo que $|X \cap f(n)| \leq n$ para todo $n \in \omega$. El concepto de ultrafiltro rápido fue inicialmente usado por G. Choquet aunque él atribuye el concepto de rapidez a Mokobodzki.

[Vojtáš] Sea $\mathcal{F} \in \omega^*$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es rápido.
2. Existe $f_0 \in \omega^\omega$ tal que para toda $f \in \omega^\omega$ existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $|X \cap f(n)| \leq f_0(n)$ para toda $n \in \omega$.
3. Para toda $g \in c_0$ existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_{n\in X} g(n) < \infty$.
4. $\mathcal{F} \in \bigcap_{f\in c_0} \sigma(\mathcal{I}_f)$.
5. $\mathcal{F} \in \omega^* \setminus \bigcup_{f\in c_0} \delta(\mathcal{I}_f^*)$.

Demostración. 1) $\to$ 2) Pongamos $f_0(n) = n$. Ahora, sea $f \in \omega^\omega$ y como $\mathcal{F}$ es rápido existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $|X \cap f(n)| \leq n = f_0(n)$ para todo $n \in \omega$.

2) $\to$ 3) Sea $k \in \omega$ y considerésé $\epsilon_k = \frac{1}{f_0(k)\cdot 2^k}$ entonces existe $N_k \in \omega$ de modo que si $n \geq N_k$ entonces $g(n) < \epsilon_k$, pues $g \in c_0$. Observemos que

$$\sum_{k\in\omega} f_0(k) \cdot N_k \leq \sum_{k\in\omega} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Ahora, sea $f \in \omega$ tal que $g(m) \leq g(N_k)$ para $m \in [f(k-1), f(k))$. Por hipótesis, existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que $|X \cap f(n)| \leq f_0(n)$ para todo $n \in \omega$ luego

$$\sum_{k\in X} g(k) \leq \sum_{k\in\omega} f_0(k) \cdot g(N_k) < \infty.$$

3) $\to$ 1) Suponga que $f \in \omega^\omega$ es estríctamente creciente. Para $k \in [f(n), f(n+1))$ pongamos $g(k) = \frac{1}{n}$. Como $g \in c_0$, existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que $\sum_{n\in X} g(n) < 1$ de aquí que $|X \cap f(n)| \leq n$ para todo $n \in \omega$.

3) $\to$ 4) Sea $f \in c_0$, por hipótesis existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que $\sum_{n\in X} f(n) < \infty$, i.e, $X \in \mathcal{I}_f \cap \mathcal{F}$ de aquí que $\mathcal{F} \in X^*$, luego $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{I}_f)$ y como $f$ es arbitraria se sigue que $\mathcal{F} \in \bigcap_{f\in c_0} \sigma(\mathcal{I}_f)$.

4) $\to$ 3) Sea $g \in c_0$, como $\mathcal{F} \in \bigcap_{f\in c_0} \sigma(\mathcal{I}_f)$ se tiene que $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{I}_g)$ de aquí que existe $X \in \mathcal{I}_g$ de manera que $X \in \mathcal{F}$, i.e, $\sum_{n\in X} g(n) < \infty$.

4) $\to$ 5) Suponga que $\mathcal{F} \omega^* \setminus \bigcup_{f\in c_0} \delta(\mathcal{I}_f^*)$ entonces existe $g \in c_0$ de modo que $\mathcal{F} \in \delta(\mathcal{I}_g^*)$, i.e, $\mathcal{I}_g^* \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{F} \cap \mathcal{I}_f = \emptyset$.

5) $\to$ 4) Suponga que $\mathcal{F} \bigcap_{f\in c_0} \sigma(\mathcal{I}_f)$ entonces existe $g \in c_0$ de manera que $\mathcal{F} \sigma(\mathcal{I}_g)$ ,de aquí que $\mathcal{F} \cap \mathcal{I}_g = \emptyset$ y por teorema 3 se tiene que $\mathcal{I}_g^* \subseteq \mathcal{F}$ luego $\mathcal{F} \in \delta(\mathcal{I}_g^*)$.

❑

Notemos que teorema 7 nos indica que $\mathcal{F}$ es rápido si y sólo si $\mathcal{I}_g \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ donde $g \in c_0 \setminus l_1$.

Antes de seguir, recordemos que un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre $\omega$ es $q$-punto si para toda partición $\{P_n : n \in \omega\}$ de $\omega$ en conjuntos finitos existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $|X \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

Sea $\mathcal{F} \in \omega^*$. Decimos que $\mathcal{F}$ es $q$-punto si para toda partición $\{P_n : n \in \omega\}$ de $\omega$ en conjuntos finitos existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que $|X \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

Recordemos que por $\mathbf{R}$ entendemos el sistema de todas las particiones $\mathcal{R} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ de $\omega$. Y también que para cada $R \in \mathbf{R}$, le tenemos asociado el ideal alto

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq \omega : (\exists k \in \omega)(\forall P \in \mathcal{R})(|P \cap X| \leq k)\}$$

Sea $\mathcal{F} \in \omega^*$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es $q$-punto.
2. Para toda partición $\mathcal{R} \in \mathcal{P}$ existe $X \in \mathcal{F}$ de modo que existe $k \in \omega$ tal que $|P \cap X| \leq k$ para todo $P \in \mathcal{R}$.
3. $\mathcal{F} \in \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} \sigma(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})$.

Demostración. 1) $\to$ 2) Es inmediato.

2) $\to$ 3) Sea $\mathcal{R} \in \mathcal{P}$, por hipótesis existe $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{F}$, luego $\mathcal{F} \in X^*$ así que $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{I}_R)$ y como $\mathcal{R}$ es arbitaria se sigue que $\mathcal{F} \in \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} \sigma(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})$.

3) $\to$ 1) Sea $\mathcal{R}$ partición de $\omega$ en conjuntos finitos, por hipótesis existe $X \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ de modo que, i.e, existe $k \in \omega$ tal que $|X \cap P| = k$ para todo $P \in \mathcal{R}$, de aquí que podemos escribir a $X$ como $X = \bigcup_{i\leq k} A_i$, donde $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \leq k$ y por teorema 3 existe $m \leq k$ tal que $A_m \in \mathcal{F}$. ❑

Sea $\mathcal{I}_g$ un ideal alto sobre $\omega$ determinado por la función $g$ y asuma que $h(n) = g(2n)$ para todo $n \in \omega$. Entonces, $\mathcal{I}_g = \mathcal{I}_h$.

Demostración. Como la función $g$ es monótona se tiene que $g(2k) + g(2k+1) \leq 2g(2k) = 2h(k)$ y que $g(2k-1) + g(2k) \geq 2g(2k) = h(k)$ para todo $k \in \omega$. Entonces,

$$\sum_{n\in\omega} 2h(n) \leq g(0) + \sum_{n\in\omega} g(n) \leq g(0) + \sum_{n\in\omega} 2h(n)$$

$\square$

Supongamos que $l \in \omega^\omega, \mathcal{I}_g, \mathcal{I}_h$ son ideales sumables altos, tal que para toda $f \in \omega^\omega$ existe $A \in \mathcal{I}_g$ tal que $f^{-1}[A]\mathcal{I}_h$. Si $H$ es un subconjunto infinito de $\omega$ tal que $H\mathcal{I}_h$ y $l[H]\mathcal{I}_g$, entonces existe $A \subseteq l[H]$ tal que $A \in \mathcal{I}_g$ y $l^{-1}[A] \cap H\mathcal{I}_h$.

Demostración. Enumeremos $l[H]$ como $h_n : n \in \omega$ y definamos $\tilde{l} : \omega \to \omega$ como

$$\tilde{l}(n) = 2h_n \text{ si } n \in H \text{ y } \tilde{l}(n) = 2h_n + 1 \text{ si } nH.$$

Note que $\tilde{l}[H] \cap \tilde{l}[\omega \setminus H] = \emptyset$. Ahora, existe $\tilde{A} \in \mathcal{I}_{g|\tilde{l}[H]}$ de manera que $\tilde{l}^{-1}[\tilde{A}]\mathcal{I}_h$, puesto que por hipótesis se tiene que existe $A \in \mathcal{I}_g$ tal que $\tilde{l}^{-1}[A]\mathcal{I}_h$. Ahora, pongamos $B = \{h_n : 2h_n \in \tilde{A}\}$. Finalmente, como $\tilde{A} \in \mathcal{I}_g$, por lema 7 se tiene que $B \in \mathcal{I}_g$ y observemos que $l^{-1}[A] \cap H \supseteq \tilde{l}^{-1}[\tilde{A}] \in \mathcal{I}_g$. $\square$

Supongamos que $\mathcal{I}_g$ y $\mathcal{I}_h$ son ideales sumables altos tal que para $f \in \omega^\omega$ existe $A \in \mathcal{I}_g$ tal que $f^{-1}[A]\mathcal{I}_h$. Asuma también que $\mathcal{F}$ es una base de filtro tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{I}_h = \emptyset$. Entonces, dada $l \in \omega^\omega$ existe $G \subseteq \omega$ tal que $l[G] \in \mathcal{I}_g$ y $G \cap F\mathcal{I}_h$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es numerable, podemos listarlo como $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \omega\}$ y sin pérdida de generalidad podemos asumir que $F_{n+1} \supseteq F_n$ para todo $n \in \omega$. Por hipótesis $\mathcal{F}$ es una familia numerable de conjuntos $\mathcal{I}_h$-positivos así que existe $H \subseteq \omega$ tal que $H \subseteq^* F_n$ para todo $n \in \omega$.

Si tenemos que $l[H] \in \mathcal{I}_g$, entonces pongasé $G = H$.

Si $l[H]\mathcal{I}_g$, por lema 7 existe $A \subseteq l[H]$ de modo que $A \in \mathcal{I}_g$ y $l^{-1}[A] \cap H\mathcal{I}_h$. Pongasé $G = l^{-1}[A]$.

Finalmente notemos que $l[G] \in \mathcal{I}_g$. Ahora, como $G \cap H\mathcal{I}_h$ y $(G \cap H) \setminus F$ es finito para todo $F \in \mathcal{F}$, se sigue que $G \cap F\mathcal{I}_h$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

$\square$

[Flašková] (CH) Para cualesquier ideales sumables $\mathcal{I}_g$, $\mathcal{I}_h$ que satisfacen que siempre que $f \in \omega^\omega$ existe $A \in \mathcal{I}_g$ de modo que $f^{-1}[A]\mathcal{I}_h$, existe un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro el cual no es un $\mathcal{I}_h$-ultrafiltro.

Demostración. Enumeremos todas las funciones en $\omega^\omega$ como $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por recursión construyamos bases de filtro $\mathcal{F}_\alpha$ satisfaciendo:

1. $\mathcal{F}_0$ = Fréchet.
2. $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$, si $\alpha < \beta$.
3. $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$, para $\gamma$ límite.
4. $(\forall \alpha < \omega_1)(|\mathcal{F}_\alpha| < \omega_1)$.
5. $(\forall \alpha < \omega_1)(\mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{I}_h = \emptyset)$.
6. $(\forall \alpha < \omega_1)(\exists F \in \mathcal{F}_{\alpha+1})(f_\alpha[F] \in \mathcal{I}_g)$.

Notemos que por 1), la recursión ya ha comenzado. Ahora, supongamos que se ha construido hasta el paso $\alpha$, i.e, $\mathcal{F}_\alpha$ ha sido construido. Por 4) y 5), podemos aplicar el lema 7 a $f_\alpha$ y $\mathcal{F}_\alpha$, de aquí que existe $G \in [\omega]^\omega$ de manera que $f_\alpha[G] \in \mathcal{I}_g$ y $G \cap A\mathcal{I}_h$ para todo $A \in \mathcal{F}_\alpha$. Pongamos, $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{G\}$. La base de filtro $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ satisface 4) y 6).

Finalmente, sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$. Todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ el cual extiende $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro por 6). Puesto que $\mathcal{F} \cap \mathcal{I}_h = \emptyset$, este puede extenderse a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de modo que $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_h = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ no es un $\mathcal{I}_h$-ultrafiltro pero sí un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro.

❑

El siguiente teorema mejora la cantidad de ideales sumables utilizados para caracterizar los filtros rápidos, puesto que teorema 7 usa $\mathfrak{c}$ ideales sumables para ello.

[Flašková]

Existe una familia $\mathcal{D}$ de ideales sumables altos tal que $|\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$ tal que $\mathcal{U}$ es rápido si y sólo si $\mathcal{U}$ tiene intersección no vacía con todo ideal sumable en $\mathcal{D}$.

Demostración. Primeramente, construyamos la familia de ideales sumables altos como sigue:

Asuma que $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ es una familia dominante y $|\mathcal{F}| = \mathfrak{d}$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $f(j+1) \geq f(j) + j + 1$ para todo $j \in \omega$ y además es estríctamente creciente. Para toda $f \in \mathcal{F}$ defínase $g_f : \omega \to [0, \infty)$ por:

$$g_f(m) = 1 \text{ si } m < f(0), \; g_f(m) = \tfrac{1}{j+1} \text{ si } m \in [f(j), f(j+1))$$

Sea $\mathcal{D} = \{\mathcal{I}_{g_f} : f \in \mathcal{F}\}$. Veamos que dicha familia satisface lo requerido. Notemos que si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro rápido por teorema 7 es inmediato que $\mathcal{U}$ tiene intersección no vacía con todo ideal sumable alto de $\mathcal{D}$.

Supongamos que $\mathcal{U} \in \omega^*$ y que para todo $\mathcal{I}_{g_f} \in \mathcal{D}$ se tiene que $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_{g_f} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{I}_g$ un ideal sumable arbitrario: Defínase $f_g : \omega \to \omega$ de modo que:

1. $f_g(j+1) \geq f_g(j) + j + 1$.
2. Si $m \geq f_g(j)$, entonces $g(m) \leq \frac{1}{2^j}$.

Veamos que esto sí es posible: Como $\mathcal{I}_g$ es alto, entonces $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$ de aquí que para $\epsilon = 1$ existe $N_0 \in \omega$ de modo que si $n \geq N_0$, entonces $g(n) \leq 1$. Pongamos $f_g(0) = N_0$, $f_g(j+1) = \max\{N_j, f(j) + j + 1\}$ donde $N_j$ es un número natural suficientemente grande de tal suerte que si $n \geq N_j$, entonces $g(n) \leq \frac{1}{2^{j+1}}$. Recordemos que $\mathcal{F}$ es una familia dominante en $\omega^\omega$, entonces existe $h \in \omega^\omega$ tal que $f_g \leq^* h$, i.e, existe $k_h \in \omega$ de manera que si $n \geq k_h$, entonces $f_g(n) \leq h(n)$. Para todo $n \geq h(k_h)$ existe un único $j \geq k_h$ tal que $n \in [h(j), h(j+1))$. Como $n \geq h(j) \geq f_g(j)$, obtenemos que $g(n) \leq \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{j+1} = g_f(n)$. Finalmente, puesto que $g \leq^* g_f$ se tiene que $\mathcal{I}_{g_f} \subseteq \mathcal{I}_g$. Ahora, si $\mathcal{U} \in \omega^*$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_{g_f} \neq \emptyset$ para todo $f \in \mathcal{D}$, se sigue que $\mathcal{I}_g \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ de aquí que $\mathcal{U}$ es rápido.

❏

La existencia de una familia de ideales sumables altos como en teorema 7 nos da la posibilidad de probar que existen $2^{\mathfrak{d}}$ filtros rápidos. Basta ver que si $g \in c_0 \setminus l_1$ entonces existe una familia $\mathcal{A}$ MAD con la propiedad de que si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\sum_{n\in A} g(n) < \infty$, i.e, $A \in \mathcal{I}_g$: Sea $\mathcal{A}$ familia casi ajena y maximal con respecto a la propiedad de que siempre que $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \in \mathcal{I}_g$, ahora si $\mathcal{A}$ no es MAD, entonces existe $\mathcal{A}'$ MAD tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ y escojasé $B \in \mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}$ y note que existe $C \subset B$ de modo que $C \in \mathcal{I}_g$ puesto que el ideal $\mathcal{I}_g$ es alto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \{B\}$, lo cual es contradictorio. Para más detalle vaya al capítulo 3 (teorema 1).

($\mathfrak{h} = \mathfrak{d}$) Existen $2^{\mathfrak{d}}$ ultrafiltros rápidos.

[Flašková] Si $\mathcal{D}$ es una familia de ideales sumables altos y $|\mathcal{D}| < \mathfrak{b}$, entonces existe un ideal sumable alto $\mathcal{I}_g$ tal que $\mathcal{I}_g \subseteq \mathcal{I}_h$ para todo $\mathcal{I}_h \in \mathcal{D}$.

Demostración. Para todo $\mathcal{I}_h \in \mathcal{D}$ defina una función $f_h \in \omega^\omega$ tal que siempre que $m \geq f_h(j) \geq h(m) \leq \frac{1}{2^j}$.

Ahora, la familia $\mathcal{F} = \{f_h : \mathcal{I}_h \in \mathcal{D}\}$ tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{b}$, así que existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f_h \leq^* f$ para toda $f_h \in \mathcal{F}$. Asuma que $f$ es estríctamente creciente y defínase $g : \omega \to [0, \infty)$ como sigue:

$$g(m) = 1 \text{ si } m < f(0),\ g(m) = \tfrac{1}{j+1} \text{ si } m \in [f(j), f(j+1))$$

Para una función $f_h \in \mathcal{F}$ existe $k_h \in \omega$ tal que $f_h(k) \leq f(k)$ para todo $k \geq k_h$. Además, note que para todo $n \geq f_h(k_h)$ existe un único $j \geq k_h$ tal que $n \in [f(j), f(j+1))$ pues $f$ es estríctamente creciente. Finalmente como

$$n \geq f(j) \geq f_h(j)$$

tenemos que

$$h(n) \leq \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{j+1} = g(n).$$

Por lo tanto, $\mathcal{I}_g \subseteq \mathcal{I}_h$.

❑

Capítulo 2

# Más que un $0$-punto

## 1. Sobre la existencia de un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro en ZFC.

En su plática durante *12th Winter School on Abstract Analysis in Srní*, A. Gryzlov definió 0-puntos y construyó tales ultrafiltros en ZFC. Recordemos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ libre sobre $\omega$ es un 0-punto si para toda función $f \in \omega^\omega$ uno a uno, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \in \mathcal{I}_d$.

El presente capítulo exhibe una construcción en ZFC de un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil que fue dada por Jana Flašková.

Notemos que todo conjunto que pertenece al ideal sumable $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ tiene densidad cero, i.e, $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{I}_d$. Pero, el recíproco no se tiene.

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, decimos que $\mathcal{F}$ es sumable si para toda función $f : \omega \to \omega$ uno a uno, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $f[A] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

Note que dicha definición es posible extenderse a cualquier ideal alto $\mathcal{I}_g$, con $g : \omega \to [0, \infty)$ satisfaciendo los requerimientos de ejemplo 3 y para cualquier función $f \in \omega^\omega$. Aunque por el momento, sólo serán consideradas las funciones uno a uno, y el ideal alto $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre $\omega$ libre, decimos que $\mathcal{U}$ es sumable, si para toda función $f : \omega \to \omega$ uno a uno existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

Antes de comenzar la construcción, veamos el siguiente lemma.

Si $\mathcal{F}_k$ es una familia $k$-ligada de subconjuntos infinitos de $\omega$ para todo $k \in \omega$, entonces

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq \omega : (\forall k \in \omega)(\exists U_k \in \mathcal{F}_k)(U_k \subseteq^* F\}$$

es una familia centrada.

Demostración. Sean $F_0, ..., F_n \in \mathcal{F}$ y para cada $j = 0, ..., n$, escójase $U_k^j \in \mathcal{F}_k$ tal que $U_k^j \subseteq^* F^j$ para todo $k \in \omega$. Para todo $k \geq n$ la familia $\mathcal{F}_k$ es $n$-ligada, de aquí que $\bigcap_{j \leq n} U_k^j$ es un conjunto infinito. Tenemos que

$$\bigcap_{j\leq n} U_k^j \subseteq^* \bigcap_{j\leq n} F^j$$

para todo $k \geq n$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es centrada.

❑

La siguiente proposición, es pieza clave para la construcción que exhibe J. Flašková en el presente artículo; la idea, es que dado cualesquier conjunto infinito $A$ de números naturales dividirlo a este en bloques finitos disjuntos usando para esto una enumeración de $A$ que será explicada posteriormente. Aunque ella comenta que la idea de tal construcción es debida a Gryzlov, por la construcción que este último dio para un 0-punto en ZFC.

Sea $A \subseteq \omega$ infinito. Entonces, para todo $k \in \omega$ existe una familia $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{P}(A)$ sumable y $k$-ligada.

Demostración. Sea $k \in \omega$ fijo. Dado $n \in \omega$ defínase

$$S_n = \{\langle a_0, ..., a_k\rangle : a_j \in \sum_{i=0}^{n} Q(j,i) \setminus \sum_{i=0}^{n-1} Q(j,i), 0 \leq j \leq k\}$$

donde $Q(j,n) = 2^{n\cdot 2^j}$.

Note que $\bigcup_{n\in\omega} S_n$ es numerable y que $S_n \cap S_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Ahora, enumere a $A$ fielmente en bloques finitos disjuntos, pongasé

$$B_n = \{b_\phi : \phi \in S_n\}.$$

Para cada $i \leq k$, sea $x \in \sum_{m=0}^{n} Q(i,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(i,n)$, $s \in \prod_{j=i+1}^{k}(\sum_{m=0}^{n} Q(j,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(j,m))$. Para cada $n \in \omega$, sea

$$B_n(i,x,s) = \{b_{\varphi\frown\langle x\rangle\frown s} : \varphi \in \prod_{j=0}^{i-1}(\sum_{m=0}^{n} Q(j,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(j,m))\}.$$

Ahora, dada $f : \omega \to \omega$ uno a uno, pongamos $m_x^f = \text{mín}\, f[B_n(i,x,s)]$. Sea $x(f,s) \in \sum_{m=0}^{n} Q(i,m)\setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(i,m)$ para el cual $m_{x(f,s)}$ es máximo, i.e., $m_{x(f,s)} = \text{máx}\{m_x^f : x \in \sum_{m=0}^{n} Q(i,m)\setminus\sum_{m=0}^{n-1} Q(i,m)\}$. Ahora, defínase

$$A^f = \bigcup_{n\in\omega} B_n^f$$

$$B_n^f = \bigcup_{i=0}^{k} B_n^f(i)$$

donde $B_n^f(i) = \bigcup\{B_n(i,s) : s \in \prod_{j=i+1}^k (\sum_{m=0}^n Q(j,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(j,m))\}$. **Afirmación 1:** $\{A^f : f \in \omega^\omega$ uno a uno$\}$ es $k$-ligada. Primero veamos que $\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{j=0}^k B_n^{f_j} \subseteq \bigcap_{j=0}^k A^{f_j}$. Sea $x \in \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{j=0}^k B_n^{f_j}$, entonces existe $m \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $x \in \bigcap_{j=0}^k B_m^{f_j}$, entonces $x \in B_m^{f_j}$ para todo $j \leq k$, así $x \in A^{f_j}$ para todo $j \leq k$, luego $x \in \bigcap_{j=0}^k A^{f_j}$.

Es suficiente mostrar que $\bigcap_{j=0}^k B_n^{f_j} \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Defínase recursivamente $\phi = \langle a_0, ..., a_k\rangle$. Pongasé $s_0 = \emptyset$ y $a_k = \langle x(f_0, s_0)\rangle, a_{k-1} = \langle x(f_1, s_1)\rangle, ..., a_0 = \langle x(f_k, s_k)\rangle$. De aquí que $b_\phi \in \bigcap_{j=0}^k B_n(k-j, s_j) \subseteq \bigcap_{j=0}^k B_n^{f_j}(k-j) \subseteq \bigcap_{j=0}^k B_n^{f_j}$.

**Afirmación 2:** $f[A^f] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ para toda función uno a uno.

Primero, estimemos la suma de los recíprocos en $f[B_n^f(i,s)]$ para todo $i \leq k$ y $s \in \prod_{j=i+1}^k (\sum_{m=0}^n Q(j,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(j,m))$. Como

$$|f[B_n^f(i,s)]| = \bigodot_{j=0}^{i-1} Q(j,n)$$

se tiene que:

$$\sum_{a \in B_n^f(,s)} \frac{1}{f(a)} \leq \bigodot_{j=0}^{i-1} Q(j,n) \cdot \frac{1}{\text{mín } f[B_n^f(i,s)]} = \frac{2^{n\cdot(2^{i-1})}}{m^f_{x(f,s)}}. \tag{1.1}$$

Pongamos $q_{i,n} = \bigodot_{j=i+1}^k Q(j,n)$ y enumere

$$\{m_{x(f,s)} : s \in \prod_{j=i+1}^k (\sum_{m=0}^n Q(j,m) \setminus \sum_{m=0}^{n-1} Q(j,m))\}$$

en forma creciente como $\{m_l : l = 1, ..., q_{i,n}\}$. Ahora, como $f$ es uno a uno, se tiene que $m_l \geq l \cdot Q(i,n)$ para todo $l$, de aquí que:

$$\sum_{l=1}^{q_{i,n}} \frac{1}{m_l} \leq \frac{1}{Q(i,n)} \cdot \sum_{l=1}^{q_{i,n}} \frac{1}{l} \leq \frac{1 + \log_2 q_{i,n}}{Q(i,n)} = \frac{1 + \sum_{j=i+1}^k \log_2 Q(j,n)}{Q(i,n)}. \tag{1.2}$$

Además

$$1 + \sum_{j=i+1}^k \log_2 Q(j,n) \leq 1 + n \sum_{j=0}^k 2^j = 1 + n(2^{k+1} - 1) \leq n2^{k+1} \tag{1.3}$$

De (5.1),(5.2) y (5.3), obtenemos

$$\sum_{a\in B_n^f(i)} \frac{1}{f(a)} \leq \bigodot_{j=0}^{i-1} Q(j,n) \cdot \frac{1+\sum_{j=i+1}^{k} \log_2 Q(j,n)}{Q(i,n)} = \frac{n2^{k+1}}{2^n}. \tag{1.4}$$

Así que para todo $n \in \omega$ tenemos que:

$$\sum_{a\in B_n^f} \frac{1}{f(a)} \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{n2^{k+1}}{2^n} = \frac{n(k+1)2^{k+1}}{2^n}. \tag{1.5}$$

Y finalmente

$$\sum_{a\in A^f} \frac{1}{f(a)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(k+1)2^{k+1}}{2^n} \leq 2(k+1)2^{k+1}. \tag{1.6}$$

Por lo tanto, $f[A^f] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

❏

Ahora sí, estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente teorema.

[Flašková] (ZFC) Existe un ultrafiltro sumable sobre $\omega$.

Demostración.

Consideremos una familia de subconjuntos infinitos de $\omega$ $\{A_k : k \in \omega\}$ tal que si $n \neq m$ entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$. Por la proposición anterior, para cada $k \in \omega$ existe una familia $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{P}(A_k)$ sumable y $k$-ligada. Por Lema anterior, la familia

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq \omega : (\forall k \in \omega)(\exists U_k \in \mathcal{F}_k)(U_k \subseteq^* F)\}$$

es centrada. Considere $\mathcal{U}$, un ultrafiltro sobre $\omega$, tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Veamos que dicho ultrafiltro es sumable. Note que si $A \subseteq \omega$ es tal que $|\omega \setminus A| < \omega$, entonces $A \in \mathcal{F}$, luego $\mathcal{U}$ es libre. Ahora, sea $f : \omega \to \omega$ uno a uno, dado $k \in \omega$ existe $U_k \in \mathcal{F}_k$ tal que $f[U_k] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Como $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ es $p$-ideal existe $U \in \mathcal{I}$ tal que $f[U_k] \subseteq^* U$ para todo $k \in \omega$ y como $f$ es uno a uno, se tiene que $U_k \subseteq^* f^{-1}[U]$ para todo $k \in \omega$. Luego $f^{-1}[U] \in \mathcal{F}$ y $f[f^{-1}[U]] \subseteq U$, así $f[f^{-1}[U]] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sumable.

$\square$

Existen $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros sumables sobre $\omega$

Demostración.

Sea $\{A_k : k \in \omega\}$ subconjuntos infinitos de $\omega$ tal que si $n \neq m$, entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$. Por lema anterior, para cada $k \in \omega$ existe $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{P}(A_k)$ sumable y $k$-ligada. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre sobre $\omega$. Considere para cada $k \in \omega$,

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_k \cup \{A \setminus F : A \in \mathcal{F}_k, F \in [A_k]^{<\omega}\}$$

Note que $\mathcal{G}_k$ es $k$-ligada y sumable. Ahora, defínase $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ como sigue:

$$F \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \text{ si y sólo si } \{n \in \omega : F \cap A_k \in \mathcal{G}_k\} \in \mathcal{U}$$

Veamos que $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ es familia centrada. Sean $F_0, ...F_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, entonces para cada $i \in \{0, ..., m\}$ se tiene que $\{n \in \omega : F_i \cap A_n \in \mathcal{G}_n\} \in \mathcal{U}$. Ahora, si $n \geq m$ entonces $\bigcap_{i \leq n} F_i \cap A_n$ es infinito y $\bigcap_{i \leq n} F_i \cap A_n \subseteq \bigcap_{i \leq n} F_i$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ es centrada. Considere el ultrafiltro $p_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}}$ generado por $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Veamos que dicho ultrafiltro es sumable. Sea $f : \omega \to \omega$ uno a uno, entonces para todo $k \in \omega$ existe $U_k \in \mathcal{F}_k$ tal que $f[U_k] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ y como $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ es $p$-ideal existe $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ tal que $f[U_k] \subseteq^* A$ para todo $k \in \omega$. Finalmente, considere $f^{-1}[A]$ y note que $f^{-1}[A] \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ y $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$, así $f[f^{-1}[A]] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto, $p_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}}$ es sumable. $\square$

En teorema 1 hemos visto la construcción de un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro amigable. Como lo comentamos anteriormente, es posible ampliar nuestra definición de 1 tal y como lo hace el autor del presente artículo:

¿Será posible construir un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil en ZFC, o más aún un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro en ZFC?

En su tesis doctoral títulada *Ultrafilters and small sets*, responde afirmativamente la pregunta si la Hipótesis del Continuo es cierta y por otro lado asumiendo que se cumple Axioma de Martin para órdenes parciales $\sigma$-centrados; de hecho, construye un $\mathcal{I}$-ultrafiltro para $\mathcal{I}$ cualquier ideal alto en ambos casos.

Para ver que la hipótesis del continuo implica la existencia de $\mathcal{I}$-ultafiltros basta probar que si $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia centrada y $f \in \omega^\omega$ tal que $f[A]\mathcal{I}$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{F} \cup \{A\}$ es centrada y $f[A] \in \mathcal{I}$: Sin pérdida de generalidad $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y notemos que $\{f[A_n] : n \in \omega\}$ es una familia centrada y numerable, entonces existe $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \subseteq^* f[A_n]$ para todo $n \in \omega$ y $B \in \mathcal{I}$ (esto es posible, pues $\mathcal{I}$ es alto). Y note que $f^{-1}[B] \cap A_n$ es infinito para todo $n \in \omega$ y $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ , así pongamos $A = f^{-1}[B]$ funciona.

Por otro lado, asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ es posible probar la existencia de $\mathcal{I}$-ultrafiltros con el mismo razonamiento que utilizamos asumiendo hipótesis del continuo, en el párrafo anterior.

Capítulo 3

# Ultrafiltros Sumables sobre $\omega$

## 1. Sobre la existencia de $\mathcal{I}$-ultrafiltros

En el presente capítulo exhibimos algunas pruebas de consistencia sobre $\mathcal{I}$-ultrafiltros asociadas con los cardinales invariantes $\mathfrak{d}$ y $\mathfrak{h}$ que fueron encontradas al investigar y revisar algunos resultados ya comentados en los capítulos precedentes.

El siguiente lema nos perfila para la construcción de $2^{\mathfrak{c}}$ $\mathcal{I}$-ultrafiltros donde $\mathcal{I}$ es un ideal alto. Para esto, construimos recursivamente un $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}^+)$-árbol en el cual los niveles de dicho árbol serán familias MAD y donde también nos apoyaremos en una de las equivalencias de teorema 6 que mencionamos en la sección 3.

Sean $A \in [\omega]^{\omega}$, $f \in \omega^A$ e $\mathcal{I}$ un ideal alto, entonces existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que para todo $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $f[B] \in \mathcal{I}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{A}$ familia casi ajena y maximal respecto a la propiedad de que siempre que $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $f[B] \in \mathcal{I}$.

Veamos que $\mathcal{A}$ es MAD. Supongasé que no lo es, entonces existe $\mathcal{B}$ MAD tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $C\mathcal{A}$ y notemos que $f[C]C$, pero como $\mathcal{I}$ es alto, entonces existe $D \in [\omega]^{\omega}$ tal que $D \subseteq f[A]$ y $D \in \mathcal{I}$. Ahora consideresé $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[D]\}$ y note que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \{f^{-1}[D]\}$ y además dado $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $|A \cap f^{-1}[D]| < \omega$ y $f^{-1}[D] \in [\omega]^{\omega}$, lo cual es contradictorio, pues $\mathcal{A}$ es maximal respecto a la propiedad.

$\square$

$(\mathfrak{h} = \mathfrak{c})$ Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto sobre $\omega$. Entonces, existen $2^{\mathfrak{c}}$ $\mathcal{I}$-ultrafiltros sobre $\omega$.

Demostración.

Sea $\{f_{\alpha+1} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ enumeración de $\omega^{\omega}$. Construyamos un $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}^+)$-árbol por recursión sobre los niveles asegurándonos que en cada paso de la construcción, $\mathbb{T}_{|\alpha}$ satisface la condición.

$P(\alpha)$ :

1. $\mathbb{T}_{|\alpha}$ es un $(\alpha, \mathfrak{c}^+)$-árbol.
2. $(\forall \beta, \gamma < \mathfrak{c})(\beta < \gamma < \alpha \text{ y } x \in T_\beta)(\exists y \in T_\gamma)(y \subseteq^* x)$.
3. $(\forall \alpha < \mathfrak{c})(x \in T_{\alpha+1} \Rightarrow f_{\alpha+1}[x] \in \mathcal{I})$

Para comenzar, póngase $T_0 = \{\omega\}$. Si $\mathbb{T}_{\alpha+1}$ está definido y satisface $P(\alpha+1)$. Definamos $T_{\alpha+1}$ como sigue:

Para cada $x \in T_\alpha$ por Lema 4.1, existe $\mathcal{A}_x$ MAD tal que para todo $B \in \mathcal{A}_x$ se tiene que $f_{\alpha+1}[B] \in \mathcal{I}$ y $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{P}(x)$. Pongamos

$$T_{\alpha+1} = \bigcup \{\mathcal{A}_x : x \in T_\alpha\}.$$

Así $\mathbb{T}_{|\alpha+2}$ está definido y satisface $P(\alpha+2)$.

Sea $\alpha$ un ordinal límite y asumamos que $\mathbb{T}_\alpha$ está definido y satisface $P(\alpha)$. Como $\{T_{\beta+1} : \beta < \alpha\}$ es colección de familias MAD, con $\alpha < \mathfrak{c} = \mathfrak{h}$, existe $\mathcal{A}_\alpha$ MAD que refina a $T_{\beta+1}$ para cada $\beta < \alpha$. Pongamos $T_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$.

Veamos que $\mathbb{T}_{\alpha+1}$ satisface $P(\alpha+1)$. Sean $\beta < \alpha$ y $x \in \mathcal{T}_\beta$. Como $T_\alpha$ es MAD, entonces existe $y \in T_\alpha$ tal que $x \cap y$ es infinito y más aún, $T_\alpha$ es refinamiento de $T_\beta$ de aquí que existe $z \in T_\beta$ tal que $y \subseteq^* z$. Si $y \setminus x$ es infinito, entonces $x \neq z$ y $z \cap x$ es infinito, lo cual es contradictorio, pues $z, x \in T_\beta$ y $T_\beta$ es MAD. Por lo tanto, $y \subseteq^* x$.

Consideremos la colección $\mathbb{B}$ de todas las ramas del árbol $\mathbb{T}$: Primeramente, notemos que $\mathbb{B}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ pues el árbol es de anchura $\mathfrak{c}^+$ y altura $\mathfrak{c}$. Enumeremos $\mathbb{B} = \{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y notemos que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ la rama $b_\alpha$ genera un ultrafiltro sobre $\omega$ que de hecho es $\mathcal{I}$-ultrafiltro puesto que si $g \in \omega^\omega$ entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ de modo que $g = f_{\alpha+1}$ y por construcción para cada $x \in T_{\alpha+1}$ se tiene que $f_\alpha[x] \in \mathcal{I}$.

❏

Antes de pasar al siguiente lema, veamos que para la definición del cardinal invariante $\mathfrak{d}$ es posible cambiar $\leq^*$ por $\leq$: Sea $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ con $|\mathcal{F}| < \mathfrak{d}$, como $|\mathcal{F}| < \mathfrak{d}$, entonces existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f \not\leq^* g$ así que $\mathcal{F}$ no es dominante según $\leq$. Por otro lado, sea una familia dominante $\mathcal{F}$ según $\leq^*$ y consideremos la familia $\mathcal{F}^* = \{g \in \omega^\omega : (\exists f \in \mathcal{F})(f =^* g)\}$ la cual es dominante según $\leq^*$ puesto que si $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{F}$ de modo que $f \leq^* g$, i.e, existe $N \in \omega$ suficientemente grande tal que si $n \geq N$, entonces $f(n) \leq g(n)$. Luego, defínase $h : \omega \to \omega$ como $h(n) = f(n)$ si $n < N$ y $h(n) = g(n)$ si $n \geq N$. Se cumple que $f \leq h$ y $h \in \mathcal{F}^*$. Por último nótese que $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}^*| \leq |\mathcal{F}| \cdot \omega = |\mathcal{F}|$.

($\mathfrak{d} = \omega_g$) Existe una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ tal que $|\mathcal{F}| = \omega_1$ y para toda funcion $f : \omega \to \omega$ finito a uno, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$.

Demostración.

Sea $f \in \omega^\omega$ finito a uno. Sea $m_0 = 0$, $m_1 = \text{máx}\{m \in \omega : f(m) = \text{mín}\, f[\omega]\}, m_{i+1} = \text{máx}\{m \in \omega : f(m) = \text{mín}\{f(k) : k > m_i\}\}$ con $i > 0$. Ahora, pongamos $k_n = f(m_{n+1})$ para todo $n \in \omega$.

Sea $g(n) = k_i$ si y sólo si $m_i \leq n \leq m_{i+1}$. Defínase $h(n) = m_{n+1}$. Como $\mathcal{F}$ es dominante, existe $l \in \mathcal{F}$ tal que $h \leq l$. Ahora, considere

$$l'(n) = \text{mín}\{k \in \omega : l(k) \geq n\}.$$

Veamos que $l' \leq g$. Sea $k \in \omega$, entonces existe $i \in \omega$ tal que $m_i \leq k \leq m_{i+1}$ y note que $i \leq k_i$. Por último, $l'(k) \leq i$ pues $m_i \leq k \leq m_{i+1}$ y $l(i) \geq h(i) = m_{i+1} \geq k$. Por lo tanto, $l' \leq g \leq f$. ❑

($\mathfrak{d} = \omega_1$) Existe un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil.

Demostración.

Sea $\mathcal{F} = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como en Lema 4,3. Por inducción transfinita construyamos bases de filtro $\mathcal{F}_\alpha$ tal que:

1. $\mathcal{F}_0$ es el filtro de Fréchet.
2. $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$, si $\alpha < \beta$.
3. $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$, si $\gamma$ es límite.
4. $(\forall \alpha < \omega_1)(|\mathcal{F}_\alpha| \leq \alpha \cdot \omega)$.
5. $(\forall \alpha < \omega_1)(\exists A \in \mathcal{F}_{\alpha+1})(\sum_{m\in A} \frac{1}{g_\alpha(m)} < \infty)$.

Supongamos que tenemos construido $\mathcal{F}_\alpha$. Si existe $A \in \mathcal{F}_\alpha$ tal que $\sum_{m\in A} \frac{1}{g_\alpha(m)} < \infty$, entonces hacemos $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$.

Ahora, tenemos $\mathcal{F}_\alpha = \{A_n : n < \omega\}$ y $g_\alpha[A_n]$ es infinito para cada $n \in \omega$. Escójase $A'_n \subseteq A_n$ infinito tal que $\sum_{m\in A_n} \frac{1}{g_\alpha(m)} \leq \frac{1}{2^n}$ Pongamos $C = \bigcup_{n\in\omega} A'_n$, entonces $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{C\}$ es como se requiere.

Para concluir, pongamos $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, note que por construcción, $\mathcal{F}$ es centrada. Ahora considérese cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Veamos que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil.

Sean $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre $\omega$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ y $f \in \omega^\omega$ finito a uno, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $g_\alpha \leq f$ y por construcción se tiene que existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_{n\in f[A]} \frac{1}{n} \leq \sum_{m\in A} \frac{1}{f(m)} \leq \sum_{m\in A} \frac{1}{g_\alpha(m)} < \infty$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil sobre $\omega$. ❑

Observemos que lema 1 nos indica que existe una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ de cardinalidad $\mathfrak{d}$ que representa a todas las funciones finito a uno de $\omega$ en sí mismo, en el sentido de que sí $f \in \omega^\omega$ finito a uno, entonces existe $g \in \mathcal{F}$ de modo que $g \leq f$. De este modo, usando lema es posible construir un árbol de altura $\mathfrak{d}$ de modo que en cada nivel del árbol le asociamos una familia MAD donde cada elemento de la familia es testigo para una función de la familia $\mathcal{F}$ tal y como lo hicimos en la proposición 1:

($\mathfrak{h} = \mathfrak{d}$) Existen $2^{\mathfrak{d}}$ $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltros débiles.

## 2. Sobre $p$-puntos-rápidos-$q$-puntos y sumables

Como siempre, durante el folklore matemático cabe siempre la pregunta: ¿qué relación hay entre los ultrafiltros sumables con respecto a una función $g \in c_0 \setminus l_1$ y los ultrafiltros selectivos, los $p$-puntos, los $q$-puntos, los filtros rápidos?

Veamos que si es $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo entonces $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro, donde $g \in c_0 \setminus l_1$. Sea $f : \omega \to \omega$ y suponga que $\sum_{n \in f[\omega]} g(n) = \infty$, de otro modo para cualquier elemento $A$ en $\mathcal{U}$ se tiene que $f[A] \in \mathcal{I}_g$. Construyamos una sucesión de números naturales $\{N_k : k \in \omega\} \subseteq f[\omega]$ satisfaciendo:

- $N_k < N_{k+1}$ para todo $k \in \omega$.
- Si $m \in [N_k, N_{k+1})$, entonces $g(m) < \frac{1}{2^k}$.

Como $g \in c_0 \setminus l_1$ existe $N_0$ suficientemente grande de modo que si $n \in f[\omega] \setminus N_0$, entonces $g(n) < 1$.

Suponga que se tiene construido hasta $N_k$. Sea $N \in \omega$ de manera que si $n \geq N$ se tiene que $g(n) < \frac{1}{2^{k+1}}$ y además con $N > N_k$ (es posible, pues $f[\omega]$ es infinito) y pngase $N_{k+1} = N$.

Finalmente, consideremos $\mathcal{P} = \{f^{-1}([0, N_0))\} \cup \{f^{-1}([N_k, N_{k+1})) : k \in \omega\}$ la cual es partición de $\omega$ y como $\mathcal{U}$ es selectivo existe $A \in \mathcal{U}$ de modo que $|A \cap P| = 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$ y

$$\sum_{n \in A} g(n) \leq \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Ahora, note que si $\mathcal{U} \in \omega^*$ es un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro y consideramos el ultrafiltro $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sobre $\omega \times \omega$ el cual fue presentado en el capítulo 2 como ejemplo 3 obtenemos que: Sea $F : \omega \times \omega \to \omega$ y consideresé $F_n(m) = F(n, m)$. Como $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_g$ ultrafiltro existe $A_n \in \mathcal{U}$ de modo que

$$\sum_{m \in F_n[A_n]} g(m) < \frac{1}{2^n}$$

Pongamos $A = \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times A_n$. Notemos que $A \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ y

$$F[\bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times A_n] = \bigcup_{n\in\omega} F[\{n\} \times A_n] = \bigcup_{n\in\omega} F_n[A_n].$$

Finalmente

$$\sum_{m \in F[A]} g(m) = \sum_{m \in F_n[A_n]} g(m) \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} < \infty$$

y $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ no es $p$-punto, pues si consideremos $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \omega\}$ partición de $\omega \times \omega$ y existiese $A \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ de manera que $|A \cap P_n| < \omega$ para todo $n \in \omega$ obtenemos que $\{n \in \omega : \{m \in \omega : (n, m) \in A\} \in \mathcal{U}\} = \emptyset\mathcal{U}$.

Con respecto a los $q$-puntos se tiene lo siguiente.

[Flašková] ($\mathrm{MA}_{\mathrm{contable}}$) Existe un $q$-punto el cual no es un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro para todo ideal sumable alto.

Sin embargo, si sólo son consideradas las funciones finito a uno: Dado $\mathcal{U} \in \omega^*$ el cual es $q$-punto y $g \in c_0 \setminus l_1$ se tiene que $\mathcal{U}$ sí es $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro: Sea $f : \omega \to \omega$ finito a uno, como $g \in c_0 \setminus l_1$ escójase partición de $\omega$ en intervalos como sigue:

$$m \in [N_k, N_{k+1}) \Rightarrow g(m) < \frac{1}{2^k}.$$

con $N_k < N_{k+1}$ para todo $k \in \omega$. Luego, $\{f^{-1}([N_k, N_{k+1}]) : k \in \omega\}$ es partición de $\omega$ en piezas finitas y como $\mathcal{U}$ es $q$-punto existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $|A \cap f^{-1}([N_k, N_{k+1}]) = 1$ con lo cual se tiene lo requerido. [Flašková] ($\mathrm{MA}_{\mathrm{contable}}$) Existe $\mathcal{U} \in \omega^*$ tal que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}_g$-ultrafiltro para todo ideal sumable alto $\mathcal{I}_g$ y $\mathcal{U}$ no es $q$-punto.

Capítulo 4

# Un modelo sin selectivos

Finalmente, concluimos con el presente capítulo el cual estara enfocado a estudiar un teorema de K. Kunen sobre ultrafiltros selectivos usando el *forcing de Solovay*, mejor conocido como el *random forcing* el cual está definido como el cociente de la $\sigma$-álgebra de Borel de $2^\kappa$, módulo el ideal de conjuntos nulos de $2^\kappa$, respecto a la medida, lo que nos involucrara con teoría de modelos y forcing, y para esto dividimos en dos secciones para una mejor y más cómoda lectura.

## 1. Nociones de Forcing

El metódo de *forcing* fue introducido por Paul Cohen en su prueba de la independencia de la Hipótesis del Continuo y el Axioma de Elección. Dicha técnica resultó ser bastante fructífera para producir un gran número de modelos y resultados de consistencia relativa. La idea principal del forcing es que a partir de un modelo transitivo $M$ de ZFC extender este a través de un *nuevo* conjunto $G$ para obtener un nuevo modelo transitivo $M[G]$ de ZFC, dicha extensión es llamada *extensión génerica*.

Sea $M$ un modelo transitivo de ZFC, el *modelo base*. En $M$, consideremos un conjunto parcialmente ordenado $\langle \mathbb{P}, < \rangle$. Llamamos a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ una *noción de forcing* y a los elementos de $\mathbb{P}$ *condiciones*. Decimos que $p$ es *más fuerte* que $q$ si $p < q$. Si $p$ y $q$ son condiciones y existe $r$ tal que $r < p$ y $r < q$, decimos que $p$ y $q$ son *compatibles*; de otro modo, decimos que son incompatibles y lo denotamos como $p \perp q$. Un conjunto $W \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena si para todo $p, q$ en $W$ estos son incompatibles. Un conjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ de manera que $q \leq p$. Recordemos que un conjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* si $G$ es no vacío, si $p \leq q$ y $p \in G$, entonces $q \in G$ y finalmente si $p, q \in G$ entonces existe $r \in G$ de modo que $r \leq p$ y $r \leq q$. Un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es *génerico* sobre $M$ si $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \subseteq \mathbb{P}$ denso en $M$. Por $V^{\mathbb{P}}$ denotamos la clase de $\mathbb{P}-$nombres y si $M$ es un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ por $M^{\mathbb{P}}$ denotamos la colección $\{\tau \in M : \tau \text{ es un } \mathbb{P} - \text{nombre}\}$. Anticipamos que para este capítulo recordaremos una serie de de teoremas sin involucrarnos en sus pruebas, para ver más detalle de dichas pruebas veáse [**12**].

Para el siguiente teorema, recordemos la siguiente definición.

Sean $M$ modelo transitivo, $\mathbb{P}$ y $\varphi$ una fórmula. Diremos que *p fuerza* a $\varphi$, lo cual denotaremos por $p \Vdash \varphi$, si:

$$(\forall G \subseteq \mathbb{P} \text{ filtro M}-\text{genérico})(p \in G \Longrightarrow M[G]).$$

[De verdad]

Sean $M$ modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P}$ una noción de forcing en $M$. Si $\sigma$ es una oración del lenguaje de forcing, entonces para todo $G \subset \mathbb{P}$ filtro génerico sobre $M$ se tiene que:

$$M[G] \models \sigma \text{ si y sólo si existe } p \in G \text{ tal que } p \Vdash \sigma.$$

Antes de seguir recordemos una lista de propiedades de forcing que son de suma importancia.

Sean $M$ un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P}$ una noción de forcing en $M$ y sea $M^{\mathbb{P}}$ la clase de todos los nombres en $M$, entonces se tiene que:

1. Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \varphi$.
2. No existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \neg\varphi$.
3. Para todo $p$ existe $q \leq p$ de modo que $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \neg\varphi$.
4. $p \Vdash \varphi$ si y sólo si no existe $q \in \mathbb{P}$ de modo que $q \leq p$ y $q \Vdash \varphi$.
5. $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.
6. $p \Vdash \forall x\varphi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi(\dot{a})$ para todo $\dot{a} \in M^{\mathbb{P}}$.
7. $p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si para todo $q \leq p$ existe $r \leq q$ tal que $r \Vdash \varphi$ o $r \Vdash \psi$.
8. $p \Vdash \exists\varphi$ si y sólo si para todo $q \leq p$ existen $r \leq q$ y $\dot{a} \in M^{\mathbb{P}}$ de modo que $r \Vdash \varphi(\dot{a})$.

También no olvidemos los $H(\theta)$: Sea $\theta$ un cardinal infinito y recordemos que $H(\theta)$ es la colección $\{A : |\text{cltr}(A)| < \theta\}$, es decir, es la colección de conjuntos de cardinalidad hereditariamente menor que $\theta$. Tenemos el siguiente resultado sobre $H(\theta)$.

Si $\theta$ es un cardinal regular no numerable, entonces $H(\theta) \models \text{ZFC} - \text{P}$, i.e, $H(\theta)$ modela los axiomas de Zermelo-Fraenkel con elección excepto Axioma de Conjunto Potencia.

Y bajo esta línea no podemos dejar atrás el teorema sobre submodelos elementales de Löwenheim-Skolem que reza como sigue:

[Löwenheim-Skolem] Sea $\mathfrak{A}$ una estructura con universo $A$, y $X \subseteq A$. Entonces existe una subestructura elemental $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ cuyo universo contiene a $X$ y su cardinal es $\max\{\aleph_0, |X|\}$.

Si $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$, $\theta$ es regular y $\kappa \in \mathfrak{M}$ es un cardinal tal que $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, entonces para todo $X \subseteq \mathfrak{M}$ con $|X| \leq \kappa$, $X$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$. En particular, cada elemento numerable de $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$.

## 2. Teorema de Kunen sobre selectivos

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa. Una medida sobre $\mathbb{B}$ es una función $\mu : \mathbb{B} \to [0,1]$ que satisface lo siguiente:

1. $\mu(0) = 0$.
2. Si $a \leq b$, entonces $\mu(a) \leq \mu(b)$.
3. Si $\{a_n : n \in \omega\}$ es una anticadena en $\mathbb{B}$, entonces

$$\sum_{n\in\omega} \mu(a_n) = \mu(\bigvee\{a_n : n \in \omega\}).$$

Decimos que una medida $\mu$ es *estríctamente positiva* si satisface que $\mu(a) = 0$ si y sólo si $a = 0$.

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa. Decimos que $\mathbb{B}$ es un álgebra de medida si existe $\mu$ sobre $\mathbb{B}$ como en la definición 2 tal que $\mu$ es estríctamente positiva.

Sea $\mu$ la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$. Considere $\mathbb{B} = \text{Borel}/\mathcal{N}$, donde $\mathcal{N}$ es la colección $\{A \subseteq [0,1] : \mu(A) = 0\}$. Note que $\mathbb{B}$ es un álgebra de medida.

Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de medida, entonces $\mathbb{B}$ es c.c.c.

Demostración. Supongamos que $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathbb{B}$. Ahora, $\mu(\mathbf{1}) = a$ para algún $a \in (0,\infty)$ (pues $\mu$ es estríctamente positiva). Para cada $\alpha < \omega_1$ existe $n_\alpha \in \omega$ de modo que $\frac{1}{n_\alpha} < \mu(a_\alpha)$ y notemos que existe $n \in \omega$ tal que $Y = \{\alpha < \omega_1 : n_\alpha = n\}$ es no numerable. Sean $m > n \cdot a$ y $\{a_{\alpha_i} : i \leq m\} \subset Y$ y notemos que

$$a \geq \mu(\bigvee\{a_{\alpha_i} : i \leq m\}) = \sum_{i\leq m} \mu(a_{\alpha_i}) \geq m \cdot \frac{1}{n} > \frac{n\cdot a}{n}$$

, lo cual es contradictorio. ❑

Sean $M$ modelo numerable y transitivo de ZFC y $G$-filtro $\mathcal{B}_\mu$-génerico sobre $M$. Entonces para toda $f : \omega \to \omega$ en $M[G]$ existe $g \in M$ tal que $f(n) < g(n)$ para toda $n \in \omega$.

Demostración. Sea $p \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$; encontremos $q < p$ y alguna $g \in \omega^\omega \cap M$ de tal manera que $g$ domina a $\dot{f}$. Para cada $n \in \omega$ escójase $g(n)$ suficientemente grande de manera que:

$$\mu(p \setminus [[\dot{f}(n) < g(n)]]) < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mu(p).$$

Consideremos el conjunto boreliano $q = p \cap \bigcap_{n\in\omega}[[\dot{f}(n) < g(n)]]$ y notemos que $\mu(q) \leq \frac{\mu(p)}{2}$, $q < p$ y $q \Vdash [[\dot{f}(n) < g(n)]]$ para todo $n \in \omega$.

$\square$

Brevemente, recordemos la noción de $\mathcal{U}$-límite: Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\omega$ y $\langle a_n : n \in \omega\rangle$. Decimos que un número real $a$ es el $\mathcal{U}$-límite de la sucesión y lo denotamos por:

$$\mathcal{U} \lim_{n\in\omega} a_n = a.$$

si para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $\{n \in \omega : |a_n - a| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$. Observemos que si un $\mathcal{U}$-límite existe, entonces es único. También si $\langle a_n : n \in \omega\rangle$, $\langle b_n : n \in \omega\rangle$ son sucesiones de números reales, entonces $\mathcal{U}\lim_{n\in\omega}(a_n + b_n) = \mathcal{U}\lim_{n\in\omega} a_n + \mathcal{U}\lim_{n\in\omega} b_n$, siempre y cuando los $\mathcal{U}$-límites existan: Supongamos que $\mathcal{U}\lim_{n\in\omega} a_n = a$ y $\mathcal{U}\lim_{n\in\omega} b_n = b$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\{n : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$, luego $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Y como

$$\{n : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{n : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U},$$

se tiene que $\{n : |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. También si $\langle a_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\mathcal{U}\lim a_n$ existe, como muestra el siguiente lema.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\omega$ y sea $\langle a_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión acotada de números reales. Entonces $\lim_{\mathcal{U}} a_n$ existe. Demostración. Como $\langle a_n : n \in \omega\rangle$ es acotada, existen números $a$ y $b$ tal que $a < a_n < b$ para todo $n \in \omega$. Para cada $x \in [a, b]$, sea

$$A_x = \{n : a_n < x\}$$

Claramente, $A_a = \emptyset, A_b = \omega$ y $A_x \subseteq A_y$, siempre que $x \leq y$. Por lo tanto, $A_a\mathcal{U}$, $A_b \in \mathcal{U}$ y siempre que $A_x \in \mathcal{U}$ y $x \leq y$ se tiene que $A_y \in \mathcal{U}$. Ahora sea

$$c = \sup\{x : A_x\mathcal{U}\};$$

Afirmamos que $c = \lim_{\mathcal{U}} a_n$. Como para cada $\varepsilon > 0$, $A_{c-\varepsilon}\mathcal{U}$ mientras que $A_{c+\varepsilon} \in \mathcal{U}$ y como $A_{c+\varepsilon} = A_{c-\varepsilon} \cup \{n : c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon\}$, de aquí que $\{n : |a_n - c| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. $\square$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo y $\{\epsilon_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathcal{U}} |\epsilon_n| = 0$$

Entonces, existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que $\sum_{n\in A} |\epsilon_n| < \infty$.

Demostración.

Para cada $n \in \omega$, sea $A_n \in \mathcal{U}$ de manera que si $k \in A_n$ entonces $|\epsilon_k| < \frac{1}{2^{n+1}}$ (esto es posible, pues $\lim_{\mathcal{U}} |\epsilon_n| = 0$). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \omega$ y que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$. Ahora, la familia $\{\omega \setminus A_0\} \cup \{A_n \setminus A_{n+1} : n \in \omega\}$ es una partición de $\omega$. Note que $\omega \setminus A_0\mathcal{U}$ y $A_n \setminus A_{n+1}\mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$, pues si existiese $k \in \omega$ de manera que $A_k \setminus A_{k+1} \in \mathcal{U}$, se tiene que $A_{k+1} \cap (A_k \setminus A_{k+1}) = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{U}$ es selectivo existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap A_n \setminus A_{n+1}| = 1$ así que

$$\sum_{n\in A} |\epsilon_n| \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} < \infty.$$

❑

Una función $\rho : \mathcal{P}(\omega) \to [0, 1]$ es una medida finitamente aditiva si y sólo si para cualesquiera $a, b \subseteq \omega$ ajenos se tiene que

$$\rho(a \cup b) = \rho(a) + \rho(b) \text{ y}$$
$$\rho(\emptyset) = 0, \rho(\omega) = 1.$$

Se dice que $\rho$ es *no atómica* si para cada $x \subseteq \omega$ tal que $\rho(x) > 0$ existe $y \subset x$ de manera que $0 < \rho(y) < \rho(x)$.

Si $\rho$ es una medida finitamente aditiva y no atómica, entonces el conjunto $\{x \subseteq \omega : \rho(x) = 1\}$ no puede ser extendido a un $p$-punto.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, existe $\mathcal{U}$ $p$-punto de modo que $\{x \subseteq \omega : \rho(x) = 1\} \subseteq \mathcal{U}$.

Por recursión construyamos $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\{\rho(A_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es estríctamente decreciente como sigue:

1. $A_0 = \omega$.
2. $(\forall\alpha < \omega_1)(\rho(A_\alpha) > 0)$.
3. $(\forall\alpha, \beta < \omega_1)(\alpha < \beta)$ implica $\rho(A_\beta) < \rho(A_\alpha)$.
4. $(\forall\alpha < \omega_1)(A_\alpha \in \mathcal{U})$.

Note que por 1) ya ha comenzado la recursión. Suponga que se ha definido $A_\alpha$. Tenemos que $\rho(A_\alpha) > 0$ con $A_\alpha \in \mathcal{U}$. Como $\rho$ es no átomica existe $y \subset A_\alpha$ de modo que $0 < \rho(y) < \rho(A_\alpha)$. Defínase $A_{\alpha+1} = y$ si $y \in \mathcal{U}$. Si $y\mathcal{U}$ tenemos que $y \cup A_\alpha \setminus y = A_\alpha$ y por teorema 3 se tiene que $A_\alpha \setminus y \in \mathcal{U}$. Ahora, como $\rho(A_\alpha \setminus y) + \rho(y) = \rho(A_\alpha)$ obtenemos que $\rho(A_\alpha \setminus y) > 0$ y $\rho(A_\alpha) > \rho(A_\alpha \setminus y)$.

Si $\gamma < \omega_1$ es límite. Suponga que se ha definido para todo $\alpha < \gamma$. Sea $A \in \mathcal{U}$ pseudointersección de $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$ (esto es posible, pues $\mathcal{U}$ es $p$-punto). Note que $\rho(A) > 0$ pues si $\rho(A) = 0$, se tiene que $\rho(\omega \setminus A) = 1$, luego $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$ lo cual es contradictorio. Además $\rho(A) \leq \rho(A_\alpha)$ para todo $\alpha < \gamma$ puesto que $A_\alpha = (A_\alpha \setminus A) \cup (A_\alpha \cap A)$ y $A = (A \setminus A_\alpha) \cup (A_\alpha \cap A)$ de aquí que $\rho(A) = \rho(A_\alpha \cap A)$. y $\rho(A_\alpha \cap A) + \rho(A_\alpha \setminus A) = \rho(A_\alpha)$. Finalmente, como $\rho$ es no atómica existe $y \subset A$ de manera que $0 < \rho(y) < \rho(A)$ si $y \in \mathcal{U}$ póngase $A_\gamma = y$, de otro modo $A \setminus y \in \mathcal{U}$ y $\rho(A \setminus y) < \rho(A) \leq \rho(A_\alpha)$. Pongamos $\{\rho(A_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ la cual es una sucesión estríctamente decreciente, lo cual es contradictorio. ❑

No olvidemos que si $\mathbb{B} \in M$, donde $\mathbb{B}$ es un álgebra booleana completa, $M$ es un modelo transitivo de ZFC y $\tau_0, \tau_2, ..., \tau_n \in M$, entonces

$$[[\phi(\tau_0, \tau_2, ..., \tau_n)]] = \bigvee\{p \in \mathbb{B} : p \Vdash \phi(\tau_0, ..., \tau_n)\}.$$

$[[\phi(\tau_0, \tau_2, ..., \tau_n))]]$ es llamada la veracidad de $\phi(\tau_0, ..., \tau_n)$.

Sean $M$ un modelo ZFC+CH, $\mathcal{U}$ ultrafiltro selectivo, $\kappa \geq \omega_2$ cardinal regular, $\mu$ la medida de Haar en $2^\kappa$ y $G$ filtro $\mathbb{B}(\kappa)$-genérico sobre $M$. Entonces en $M[G]$ no hay $p$-puntos que extiendan a $\mathcal{U}$.

Demostración. Definamos una medida finitamente aditiva $\rho$ en $\mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$ como sigue:

Si $\dot{x}$ es un nombre para un subconjunto infinito de $\omega$, pongamos

$$\rho(\dot{x}) = \mathcal{U}\lim_{n\in\omega}\mu([[n \in \dot{x}]])$$

Notemos que $\rho$ está bien definida, pues para cualesquier sucesión acotada de números reales a este le correspone un único número real, por lema 2. Supongamos que $\dot{x}, \dot{y}$ son nombres para subconjuntos infinitos de $\omega$. Ahora, para cada $n \in \omega$ sea $B^n_{\dot{x}} = [[n \in \dot{x}]]$ y $B^n_{\dot{y}} = [[n \in \dot{y}]]$. Pongamos $\mu(B^n_{\dot{x}}) = \epsilon^n_{\dot{x}}$, $\mu(B^n_{\dot{y}}) = \epsilon^n_{\dot{y}}$ y notemos que $\epsilon^n_{\dot{x}\cup\dot{y}} = \epsilon^n_{\dot{x}} + \epsilon^n_{\dot{y}}$ por la propiedad mencionada en $\mathcal{U}$-límites.

Veamos que $\rho$ es no atómica: Sea $\dot{x}$ un nombre para un subconjunto infinito de $\omega$ tal que $\mathbf{1} \Vdash \rho(\dot{x}) > 0$. Ahora, para cada $n \in \omega$ escójase $q_n \subset [[n \in \dot{x}]]$ tal que $\mu(q_n) \leq \frac{1}{2}\mu([[n \in \dot{x}]])$ y consideremos $\dot{y} = \{\langle n, q_n\rangle : n \in \omega\}$ con lo cual tenemos que

$$0 < \rho(\dot{y}) = \mathcal{U}\lim_{n\in\omega}\mu([[n \in \dot{y}]]) = \mathcal{U}\lim_{n\in\omega}\mu(q_n) < \mathcal{U}\lim_{n\in\omega}\mu(\dot{x}) = \rho(\dot{x}).$$

Ahora bien, usaremos la selectividad de $\mathcal{U}$ para demostrar que si $\rho(\dot{x}) = 1$, entonces $\mathbf{1} \Vdash \dot{x} \in \check{\mathcal{U}}$. Basta probar que si $\rho(\dot{x}) = 0$, entonces $\mathbf{1} \Vdash \rho(\dot{x}) \Rightarrow (\exists y \in \check{\mathcal{U}})(y \cap \dot{x} = \emptyset)$: Sea $p \in \mathbb{B}(\kappa)$ tal que $\mu(p) = \epsilon$ y consideremos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ como $\mathcal{U}$ es selectivo, por lema 2 existe $A \in \mathcal{U}$ de manera que

$$\sum_{n\in A} \mu([[n \in \dot{x}]]) < \delta$$

pongamos $q = p \setminus \bigvee_{n\in A}[[n \in \dot{x}]]$, con lo cual obtenemos que $q < p$, $\mu(q) > 0$ y $q \Vdash \dot{x} \cap A = \emptyset$, pues para todo $n \in A$ se tiene que $[[n \in \dot{x}]] \cap q = \emptyset$ y así $q \leq [[n\dot{x}]]$. ❏

Antes del siguiente lema, recordemos que si $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$, entonces un *nombre bonito* para un subconjunto de $\sigma$ es $\tau$ de la forma $\bigcup\{\{\pi\}\times A_\pi : \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$, donde $A_\pi$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. También tenemos la siguiente proposición que es de suma importancia:

Sea $M$ modelo numerable, transitivo de ZFC. Si $\mathbb{P} \in M$ y $\sigma, \mu \in M^{\mathbb{P}}$, entonces existe un nombre bonito $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de $\sigma$ tal que

$$\mathbf{1} \Vdash (\mu \subseteq \sigma \Rightarrow \mu = \tau).$$

Demostración. Para cada $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$, sea $A_\pi \subset \mathbb{P}$ tal que:

1. $(\forall p \in A_\pi) \Rightarrow (p \Vdash \pi \in \mu)$.
2. $A_\pi$ es una anticadena en $\mathbb{P}$, y
3. $A_\pi$ es maximal con respecto a 1) y 2).

Pongamos

$$\tau = \{\{\pi\} \times A_\pi : \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$$

Para mostrar que $\mathbf{1} \Vdash (\mu \subset \sigma) \Rightarrow (\mu = \tau)$ , mostremos que siempre que $G$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M$, de modo que $\mu_G \subset \sigma_G \Rightarrow \mu_G = \tau_G$. Asumamos que $\mu_G \subset \tau_G$. Sea $a \in \mu_G$. Como $\mu_G \subset \sigma_G$, $a = \tau_G$ para algún $\tau \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Si $A_\pi \cap G \neq \emptyset$, consideremos $p \in A_\pi \cap G$; entonces $\langle \pi, p\rangle \in \tau$ y $p \in G$, así que $a = \pi_G \in \tau_G$. Por otro lado, si $A_\pi \cap G = \emptyset$, sea $q \in G$ tal que $p \perp q$ para todo $p \in A_\pi$. Sea $q' \in G$ tal que $q' \Vdash \pi \in \mu$, y consideremos $r \in G$ tal que $r \leq q$ y $r \leq q'$; pongamos $A_\pi \cup \{r\}$ y notemos que satisface 1) y 2), contradiciendo la maximalidad de $A_\pi$

Finalmente, veamos que $\tau_G \subset \mu_G$; sea $a \in \tau_G$, entonces $a = \pi_G$ donde $\langle \pi, p\rangle \in \tau$ para algún $p \in G$. Por definición de $\tau$, obtenemos que $p \Vdash \tau \in \mu$, así que $a = \pi_G \in \mu_G$.

❏

Sean $G$ filtro $\mathbb{B}(\kappa)$ genérico sobre $V$, $\kappa \geq \omega_2$ regular y $\mathcal{U} \in V[G]$ ultrafiltro selectivo entonces existe $Y \subseteq \kappa$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $\mathcal{U} \cap V[G_{|Y}]$ es ultrafiltro selectivo en $V[G_{|Y}]$.

Demostración. Sea $\dot{\mathcal{U}}$ un $\mathbb{B}(\kappa)$-nombre para un ultrafiltro selectivo y $B \in G$ de modo que $B \Vdash \mathcal{U}$ es ultrafiltro selectivo. Sea $M$ submodelo elemental de $H(\kappa^+)$ tal que $\kappa, \dot{\mathcal{U}}, B \in M$, $|M| = \omega_1$ y $M^\omega \subseteq M$ (esto es posible, por 1 y 1). Así que $M \models B \Vdash \mathcal{U}$ es ultrafiltro selectivo (por ser submodelo elemental). Pongamos $Y = M \cap \kappa$ y notemos primeramente que $M[G] = M[G_{|Y}] \models \mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo.

Además $M \cap \mathcal{P}(\omega) = V \cap \mathcal{P}(\omega)$ pues dado, $A \in V \cap \mathcal{P}(\omega)$ este lo podemos listar como $A = \{a_n : n \in \omega\}$ y $a_n \in M$ para todo $n \in \omega$, así que $A \in M^\omega \subseteq M \cap \mathcal{P}(\omega)$.

Observemos que si $\dot{A}$ es un $\mathbb{B}(Y)$-nombre bonito para un subconjunto de $\omega$ por ser, $\mathbb{B}(Y)$ c.c.c y $M^\omega \subseteq M$ obtenemos que $\dot{A} \in M \cap \mathcal{P}(\omega)$, en particular $M[G_{|Y}] \cap \mathcal{P}(\omega) = V[G_{|Y}] \cap \mathcal{P}(\omega)$. Con esto tenemos que si $V[G_{|Y}] \models A$ es selector para $\{A_n : n \in \omega\}$, donde $\{A_n : n \in \omega\}$ es partición de $\omega$ según $V[G_{|Y}]$, por teorema 1 se tiene que existe $B \in G$ de modo que $B \Vdash \dot{A}$ es selector para $\{\dot{A}_n : n \in \omega\}$ , escogiendo nombres bonitos para estos subconjuntos de $\omega$ (esto es posible por lema 2), y por observación anterior se tiene que tanto $\dot{A} \in M$ y $\dot{A}_n \in M$ para todo $n \in \omega$ de aquí que $M[G_{|Y}] \models A$ es selector para $\{A_n : n \in \omega\}$. ❑

La siguiente proposición es una característica importante de este forcing y que es necesario para la demostración que estamos estudiando. Sin embargo, dar una demostración de esta prolongaría en demacia esta tesis pues involucraria conceptos de *iteración de forcing*. Para ver sobre esto veáse [**12**].

Sea $\kappa \geq \omega_2$, $Y \subseteq \kappa$ tal que $|Y| = \omega_1$, entonces $\mathbb{B}(\kappa) \cong \mathbb{B}(\kappa \setminus Y) * \mathbb{B}(Y)$.

Ahora sí, estamos preparados para terminar de hilar la tan deseada prueba del teorema de Kunen, que habiamos prometido anteriormente.

[Kunen] Sean $V$ un modelo de ZFC+CH, $\kappa \geq \omega_2$ y $G$ un filtro $B(\kappa)$-genérico sobre $V$. Entonces en $V[G]$ no hay ultrafiltros selectivos.

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in V[G]$ ultrafiltro selectivo, por lema 2 existe $Y \subseteq \kappa$ tal que $|Y| = \omega_1$ y $V[G_{|Y}] \models \mathcal{U} \cap V[G_{|Y}]$ es ultrafiltro selectivo. Ahora, note que $V[G] = V[G_{|Y}][H]$ donde $H$ es $\mathbb{B}(\kappa)$ genérico sobre $V[G_{|Y}]$ y por lema 2 en $V[G_{|Y}][H]$ no hay $p$-puntos que extiendan a $U \cap V[G_{|Y}]$ pues $\mathbb{B}(\kappa) \cong \mathbb{B}(Y) * \mathbb{B}(\kappa \setminus Y)$, lo cual es contradictorio. ❑

## 3. Conclusiones

Iniciamos este trabajo estudiando el artículo de J. Flašková títulado *More than* 0*-point* el cual lo presentamos aquí en el capítulo 3; en él estudiamos la construcción de un $\mathcal{I}$-ultrafiltro amigable en ZFC cuando $\mathcal{I}$ es la colección $\{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n}\}$. Sin embargo, queda planteada la pregunta: ¿Existirá en ZFC un $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-ultrafiltro débil o bien un $\mathcal{I}$-ultrafiltro? Para esto, encontramos que bajo la Hipótesis del Continuo es posible construir un $\mathcal{I}$-ultrafiltro, cuando $\mathcal{I}$ es un ideal alto sobre $\omega$ y que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ también es posible construir un $\mathcal{I}$-ultrafiltro, siendo $\mathcal{I}$ alto.

En sí, determinar la existencia de un $\mathcal{I}$-ultrafiltro débil en ZFC, primeramente nos ha llevado a la búsqueda de evidencias de que en realidad esto sí sea posible; en esta búsqueda hemos recorrido caminos en los cuales hemos estado aprendiendo sobre cuales son algunos de los dificultades para poder construir estos objetos en ZFC, así como las herramientas necesarias para recorrerlos, i.e, hemos estudiado sobre algunos cardinales invariantes tales como $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{d}$, entre otros. Cabe recordar, que en la sección probamos que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{h}$ con el cual nuestra prueba de que bajo $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$ existen $\mathcal{I}$-ultrafiltros adquiere más valor en cuanto en cuanto evidencia se trata, y más aún no solo probamos su existencia, sino probamos que existen $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros. También, bajo este camino encontramos que bajo $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}$ es posible construir $2^{\mathfrak{d}}$ $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ ultrafiltros débiles, que es básicamente la misma idea que el teorema comentado anteriormente.

Por otro lado, hemos abordado el tema de cual es la conexión entre ultrafiltros rápidos y los $\mathcal{I}$-ultrafiltros, en particular cuando $\mathcal{I}$ es un ideal sumable con respecto a una función $g \in c_0 \setminus l_1$ motivado por el artículo *ultrafiltros and summable ideals* de J. Flasková; ya recorrido el camino comentado anteriormente y estudiando este artículo resulta bastante natural probar que bajo $\mathfrak{h} = \mathfrak{d}$ existen $2^{\mathfrak{d}}$ ultrafiltros rápidos pues en dicho artículo Flašková da una caraterización de filtros rápidos con una familia de cardinalidad $\mathfrak{d}$ de ultrafiltros sumables el cual es una mejora a teorema de Vojtáš el cual nos indica que un filtro es rápido si y sólo si este tiene intersección no vacía con cualesquier ideal sumable alto.

Para terminar el trabajo, estudiamos un teorema de K. Kunen sobre ultrafiltros selectivos el cual es una prueba de que es consistente que no existan ultrafiltros selectivos; para ello fue necesario familiarizarnos un poco con teoría de modelos y forcing, sin embargo el objetivo del trabajo no fue saturar el trabajo de teoría de forcing pues no era la intención especializarnos por ese lado, aunque sí creemos que dicho teorema es muy importante para la teoría de ultrafiltros y también comenzar a familiarizarnos de algún modo con la técnica de forcing pues creo que dicha técnica en esta área de las matemáticas es fundamental para la investigación y amplía en gran medida la visión, así entonces será pensar para un proyecto a futuro detenernos un poco en el camino del forcing.

# Bibliografía


[1] Bohuslav Balcar; Jan Pelant; Petr Simon *The space of ultrafilters on N covered by nowhere dense sets*.

[2] Tomek Bartoszyínski; Haim Judah *Set theory. On the structure of the real line*.

[3] James Baumgartner Ultrafilters on $\omega$, J. Symbolic Logic **60**, no. 2, 1995.

[4] David Booth Ultrafilters on a countable set, Ann. Math Logic.

[5] W. Comfort; S. Negrepontis *The theory of ultrafilters, Springer, Berlin, 1974*.

[6] Keith J. Devlin *Constructibility, Springer, Berlin Heidelberg - New York - Tokyo, 1984*.

[7] Karel Hrbacek; Thomas Jech *Introduction to set theory*.

[8] R. Engelking *General topology. Heldermann Verlag, 1989*.

[9] Jana Flašková *Ultrafilters and small sets, Ph.D. Thesis, Charles University, Prague, 2006*.

[10] Jana Flašková *More than a* 0*-point, Comment. Math Univ Carolinae **47**, no. 4, 2006*.

[11] Thomas Jech *Set theory*.

[12] K Kunen *Set Theory: An introduction to independence proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980*.

[13] David Meza Alcántara *Ideals and filters on countable sets Ph.D. thesis. UNAM México, 2009.*

[14] Jan van Mill *An introduction to $\beta\omega$. Handbook of set theoretic topology, 503-567, North-Holland, Amsterdam, 1984*.

[15] Peter Vojtáš *On $\omega^*$ and absolutely divergent series, Topology Proceedings **19**, 1994.*

[16] Peter Vojtáš *Generalized Galois-Tukey connections between explicit relations on classical objets of real analysis, in: Israel Math. Conf. Proc. 6, 1993, 619-643.*