Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional Autonoma de México

Instituto de Física y Matemáticas

TESINA:
Filtros de Fréchet-Urysohn.

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Jonathán Emmanuel Rivera Gómez

Asesor: Dr. Salvador García Ferreira

Morelia, Michoacán - febrero de 2011.

Índice general

Agradecimientos III

INTRODUCCIÓN V

Capítulo 1. Preliminares 1

Capítulo 2. Filtros de Fréchet-Urysohn 5

Capítulo 3. Más filtros de Fréchet-Urysohn 11

Capítulo 4. Propiedades α_i's 19

Bibliografía 25

Agradecimientos

Agradezco no sólo por este trabajo que es muy simbólico, si no a toda la gente que se vio involucrada directa o indirectamente para que yo terminara esta maestría. A todos mis maestros, al Dr. Fernando Hernández, al personal escolar y compañeros del posgrado. A mi asesor y director de tesina Dr. Salvador García, a mis amigos y colegas Perla Lucio y Oscar Sánchez. Y sobre todo y de manera muy espacial agradezco a mi familia, a mis padres Ernesto Rivera y Ma. del Carmen Gómez, que sin su apoyo no lo hubiera logrado. Muchas Gracias.

INTRODUCCIÓN

Es sumamente conocido que en un espacio métrico, un punto está en la clausura de un conjunto si y sólo si existe una sucesión en el conjunto que converge al punto. En general esto no se cumple para cualquier espacio topológico. La propiedad se cumple tanto en los espacios métricos como en los espacios primero numerables. El ejemplo más clásico en donde falla la propiedad anterior es $\beta\omega$, la compactación de Stone-Čech del conjunto de los números naturales con la topología discreta. Este espacio no tiene sucesiones no triviales convergentes. De esta manera, es claro que en topología general no es suficiente trabajar con sucesiones. Por otro lado, buscamos espacios en los cuales sean suficientes las sucesiones para determinar las nociones de abierto, cerrado, compacto y continuidad. Esto nos motiva a considerar la siguiente clase de espacios.

Definición 1. *Un espacio X es de Fréchet-Urysohn, si satisface que para todo subconjunto $A \subseteq X$, un punto x esta en la clausura de A si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x.*

Nota: *Los espacios a considerar siempre serán Hausdorff y completamente regulares.*

Los ejemplos más conocidos de espacios de Fréchet-Urysohn son los espacios métricos y los espacios primero numerables que son más restrictivos. Otras propiedades que también se cumplen en tales espacios son las siguientes: Un conjunto A es abierto si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ en X que converge a un punto en A, sucede que $x_n \in A$ exepto para una cantidad finita de $n < \omega$. Un conjunto F es cerrado si y sólo si cada sucesión en F, la cual converge a un punto $x \in X$ se tiene que $x \in F$. En un espacio topológico, un abierto (resp. cerrado) secuencial es aquel subconjunto para el cual se satisface la propiedad anterior. Podemos observar que en un espacio topológico sucede lo siguiente: Un conjunto es abierto secuencial si y sólo si su complemento es cerrado secuencial. Con estas definiciones y propiedades podemos considerar los siguientes espacios: Un espacio topológico es *secuencial* si cada abierto (resp. cerrado) secuencial es abierto (resp. cerrado) en la topología. Todo espacio primero numerable es espacio de Fréchet-Urysohn y todo espacio de Fréchet-Urysohn es secuencial. En general no se satisface que todo espacio secuencial es de Fréchet-Urysohn y que todo espacio de Fréchet-Urysohn es primero numerable, a continuación veremos algunos ejemplos de esto.

Nota: En este trabajo llamaremos en muchas ocaciones *sucesiones* a conjuntos infinitos numerables a menos que se especifique lo contrario. Diremos que un conjunto numerable A converge a un punto x si para cada vecindad U de x sucede que $|A - U| < \omega$.

Ejemplo 1. *Sea $Y = (x_n)_{n<\omega}$ una sucesión inyectiva y convergente de números reales con límite x. Para cada $n < \omega$ consideramos $A_n = (a_k)_{k<\omega}$, sucesión inyectiva de números reales tal que A_n converge a x_n. Supongamos que para cada $n < \omega$ tenemos que $(Y \cup \{x\}) \cap A_n = \emptyset$ y los A_n son disjuntos entre sí. Sea $X = Y \cup \{x\} \cup (\cup_{n<\omega} A_n)$ con la siguiente topología: Cada punto en $\cup_{n<\omega} A_n$ es aislado. Para cada $n < \omega$ una base de vecindades para x_n es la siguiente familia:*

$$\mathcal{B}_n = \{\{x_n\} \cup B : B \subseteq A_n(|A_n - B| < \omega)\}.$$

Por último, una base de vecindades de x es la siguiente familia:

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \cup A \cup (\cup_{x_n \in A} B_{x_n}) : A \subset Y(|A - Y| < \omega), B_{x_n} \in \mathcal{B}_n\}.$$

Es claro que este espacio es Hausdorff y con esta topología probaremos que X es secuencial. Sea $A \subseteq X$ abierto secuencial y $a \in A$. Si $a \in \cup_{n<\omega} A_n$ no hay nada que hacer. Si $a \in Y$, entonces $a = x_n$ para algún $n < \omega$. Dado que $A_n \longrightarrow x_n$, entonces $|A_n - A| < \omega$. Por lo tanto $\{x_n\} \cup (A_n \cap A)$ es la vecindad que testifica que a es punto interior de A. Por último si $a = x$, entonces $Y \longrightarrow x$, esto implica que $|Y - A| < \omega$, además para cada $x_n \in Y \cap A$ se tiene que $|A_n - A| < \omega$. De manera que

$$\{x\} \cup (Y \cap A) \cup (\cup_{x_n \in (Y \cap A)} (A_n \cap A))$$

es la vecindad que testifica que a es punto interior de A. Por lo tanto X es secuencial. Para probar que X no es espacio de Fréchet-Urysohn, notemos que no existe sucesión contenida en $\cup_{n<\omega} A_n$ que converja a x. Si una sucesión en X intersecta a algún A_n en una infinidad de puntos, entonces la sucesión tiene una subsucesión convergente a x_n. De manera que tal sucesión no puede converger a x. Si la sucesión intersecta a cada A_n en un conjunto finito, entonces se construye una vecindad de x que no contenga a tales puntos. Si consideramos $B = X - (\{x\} \cup Y)$, se tiene que $x \in \overline{B}$, pero no hay sucesión en B que converja a x. Por lo tanto X no es espacio de Fréchet-Urysohn.

En el siguiente ejemplo se muestra que un espacio con la propiedad de Fréchet-Urysohn no necesariamente es primero numerable.

Ejemplo 2. *Para cada $n < \omega$ consideramos $X_n = [0,1]_n$ con la topología usual denotada τ_n. Sea $X' = \cup_{n<\omega} [0,1]_n$ la unión disjunta de los espacios X_n. Ahora sea X el conjunto obtenido al identificar cada $0_n \in [0,1]_n$ con un único punto 0 y a los demás puntos de X' identificados con ellos mismos. A este nuevo conjunto X lo dotamos con la siguiente topología: Para cada punto*

$x \in X - \{0\}$, una base de vecindades es la misma que tenía en el espacio $[0,1]_n$ al que pertenece. Una base de vecindades del punto 0 es la familia:

$$\{\cup_{n<\omega} U_n : U_n \in \mathcal{T}_n\}$$

donde U_n es vecindad del 0_n en $[0,1]_n$. Afirmamos que X es de Fréchet-Urysohn y Hausdorff pero no es primero numerable. Es evidente que X es Hausdorff y que X satisface la propiedad de Fréchet-Urysohn en $X - \{0\}$. Sea $A \subseteq X$ tal que $0 \in \overline{A}$. Si suponemos que para cada $n < \omega$, $|A \cap [0,1]_n| < \omega$, entonces la vecindad $\cup_{n<\omega}([0,1]_n - ([0,1]_n \cap A))$ no intersecta a A, lo cual es una contradicción. Entonces existe $n < \omega$ tal que $|[0,1]_n \cap A| = \omega$. Como $[0,1]_n$ con la topología del subespacio es homeomorfo a $[0,1]$, entonces $A \cap [0,1]_n$ tiene una sucesión convergente a 0, la cual converge a 0 en X. Por lo tanto X es de Fréchet-Urysohn. Si suponemos que X es primero numerable, entonces existe $\{B_n : n < \omega\}$, una base de vecindades numerable de 0. Para cada $n < \omega$ elegimos $x_n \in B_n \cap [0,1]_n$ distinto de 0. Por construcción $(x_n)_{n<\omega}$ es una sucesión que converge a 0 en X, pero $|(x_n)_{n<\omega} \cap [0,1]_n| = 1$. De manera que podemos construir una vecindad que testifica que $x_n \not\longrightarrow 0$, así que se da una contracicción. Por lo tanto X no es primero numerable.

La definición de espacio de Fréchet-Urysohn aplica también a espacios numerables con un sólo punto no aislado. En este tipo de espacios las vecindades del punto no aislado, están determinadas por un filtro. Entonces el estudio de dichos espacios se reduce a estudiar estos filtros, los cuales sin perder generalidad los consideraremos sobre ω.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 2. *Un filtro sobre un conjunto infinito X es una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacía que satisface:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Un filtro maximal con respecto a $(\subseteq)$ se denomina ultrafiltro. Para un $\mathcal{F}$ filtro en X definimos

$$\mathcal{F}^+ := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall F \in \mathcal{F}(A \cap F \neq \emptyset)\}.$$

Dado un conjunto X es fácil ver que $\{X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es filtro y se llama el filtro trivial. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es libre si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, de lo contrario se dice que el filtro es fijo. Dado un conjunto X y $A \subseteq X$ no vacio, definimos $\mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq F\}$ el cual es un filtro fijo. Para X conjunto infinito se define $\mathcal{F}_r := \{A \in \mathcal{P}(X) : |X - A| < \omega\}$ llamado el filtro de Fréchet. Notemos que $\cap \mathcal{F}_r = \emptyset$ y por lo tanto es un filtro libre. Observamos que $\mathcal{G}$ es un filtro libre si y sólo si $\mathcal{G}$ contiene a $\mathcal{F}_r$. En lo sucesivo únicamente se trabajará con filtros libres sobre ω a menos que se especifique lo contrario.

Definición 3. *Un ideal sobre un conjunto infinito X es una colección $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

1. $X \notin \mathcal{I}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Notemos $\{\emptyset\}$ es un ideal y lo llamamos el ideal trivial. Para un conjunto infinito X, definimos $[X]^{<\omega} := \{I \in \mathcal{P}(X) : |I| < \omega\}$ el cual es un ideal en X y es conocido como el ideal de los conjuntos finitos. Dado un ideal $\mathcal{I}$ que contiene propiamente al ideal de los conjuntos finitos definimos:
$\mathcal{I}^+ := \mathcal{P}(X) - \mathcal{I}$, la familia de conjuntos positivos modulo $\mathcal{I}$.
$\mathcal{I}^\perp := \{M \in \mathcal{P}(X) : \forall I \in \mathcal{I}(|M \cap I| < \omega)\}$, la familia ortogonal a $\mathcal{I}$.
Estos conjuntos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{I}^\perp$ es un ideal que contiene a $[X]^{<\omega}$.
2. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\perp\perp}$.

3. $\mathcal{I}^{\perp} \cap (\mathcal{P}(X) - [X]^{<\omega}) \subseteq \mathcal{I}^{+}$.

En lo sucesivo se trabajará siempre con ideales sobre ω que contienen al ideal FIN=$[\omega]^{<\omega}$, a menos que se especifique lo contrario. Es importante remarcar que la noción de filtro es dual a la noción de ideal y viceversa. Dado un ideal $\mathcal{I}$ la familia $\mathcal{I}^c = \{I^c : I \in \mathcal{I}\}$ es un filtro y dado un filtro $\mathcal{F}$ la familia $\mathcal{F}^c = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$ es un ideal. Notemos que $FIN^c = \mathcal{F}_r$ y ${\mathcal{F}_r}^c = FIN$.

Definición 4. *Sean $A, B \in [\omega]^{\omega}$. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B respectivamente, definimos la suma como:*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} := \{H \subset \omega : \exists F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}(F \cup G \subseteq H)\}.$$

No es difícil ver que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un filtro libre sobre ω para cualquier par de filtros libres $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, ya que los conjuntos que son una unión de un elemento de $\mathcal{F}$ y un elemento de $\mathcal{G}$, conforman una base de filtro para la suma. Las sumas que más usaremos serán cuando $A \cap B = \emptyset$.

Si $A \in [\omega]^{\omega}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre A, convenimos en que

$$\mathcal{F}^{+} = \{E \in [A]^{\omega} : \forall F \in \mathcal{F}(F \cap E \neq \emptyset)\}.$$

Advertencia: El lector debe de tener cuidado en que conjunto está tomado el filtro, esto para no perder de vista la convención de la definición de $\mathcal{F}^{+}$. Por ejemplo, si $A, B \in [\omega]^{\omega}$ son disjuntos y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B respectivamente, entonces $\mathcal{F}^{+} \cap \mathcal{G}^{+} = \emptyset$. Pero si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son ultrafiltros sobre ω, entonces $\omega \in \mathcal{F}^{+} \cap \mathcal{G}^{+}$.

Proposición 1. *Sean A y B subconjuntos infinitos de ω. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B respectivamente, entonces $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+} = \mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+}$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+} \subseteq (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+}$. Si suponemos que existe $H \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+} - (\mathcal{F}^{+} \cup \mathcal{G}^{+})$, entonces existen $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$ tales que $H \cap F = \emptyset = H \cap G$, esto implica que $H \cap (F \cup G) = \emptyset$, lo cual es una contradicción desde que $H \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^{+}$. Por lo tanto obtenemos la igualdad. □

Definiremos mas conceptos topológicos que nos auxiliarán más adelante para construir filtros. Recordemos que $\beta\omega = \{p \subset \mathcal{P}(\omega) : p \text{ es ultrafiltro en } \omega\}$. Para cada $A \subset \omega$ se define $\hat{A} = \{p \in \beta\omega : A \in p\}$ y dotamos a $\beta\omega$ con la topología generada por la familia $\{\hat{A} : A \subset \omega\}$. Los conjuntos de esta familia cumplen con las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq B$, entonces $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.
2. $(\widehat{A \cap B}) = \hat{A} \cap \hat{B}$.
3. $(\widehat{A \cup B}) = \hat{A} \cup \hat{B}$.

Con las propiedades anteriores tenemos que $\beta\omega$ con dicha topología es Hausdorff compacto. La familia $\{\hat{A} : A \subset \omega\}$ es una base de clopens y $\beta\omega$ con esta topología resulta ser la compactación de Stone-Čech del espacio discreto ω. En donde la colección de los ultrafiltros fijos en ω, son puntos aislados que se hacen corresponder con el espacio discreto ω, encajado en $\beta\omega$. Así se define para A subconjunto de ω, $A^* = \hat{A} - \omega$. De manera que podemos considerar lo siguiente: Sea $\mathcal{F}$ filtro libre sobre ω, definimos $M_{\mathcal{F}} = \cap_{F \in \mathcal{F}} F^*$, el cual es un cerrado de $\beta\omega$ y para cualquier cerrado $C \subseteq \omega^*$, podemos definir un filtro libre sobre ω de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_C = \{F \subseteq \omega : C \subseteq F^*\}.$$

Observación 1. *Con las definiciones anteriores podemos notar lo siguiente: Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω y $A \subseteq \omega$. Tenemos que $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}^+$. Si $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $A^* \cap F^* \neq \emptyset$, esto implica que $A \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto $A \in \mathcal{F}^+$. Si $A \in F^+$ entonces la familia $\{A^* \cap F^* : F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Desde que $\beta\omega$ es compacto tenemos que $A^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$.*

Lema 1. *Si $\mathcal{F}$ filtro sobre ω, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$.*

Demostración. Es fácil notar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$ por la definición de $M_{\mathcal{F}}$. Si suponemos que existe $G \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$ tal que G no pertenece a $\mathcal{F}$, entonces $\omega - G \in \mathcal{F}^+$. Por la observación anterior tenemos que $(\omega - G)^* \cap M_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, lo cual es un contradicción ya que $M_{\mathcal{F}} \subseteq G^*$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$. □

Juntando los resultados anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω tal que existe $B \in \mathcal{F}$ no cofinito. Si $C \subset \omega^*$ cerrado tal que $B^* \cap C = \emptyset$, entonces $\mathcal{F}|_B = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C} \subseteq \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$. De manera que $\mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B \subseteq \mathcal{F}|_B$. Si $F \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}|_B$, entonces $F = G \cap B$ con $G \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}}$. Desde que $M_{\mathcal{F}} \cap C = \emptyset$, existe $H \in \mathcal{F}_C$ tal que $B \cap H = \emptyset$. Tenemos que $G \cup H \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}$, además $(G \cup H) \cap B = G \cap B$. Lo anterior implica que $F \cap B = (G \cup H) \cap B \in \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B$. Por lo tanto $\mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}_{M_{\mathcal{F}} \cup C}|_B$. □

Capítulo 2

Filtros de Fréchet-Urysohn

Para definir nuestros filtros necesitamos definir el siguiente espacio:

Definición 5. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω. Denotamos $\xi(\mathcal{F}) := \omega \cup \{\mathcal{F}\}$ con la siguiente topología: Cada punto en ω es aislado y para el punto $\mathcal{F}$ una base de vecindades es la siguiente familia $\{\{\mathcal{F}\} \cup F : F \in \mathcal{F}\}$.*

Notamos que los espacios $\xi(\mathcal{F})$ son espacios Hausdorff y cero-dimensionales. Esta definición incluye a todos los espacios Hausdorff infinitos numerables con un sólo punto no aislado, ya que estamos considerando filtros libres.

A continuación veremos que la propiedad de Fréchet-Urysohn y secuencial son equivalentes en este tipo de espacios.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Entonces $\xi(\mathcal{F})$ es un espacio de Fréchet-Urysohn si y sólo si es un espacio secuencial.*

Demostración. La primera implicación se sigue del hecho de que todo espacio de Fréchet-Urysohn es secuencial. Supongamos que $\xi(\mathcal{F})$ es espacio secuencial. Sea $A \subseteq \xi(\mathcal{F})$ tal que $\mathcal{F} \in \overline{A} - A$. Si suponemos que no existe sucesión contenida en A tal que converja a $\mathcal{F}$, entonces cada sucesión contenida en A que converge en $\xi(\mathcal{F})$, converge a algún $n_0 < \omega$. Como cada $n < \omega$ es aislado, entonces $n_0 \in A$. Por lo tanto A es un cerrado secuencial, es decir, un cerrado en $\xi(\mathcal{F})$. Lo cual es una contradicción desde que $\mathcal{F} \in \overline{A} - A$. Por lo tanto $\xi(\mathcal{F})$ es espacio de Frechét-Urysohn. □

A partir de aquí nos centraremos más en analizar el filtro de vecindades del punto no aislado y nos referiremos más al filtro que al espacio en sí.

Definición 6. *Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ es de Fréchet-Urysohn si el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es de Fréchet-Urysohn.*

De acuerdo con las definiciones preliminares podemos adaptar tales nociones con la estructura topológica de la siguiente manera: Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω. Para $B \subset \omega$ se tiene que $\mathcal{F} \in \overline{B}$ en $\xi(\mathcal{F})$ si y solo si $B \in F^+$. Además $A \in [\omega]^\omega$ converge a $\mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$ si y solo si para cada $F \in \mathcal{F}$, se satisface que $|A - F| < \omega$. Con esto obtenemos trivialmente el siguiente resultado, que es básicamente la definición de la propiedad de Fréchet-Urysohn con la notación de filtros.

Proposición 2. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Entonces $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn si y solo si para cada $M \in \mathcal{F}^+$ existe $A \in [M]^\omega$ tal que $A \longrightarrow \mathcal{F}$.*

□

En la clase de los filtros libres el filtro de Fréchet es minimal con respecto a la contención, el cual nos otorga un espacio conocido y se revisa a continuación.

Ejemplo 3. *Si consideramos al filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$, entonces las vecindades de $\mathcal{F}_r$ en $\xi(\mathcal{F}_r)$ hacen que toda sucesión converja. Este espacio no es más que una sucesión convergente.*

La clase de los filtros libres sobre ω es demasiado amplia, a continuación mostraremos que no cualquier filtro libre es de Fréchet-Urysohn

Proposición 3. *Si $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre ω, entonces $\mathcal{F}$ no es filtro de Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre ω. Probaremos que ninguna sucesión no trivial converge en el espacio $\xi(\mathcal{F})$. Si suponemos que existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que $A \longrightarrow \mathcal{F}$, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ sucede que $|A - F| < \omega$. Por lo tanto $\mathcal{F}|_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}_r(A)$ (el filtro de Fréchet sobre A). Consideramos $B \in [A]^\omega$ tal que $|A - B| = \omega$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, entonces $B \in \mathcal{F}$ ó $\omega - B \in \mathcal{F}$. Las dos situaciones nos dan una contradicción al hecho de que $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F}_r$. De manera que no existe sucesión no trivial en ω que converja a $\mathcal{F}$, pero $\mathcal{F} \in \overline{\omega}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no es de Fréchet-Urysohn. □

La siguiente noción nos ayudará a caracterizar, analizar y construir una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn.

Definición 7. *Sea $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$. Decimos que $\mathcal{A}$ es* **casi disjunta** *si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, se tiene que $|A \cap B| < \omega$. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω. Decimos que $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta si $\mathcal{A}$ no esta contenida propiamente en alguna otra familia casi disjunta. Si $\mathcal{A}$ es casi disjunta maximal, entonces para cada $B \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$.*

Las familias casi disjuntas en ω son objetos que trabajaremos en lo sucesivo. Consideraremos familias casi disjuntas finitas en algunos casos. Más adelante se observará la importancia de que las familias a considerar sean de gran tamaño. Mostraremos a continuación la existencia de una familia casi disjunta en ω de tamaño $\mathfrak{c}$.

Ejemplo 4. *Consideramos $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con la topología usual y una ordenación de los números racionales $\mathbb{Q} = \{q_r : r < \omega\}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ existe una sucesión $B_\alpha \subset \mathbb{Q}$ que converge a α. Entonces cada sucesión define al conjunto $A_\alpha = \{r < \omega : q_r \in B_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tenemos que $A_\alpha \in [\omega]^\omega$. Desde que $\mathbb{R}$ es Hausdorff con la topología usual, los limites de las sucesiones son únicos. Por lo tanto la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ es casi disjunta y de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Aquí exhibimos otro ejemplo construido sobre un árbol infinito numerable.

Ejemplo 5. *Sea $Seq = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ dotado con el orden parcial definido de la siguiente manera: Para $x, y \in Seq$ tenemos que $x \leq y$ si y sólo si y extiende a x. Seq es numerable al ser unión numerable de los conjuntos numerables ω^n, entonces lo podemos poner en correspondencia con ω. Para cada $f \in [\omega]^\omega$ definimos $A_f = \{f|_n : n < \omega\} \subset Seq$, el conjunto de restricciones de f. Si $f, g \in [\omega]^\omega$ distintas existe $k < \omega$ tal que $f|_k \neq g|_k$. Por lo tanto para cada $n \geq k$ tenemos que $f|_n \neq g|_n$ entonces $|A_f \cap A_g| < \omega$. Así $\mathcal{A} = \{A_f\}_{f \in [\omega]^\omega}$ es una familia casi disjunta y de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Ahora procederemos a la construcción de una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn. Para esto necesitamos la siguiente notación: Sean $A, B \subseteq \omega$. Decimos que A está casi contenido en B si $|A - B| < \omega$ y lo denotamos por la simbología $A \subseteq^* B$. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en ω, podemos construir un filtro libre de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_\mathcal{A} = \{F \in [\omega]^\omega : \forall A \in \mathcal{A}(A \subseteq^* F)\}$$

Proposición 4. *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta en ω, entonces $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ es un filtro libre.*

Demostración. Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{F}_\mathcal{A}$. Sean $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $A \subseteq^* F$ y $A \subseteq^* G$, claramente $A \subseteq^* (F \cap G)$. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subseteq^* F$, esto implica que $A \subseteq^* G$. De manera que $\mathcal{F}$ es filtro. Sea $F \in [\omega]^\omega$ cofinito. Entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subseteq^* F$, así tenemos que $\mathcal{F}_r \subseteq F_\mathcal{A}$. Por lo tanto tanto $\mathcal{F}$ es libre. □

Con esta definición se amplía la clase de filtros a considerar, los cuales resultan ser filtros de Fréchet-Urysohn. El Lema siguiente nos ayudará a mostrar que un filtro de Fréchet-Urysohn siempre será de la forma $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ para alguna familia casi disjunta en ω.

Lema 3. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en ω y $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \notin \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta si y sólo si $\omega - B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$.*

Demostración. Si $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ sucede que $|A \cap B| < \omega$. De manera que para cada $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $A \subseteq^* \omega - B$. Por lo tanto $\omega - B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$. Inversamente si $\omega - B \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $A \subseteq^* \omega - B$. Esto implica que para cada $A \in \mathcal{A}$ sucede que $|A \cap B| < \omega$. Por lo tanto $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta. $\square$

La siguiente caracterización de los filtros de Fréchet-Urysohn es dada en [**5**] por P. Simon.

Teorema 2. (**P. Simon**) *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω. Entonces $\mathcal{F}$ es de Fréchet-Urysohn si y sólo si existe una familia $\mathcal{A}$ casi disjunta, maximal respecto a las siguientes propiedades:*

1. *$F \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \subseteq^* F$ para cada $A \in \mathcal{A}$, (es decir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$).*
2. *$\mathcal{A}$ es casi disjunta.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ filtro de Fréchet-Urysohn. Definimos

$$\mathcal{F}^* := \{A \in [\omega]^\omega : \forall F \in \mathcal{F}(A \subseteq^* F)\}.$$

Elegimos arbitrariamente una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ que sea maximal casi disjunta en $\mathcal{F}^*$. Lo anterior quiere decir que si $B \in \mathcal{F}^*$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Por construcción es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Sea $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, si suponemos que $G \notin \mathcal{F}$, entonces $\omega - G \in \mathcal{F}^+$. Desde que $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn, existe $B \subseteq \omega - G$ sucesión convergente a $\mathcal{F}$. De manera que para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $B \subseteq^* \omega$, esto implica que $B \in \mathcal{F}^*$. Por otro lado tenemos que para cualquier $C \in [B]^\omega$ se satisface que $|C - G| = \omega$, lo cual es una contradicción al hecho de que $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta en $\mathcal{F}^*$. De manera que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto la familia casi disjunta $\mathcal{A}$ cumple con las propiedades requeridas. Inversamente, sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}$. Sea $B \in \mathcal{F}^+_{\mathcal{A}}$, si $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi disjunta, entonces por el Lema 3, $\omega - B \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, lo cual contradice que $B \in \mathcal{F}^+_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto $\mathcal{A} \cup \{B\}$ no es casi disjunta, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Demanera que $A \cap B$ converge a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Esto muestra que $\mathcal{F}$ es un filtro de Fréchet-Urysohn. $\square$

A continuación mostraremos que el hecho de que la familia casi disjunta sea maximal facilita las cosas, pero se vuelve menos interesante ya que nos otorga otra vez una sucesión convergente.

Teorema 3. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta. Entonces $\mathcal{A}$ es maximal si y sólo si $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_r$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta maximal. Como $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ es libre, entonces contiene al filtro de Fréchet. Supongamos que existe $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ tal que $|\omega - F| = \omega$. Dado que $\mathcal{A}$ es casi disjunta maximal, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap (\omega - F)| = \omega$. Esto implica que $(\omega - F) \cap A \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, pero $F \cap B = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_r$. Inversamente si $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_r$, entonces cada $M \in [\omega]^\omega$ es tal que $M \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Si suponemos que $\mathcal{A}$ no es maximal, entonces existe $M \in [\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A} \cup M$ es casi disjunta y por el Lema 3, $\omega - M \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta. $\square$

Con la suma podemos definir más filtros de Fréchet-Urysohn de la siguiente manera.

Teorema 4. *Sean A y B subconjuntos infinitos de ω. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre A y B respectivamente tales que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ = \emptyset$. Entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es filtro de Fréchet-Urysohn si y sólo si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn. Consideramos $M \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^+$. Entonces $M \in \mathcal{F}^+$ o $M \in \mathcal{G}^+$. Sin perder generalidad supongamos que $M \in \mathcal{F}^+$. Como $\mathcal{F}$ es filtro de Fréchet-Urysohn, existe $A \in [M]^\omega$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $A \subseteq^* F$. De acuerdo con lo anterior se tiene que cada $H \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ satisface que $A \subseteq^* H$, entonces $A \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es de Fréchet-Urysohn. Inversamente, supongamos ahora que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es de Fréchet-Urysohn. Si $M \in \mathcal{F}^+$, entonces $M \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^+$. De manera que existe $A \in [M]^\omega$ tal que cada $H \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ satisface $A \subseteq^* H$. Además existen $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$ tales que $F \cup G \subseteq H$. Si suponemos que A no converge a $\mathcal{F}$, entonces existe $F_0 \in F$ tal que $|A - F_0| = \omega$. Si consideramos $\{F_0 \cup G : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, cada elemento de tal colección casi contiene a A, esto implica que para cada $G \in \mathcal{G}$ tenemos que $A \subseteq^* G$. De aquí se concluye que $M \in \mathcal{G}^+$ lo cual es una contradicción. De manera que $A \longrightarrow \mathcal{F}$. Para $N \in \mathcal{G}^+$ el procedimiento es análogo. Por lo tanto $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Fréchet-Urysohn. □

A continuación mostraremos un ejemplo en donde falla la hipótesis de que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ \neq \emptyset$ y no se de la conclusión del Teorema 4.

Ejemplo 6. *Sean A y B subconjuntos infinitos disjuntos de ω tales que $A \cup B = \omega$. Consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{Q}$. En donde $\mathcal{F}_r(A)$ es el filtro de Fréchet sobre A y $\mathcal{Q}$ es un ultrafiltro libre sobre B. De la misma manera consideramos $\mathcal{G} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{F}_r(B)$. Donde $\mathcal{R}$ es un ultrafiltro libre sobre A y $\mathcal{F}_r(B)$ es el filtro de Fréchet sobre B. Si $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{H}$, entonces cada $H \in \mathcal{H}$ contiene un conjunto de la forma $F \cup G$ con $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Por construcción F contiene un cofinito en A y G contiene un cofinito en B. Así H es cofinito en ω y $\mathcal{H}$ es el filtro de Fréchet sobre ω. Gracias a la Proposición 3, hay positivos de $\mathcal{F}$ en B y positivos de $\mathcal{G}$ en A, que testifican que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ no sean filtros de Fréchet-Urysohn. Aquí es notorio que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^+ \neq \emptyset$.*

Definición 8. *Sean A y B elementos de $[\omega]^\omega$, $\mathcal{F}$ filtro sobre A y $\mathcal{G}$ filtro sobre B. Decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes si existe una biyección $f : A \longrightarrow B$ tal que $f[\mathcal{F}] := \{f[F] : F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{G}$.*

Notemos que dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre ω son equivalentes si y sólo si los espacios $\xi(\mathcal{F})$ y $\xi(\mathcal{G})$ son homeomorfos. A continuación veremos un Teorema dado en [**6**], que nos muestra que en realidad existen muchos filtros no equivalentes por pares, es decir, muchos espacios de este tipo no homeomorfos por pares.

Teorema 5. *Existen $2^{\mathfrak{c}}$ filtros Fréchet-Urysohn no equivalentes por pares.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta en ω de tamaño $\mathfrak{c}$. Consideramos una ordenación de ésta $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Para todo $X \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$, la familia $\mathcal{A}_X = \{A_\alpha : \alpha \in X\}$ es casi disjunta. Para cada $X, Y \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ distintos, existe $\gamma \in X$ tal que $A_\gamma \notin \mathcal{A}_Y$. Como $\mathcal{A}_Y \cup \{A_\gamma\}$ es casi disjunta, si aplicamos el Lema 3, entonces $\omega - A_\gamma \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_Y}$, además $\omega - A_\gamma \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_X}$. De manera que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_X} \neq \mathcal{F}_{\mathcal{A}_Y}$. Sea $X_0 \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$. Como $\xi(\mathcal{F}_{X_0})$ es numerable, este no puede ser homeomorfo a más de $\mathfrak{c}$ espacios del mismo tipo. Entonces existe $X_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ tal que $\xi(\mathcal{F}_{X_0}) \not\cong \xi(\mathcal{F}_{X_1})$. Inductivamente supongamos que para $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$ hemos elegido elementos de $\mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ para formar a la familia

$$\mathcal{X} = \{\xi(\mathcal{F}_{X_\mu}) : \mu < \alpha\}$$

la cual consiste en espacios no homeomorfos por pares. Si $X \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ es tal que $\xi(\mathcal{F}_X)$ homeomorfo a algún elemento de $\mathcal{X}$, entonces existen a lo más $\mathfrak{c}$ elementos de $\mathcal{P}(\mathfrak{c})$ tales que su ξ-espacio respectivo también es homeomorfo al mismo elemento. De manera que existen a lo más $\alpha \cdot \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ elementos de $\mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ que son homeomorfos a algún elemento de $\mathcal{X}$. Entonces existe $X_\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}$ tal que no es homeomorfo a ningún elemento de $\mathcal{X}$. Por lo tanto existe una familia

$$\{\xi(\mathcal{F}_{X_\alpha}) : X_\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) - \{\emptyset\}, \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$$

que consiste de espacios no homeomorfos por pares.

$\square$

Capítulo 3

Más filtros de Fréchet-Urysohn

Ahora se procederá de manera diferente para construir filtros y espacios topológicos. Dada una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω definimos el Ψ-espacio (respecto a $\mathcal{B}$), $\Psi(\mathcal{B}) = \omega \cup \mathcal{B}$, dotado con la siguiente topología: Cada punto en ω es aislado y para $B \in \mathcal{B}$ una base de vecindades es la familia

$$\{\{B\} \cup (B - F) : |F| < \omega\}.$$

Este espacio es Hausdorff localmente compacto. De manera que podemos considerar su compactación por un punto. Consideramos el subespacio de la compactación que tiene como conjunto base a $\omega \cup \{\infty\}$. A este espacio lo denotaremos por $X(\mathcal{B})$. En este espacio las vecindades del único punto no aislado ∞, son los complementos de conjuntos que son casi contenidos por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. Por esta razón consideramos la siguiente definición: Dada una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω, se define el ideal generado por $\mathcal{B}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}) := \{M \in \omega : \exists\{B_i : i < n\} \subseteq \mathcal{B}(M \subseteq^* \cup_{i<n} B_i)\}.$$

Conforme a la definición del espacio $X(\mathcal{B})$ las vecindades de ∞ son los elementos del filtro $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Esta definición no se aleja de la de los ξ-espacios tratados anteriormente, ya que el espacio $X(\mathcal{B})$ es practicamente el mismo que $\xi(\mathcal{I}(\mathcal{B})^c)$, sólo cambia de nombre el punto no aislado. Queremos analizar si dicho espacio es de Fréchet-Urysohn en el punto ∞. Para esto nos fijamos en los elementos de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^+ = (\mathcal{I}(\mathcal{B})^c)^+$. A diferencia de los ξ-espacios, en donde trabajábamos con una familia casi disjunta de sucesiones convergentes al filtro, aquí se trabaja con una familia casi disjunta de sucesiones no convergentes a ∞.

Para la construcción de estos espacios dependemos de la elección de $\mathcal{B}$. Para nuestros fines nos interesan familias casi disjuntas de gran tamaño, un caso numerable lo cubriremos en el siguiente Lema.

Lema 4. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias casi disjuntas numerables infinitas. Si $|\omega - \cup\mathcal{A}| = \omega = |\omega - \cup\mathcal{B}|$, entonces $X(\mathcal{A}) \cong X(\mathcal{B})$.*

Demostración. Enumeramos las familias $\mathcal{A} = \{A_n : n < \omega\}$ y $\mathcal{B} = \{B_n : n < \omega\}$. Queremos definir $\phi : \omega \longrightarrow \omega$ biyección tal que $\phi[\mathcal{I}(\mathcal{A})^c] = \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Para esto consideramos la siguiente biyección: Asignamos $\phi[A_0] = B_0$, $\phi[A_1] = B_1 - B_0$. Si ya asignamos $\phi[A_2], \phi[A_2], \ldots, \phi[A_k]$, asignamos $\phi[A_{k+1}] = B_{k+1} - (\cup_{i<k} B_k)$. Así se asocian las familias y $\phi[\omega - \cup\mathcal{A}] = \omega - \cup\mathcal{B}$. Si $F \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^c$, entonces existe n_F tal que $\omega - F \subseteq^* \cup_{i<n_F} A_{k_i}$ con $\{A_{k_i} : i < n_F\} \subset \mathcal{A}$. Como ϕ es biyección, tenemos que $\phi[\omega - F] \subseteq^* \cup_{i<n}\phi[A_{k_i}]$ y para cada $i < n_F$, se tiene que $\phi[A_{k_i}] = B_{l_i} - M_i$ con $\{B_{l_i} : i < n_F\} \subset \mathcal{B}$ y $|M_{l_i}| < \omega$. De manera que $\phi[\omega - F] \subseteq^* \cup_{i<n_F} B_{l_i}$, esto implica que $\phi[\omega - F] = \omega - \phi[F] \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$. Por lo tanto $\phi[F] \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Si $G \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$, entonces existe $m_G < \omega$ tal que $\omega - G \subseteq^* \cup_{j<m_G} B_{l_j}$ con $\{B_{l_j} : j < m_G\} \subset \mathcal{B}$. Para cada $j < m_G$ el conjunto $B_{l_j} = \phi[A_{k_j}] \cup M_{l_j}$ con $\{A_{k_j} : j < m_G\} \subset \mathcal{A}$ y $|M_{l_j}| < \omega$. Como ϕ es biyección, entonces $\omega - G \subseteq^* \cup_{j<m_G}\phi[A_{k_j}]$, esto implica que $\phi^{-1}[\omega - G] \subseteq^* \cup_{j<m_G} A_{k_j}$. De manera que $\phi^{-1}[G] \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^c$. Por lo tanto $\mathcal{I}(\mathcal{A})^c \cong \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$ vía ϕ, es decir, $X(\mathcal{A}) \cong X(\mathcal{B})$. □

Nuestro objetivo es encontrar condiciones sobre $\mathcal{B}$ para que el espacio $X(\mathcal{B})$ sea de Fréchet-Urysohn. Para eso ocupamos la siguiente definición.

Definición 9. *Sea $\mathcal{B}$ familia casi disjunta en ω. Decimos que $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte si para cada $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ existe $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]^\omega$ contenido en M.*

Lo anterior nos dice que la familia no se comportará como maximal casi disjunta, literalmente, en ninguna parte. En donde es posible restringirla, siempre encontraremos un elemento infinito ortogonal al ideal generado. Esto está estrechamente relacionado con la propiedad de Fréchet-Urysohn, ya que los elementos de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^+$ son conjuntos que tienen al punto ∞ en su cerradura. Además la familia de elementos infinitos ortogonales a $\mathcal{I}(\mathcal{B})$, resultan ser las sucesiones convergentes en $X(\mathcal{B})$. Esto se muestra en el siguiente Lema.

Lema 5. *Sea $\mathcal{B}$ una familia casi disjunta en ω. Entonces $X(B)$ es espacio de Fréchet-Urysohn si y sólo si $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte.*

Demostración. Suponemos que $X(\mathcal{B})$ es de Fréchet-Urysohn. Sea $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$. Por hipótesis existe $N \in [\omega]^\omega$ tal que $N \longrightarrow \mathcal{F}$, es decir, N está casi contenido en cada elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. De manera que $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$. Así $\mathcal{B}$ es maximal casi disjunta en ninguna parte. Inversamente, sea $A \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$. Por hipótesis existe $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]^\omega$ contenido en A, entonces N está casi contenido en cada elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Así que N es una sucesión que converge a ∞ en $X(\mathcal{B})$. Por lo tanto $X(\mathcal{B})$ es espacio Fréchet-Urysohn. □

Por la caracterización en el Teorema 2, cada que $\mathcal{B}$ resulta ser una familia casi disjunta maximal en ninguna parte, existe una familia $\mathcal{A}$ casi disjunta tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{I}(\mathcal{B})^c$. Lo que obtenemos es que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es una familia maximal casi disjunta en ω. A estas familias maximales casi disjuntas se les llama familias *2-partibles*.

A continuación estableceremos un pre-orden para filtros en ω. Este pre-orden ordena a los filtros de acuerdo a subespacios homeomorfos. Esta relación de pre-orden fue introducida por S. Todorčević en [**7**].

Definición 10. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros sobre ω. Decimos que $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ si existe $A \in \mathcal{F}$ y $B \in G^+$ tal que $\mathcal{F}|_A$ y $\mathcal{G}|_B$ son equivalentes.*

Para esta relación existe un elemento minimal dentro de la clase de los filtros de Fréchet-Urysohn de acuerdo con el siguiente Lema, el cual es más general. También mostramos que cualquier filtro libre tiene $2^{\mathfrak{c}}$ filtros sucesores con respecto a $\leq_T$.

Proposición 5. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro de Fréchet-Urysohn y $\mathcal{G}$ un filtro. Si existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \to \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$. En particular $\mathcal{F}_r \leq_T \mathcal{F}$.*

Demostración. Consideramos $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \longrightarrow \mathcal{G}$. Sea $A \in [\omega]^\omega$ tal que $A \longrightarrow \mathcal{F}$. Es claro que $A \in \mathcal{F}^+$, además $\mathcal{G}|_G = \mathcal{F}_r(G)$ y $\mathcal{F}|_A = \mathcal{F}_r(A)$. Por lo tanto cualquier biyección entre G y A, hacen que las restricciones de los filtros sean equivalentes y $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$.

□

Proposición 6. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω tal que contiene estrictamente a $\mathcal{F}_r$. Si $B \in \mathcal{F}$ no cofinito en ω y $C \subset \omega^* - B^*$ cerrado, entonces $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}_{M_\mathcal{F} \cup C}$.*

Demostración. Elegimos a B y la función identidad en B como testigos de lo que pretendemos probar. Por hipótesis $B \in \mathcal{F}$ y es claro que $B \in \mathcal{F}^+_{M_f \cup C}$. Por el Lema 1, tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}$, entonces $\mathcal{F}|_B = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}|_B$. Ahora el Lema 2, tenemos que $\mathcal{F}_{M_\mathcal{F}}|_B = \mathcal{F}_{M_\mathcal{F} \cup C}|_B$. Con esto se obtiene el resultado. □

Corolario 1. *Cada filtro sobre ω tiene $2^{\mathfrak{c}}$ filtros sucesores con respecto al pre-orden $\leq_T$.*

□

Ahora veremos otra forma de probar que cada filtro sobre ω tiene $2^{\mathfrak{c}}$ filtros de Fréchet-Urysohn sucesores con respecto al pre-orden $\leq_T$. Hacemos notar que a diferencia del resultado anterior, podemos asegurar que estos filtros sucesores pueden ser todos filtros de Fréchetr-Urysohn de acuerdo con el Teorema 5 y a una implicación del Teorema 4.

Lema 6. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω que contiene estrictamente a $\mathcal{F}_r$. Si $A \in \mathcal{F}$ con $B = \omega - A$ infinito, entonces $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G}$, para todo filtro $\mathcal{G}$ sobre B.*

Demostración. Consideramos al conjunto $A \in \mathcal{F}$ no cofinito. Sea $\mathcal{G}$ filtro sobre B. Tenemos que $A \in (\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})^+$ y la restricción $(\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})|_A$ es la misma que $\mathcal{F}|_A$, pues $\mathcal{G}$ es filtro en B y $A \cap B = \emptyset$. Entonces la función identidad en A hace que $\mathcal{F}|_A \cong (\mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G})|_A$. Por lo tanto $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{F}|_A \oplus \mathcal{G}$. □

Corolario 2. *Cada filtro de Fréchet-Urysohn tiene $2^{\mathfrak{c}}$ filtros de Fréchet-Urysohn sucesores con respecto a $\leq_T$.*

□

Siguiendo con esta relación de pre-orden podemos asegurar que para $\mathcal{F}$ filtro de Fréchet-Urysohn, existen al menos $\mathfrak{c}$ filtros de Fréchet-Urysohn predecesores con respecto a $\leq_T$.

Proposición 7. *Cada filtro de Fréchet-Urysohn sobre ω tiene al menos $\mathfrak{c}$ predecesores con respecto a $\leq_T$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ filtro de Fréchet-Urysohn sobre ω. Sea $n < \omega$ y $\mathcal{A} = \{A_i : i \leq n\}$ familia finita casi disjunta en ω. El filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ es tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}|_{\cup\mathcal{A}}$ es el filtro de Fréchet en $\cup\mathcal{A}$. Si elegimos $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \longrightarrow \mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}|_{\cup\mathcal{A}} \cong \mathcal{F}|_B$. Por lo tanto hay al menos $\mathfrak{c}$ filtros de Fréchet-Urysohn predecesores a $\mathcal{F}$. □

Podemos definir la equivalencia según S. Todorčević con respecto al pre-orden $\leq_T$ de la siguiente manera:

Definición 11. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en ω. Decimos que $\mathcal{F}$ es estrictamente menor que $\mathcal{G}$, con respecto al pre-orden $<_T$, si $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \nleq_T \mathcal{F}$. Decimos que son $\leq_T$ equivalentes si $\mathcal{F} \leq_T \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \leq_T \mathcal{F}$ y lo denotamos $\mathcal{F} \approx_T \mathcal{G}$.*

A continuación veremos un ejemplo de dos filtros tales que son $\leq_T$-comparables pero no son equivalentes.

Ejemplo 7. *Sean $A, B \in [\omega]^\omega$ tal que $A \cup B = \omega$. Consideramos $\mathcal{F}_r(A)$ el filtro de Fréchet sobre A. $\mathcal{F}_r(A)$ satisface que $\mathcal{F}_r(A) \leq_T \mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G}$, para cualquier filtro $\mathcal{G}$ sobre B. Sea $\mathcal{G}$ es ultrafiltro sobre B. Cualquier elemento de $\mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G}$, contiene un conjunto de la forma $H \cup G$ con $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es ultrafiltro la restricción de $\mathcal{G}$ en G nunca será el filtro de Fréchet en ese conjunto. Lo anterior se sigue del hecho de que $\mathcal{G}$ restringido G tiene elementos que son conjuntos no cofinitos. Además cualquier restricción de $\mathcal{F}_r(A)$ es otra vez el filtro de Fréchet. Por lo tanto $\mathcal{F}_r(A) \oplus \mathcal{G} \nleq_T \mathcal{F}_r(A)$.*

Introduciremos una terminología más para los siguentes ejemplos. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta en ω, definimos:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A})^* := \{M \subseteq \omega : |\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| \geq \omega\}.$$

Es evidente que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. En general sucede que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^*$ está propiamente contenido en $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ de acuerdo con lo siguiente.

Proposición 8. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en ω. Si $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$, entonces $N = M_1 \cup M_2$ con $M_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^\perp \cap [\omega]^\omega$ y $M_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Además $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Sea $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si $|A \cap N| = \omega$. Tenemos que $|\mathcal{A}'| < \omega$ y $|N - \cup\mathcal{A}'| = \omega$, de lo contrario $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Además $N - \cup\mathcal{A}' \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^\perp \cap [\omega]^\omega$ de otra forma se contradice la definición de $\mathcal{A}'$. Por lo tanto $N = M_1 \cup M_2$ con $M_1 = \cup\mathcal{A}'$ y $M_2 = N - \cup\mathcal{A}'$. Para la segunda parte de la proposición, primero suponemos que $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta. Si $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$, entonces $M \in [\omega]^\omega$. Así que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|M \cap A_0| = \omega$ y tenemos que $|M - A_0| = \omega$, de lo contrario $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. De manera que existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tal que $|A_1 \cap (M - A_0)| = \omega$. Inductivamente para cada $n < \omega$ podemos elegir $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $|A_n \cap M| = \omega$. Por lo tanto $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Ahora suponemos que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. Es suficiente probar para $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap M| = \omega$. Si suponemos que existe $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ sucede que $|A \cap M| < \omega$, entonces $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$, lo cual es una contradicción. De manera que no existe tal M con tales características. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es maximal casi disjunta. □

A continuación veremos una amplia clase de filtros de Fréchet-Urysohn construyéndolos en el árbol binario $2^{<\omega}$.

Sea el árbol binario $2^{<\omega}$. Hacemos una correspondencia entre el conjunto de ramas de $2^{<\omega}$ y el conjunto de Cantor 2^ω de la siguiente manera: Para $f \in 2^\omega$ sea $A_g = \{g|_n : n < \omega\}$. Así para cada $X \subseteq 2^\omega$ definimos: $\mathcal{A}_X = \{A_g : g \in X\}$, la cual es una familia casi disjunta en $2^{<\omega}$. Si $X \subseteq 2^\omega$, denotamos a $\mathcal{F}_X$ como el filtro generado por los cofinitos en $2^{<\omega}$ y los complementos de elementos en A_X. Afirmamos que $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_{\mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^c}$ y la familia casi disjunta $\mathcal{A}_X$ es maximal en ninguna parte, es decir, $\mathcal{F}_X$ es filtro de Fréchet-Urysohn. Sea $F \in \mathcal{F}_X$. Entonces F contiene a un cofinito o contiene a un conjunto de la forma $\cap_{i<n} U_i$, en donde cada U_i es cofinito o complemento de algún $A_{g_i} \in \mathcal{A}_X$. Por lo tanto $\mathcal{F}^c$ está casi contenido en

$$(\cap_{i<n} U_i)^c = \cup U_i^c \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X).$$

Por lo tanto $F \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)$. Si $G \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^c$, entonces $G^c \subseteq^* \cup_{i<n} A_{g_i}$ con $\{A_{g_i} : i < n\} \subseteq \mathcal{A}_X$, es decir:

$$\cap_{i<n} A_{g_i} \subseteq G.$$

Por lo tanto $G \in \mathcal{F}_X$. Para probar que $\mathcal{A}_X$ es maximal en ninguna parte, usaremos el siguiente resultado.

Lema 7. *Si $X \subseteq 2^\omega$ infinito y $M \subset 2^{<\omega}$ tal que $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$, entonces M contiene una anticadena infinita.*

Demostración. Cosideramos al espacio 2^ω con la topológia producto. Sea $g \in 2^\omega$ y $n < \omega$. Los conjuntos de la forma

$$U_g^n = \{f \in 2^\omega : \forall k < n(A_f|_k = A_g|_k)\}$$

conforman una base de vecindades para g. Sea $Y \subset X$ tal que $g \in Y$ si y sólo si $|A_g \cap M| = \omega$. Como Y es infinito y 2^ω compacto, entonces Y tiene un punto de acumulación. Sea h un punto de acumulación de Y en 2^ω. Para U_h^0 existe $g_0 \in (U_g^0 - \{h\}) \cap Y$. Sea n'_0 el mínimo número natural tal que $g_0|_{n'_0} \neq h|_{n'_0}$. Sea n_0 el mínimo natural tal que $g_0|_{n_0} \in A_{g_0} \cap M$ y llamamos $a_0 = g_0|_{n_0}$. Elegimos $k_1 > n'_0$ y tomamos $g_1 \in (U_h^{k_1} - \{h\}) \cap Y$. Sea n'_1 el mínimo número natural tal que $g_1|_{n'_1} \neq h|_{n'_1}$. Sea n_1 el mínimo natural tal que $g_1|_{n_1} \in A_{g_1} \cap M$ y llamamos $a_1 = g_1|_{n_1}$. Por construcción es eivdente que a_0 y a_1 son incompatibles. Procederemos inductivamente. Si ya hemos tomado los números $n'_2, \ldots, n'_j$, y hemos elegido a $a_2, \ldots, a_j$, elegimos $k_{j+1} > n'_j$ y tomamos $g_{j+1} \in (U_h^{k_{j+1}} - \{h\}) \cap Y$. Sea n'_{j+1} el mínimo número natural tal que $g_{j+1}|_{n'_{j+1}} \neq h|_{n'_{j+1}}$. Sea n_{j+1} el mínimo natural tal que $g_{j+1}|_{n_{j+1}} \in A_{g_j} \cap M$ y llamamos $a_{j+1} = g_{j+1}|_{n_{j+1}}$. Por construcción es claro que $\{a_i : i \leq j+1\}$ es una anticadena. Por lo tanto el conjunto $\{a_j : j < \omega\}$ es una anticadena infinita contenida en M. □

Ahora veamos que para $X \subseteq 2^\omega$ la familia $\mathcal{A}_X$ es maximal casi disjunta en ninguna parte. Consideramos $M \in \mathcal{I}(A_X)^+ - \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$. En este caso no hay nada que hacer pues $M = M_1 \cup M_2$ con $M_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^\perp \cap [2^{<\omega}]^\omega$. Si $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_X)^*$, por el Lema 7, existe una anticadena infinita contenida en M. Tenemos que cada anticadena es ortogonal a cualquier familia de ramas en $2^{<\omega}$. Así concluimos que $\mathcal{A}_X$ es maximal casi disjunta en ninguna parte. Por lo tanto $\mathcal{F}_X$ es filtro de Fréchet-Urysohn.

Siguiendo con filtros de la forma $\mathcal{F}_X$ en $2^{<\omega}$, veremos que existe una familia de tamaño más grande que $\mathfrak{c}$, que consiste de filtros de Fréchet-Urysohn no comparables por pares con respecto a $\leq_T$. En [**7**] se muestra la existencia de dicha familia. A continuación veremos un bosquejo de la prueba que justifica la existencia, para el cual no profundizaremos y omitiremos detalles técnicos.

Sea $X, Y \subseteq 2^\omega$ y supongamos que $\mathcal{F}_X \leq \mathcal{F}_Y$. Entonces existen $A \in \mathcal{F}_X$, $B \in \mathcal{F}_Y^+$ y una biyección $\theta : A \longrightarrow B$ que testifican que son comparables. Consideramos para $C \subset 2^{<\omega}$ el siguiente conjunto:

$$[C] := \{f \in 2^\omega : |A_f \cap C| = \omega\}.$$

Con esto podemos definir $f_\theta : [A] \longrightarrow \mathcal{P}([B])$ y $g_\theta : [B] \longrightarrow \mathcal{P}([A])$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_\theta(g) &= \{h \in Y : |\theta[A_g \cap A] \cap A_h| = \omega\} \\ g_\theta(h) &= \{g \in X : |\theta^{-1}(A_h \cap B) \cap A_g| = \omega\}. \end{aligned}$$

Notemos que para cada $x \in X$ se tiene que $f_\theta(x)$ es un subconjunto finito de Y, y para cada $y \in Y$ tenemos que $g_\theta(y)$ es un subconjunto finito de X. Además $y \in f_\theta(x)$ si y sólo si $x \in g_\theta(y)$. Sea $<_\omega$ un buen orden de 2^ω de la mínima longitud posible. Con un argumento estándar de diagonalización sobre $<_w$, obtenemos un subconjunto $Z \subset 2^\omega$ de tamaño $\mathfrak{c}$, para el cual existe una familia $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(Z)$, de tamaño más grande que $\mathfrak{c}$ tal que $X - Y = \mathfrak{c}$, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$. Se puede obtener dicha familia tal que $\mathcal{F}_X \nleq_T \mathcal{F}_Y$ para cada $X, Y \in \mathcal{X}$.

Capítulo 4

Propiedades α_i's

En este contexto hay una serie de cuestiones que están abiertas en la teoría, por ejemplo: Cuándo el producto de espacios de Fréchet-Urysohn es otra vez de Fréchet-Urysohn, ya que es sumamente conocido que el producto de espacios de Fréchet-Urysohn no es siempre de Fréchet-Urysohn. A. V. Arhangel'skii definió en [**1**] las clasificaciones α_i. Estas se analizan en espacios topológicos y sirven para medir la productividad de los espacios de Fréchet-Urysohn.

Definición 12. *Sea X espacio topológico y $x \in X$. Consideramos $\{A_n : n < \omega\}$ una sucesión de sucesiones tal que para cada $n < \omega$, $A_n \longrightarrow x$. Decimos que X es espacio α_i $(1 \leq i \leq 4)$, si existe B sucesión convergente a x tal que:*

(α_1): *para cada $n < \omega$, $A_n \subseteq^* B$.*
(α_2): *para cada $n < \omega$, $|A_n \cap B| = \omega$.*
(α_3): *para una cantidad infinita de $n < \omega$, $|A_n \cap B| = \omega$.*
(α_4): *para una cantidad infinita de $n < \omega$, $|A_n \cap B| \neq \emptyset$.*

Estas propiedades guardan un orden ya que para cada $1 \leq i \leq 3$, si un espacio satisface ser α_i, entonces éste es espacio α_{i+1}. Debido a la definición, un espacio de Fréchet-Urysohn que sea α_i se vuelve menos productivo mientras i crece. Todo espacio primero numerable y la compactación a un punto de cualquier espacio discreto son espacios α_1. Además es un hecho que el producto numerable de espacios α_i es otra vez α_i, para $1 \leq i \leq 3$. Uno se pregunta cuándo el producto de espacios α_4 es otra vez espacio α_4. De aquí surgen otras cuestiones, por ejemplo, si existen en ZFC espacios de Fréchet-Urysohn α_4, tales que su producto es otra vez Fréchet-Urysohn y este no sea α_3. T. Nogura respondió la pregunta aceptando la hipótesis del continuo, pero como veremos a continuación la respuesta en ZFC también es afirmativa y fue dada en [**5**] por P. Simon. Aquí abordaremos tal ejemplo.

Para nuestro objetivo consideraremos otra vez una familia $\mathcal{B}$ casi disjunta en ω. Procederemos con la construcción del espacio $X(\mathcal{B})$, pero también necesitaremos la siguiente definición.

Definición 13. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en ω. Decimos que $\mathcal{A}$ es completamente separable si ésta es refinamiento de $\mathcal{I}(\mathcal{A})^+$. Es decir, para cada $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^+$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset M$.*

Nos preguntamos por la existencia de una familia casi disjunta completamente separable en ω. Hay una respuesta positiva en [**5**], incluso se construye en un sentido mas fuerte. En [**5**] se enuncia el siguiente Teorema. En este trabajo omitimos su demostración.

Teorema 6. *Existe una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ completamente separable en ω de tamaño $\mathfrak{c}$ tal que para $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$, se tiene que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| = \mathfrak{c}$.*

A continuación daremos un bosquejo de la construcción del espacio con las características deseadas, probando algunos resultados preliminares. Los detalles se encuentran en [**5**].

Lema 8. *Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Si para $A \in \mathcal{A}$ elegimos de manera arbitraria $B(A) \in [A]^\omega$, entonces la familia $\mathcal{B} := \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es completamente separable. Además $\mathcal{I}(A)^* = \mathcal{I}(B)^*$*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Construimos la familia casi disjunta $\mathcal{B} = \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ de manera arbitraria. Sea $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Es claro que $\mathcal{I}(\mathcal{B})^* \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por lo tanto existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq N$, entonces $B(A) \subseteq N$ y $\mathcal{B}$ es completamente separable. Para la segunda parte, basta probar que $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Sea $M \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por el Teorema 6, tenemos que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}| = \mathfrak{c}$. Para cada $n < \omega$ elegimos $A_n \in \mathcal{A}$ distintos entre si, tal que para cada $n < \omega$ suceda que $A_n \subset M$. Para cada $n < \omega$ tenemos que $B(A_n) \subset A_n \subset M$. Así $\{B(A_n) : n < \omega\} \subseteq \{B(A) \in \mathcal{B} : |B(A) \cap M| = \omega\}$. Por lo tanto $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. □

Ahora queremos que la elección de la familia $\mathcal{B}$ sea tal que $X(\mathcal{B})$ sea espacio de Fréchet-Urysohn, es decir, que $\mathcal{B}$ sea maximal casi disjunta en ninguna parte. Para posteriormente mostrar que existe el espacio con las características deseadas.

Lema 9. *Existe una familia maximal casi disjunta en ninguna parte que es completamente separable en ω.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω. Para cada $A \in \mathcal{A}$ elegimos $B(A) \in [A]^\omega$ tal que $|A - B(A)| = \omega$. Probaremos que $\mathcal{B} = \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es maximal en ninguna parte. Por el Lema 8, $\mathcal{B}$ es completamente separable y $\mathcal{I}(\mathcal{A})^* = \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$. Si $M \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+ - \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces por la Proposición 8, existe $M_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp \cap [\omega]^\omega$ contenido en M. Si $N \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Como $\mathcal{A}$ es completamente separable, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset N$.

Sea $N' = A - B(A)$ por la elección de $B(A)$ tenemos que $N' \in \mathcal{I}(\mathcal{B}^\perp) \cap [\omega]^\omega$ y $N' \subset A \subset N$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es maximal en ninguna parte. $\square$

Teorema 7. *Sean $\mathcal{A}$ familia casi disjunta completamente separable en ω de tamaño $\mathfrak{c}$ y $\mathcal{B}$ la familia de la prueba del Lema 9. Entonces $X(\mathcal{B})$ es espacio de Fréchet-Urysohn α_4 y no α_3.*

Demostración. De acuerdo con el Lema 5 el espacio $X(\mathcal{B})$ es de Fréchet-Urysohn. Para probar que el espacio es α_4 consideramos $\{T_n : n < \omega\}$, una colección numerable de sucesiones que convergen a ∞ en $X(\mathcal{B})$. Llamemos $T = \cup_{n<\omega} T_n$, es claro que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^+$. Si $T \notin \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces existe $M_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$ tal que $M_1 = T - M_0$ es un infinito elemento de $\mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$ y para cada $n < \omega$ se tiene que $|T_n \cap M_1| = \omega$. Si $T \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$, entonces por el Lema 8, tenemos que $T \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Por el Teorema 6, existen $\mathfrak{c}$ elementos de $\mathcal{A}$ contenidos en T. Desde que T_n converge a ∞, entonces para cada $n < \omega$ se tiene que $T_n \notin \mathcal{I}(\mathcal{B})^*$ y esto implica que $T_n \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$. Entonces cada T_n solo intersecta a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ en una cantidad infinita de puntos, por lo cual existen a lo más ω elementos de $\mathcal{A}$ que están contenidos en T e intersectan a algún T_n en una cantidad infinita de puntos. Por lo tanto debe de existir $A \in \mathcal{A}$, el cual está contenido en T y es tal que para cada $n < \omega$ se tiene $|T_n \cap A| < \omega$. Así $|T_n \cap (A - B(A))| < \omega$. Pero al mismo tiempo $|A - B(A)| = \omega$ y $A \subseteq T$. Por lo tanto el número de índices $n < \omega$ tales que $(A - B(A)) \cap T_n \neq \emptyset$ debe de ser infinito. Además $A - B(A) \in \mathcal{I}(\mathcal{B})^\perp$, es decir, converge a ∞. Por lo tanto $X(\mathcal{B})$ es espacio α_4. Si elegimos arbitrariamente $\{A_n : n < \omega\} \subset \mathcal{A}$, entonces para cada $n < \omega$ tenemos que $T_n = A_n - B(A_n)$ converge a ∞. Ahora elegimos $N \subseteq \cup_{n<\omega} T_n$ tal que para $\{n < \omega : |T_n \cap N| = \omega\}$ es infinito. Entonces $N \in \mathcal{I}(\mathcal{A})^*$ y por hipótesis existe $A_0 \in \mathcal{A}$ contenido en N. Sea $U = \{\infty\} \cup (\omega - B(A_0))$. Entonces U es una vecindad de ∞ en $X(\mathcal{B})$ que testifica que N no converge a ∞. Es claro notando que $N - U$ es infinito. Por lo tanto $X(\mathcal{B})$ no es un espacio α_3. $\square$

Hasta ahora se logró un espacio que es de Fréchet-Urysohn y α_4 el cual no es α_3. En [**5**] P. Simon logró construir un espacio con estas características que además es Fréchet-Urysohn en cada potencia finita. En este trabajo analizamos algunas cuestiones preliminares, las cuales se usan para construir dicho espacio.

Definición 14. *Sean X espacio topológico, $x \in X$ y $k < \omega$. Decimos que X es FU_k (Fréchet-Urysohn para conjuntos de tamaño k), si para cada $\mathcal{K} \subset [X]^{<k}$ que sea π-base local de x, existe $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ numerable tal que $\mathcal{K}' \longrightarrow x$, es decir, para cada vecindad U de x tenemos que $\mathcal{K}' \subseteq^* \mathcal{P}(U)$. Decimos que X es espacio FU_{bdd} (Fréchet-Urysohn para conjuntos acotados), si la propiedad anterior se mantiene para cada $k < \omega$.*

La definición anterior nos permite caracterizar la propiedad de Fréchet-Urysohn en la diagonal de las potencias finitas del espacio, de acuerdo con el siguiente Teorema.

Teorema 8. *Un espacio topológico X es FU_k, si y sólo si X^k es Fréchet-Urysohn en los puntos de la diagonal* $\Delta_{X^k} = \{x \in X^k : \pi_i(x) = \pi_j(x), i, j < k\}$.

Demostración. Supongamos que X es FU_k. Sea $(x, \ldots, x) \in \Delta_{X^k}$ y $A \subseteq X^k$ tal que $x \in \overline{A}$. Para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ denotamos $U^k = \Pi_{i=1}^k U$, este conjunto es tal que tiene intersección no vacía con A. Para cada U^k elegimos $y_U \in U^k \cap A$. Si definimos $K_{y_U} = \{\pi_1(y_U), \ldots, \pi_k(y_U)\}$ es tal que $K_{y_U} \in [X]^{<k}$. Entonces la familia

$$\mathcal{K} = \{K_{y_U} : U \in \mathcal{N}(x)\}$$

es una π-base local de x. Esto después de notar que $K_{y_U} \subseteq U$, si y sólo si $y_U \in U^k$. Por hipótesis existe una subfamilia numerable $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}' \longrightarrow x$. Para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ sucede que $\mathcal{K}' \subseteq^* \mathcal{P}(U)$, por lo tanto $B = \{y_U : K_{y_U} \in \mathcal{K}'\}$ está casi contenido en U^k, entonces la sucesión B converge a x. Así X^k es Fréchet-Urysohn en Δ_{X^k}. Ahora suponemos que X^k es Fréchet-Urysohn en Δ_{X^k}. Sea $x \in X$ y $\mathcal{K} \subseteq [X]^{<k}$ una π-base local de de x. Para todo $K \in \mathcal{K}$ definimos $x_K = (x_K^1, \ldots, x_K^k)$ con $x_K^i \in K$. Sea $J = \{x_K : K \in \mathcal{K}\}$. Este conjunto es tal que para cada $U \in \mathcal{N}(x)$, se cumple que $U^k \cap J \neq \emptyset$, entonces $x \in \overline{J}$. De manera que existe $J' \subset J$ numerable tal que $J' \longrightarrow x$. Así que

$$\mathcal{K}' = \{K : x_K \in J'\}$$

es tal que $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}' \longrightarrow x$. Por lo tanto X es FU_k. □

Nosotros manejamos espacios numerables con un sólo punto no aislado. Eso nos permite usar la caracterización anterior para decidir cuando nuestros espacios resultarán de Fréchet-Urysohn en cada potencia y no solo en los puntos de la diagonal.

Proposición 9. *Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre ω tal que $\mathcal{F}$ es de Fréchet-Urysohn. Si $\xi(\mathcal{F})^k$ es Fréchet-Urysohn en la diagonal, entonces $\xi(\mathcal{F})$ es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Se procederá por inducción sobre k. Llamemos $X = \xi(\mathcal{F})$. Si $k = 1$ entonces $\Delta_{X^k} = X$ y es Fréchet-Urysohn. Para $k = 2$, sea $x \in X^2$. Si $x = (n, m)$ con $n, m < \omega$, entonces x es aislado. Si $x = (n, \mathcal{F})$ y $A \subset X^2$ tal que $x \in \overline{A} - A$. Tenemos que $|A \cap (\{n\} \times X)| = \omega$, de lo contrario para cada $F \in \mathcal{F}$ la vecindad

$$U = \{n\} \times F - (A \cap \{n\} \times X)$$

no intersecta a A. Además $\{n\} \times X \cong X$ y $\{\{n\} \times F : F \in \mathcal{F}\} \cong \mathcal{F}$ y $A \cap (\{n\} \times X) \in (\{n\} \times \mathcal{F})^+$. Por lo tanto existe B subconjunto infinito de A tal que $B \longrightarrow x$. Para $x = (\mathcal{F}, n)$ el procedimiento es análogo. Si $x = (\mathcal{F}, \mathcal{F})$, entonces $x \in \Delta_{X^2}$. Por lo tanto X^2 es de Fréchet-Urysohn. Usando la hipótesis de inducción tenemos que la afirmación es valida para cada número natural menor que k. Sea $x \in X^k$. Si $x = (x_1, \ldots, x_k)$ con $\{x_i : 1 \leq i \leq k\} \subset \omega$ no hay nada que hacer. Si para cada $1 \leq i \leq k$ se tiene que $x_i = \mathcal{F}$, entonces $x \in \Delta_{X^k}$ y también esta cubierto ese caso. Por último consideremos que existen $1 \leq l, j \leq k$ tal que $x_j = n < \omega$ y $x_l = \mathcal{F}$. Sea $A \subset X^k$ tal que $x \in \overline{A} - A$. Sea

$$Y = X \times \ldots \times \{n\} \times \ldots \times X.$$

Llamamos $A' = A \cap Y$. Tenemos que $|A'| = \omega$. Lo anterior desde que x no es punto aislado. Además tenemos que $x \in \overline{A'} - A'$ (la cerradura tomada en Y). Tenemos que $Y \cong X^{k-1}$, si aplicamos la hipótesis de inducción, entonces existe B subconjunto infinito de A' tal que $B \longrightarrow x$, el cual también converge a x en X^k. Por lo tanto X^k es de Fréchet-Urysohn. $\square$

En [**5**] está la construcción de una familia casi disjunta en ω, la cual resulta ser más general que las familias completamente separables. Además se construye el espacio que es de Fréchet-Urysohn en cada potencia finita, α_4 y no α_3. Con esto damos por concluido éste trabajo que en realidad es un compendio de ejemplos de Filtros con la propiedad de Fréchet-Urysohn. Dichos filtros se han estado usando para responder cuestiones de la índole de la productividad de los espacios de Fréchet-Urysohn, muchas de las cuales están resumidas en el trabajo de P. Nyikos en [**3**].

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the product operation. Tr. Mosk. Mat. Obs. 40 (1979), 171-206.

[2] G. Gruenhage, P.J. Szeptycki, Fréchet Urysohn for finite sets. Top. Appl. 151 (2005), 238-259.

[3] P.J. Nyikos, Workshop lecture on products of Fréchet spaces. Top. Appl. 157 (2010), 1485-1490.

[4] P. Simon, A countable Fréchet-Urysohn space of uncountable character. Top. Appl. 155 (10) (2008), 1129-1139.

[5] P. Simon, A hedghog in a product. Acta. Univ. carolin. Math. Phys. 39 (1998),147-153.

[6] S. García, C. Uzcategui, Subsequential Filters. Topology Appl. 156 (2009), 2949-2959.

[7] S. Todorčević and C.Uzcategui, Analytic k-spaces, Top. Appl. 146-147 (2005), 511-526.