Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH
Instituto de Física y Matemáticas.

Grupos Nil de Bass de $\mathbb{Z}[C_{p^2}]$ y para $\mathbb{Z}[C_p \times C_p]$.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Salvador Sierra Murillo.
Director: Dr. Daniel Juan Pineda.

Morelia, Michoacán - febrero de 2011.

Índice general

Agradecimientos

Gracias Papá, Mamá, Carolina, Guillermo y Rodrigo he encontrado en ustedes, mi familia, todo el apoyo y amor que una persona puede recibir, se la felicidad que este humilde logro mío les produce. Gracias también a ti Ana Belem has tenido demasiada paciencia... demasiada y por tantas risas que hemos compartido.

Agradezco sinceramente a mi asesor Daniel por ser un extraordinario amigo, un magnífico asesor y tener confianza plena en mí; Fernando tú has sido también un gran amigo y excelente motivador. A los demás profesores: siempre estuvieron dispuestos a brindarme la mano, mención especial para Abel que me recordó lo que es la maestría.

A todos mis amigos por estar ahí para hacer más llevaderos los exámenes fallidos y las notas bajas. Oscar con tu eterna indecisión, Antonio con tus extravagancias; Kenneth con el ejemplo de paciencia, Luis Jorge con el valor de la vida fresca que me has transmitido y Salvador por tantas cosas extra ñas que hemos pasado.

Tambíen quiero agradecer a todo el personal administrativo de la Universidad Nacional Autónoma de México y de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por hacer posible que el posgrado funcione.

Por último, a todas las personas que no menciono pero que han hecho agradable y realmente entrañable mi estancia en el PCCM... Gracias.

INTRODUCCIÓN

Buscar dar una definición inmediata, clara y precisa de lo que es K-teoría sería pretencioso y por demás limitante para una teoría que ha permeado muchas y variadas ramas de la matemáticas, por mencionar algunas: topología, geometría algebraica y teoría de números. La K-teoría algebraica, rústicamente dicho, asocia a cada anillo R grupos abelianos $K_i(R)$, $i \in \mathbb{Z}$, vamos que la K-teoría "luce", para fijar ideas, como una teoría de homología de anillos . Nosotros abarcaremos solamente los casos $i = 0, 1, 2$ que son, por así decirlo, los más accesibles computacionalmente. Los casos de K-teoría negativa vienen dados como co-nucleos de ciertas aplicaciones [Bass, Chap XII] y se definen de manera recursiva, mientras que para $i \geq 3$ se requirió el genio de Quillen para definirse y requiere comenzar en el álgebra, pasar a la topología y grupos de homotopía. El resultado medalla Fields para Quillen y un universo en el cual trabajar para todos los matemáticos.

En el presente trabajo de tesis nos propusimos estudiar los llamados Nil-grupos de Bass de los anillos de grupo $\mathbb{Z}[C_{p^2}]$ y $\mathbb{Z}[C_p \times C_p]$. La definición de los Nil-grupos de Bass se da al considerar un anillo R y buscar calcular la K-teoría de su anillo de polinomios $R[x]$ o bien, su anillo de polinomios de Laurent $R[x, x^{-1}]$, como su nombre indica, son el nucleo de un homomorfismo llamado aumentación obtenido de inducir en K-teoría el homomorfismo de anillos $x \mapsto 0$. Los resultados obtenidos son nuevos.

Esta tesina tiene como antecedente el árticulo de C. Weibel [**We**] en el cual los cálculos son desarrollados para el caso $p = 2$, nosotros generalizamos estos resultados para un número primo cualquiera. Weibel explota la estructura de modulos sobre el anillo de vectores de Witt y nosotros simplemente confinamos el trabajo a estudiarlos como grupos abelianos.

Comenzamos por las definiciones clásicas de K_0 con módulos proyectivos finitamente generados, la de K_1 como la abelianización de GL el grupo general lineal infinito con entradas en un anillo y de K_2 visto como problemas de extensiones centrales. En el segundo capítulo abordamos propiedades de los grupos previamente definidos, en concreto estudiamos como se comportan estos grupos respecto de ideales, herramienta que es fundamental para este trabajo. En el tercer capítulo definimos propiamente los Nil-grupos de Bass, algunas propiedades de estos grupos (siendo imprecisos y coloquiales podemos decir que si vale para los grupos K_i es altamente probable que valga para NK_i) y abordamos el problema.

Una cosa por resaltar, durante nuestro análisis del problema fue necesario estudiar un Iceberg dentro de la K-teoría que es el estudio de los anillos de polinomios truncados, basados en el trabajo de [Stienstra] pudimos atravesar el tema de una manera más o menos accesible. El estudio de estos anillos requiere un estudio minucioso y delicado, en [Hesselholt] se da una introducción muy precisa de este tema, mientras que en [Lluis-Puebla] se dan resultados con cálculos más particulares.

Termino esta introducción resaltando un hecho común en las matemáticas; Una definición matemática pocas veces sirve cuando se buscan obtener resultados concretos. Esta tesis no es mas que otro de los múltiples trabajos que confirman esta afirmación.

Capítulo 1

Grupos de K-teoría

En este capítulo damos las definiciones clásicas de los grupos de K-teoría en dimensiones 0, 1 y 2. El enfoque que abordaremos es desde el punto de vista de [**Ros94**] y se exponen algunos ejemplos de cálculo de estos grupos de manera explícita. Es necesario aclarar que aunque la presentación que aquí damos de K_0 posee un enfoque a priori diferente a las de K_1 y K_2 es posible también definir K_0 es términos matriciales.

1. K_0

Fijamos a continuación la notación que será usada a lo largo de este trabajo. Consideremos R un anillo con unidad. Todo homomorfismo de anillos será asumido como que preserva el uno del anillo. Trabajaremos en la categoría de módulos izquierdos sobre R, por simplicidad la denotaremos por R-mod.

Estamos interesados en los R-mod proyectivos, es decir, un R-mod P es proyectivo si para cada par de homomorfismos de R-mod, $p : A \to B$ suprayectivo y $h : P \to B$ existe $g : P \to A$ homomorfismo de R-mod tal que $p \circ g = h$. En un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Algunas equivalencias con la definición de R-mod proyectivo son las siguientes.

Proposición 1.1. [**Rot09**] *Para un R-mod P son equivalentes las siguientes:*

(a) *P es proyectivo.*
(b) *Cualquier sucesión exacta de R-mod*

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

se escinde.
(c) *P es sumando directo de un R-mod libre.*

Un par de propiedades de los R-mod proyectivos estan contenidos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. [**Rot09**]*Para todo anillo R se satisfacen:*

(a) *Todo sumando directo un R-mod proyectivo es también proyectivo.*
(b) *Toda suma directa de R-mod proyectivos es un R-mod proyectivo.*

Para poder avanzar en nuestras ambiciones de definir el K_0 grupo es necesario restringirnos a los R-mod proyectivos que además sean finitamente generados, estos nos permiten "operarlos" de una manera que asemeja a un semigrupo, considerando la siguiente equivalencia.

Proposición 1.3. [**Ros94**] *Un R-mod P es finitamente generado y proyectivo si y solo si es isomorfo a un sumando directo de R^n.*

Denotemos por $Proj(R)$ al conjunto de clases de isomorfismo de R-mod proyectivos finitamente generados. Algunas observaciones son las siguientes:

(1) $Proj(R)$ es un conjunto: Es consecuencia de la proposición 1.3 y consta de todos los submódulos escindibles de R^n, $n \in \mathbb{N}$.
(2) Si $P \cong P'$ y $Q \cong Q'$ entonces $P \oplus Q \cong P' \oplus Q'$.
(3) La suma directa es conmutativa y asociativa.
(4) El módulo 0 (llamado el trivial) satisface $P \oplus 0 \cong P \cong 0 \oplus P$.

Las observaciones (1)-(4) anteriores resaltan la naturaleza de $Proj(R)$, es decir, es un semigrupo abeliano bajo la suma directa. Similarmente a la completación de $\mathbb{N}$ como grupo bajo la suma o la completación de $\mathbb{Z}^*$ a grupo bajo la multiplicación procedemos con $Proj(R)$, siguiendo el teorema de Grothendieck:

Teorema 1.4. *([**Ros94**], pag.3) Sea S un semigrupo conmutativo. Existe un grupo abeliano $G(S)$ y un homomorfismo de semigrupos $\kappa : S \to G(S)$ tal que para todo grupo H y homomorfismo de semigrupos $k : S \mapsto H$ existe un único $\theta : G(S) \mapsto H$ tal que $k = \theta \circ \kappa$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "k"'] & G(S) \arrow[d, dashed, "\theta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Definición 1.5. Sea R un anillo. Definimos $K_0(R)$ como el grupo de Grothendieck del semigrupo $Proj(R)$. Es decir

$$K_0(R) := G(Proj(R))$$

Ejemplo 1.6. Los siguientes ejemplos son clásicos para mayor detalle consultar [**Ros94**]

(1) Si R es un campo, los R-mod proyectivos finitamente generados son los R-espacios vectoriales de dimensión finita, en este caso la dimensión del espacio determina las clases de isomorfismo por lo que $Proj(R)$ se identifica con $\mathbb{N}$ y por lo tanto $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.
(2) Si $R = R_1 \times R_2$, entonces tenemos que $K_0(R) \cong K_0(R_1) \times K_0(R_2)$. Esta propiedad se extiende a los productos finitos de anillos.
(3) Si R es un dominio de ideales principales sabemos que todo R-mod proyectivo finitamente generado es isomorfo a R^n para algún $n \in \mathbb{N}$, además en un dominio de ideales principales si $R^n \cong R^m$, entonces $n = m$ y por lo tanto $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.
(4) Si R es un anillo local es conocido que todo R-mod proyectivo finitamente generado es libre de rango único, por lo tanto $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

2. K_1

La definición del funtor K_1 esta dada en términos matriciales, por lo cual fijamos un poco de notación que nos servirá además en las secciones posteriores.

Definición 1.7. Sea R un anillo. Definimos el grupo aditivo de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R como $M_n(R)$ y el grupo multiplicativo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en R y determinante una unidad del anillo como $GL_n(R)$.

Asociados a las dimensiones de la matriz tenemos el siguiente par de homomorfismos

$$\begin{array}{rcl} M_n(R) & \to & M_{n+1}(R) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} GL_n(R) & \to & GL_{n+1}(R) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

de manera que tenemos los siguientes sistemas dirigidos

$$\cdots \to M_n(R) \to M_{n+1}(R) \to \cdots$$

$$\cdots \to GL_n(R) \to GL_{n+1}(R) \to \cdots$$

tomando el límite directo de estos sistemas dirigidos tenemos $M(R) = \text{lím}_n\, M_n(R)$ y $GL(R) = \text{lím}_n\, GL_n(R)$.

Definición 1.8. Una matriz elemental de $n \times n$ es una matriz de la forma

$$e_{ij}(a) = I_n + (a_{ij})$$

en donde $a \in R$, I_n es la matriz identidad en $GL_n(R)$ y (a_{ij}) es una matriz con ceros en todas las posiciones salvo en elemento a en posición (i, j). Denotamos el conjunto de matrices elementales de $n \times n$ por $E_n(R)$.

Las matrices elementales forman un grupo bajo la multiplicación de matrices, analogamente tenemos los homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} E_n(R) & \to & E_n(R) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

que genera un sistema dirigido

$$\cdots \to E_n(R) \to E_{n+1}(R) \to \cdots$$

y tomando su límite directo tenemos $E(R) = \text{lím}_n E_n(R)$.

Proposición 1.9. [**Ros94**][Lema de Whitehead] *Para todo anillo R, el conmutador de $GL(R)$ y el conmutador de $E_(R)$ coincide y son iguales a $E(R)$.*

Definición 1.10. Si R es un anillo, definimos $K_1(R)$ como

$$K_1(R) := \frac{GL(R)}{E(R)}$$

es decir $K_1(R)$ es la abelianización de $GL(R)$.

La operación en $K_1(R)$ se puede representar de dos maneras equivalentes según [**Ros94**], consideremos dos clases $[A], [B] \in K_1(R)$ el producto lo definimos por

(1) $[A][B] = [AB]$
(2) $[AB] = [A \oplus B] = [AB \oplus 1]$

Ejemplo 1.11. Consideremos los siguientes:

(1) Si $R = R_1 \times R_2$, entonces $GL(R) = GL(R_1) \times GL(R_2)$ y por lo tanto $K_1(R) \cong K_1(R_1) \times K_1(R_2)$.
(2) Si R es un campo, entonces $K_1(R) \cong R^\times$ ya que la aplicación $det : GL_n(R) \to R^\times$ es preservada por el límite directo.
(3) Si R es un anillo con división o un anillo local, entonces la inclusión $R^\times \hookrightarrow GL(R)$ induce un homomorfismo suprayectivo $R^\times_{ab} \to K_1(R)$ y por lo tanto es un isomorfismo.

(4) Si R es un dominio euclideano, entonces $K_1(R) \cong R^\times$. Casos particulaes $K_1(\mathbb{Z}) \cong \{-1, 1\}$ y para un campo k, $K_1(k[x]) = k^\times$.

3. K_2

Buscar una definición sencilla para el grupo K_2 deja de ser una tarea sencilla y pronto se vuelve rebuscada, el enfoque que damos aquí es a partir del llamado grupo de Steinberg. Es útil, para poder realizar cálculos, una vez establecida la definición hablar de elementos generadores.

Lema 1.12. [**Ros94**] *Sea R un anillo. El grupo $E(R)$ posee como generadores $\{e_{ij}(a)\}$ con $i \neq j$, $a \in R$ que astisfacen*

(1) $e_{ij}(a)e_{ij}(b) = e_{ij}(a + b)$
(2) $e_{ij}(a)e_{kl}(b) = e_{kl}(b)e_{ij}(a)$, *si* $i \neq l$, $j \neq k$
(3) $e_{ij}(a)e_{jk}(b)e_{ij}(a)^{-1}e_{jk}(b)^{-1} = e_{ik}(ab)$, *si* i, j *y* k *son distintos.*

A continuación definimos el grupo de Steinberg.

Definición 1.13. Sea R un anillo y $n \geq 3$. El grupo de Steinberg de orden n sobre R, $St_n(R)$, se define como el grupo con generadores $x_{ij}(a)$ $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ y $a \in R$ y relaciones

(1) $x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a + b)$
(2) $x_{ij}(a)x_{kl}(b) = x_{kl}(b)x_{ij}(a)$, si $i \neq l$, $j \neq k$
(3) $x_{ij}(a)x_{jk}(b)x_{ij}(a)^{-1}x_{jk}(b)^{-1} = x_{ik}(ab)$, si i, j y k son distintos.

Por el lema 1.12 y la definición 1.13 del grupo de Steinberg obtenemos un homomorfismo suprayectivo

$$\varphi_n : St_n(R) \to E_n(R)$$

La idea de generalizar un sistema dirigido $St_n(R) \to St_{n+1}(R)$ es tentadora y, ya que en general este encaje no es inyectivo, tomamos como grupo de Steinberg $St(R)$ al limite inductivo, es decir, los generadores son $x_{ij}(a)$ con $1 \leq i, j < \infty$, $a \in R$ de manera que obtenemos el siguiente homomorfismo

$$\varphi : St(R) \to E(R)$$

Definición 1.14. [**Ros94**] Sea R un anillo. Definimos $K_2(R)$ como

$$K_2(R) := Nuc\{\varphi : St(R) \to E(R)\}$$

Es un grupo abeliano que es el centro de $St(R)$, es decir, $Z(St(R)) = K_2(R)$.

Ejemplo 1.15. Para K_2, los cálculos no son tan directos como se ilustra a continuación:

(1) Si $R = R_1 \times R_2$, entonces $K_2(R) \cong K_2(R_1) \times K_2(R_2)$.
(2) Si $R = \mathbb{Z}$, entonces $K_2(R) = \mathbb{Z}/(2)$.

Capítulo 2

Propiedades de los K-funtores

En este capítulo exploramos más acerca de la naturaleza general de los funtores de K-teoría, en particular tomamos el enfoque dado por Milnor y rescatamos la sucesión de Mayer-Vietoris y las sucesiones asociadas a ideales, apareciendo en esta sección los conceptos de K-grupo relativo y excisión. Por último dedicamos una sección para ver la naturaleza de K_2 en términos de ciertos símbolos.

1. Sucesión de Mayer-Vietoris.

La sucesión de Mayer-Vietoris es una propiedad bien preservada por los funtores K_i para $i = 0, 1$ y bajo ciertas condiciones extras por K_2. Se vuelven relevantes pues permiten realizar cálculos de manera explícita y directa. Comencemos por considerar un diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & R_1 \arrow[d, "j_1"] \\ R_2 \arrow[r, "j_2"] & R' \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

tal que:

(a) Si $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ satisfacen que $j_1(r_1) = j_2(r_2)$ en R', entonces existe un único $r \in R$ tal que $i_1(r) = r_1$ y $i_2(r) = r_2$, es decir, R es un pullback.
(b) Al menos j_1 o j_2 es suprayectiva.

Teorema 2.1. *Dado un cuadrado de anillos como (1.1). Entonces existe una sucesión exacta de longitud seis dada por*

$$K_1(R) \longrightarrow K_1(R_1) \oplus K_1(R_2) \longrightarrow K_1(R') \xrightarrow{\partial}$$

$$K_0(R) \longrightarrow K_0(R_1) \oplus K_0(R_2) \longrightarrow K_0(R')$$

Demostración. No daremos la demostración rigurosa de este teorema, simplemente mencionaremos los homomorfismos de grupos para $i = 0, 1$ y el homomorfismo ∂

$$\begin{array}{rcl} K_i(R) & \to & K_i(R_1) \oplus K_i(R_2) \\ x & \mapsto & (p_{1*}(x), p_{2*}(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} K_i(R_1) \oplus K_i(R_2) & \to & K_i(R') \\ (y, z) & \mapsto & j_{1*}(y) - j_{2*}(z) \end{array}$$

El homomorfismo ∂ viene dador por

$$\begin{array}{rcl} \partial : K_1(R') & \to & K_0(R) \\ x & \mapsto & [M] - [R^n] \end{array}$$

en donde $[R^n]$ es la clase del R-mod libre de rango n y $[M]$ es la clase del siguiente módulo. Sea $x \in K_1(R')$ y sea $A \in GL_n(R')$ una matriz que lo represente. Sean $R' \otimes_{j_1} R_1^n$ y $R' \otimes_{j_2} R_2^n$ los R'-mod libres de rango n. Así x determina un isomorfismo entre estos R'-modulos, tomamos M como el subgrupo de $R_1^n \times R_2^n$ dado por $\{(v_1, v_2) | h j_{1*}(v_1) = h j_{2*}(v_2)\}$. Para mayor detalle consultar [**Mil71**].

□

A continuación consideramos un ejemplo que es relevante para nuestro estudio de los grupos de K-teoría que estamos por determinar.

(1) Sea p un primo, $C_p = \langle \sigma | \sigma^p = 1 \rangle$ cíclico de orden p y $R = \mathbb{Z}[C_p]$ el correspondiente anillo de grupo. Sea ξ_p una raíz p-ésima de la unidad. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[C_p] \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \mathbb{Z}[\xi_p] \arrow[d, "j_1"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "j_2"] & \mathbb{F}_p \end{tikzcd}$$

donde $i_1(\sigma) = \xi_p$, $i_2(\sigma) = 1$, las j_i son reducciones modulo p además $j_1(\xi_p) = 1$. Este cuadrado satisface las hipótesis para aplicar sucesión de Mayer-Vietoris y tenemos

$$K_1(\mathbb{Z}[C_p]) \longrightarrow K_1(\mathbb{Z}) \oplus K_1(\mathbb{Z}[\xi_p]) \longrightarrow K_1(\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\partial}$$

$$K_0(\mathbb{Z}[C_p]) \longrightarrow K_0(\mathbb{Z}) \oplus K_0(\mathbb{Z}[\xi_p]) \longrightarrow K_0(\mathbb{F}_p)$$

Notemos que $j_{2*} : K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(\mathbb{F}_p)$ es un isomorfismo pues ambos son dominios de ideales principales y su rango esta bien definido. Ahora, $K_1(\mathbb{F}_p)$ son las unidades de $\mathbb{F}_p$ y para cada

$1 \leq k \leq p-1$ definimos

$$u = \frac{\xi_p^k - 1}{\xi_p - 1} = 1 + \xi_p + \cdots + \xi_p^{p-1}$$

en el anillo $\mathbb{Z}[\xi_p]$ y para $\eta = \xi_p^k$ y $\eta^l = \xi_p$ tenemos el elemento

$$v = \frac{\eta^l - 1}{\eta - 1}$$

de manera que $uv = 1$ en el anillo $\mathbb{Z}[\xi_p]$. Luego $j_1(u) \in \mathbb{F}_p$ es la clase residual de k módulo p y por lo tanto j_{1*} es suprayectiva y por lo tanto

$$i_{1*} : K_0(\mathbb{Z}[C_p]) \to K_0(\mathbb{Z}[\xi_p])$$

es un isomorfismo.

Extender nuestra sucesión a los grupos K_2 es posible, sin embargo el costo es encarecer las hipótesis iniciales. Milnor en [**Mil71**] expande la sucesión exacta de seis a nueve términos incluyendo aquellos referentes a los grupos de K_2. Asimismo, se ha demostrado que la sucesión no se puede expander para los términos K_3.

Teorema 2.2. *En un diagrama de anillos como (1.1) con todos los homomorfismos suprayectivos la sucesión exacta del teorema 2.1 se expande a la izquierda como*

$$K_2(R) \to K_2(R_1) \oplus K_2(R_1) \to K_2(R') \to K_1(R) \to \cdots$$

2. Suseciones asociadas a ideales.

A continuación definiremos los grupos de K-teoría relativos a ideales de un anillo. Mantenemos fija la notación que hemos utilizado.

Definición 2.3. Sea R un anillo e $I \subseteq R$ un ideal. Definimos el anillo doble relativo a I como

$$D := \{(r, r') \in R \times R | r \equiv r'(modI)\}$$

y las proyecciones $p_1 : D \to R$ $p_1((r, r')) = r$ y $p_2 : D \to R$ $p_2((r, r')) = r'$

Definición 2.4. Sea R un anillo e I un ideal. Los K-grupos relativos de R respecto a I se definen como

$$K_i(R, I) := Nuc\{p_{1*} : K_i(D) \to K_i(R)\}$$

Lema 2.5. *Sea R un ideal. Entonces todo ideal $I \subseteq R$ da origen a una sucesión exacta*

$$K_1(R,I) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R/I) \longrightarrow$$

$$K_0(R,I) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(R/I)$$

Demostración. Basta que consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & R \arrow[d, "j_1"] \\ R \arrow[r, "j_2"] & R/I \end{tikzcd}$$

y aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris. ❑

Aclaramos, por el teorema (2.2) para que la sucesión de Mayer-Vietoris se extienda a la izquierda es necesario considerar diagramas en los que todos los homomorfismos sean suprayectivos. Procedemos a definir los grupos relativos K_2 para ideales.

Definición 2.6. Definimos el grupo de Steinberg de R relativo a un ideal $I \subseteq R$ como

$$St(R,I) := Nuc\{p_1 : St(D) \to St(R)\}$$

análogamente el grupo general lineal del par (R,I) como

$$GL(R,I) := Nuc\{p_1 : GL(D) \to GL(R)\}.$$

En donde p_1 denota el homomorfismo inducido en $St(R)$ y $GL(R)$ por $p_1 : D \to R$.

Lema 2.7. *El homomorfismo $p_2 : St(R,I) \to St(R)$ genera una sucesión exacta*

$$St(R,I) \to St(R) \to St(R/I) \to 0.$$

Aunque en general es válida la siguiente observación, la consideramos exclusivamente para los anillos D y R, es la existencia de las sucesiones exactas

$$0 \to K_2(D) \to St(D) \to GL(D) \to K_1(D) \to 0,$$

$$0 \to K_2(R) \to St(R) \to GL(R) \to K_1(R) \to 0$$

al aplicar a cada término de la sucesión exacta el homomorfismo respectivo p_1 obtenemos la sucesión exacta relativa

$$0 \to K_2(R,I) \to St(R,I) \to GL(R,I) \to K_1(R,I) \to 0$$

y podemos generar el siguiente diagrama bajo el homomorfismo correspondiente p_2

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K_2(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & St(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & GL(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2(R) \arrow[r] \arrow[d] & St(R) \arrow[r] \arrow[d] & GL(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2(R/I) \arrow[r] & St(R/I) \arrow[r] \arrow[d] & GL(R/I) \arrow[r] & K_1(R/I) \arrow[r] & 0 \\
 & & 1 & & &
\end{tikzcd}
$$

Teorema 2.8. *Sea R un anillo e $I \subseteq R$ un ideal. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta de longitud nueve.*

$$K_2(R,I) \to K_2(R) \to K_2(R/I) \to K_1(R,I) \to \cdots \to K_0(R/I).$$

3. K_2 y los símbolos de Dennis-Stein.

Manteniendo la notación anterior, para un anillo R, $a,b,c,d \in R$ e $i \neq j$ enteros positivos definimos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{(i,j)}$$

como la matriz $I + e_{ii}(a) + e_{ij}(b) + e_{ji}(c) + e_{jj}(d)$ en $GL(R)$. La denotaremos simplemente por $A^{(ij)}$ y satisfacen las reglas del producto $A^{(ij)}B^{(ij)} = (AB)^{(ij)}$ consultar [**Mag02**]. En $St(R)$ existen elementos que bajo la función φ poseen como imagen matrices del tipo $A^{(ij)}$. En concreto, para $a,b \in R^*$ e $i \neq j$ definimos

(a) $w_{ij}(a) = x_{ij}(a)x_{ji}(-a^{-1})x_{ij}(a)$
(b) $h_{ij}(a) = w_{ij}(a)w_{ij}(-1)$

Definición 2.9. Sea R un anillo. Un símbolo de Steinberg sobre R es un elemento

$$\{a,b\}_R = \{a,b\}_{12} = h_{12}(ab)h_{12}(a)^{-1}h_{12}(b)^{-1}.$$

En la definición 2.9 de símbolo de Steinberg se considera de manera general (i,j) y están definidos como $\{a,b\}_{ij} = [h_{ik}(a), h_{ij}(b)]$ el conmutador, pero en [**Mag02**] se demuestra que solamente $(1,2)$ son necesarios y que el conmutador de estos elementos es precisamente la expresión de la definición.

Teorema 2.10. *Sea R un anillo y $a, b, c \in R^*$ unidades que conmuten. Entonces en $K_2(R)$ se satisfacen las siguientes igualdades:*

(a) $\{a, b\}^{-1} = \{b, a\}$
(b) $\{ab, c\} = \{a, c\}\{b, c\}$
(c) $\{a, bc\} = \{a, b\}\{a, c\}$
(d) *Si $a + b = 1_R$ entonces $\{a, b\} = 1$*

Ejemplo 2.11. Si F es un campo, entonces $K_2(F)$ está generado por los símbolos de Steinberg [**Mag02**], por lo tanto, si F es finito entonces $K_2(F) = 0$.

Definición 2.12. [**Ste**] Sean $a, b \in R$ elementos que conmutan y tales que $1+ab \in R^*$. Definimos el símbolo de Dennis-Stein de a y b por

$$\langle a, b\rangle = x_{21}(\frac{-b}{1 + ab})x_{12}(a)x_{21}(b)x_{12}(\frac{-a}{1 + ab})h_{12}(1 + ab)^{-1}$$

Proposición 2.13. [**Ste**] *Sean $a, b, c \in R$. Para los símbolos de Dennis-Stein correspondientes se satisface*

(D1) $\langle a, b\rangle\langle -b, -a\rangle = 1$
(D2) $\langle a, b\rangle\langle a, c\rangle = \langle a, b + c + abc\rangle$
(D3) $\langle a, bc\rangle = \langle ab, c\rangle\langle ac, b\rangle$

Estos símbolos son empleados por Loday-Walery en [**GuLo**] para demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.14. *Sea R un anillo, I, J ideales tales que $I \cap J = (0)$. Entonces*

$$K_2(R, I, J) \cong St(R, I, J) \cong I \otimes_{R^e} J$$

de donde se obtiene el corolario

Corolario 2.15. *Sean p un primo,$C_p = \langle\sigma\rangle$ cíclico de orden p, $R = \mathbb{Z}[C_p]$, $I = (1 - \sigma)$ y $J = (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$. Entonces*

$$K_2(R, I, J) \cong \frac{\mathbb{Z}}{(p)}$$

un p-grupo. En donde $I \otimes_{R^e} J$ está generado por $(1 - \sigma) \otimes (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ en $K_2(R, I, J)$.

De manera paralela Keune en [**Keu**] emplea los símbolos de Dennis-Stein para obtener el mismo resultado del teorema 2.14. Tambieén son empleados por Stienstra [**Sti**] y por Van der Kallen y Stienstra en [**VdKS**]. Nosotros necesitamos de estas herramientas para realizar los cálculos como se vera en el siguiente capítulo de esta tesina.

Capítulo 3

$NK_i([C_{p^2}])$ y $NK_i([C_p \times C_p])$

1. Teorema Fundamental de la K-Teoría Algebraica.

Para un anillo R es normal buscar aplicar toda la maquinaria anterior al anillo de polinomios en una variable con coeficientes en R, $R[x]$ y también al anillo de polinomios de Laurent sobre el anillo R, $R[x, x^{-1}]$. Una directriz viene dada por las sucesiones exactas cortas escindibles

(a) $0 \to xR[x] \to R[x] \leftrightarrows R \to 0$
(b) $0 \to (x-1)R[x, x^{-1}] \to R[x, x^{-1}] \leftrightarrows R \to 0$

donde es evidente que $x \mapsto 0$ en (a) y $x \mapsto 1$ en (b). Inmediatamente queda claro que la K-Teoría de $R[x]$ y la de $R[x, x^{-1}]$ tiene a la K-teoría de R como sumando directo. La estructura total de la K-Teoría de estos anillos esta determinada por el llamado teorema fundamental de la K-teoría algebraica en donde aparecen, como sumandos directos, los llamados grupos Nil de Bass que están definidos como el núcleo de la aumentación.

Definición 3.1. Sea R un anillo. Los grupos Nil de Bass de R se definen como

$$NK_i(R) := Nuc\{\epsilon_* : K_i(R[x]) \to K_i(R)\}$$

con $\epsilon : R[x] \to R$ tal que $x \mapsto 0$

Teorema 3.2. (Teorema fundamental de la K-teoría algebraica),[**Ros94**] *Sea R un anillo. Sean $R[x]$ y $R[x, x^{-1}]$ los anillos de polinomios y polinomios de Laurent respectivamente. Entonces existen isomorfismos naturales*

(a) $K_i(R[x]) \cong K_i(R) \oplus NK_i(R)$
(b) $K_i(R[x, x^{-1}]) \cong K_i(R) \oplus K_{i-1}(R) \oplus NK_i(R) \oplus NK_i(R)$

Proposición 3.3. [**Qui**] *Si R es un anillo regular, entonces $NK_i(R) = 0$ para todo i y de manera particular*

(a) $K_i(R[x]) \cong K_i(R)$.
(b) $K_i(R[x, x^{-1}]) \cong K_i(R) \oplus K_{i-1}(R)$.

2. $NK_i([C_{p^2}])$

Sea R un anillo y sean $I, J \subseteq R$ ideales tales que $I \cap J = (0)$. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & R/I \arrow[d, "g"] \\ R/J \arrow[r, "f"] & R/I+J \end{tikzcd}$$

que es cartesiano con π_1, π_2, f y g suprayectivas. Por todo el desarrollo que hemos visto de los funtores de K-teoría para ideales tenemos

$$\begin{tikzcd} K_{i+1}(R/I) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_*"] & K_i(R,I) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\epsilon_i"] & K_i(R) \arrow[r, "\pi_{1*}"] \arrow[d, "\pi_{2*}"] & K_i(R/I) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\ K_{i+1}(R/I+J) \arrow[r, "\partial'"] & K_i(R/J, I+J/J) \arrow[r, "j'"] & K_i(R/J) \arrow[r, "f_*"] & K_i(R/I+J) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Asociado a este diagrama tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.4. (a) *Si en el arreglo ϵ_i es un isomorfismo, entonces existe un homomorfismo $\partial_i : K_{i+1}(R/I+J) \to K_i(R)$ tal que la sucesión*

$$K_{i+1}(R/J) \oplus K_{i+1}(R/I) \xrightarrow{\varphi} K_{i+1}(R/I+J) \xrightarrow{\partial_1} K_i(R) \xrightarrow{\psi}$$

$$K_i(R/J) \oplus K_i(R/I) \longrightarrow K_i(R/I+J)$$

es exacta, con $\varphi(x,y) = f_*(x) - g_*(y)$ y $\psi(z) = (\pi_{2*}(z), \pi_{1*}(z))$

(b) *Si ϵ_i es un isomorfismo y ϵ_{i+1} es suprayectivo, entonces podemos expande la sucesión exacta anterior añadiendo el término $K_{i+1}(R)$ a la izquierda, preservando exactitud.*

(c) *Sean ϵ_i suprayectivo y $L = Ker(\epsilon_i)$. Si $\pi_{1*} : K_{i+1} \to K_{i+1}(R/I)$ es suprayectivo, entonces L se inyecta en $K_i(R)$ y la sucesión*

$$K_{i+1}(R/J) \oplus K_{i+1}(R/I) \to K_{i+1}(R/I+J) \to K_i(R)/L \to$$

$$\to K_i(R/J) \oplus K_i(R/I) \to K_i(R/I+J)$$

es exacta.

Demostración. Bastará definir $\partial_i = j\varepsilon_i^{-1}\partial'$ y el resto es simple caza de elementos. ❑

Teorema 3.5. *Sea R un anillo, sean I y J ideales de R tales que $I \cap J = (0)$. Entonces la sucesión*

$$I/I^2 \otimes_{R^e} J/J^2 \xrightarrow{\psi} K_2(R, I) \xrightarrow{\epsilon_2} K_2(R/J, I + J/J) \longrightarrow 0$$

es exacta. Donde $\psi([a] \otimes [b])$ = La imagen de $[x_{12}(b, b), x_{21}(0, a)] = \langle(0, a), (-b, -b)\rangle \in K_2^s(R, I)$ en $K_2(R, I)$.

Teorema 3.6. *Sea p un primo, $C_p = \langle\sigma|\sigma^p = 1\rangle$ grupo cíclico de orden p. Sea $R = \mathbb{Z}[C_p]$ y los ideales $I = \langle\sigma - 1\rangle$ y $J = \langle 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1}\rangle$. Entonces $I \cap J = (0)$, $I + J = (p, \sigma - 1)$ y ϵ_2 es un isomorfismo.*

Demostración. Tenemos que $R \to R/I$ se escinde, por que $R/I \cong \mathbb{Z}$ y aplicamos (c) de la proposición (3.4). Bastará demostrar que la imagen de $\psi(I/I^2 \otimes_{R^e} J/J^2)$ bajo p_{2*} (para p_2 la segunda proyección del anillo doble relativo a un ideal ver la definición (2.3)) es trivial. Con [] denotamos las clases de I, J en I^2, J^2. Como grupo abeliano $I/I^2 \otimes_R J/J^2$, está generado por el elemento

$$[\sigma - 1] \otimes [1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1}]$$

luego $\psi(I/I^2 \otimes_{R^e} J/J^2)$ está generado por la imagen de $\langle(0, \sigma - 1), (-1 - \cdots - \sigma^{p-1}, -1 - \cdots - \sigma^{p-1})\rangle$ en $K_2(R, I)$ de manera que $p_{2*}(\psi(I/I^2 \otimes_R J/J^2))$ esta generado por

$$\langle \sigma - 1, -(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\rangle$$

por las propiedades de $\langle\rangle$ tenemos

$$1 = \langle\sigma - 1, 1\rangle^p = \langle\sigma - 1, 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1}\rangle =$$

$$= \langle\sigma - 1, -(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\rangle^{-1}$$

□

De acuerdo con el teorema (3.6) para $R = \mathbb{Z}[C_p]$ y los ideales I, J anteriores

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[C_p] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[\xi_p] \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

en donde ξ_p es una raíz p-ésima de la unidad. Inmediatamente hacemos notar que $NK_0(\mathbb{Z}[C_p]) = 0 = NK_1(\mathbb{Z}[C_p])$ pues aplicando la sucesión de Mayer Vietoris tenemos

$$NK_{i+1}(\mathbb{F}_p) \to NK_i(\mathbb{Z}[C_p]) \to NK_i(\mathbb{Z}) \oplus NK_i(\mathbb{Z}[\xi_p])$$

para $i = 0, 1$ y los anillos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\xi_p]$ y $\mathbb{F}_p$ son regulares, por el teorema de Quillen de anillos regulares (3.3) $NK_i(\mathbb{Z}[\xi_p]) = NK_i(\mathbb{Z}) = NK_{i+1}(\mathbb{F}_p) = 0$.

Recordemos que por definición se tiene para cualquier anillo

$$NK_2(R) = \frac{K_2(R[x])}{K_2(R)}$$

y considerando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[C_p][x] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[\xi_p][x] \arrow[d] \\ \mathbb{Z}[x] \arrow[r] & \mathbb{F}_p[x] \end{tikzcd}$$

tenemos que $K_2(\mathbb{Z}[C_p][x], I[x], J[x]) \cong (\mathbb{Z}/(p))[x]$ que mide la excisión a la exactitud de Mayer-Vietoris, puesto que todo es suprayectivo $K_2(\mathbb{Z}[C_p][x]) = (\mathbb{Z}/(p))[x]$ como los anillos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\xi_p]$ y $\mathbb{F}_p$ son regulares, su K-teoría no se cambia al adjuntar una variable tenemos $K_2(\mathbb{Z}[C_p], I, J) = \mathbb{Z}/(p)$ y por lo tanto

$$NK_2(\mathbb{Z}[C_p]) = x.\mathbb{F}_p[x]$$

Ahora consideraremos $R = \mathbb{Z}[C_{p^2}]$ donde $C_{p^2} = \langle \sigma | \sigma^{p^2} = 1 \rangle$ es el cíclico de orden p^2. En esta situación tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[C_{p^2}] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathbb{Z}[C_p] \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z}[\xi_{p^2}] \arrow[r, "g"] & \mathbb{F}_p[C_p] \end{tikzcd}$$

donde ξ_{p^2} es una raíz p^2-ésima primitiva, $\pi_1(\sigma) = \sigma$ (No ha de existir ambigüedad al considerar σ como generador en grupos diferentes, $\pi_1(\sigma^p) = 1$), $\pi_2(\sigma) = \xi_{p^2}$ f es el paso al cociente y $g(\xi_{p^2}) = \sigma$. Será conveniente reemplazar este diagrama por uno equivalente y que sea mas computable. Considerando el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \to & \dfrac{\mathbb{F}_p[\varepsilon]}{(\varepsilon^p)} \\ \sigma & \mapsto & 1 - \varepsilon \end{array}$$

de manera que nuestro diagrama será

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[C_{p^2}] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathbb{Z}[C_p] \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z}[\xi_{p^2}] \arrow[r, "g"] & \mathbb{F}_p[\varepsilon] \end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon^p = 0$. Por la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a este cuadrado tenemos las siguientes:

(a) $NK_2(\mathbb{Z}[C_{p^2}]) \to NK_2(\mathbb{Z}[C_p]) \to NK_2(\mathbb{F}_p[\epsilon]) \to NK_1(\mathbb{Z}[C_{p^2}]) \to 0$

(a) $NK_1(\mathbb{F}_p[C_p]) \cong NK_0(\mathbb{Z}[C_{p^2}])$

Afirmación 3.7. *$NK_0(\mathbb{Z}[C_{p^2}])$ es isomorfo, como grupo abeliano, a una suma directa numerable de copias de $\mathbb{F}_p$.*

Demostración. Tenemos que $\mathbb{F}_p[C_p] \cong \mathbb{F}_p[\varepsilon]$, $\varepsilon^p = 0$ por [**Sti**] tenemos

$$NK_1(\mathbb{F}_p[C_p]) \cong (1 + \epsilon.x.\mathbb{F}_p[x])^* \cong x.\mathbb{F}_p[x] = V$$

con V el $W(\mathbb{F}_p)$-módulo $x.\mathbb{F}_p[x]$ y por lo tanto se sigue el resultado. ❑

Ahora determinaremos $NK_2(\mathbb{F}_p[\varepsilon])$ para ello notemos que $\mathbb{F}_p[x,\varepsilon] \cong \mathbb{F}_p[\varepsilon, x]$ y tenemos

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathbb{F}_p[x,\varepsilon] & \to & \mathbb{F}_p[x] \\ \varepsilon & \mapsto & 0 \end{array}$$

y para ν_* en K_2 tenemos la siguiente suseción exacta

$$0 \to Nuc(\nu_*) \to K_2(\mathbb{F}_p[x,\varepsilon]) \to K_2(\mathbb{F}_p[x]) \to 0$$

por colorario 4.4 de [**Ste**] tenemos

$$0 \to \frac{\mathbb{F}_p[x]}{\mathbb{F}_p[x^p]} \to Nuc(\nu_*) \to \Omega_{\mathbb{F}_p[x]} \to 0$$

además, tenemos un homomorfismo $Nuc(\nu_*) \to NK_2(\mathbb{F}_p[\varepsilon])$ de manera que tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tfrac{x.\mathbb{F}_p[x]}{x^p.\mathbb{F}_p[x^p]} \xrightarrow{F} NK_2(\mathbb{F}_p[\varepsilon]) \xrightarrow{G} \Omega_{\mathbb{F}_p[x]} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

donde $F(x^n) = \langle x^n \epsilon^{p^r-1}, \epsilon\rangle$ (obtenido de la identificación $\sigma \mapsto 1-\varepsilon$) y $G(\langle f\epsilon^{p^2-1}, g + g'\epsilon\rangle) = fdg$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & NK_2(\mathbb{Z}[C_p]) \arrow[d, "f_*"] & & \\ 0 \arrow[r] & \frac{x.\mathbb{F}_p[x]}{x^p.\mathbb{F}_p[x^p]} \arrow[r] & NK_2(\mathbb{F}_p[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \Omega_{\mathbb{F}_p[x]} \arrow[r] & 0 \\ & & NK_1(\mathbb{Z}[C_{p^2}]) & & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

de manera que que $NK_1(\mathbb{Z}[C_{p^2}])$ y $\Omega_{\mathbb{F}_p[x]}$ satisfacen la propiedad del conúcleo de f_*. Hemos probado entonces el siguiente resultado

Teorema 3.8. *Sea p un primo. Para $C_{p^2} = \langle \sigma | \sigma^{p^2} \rangle$ el grupo cíclico de orden p^2. Entonces*

(1) $NK_0(\mathbb{Z}[C_{p^2}]) \cong x.\mathbb{F}_p[X]$
(2) $NK_1(\mathbb{Z}[C_{p^2}]) \cong \Omega_{\mathbb{F}_p[x]}$

como grupos abelianos.

Lo que podemos decir acerca de $NK_2(\mathbb{Z}[C_{p^2}])$ es que es infinitamente generado, pues en [**DanJ**] se demuestra en general que para cualquier cíclico C_n, $NK_2(\mathbb{Z}[C_n]) \neq 0$ y por lo tanto es infinitamente generado.

3. $NK_i([C_p \times C_p])$

Ahora vamos a considerar el anillo de grupo $\mathbb{Z}[C_p \times C_p]$. Conservamos la notacion de la sección previa. Partamos del cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[C_p] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\xi_p] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \end{array}$$

y vamos a tensorizar este cuadrado con $\oplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[C_p]$ para obtener:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[C_p \times C_p] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[C_p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S[C_p] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[C_p] \end{array}$$

en donde $S = \mathbb{Z}[\xi_p]$. Reemplazaremos las esquinas inferiores de este cuadrado por unas mas convenientes de la siguiente manera. $\mathbb{F}_p[C_p] \cong \mathbb{F}_p[\varepsilon]$, $\varepsilon^p = 0$ y considerando la aplicacion suprayectiva

$$\begin{array}{rcl} \delta : S[C_p] & \to & S[\omega_p] \\ \sigma & \mapsto & \omega_p \end{array}$$

donde ω_p es una raíz p-ésima de la unidad, se satisface que $S[\omega_p] \cong \mathbb{Z}[\xi_p]$ y por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[C_p \times C_p] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[C_p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\xi_p] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\varepsilon] \end{array}$$

y por la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a este cuadrado tenemos

(a) $NK_2(\mathbb{Z}[C_p \times C_p]) \to NK_2(\mathbb{Z}[C_p]) \to NK_2(\mathbb{F}_p[\varepsilon]) \to NK_1(\mathbb{Z}[C_p \times C_p]) \to 0$
(b) $NK_1(\mathbb{F}_p[\varepsilon]) \cong NK_0(\mathbb{Z}[C_p \times C_p])$

Afirmación 3.9. *$NK_0(\mathbb{Z}[C_p \times C_p])$ es isomorfo, como grupo abeliano, a una suma directa numerable de copias de $\mathbb{F}_p$.*

Demostración. Bastará verse la afirmación 3.7. ❑

Para la sucesión (a) tenemos, análogamente que $NK_1(\mathbb{Z})[C_p \times C_p]$ es el cokernel de la aplicación f_* y por la sucesión 2.1 y el diagrama 2.2 obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.10. *Sea p un primo. Entonces*

(1) $NK_0(\mathbb{Z})[C_p \times C_p] \cong x.\mathbb{F}_p[x]$
(2) $NK_1(\mathbb{Z})[C_p \times C_p] \cong \Omega_{\mathbb{F}_p[x]}$

como grupos abelianos.

Capítulo 4

Conclusiones

Conlcuido este trabajo, es inmediato comenzar a pensar en casos más generales, esto debido a que los Nil Grupos de Bass se han trabajado de manera teórica, pocos cálculos explícitos como el presente hay en la literatura relacionada.

Tenemos dos rutas para trabajar, la primera aprovechar estos resultados para tratar de generalizarlos, es decir, una vez realizados los cálculos explícitos para $\mathbb{Z}[C_{p^2}]$ y resaltando el hecho de que las herramientas utilizadas en su obtención no dependen exclusivamente del exponente 2, ([**Sti**], cor4.4) tratar de generalizar los resultados para $\mathbb{Z}[C_{p^r}]$ donde $r > 0$ un entero. Tambien hemos obtenido para $\mathbb{Z}[C_p \times C_p]$ resultados relevantes, que en principio no dependen crucialmente del número de factores, entonces estamos tentados a realizar los cálculos para un producto de n copias del cíclico C_p, $\mathbb{Z}[C_p \times \cdots \times C_p]$. En una etapa más ambisiosa y por el teorema de descomposición de los grupos abelianos finitos, por el análisis que estamos realizando planteamos el siguiente problema: Sea G un grupo abeliano finito. Determinar $NK_0(\mathbb{Z}G)$ y $NK_1(\mathbb{Z}G)$. En el artículo [**HmL**] se dan más técnicas las cuales hacen pensar que este problema es accesible si son obtenidos los cálculos previos.

La otra opción para trabajar es explotar la estructura, no mencionada en el presente, de los Nil Grupos de Bass como módulos sobre el anillo de vectores de Witt.

Bibliografía

[Bass68] H. Bass. *Algebraic K-theory*. W.A. Benjamin, 1968.

[Farr] F.T. Farrell. *The nonfiniteness of nil*. Proceedeings of the American Mathematical Society vol:65 página215–página216, 1977.

[GuLo] Dominique Guin-Waléry; Jean-Louis Loday. *Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique*. In Algebraic K-theory (Evanston 1980) Lectures Notes on Math. vol854: página179–página215, 1981.

[HmL] I. Hambleton; W. Lück. *Induction an computation of Bass-Nil groups for finite groups*. Geometrische Strukturen in der Mathematik.

[DanJ] Daniel Juan-Pineda. *On higher nil groups of group rings*. Homology, Homotopy ans Applications. vol9: página95–página100, 2007.

[Keu] Frans Keune *Doubly relative K-theory and the relative K_3*. Journal of Pure and Applied Algebra vol20: página39–página53, 1981.

[Mag02] Bruce A. Magurn. *An Algebraic Introduction to K-theory*. Cambridge University Press, 2002.

[Mil71] J. Milnor. *Intoduction to algeraic K-theory*. Princeton University Press, 1971.

[Qui] D.G. Milnor. *Higher algebraic K-theory, I*. Lecture Notes in Math. vol.341: página85–página147, 1973.

[Ste] Michael R. Stein. *Excision and K_2 of group rings*. Journal of Pure and Applied Algebra vol18: página213–página224, 1980.

[Ros94] J. Rosenberg. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. Springer, 1994.

[Rot09] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2009.

[Sti] Jan Stienstra. *On K_2 and K_3 of truncated polynomial rings*. In Algebraic K-theory (Evanston 1980) Lectures Notes on Math. vol854: página409–página455, 1981.

[WeG] Charles Weibel; Susan C. Geller. $K_1(A,B,I)$. Journal für die reine und angewandte Mathematik. vol342: página12–página34, 1983.

[We] Charles Weibel. *NK_0 and NK_1 of groups C_4 and D_4*. Commentarii Mathematici Helvetici. vol84: página339–página349, 2009.

[VdK] M. Wilberd Van der Kallen. *Le K_2 de nombres duaux*. C. R. Acad. Sci. Paris. vol273: página1204–página1207, 1971.

[VdKS] Wilber Van der Kallen; Jan Stienstra. *The relative K_2 of truncated polynomial rings*. Journal of Pure and Applied Algebra vol34: página277–página289, 1984.