Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

# Invariantes Cardinales del Álgebra de Calkin

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Eduardo Abdón Calderón García

*Director:* Dra. Beatriz Zamora Aviles

Morelia, Michoacán - junio de 2011.

# Índice general

# Agradecimientos

A mi familia por apoyarme.

A mi asesora Dra. Beatriz Zamora-Avilés por introducirme en el estudio de las $\mathbb{C}^*$-álgebras y por todos los comentarios que ayudaron a mejorar tanto el contenido como la exposición de éste trabajo.

A CONACyT por el apoyo financiero para mis estudios de maestría.

# INTRODUCCIÓN

En la teoría de conjuntos uno de los objetos centrales de investigación es el álgebra booleana $P(\omega)/Fin$, el conjunto potencia de los números naturales cociente con los subconjuntos finitos de los mismos. Para el estudio de ésta estructura se han definido invariantes cardinales que capturan algún aspecto de ella. Una de las maneras más comunes de definir un invariante cardinal es tomar la mínima cardinalidad de un elemento de alguna subfamilia de $P(\omega)/Fin$ como, por ejemplo, la mínima cardinalidad de una anticadena maximal.

En éste trabajo se pretende estudiar las proyecciones en $C(\mathcal{H})$, el álgebra de Calkin, que se define como el cociente entre los operadores acotados de un espacio Hilbert separable entre sus operadores compactos, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Es conocido que existe un encaje natural de $P(\omega)/Fin$ al subconjunto de las proyecciones en el álgebra de Calkin $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ y a través de éste es posible definir análogos no conmutativos de sus invariantes cardinales, y en algunos casos obtener resultados de ésta a través de métodos inicialmente diseñados para el estudio de $P(\omega)/Fin$.

Un problema conocido que mantiene una relación estrecha con invariantes cardinales en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ es la llamada conjetura de Hadwin. En [**5**], D. Hadwin demostró que usando la hipótesis del continuo, todas las cadenas maximales dentro de $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$, las proyecciones en el álgebra de Calkin, son isomorfas (logra ésto demostrando que éste poset es $\omega$-saturado y construyendo un isomorfismo con un argumento de "back and forth") y conjeturó que ésta condición podría ser equivalente con la hipótesis del continuo. Es sabido que usando los mismo métodos que los usados por Shelah-Stepräns en [**7**] se puede demostrar que la conjetura análoga dentro de $P(\omega)/Fin$ es falsa, es decir, es consistente con ZFC que todas las cadenas maximales de $P(\omega)/Fin$ sean isomorfas junto con la negación de la hipótesis del continuo.

Una utilidad que tienen éstos invariantes cardinales es ayudar al estudio de las gaps. Estas juegan un papel importante en varias ramas de las matemáticas. En particular, el concepto de gap aparece a menudo en la teoría de álgebras de operadores ya que se relaciona con conceptos de completitud. Por ejemplo, la propiedad de ser $\omega$-saturado se puede entender como la no existencia de $(\omega, \omega)$ gaps. Otro ejemplo es: una $AW^*$-álgebra es una $\mathbb{C}^*$-álgebra $M$ tal que cada $\mathbb{C}^*$-subálgebra conmutativa maximal está generada por proyecciones y las proyecciones de $M$ forman una lattice completa. En particular no podemos tener gaps del tipo $(\omega, \kappa)$ en $M$ para ningún $\kappa$.

En la Teoría de perturbaciones de $\mathbb{C}^*$-álgebras se conjeturó que cualquier par de $\mathbb{C}^*$-álgebras que estén "suficientemente cerca" deben ser unitariamente equivalentes. En [**2**], M.D. Choi y E.Christensen dieron un ejemplo de dos $\mathbb{C}^*$-álgebras que están "suficientemente cerca" y, sin embargo, no son siquiera $^*$-isomorfas. Su ejemplo se basa en construir dos $\mathbb{C}^*$-subalgebras A y B de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(A)$ y $\pi(B)$ (sus imagenes en el álgebra de Calkin) forman una gap.

Es pertinente hacer notar que la investigación de estos invariantes cardinales es relativamente nueva y, por lo tanto, la mayoría de las preguntas sobre éstos siguen abiertas.

En el primer capítulo se define el concepto de una $C^*$-álgebra y se mencionan los preeliminares necesarios sobre los espacios de Hilbert, los operadores acotados y los operadores compactos. En el segundo capítulo se define el álgebra de Calkin y se obtienen resultados que facilitan el análisis del orden definido dentro de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. En el tercer capítulo se definen el encaje diagonal de $P(\omega)/Fin$ hacia $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$, algunos de los invariantes cardinales más comunes en $P(\omega)/Fin$, se estudian las definiciones análogas dentro de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ y para concluir se obtienen resultados acerca de éstos nuevos invariantes cardinales aplicando técnicas análogas a las conocidas para $P(\omega)/Fin$.

Capítulo 1

# Espacios de Hilbert y $C^*$-álgebras

En éste capítulo se mencionan algunos resultados básicos de la teoría de $\mathbb{C}^*$-álgebras y de la teoría de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert. Estos son necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Una $\mathbb{C}^*$-álgebra es un álgebra de Banach con una operación de involución"*" que satisface para todo $x, y \in A$:

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$
2. $(xy)^* = y^* x^*$
3. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$
4. $(x^*)^* = x$
5. $\|x\|^2 = \|xx^*\|$.

Un elemento $a \in A$ se llama **unitario** si $a^*a = aa^* = 1$, **autoadjunto** si cumple $a = a^*$ y **positivo** si existe $b \in A$ de tal forma que $a = bb^*$. Un elemento $p \in A$ se llama **proyección** si cumple que $p = p^2 = p^*$. Para familiarizarnos con estas definiciones, tomemos como un primer ejemplo a $\mathbb{C}$ con "*" como la conjugación en los números complejos, los elementos autoadjuntos coinciden con los números reales y los positivos con los reales positivos, un elemento unitario dentro de éste $\mathbb{C}^*$-álgebra es precisamente un elemento del círculo unitario dentro de $\mathbb{C}^*$, las unicas proyecciones dentro de $\mathbb{C}$ son el cero y el uno.

Ejemplo 1.1. Si $X$ es un conjunto, definimos $l^\infty(X)$, el conjunto de todas las funciones acotadas de $\mathbb{C}$ a $X$. Entonces $l^\infty(X)$ es una $\mathbb{C}^*$-álgebra con las operaciones definidas puntualmente.

Ejemplo 1.2. Si $\Omega$ es un espacio topológico localmente compacto, el conjunto $C_0(\Omega)$ de todas las funciones continuas de $\Omega$ a $\mathbb{C}$ que cumplen para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \Omega : |f(x)| > \epsilon\}$ es compacto. es una $\mathbb{C}^*$-subálgebra de $C_b(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de $\Omega$ a $\mathbb{C}$.

Para mostrar otro ejemplo importante empezamos por tomar un $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ que es un espacio vectorial Banach sobre $\mathbb{C}$ donde la norma está dada por un producto punto, más específicamente es $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ para cada $v \in \mathcal{H}$.

Un operador lineal $T$ en un espacio Hilbert se llama **acotado** si existe una $M > 0$ tal que para todo $v \in \mathcal{H}$ se tiene que $||T(v)|| \leq M||v||$, es fácil ver que ésto resulta equivalente a que para todo $v \in B_1(0) = \{v \in \mathcal{H} : ||v|| \leq 1\}$ se tenga $||T(v)|| \leq M$. Tampoco es díficil ver que un operador es acotado si y solo si es continuo, denotaremos al conjunto de los operadores acotados de un espacio Hilbert por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por la definición de un operador acotado tiene sentido definir $||T|| = sup\{||T(v)|| : v \in B_1(0)\}$, y así:

Ejemplo 1.3. $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), ||\cdot||)$ define una $\mathbb{C}^*$-álgebra donde la involución "$*$" está dada por obtener el operador adjunto que se caracteriza por la relación

$$(\forall v, w \in \mathcal{H})(\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle)$$

En éste caso notemos que las proyecciones dentro de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ coinciden con las proyecciones ortogonales a un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Se puede demostrar que de hecho todas las $\mathbb{C}^*$-álgebras son isomorfas a una subálgebra norma cerrada de una con ésta forma, éste resultado se conoce como el teorema de representación de Gelfand-Naimark.

A un operador $K$ dentro de un espacio Hilbert que cumple que $T(B_1(0))$ es precompacto, se le llama un operador **compacto**. Es claro que todo operador compacto es acotado. En el caso particular de los espacios Hilbert se puede demostrar que la imagen de la bola unitaria a través de un operador compacto, es de hecho, compacta. Al conjunto de los operadores acotados en un espacio de Hilbert lo denotaremos como $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Es bien sabido que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que cumple $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ si y sólo si $K^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Capítulo 2

# El Álgebra de Calkin

En éste capítulo se define el álgebra de Calkin, el orden en sus proyecciones y se obtienen resultados necesarios para entender el orden dentro del álgebra.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. El álgebra de Calkin se define como el cociente de los operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entre los compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Este cociente es posible ya que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral cerrado dentro de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y tiene estructura de $\mathbb{C}^*$-algebra donde la norma está dada por

$$\|[B]\| = inf\{\|B + K\| : K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}$$

Es decir, la norma de una clase de equivalencia $[B]$ es el ínfimo de las normas de todos sus elementos. Denotaremos como $\pi$ a la función

$$\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$$
$$B \mapsto [B]$$

que es además un homomorfismo de $\mathbb{C}^*$-álgebras.

## 1. Proyecciones en el Álgebra de Calkin

Antes que nada es necesario señalar que las proyecciones en el álgebra de Calkin pueden de hecho ser vistas como imagen a travéz del cociente de proyecciones en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, éste teorema se puede encontrar en [**11**].

Teorema 2.1 (Weaver, [**11**]). *Sea $p \in \mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ existe un $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\pi(P) = p$.*

En cualquier $\mathbb{C}^*$-álgebra podemos definir un orden en sus elementos autoadjuntos de la siguiente manera $a \leq b$ si y sólo si $b - a$ es positivo. Cuando restringimos el orden a las proyecciones de dicha $\mathbb{C}^*$-álgebra tenemos que $p \leq q$ si y sólo si $pq = p$.

Es útil notar en éste punto que para una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se tiene que $\pi(P) = 0$ (es decir, $P$ es compacta) si y sólo si el rango de $P$ es de dimensión finita.

Nuestro objetivo es caracterizar el orden "$\leq$" en las proyecciones del álgebra de Calkin a través de un orden "$\leq_{\mathcal{K}}$" en $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, de tal forma que para todo $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tengamos que $P \leq_{\mathcal{K}} Q$ si y sólo si $\pi(P) \leq \pi(Q)$. Para esto primero notemos que

Nota 2.2.

$$\pi(P) \leq \pi(Q) \leftrightarrow \pi(P)\pi(1-Q) = 0 \leftrightarrow \pi(P(1-Q)) = 0$$

Es decir, $\pi(P) \leq \pi(Q)$ si y sólo si $P(1-Q)$ es compacto.

La siguiente proposición nos será muy útil para analizar el orden en el Algebra de Calkin.

Proposición 2.3. *Sean $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ y $\{a_i : i \in \omega\}$ base ortonormal de $ran(P)$. Entonces $PB$ es compacto si y solo si $\|P_nB\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, donde $P_n$ define la proyección en $\overline{span}\{a_i : i \geq n\}$.*

Demostración. ($\Leftarrow$)
Primero notemos que para todo $n \in \omega$, $\pi(P_n) = \pi(P)$. Entonces,

$$\|\pi(PB)\| = \|\pi(P_nB)\| \leq \|P_nB\| < \epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$ siempre que $n$ sea suficientemente grande, lo cual nos dice $\|\pi(PB)\| = 0$, que es claramente equivalente a $PB$ compacto.

($\Rightarrow$) Supongamos que la segunda condición no se cumple y sin embargo el producto $PB$ es compacto, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que podemos encontrar una sucesión $\{v_i\}_{i\in\omega}$ de vectores unitarios en $\mathcal{H}$ con la propiedad de $\|P_nB(v_n)\| > \epsilon$ para cada n. Dado que $PB$ es compacto y los $v_n$ unitarios, podemos encontrar una subsucesión $\{PB(v_{n_k})\}_{k\in\omega}$ que converge. Ahora para cada $k$ definamos $N_k > k$ de tal manera que $\left\|P_{n_{N_k}}B(v_{n_k})\right\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\left\|PB(v_{n_{N_k}}) - PB(v_{n_k})\right\| \geq \left\|P_{n_{N_k}}B(v_{n_{N_k}}) - P_{n_{N_k}}B(v_{n_k})\right\| > \frac{\epsilon}{2}$$

Pero esto implica que $\{PB(v_{n_k})\}_{n\in\omega}$ no puede ser una sucesión de Cauchy, una contradicción. ∎

La notación usada en ésta proposición se repetirá varias veces a lo largo de éste trabajo, de ahí la necesidad de la siguiente definición.

Definición 2.4. *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ y $\{a_i : i \in \omega\}$ una base ortonormal de $ran(P)$. Definimos $P_n$ como la proyección en $\overline{span}\{a_i : i \geq n\}$.*

Notemos que ésta notación depende de la base elegida, sin embargo, cuando la base y su numeración sean claras (o cuando el resultado sea independiente de la elección y numeración de la base) simplemente escribiremos el sufijo en las correspondientes proyecciones.

Usando la Proposición 2.3 podemos demostrar un resultado más general.

TEOREMA 2.5. *Sean* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *y* $\{a_i : i \in \omega\}$ *una base ortonormal del rango de P. Entonces*

$$\|\pi(PB)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n B\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, tenemos que para cada $n \in \omega$

$$\|\pi(PB)\| = \|\pi(P_n B)\| \leq \|P_n B\|$$

Lo cual nos dice que $\|\pi(PB)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|P_n B\|$. Para obtener la otra desigualdad, tomamos $\epsilon > 0$ y $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que

$$\|\pi(PB)\| \leq \|PB + K\| \leq \|\pi(PB)\| + \epsilon$$

Notemos que

$$\|P_n B\| - \|P_n K\| \leq \|P_n B + P_n K\| = \|P_n[PB + K]\| \leq \|PB + K\| \leq \|\pi(PB)\| + \epsilon,$$

Como $PK$ es claramente compacto, aplicando la Proposición 2.3 tenemos que $\|P_n K\| \to 0$. Lo cual nos dice

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n B\| \leq \|\pi(PB)\| + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, la desigualdad restante se sigue. ❑

COROLARIO 2.6. *Sean* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *y* $\{a_i : i \in \omega\}$ *una base ortonormal del rango de P. Entonces*

$$\|\pi(BP)\| = \lim_{n\to\infty} \|BP_n\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando las propiedades de $\mathbb{C}^*$-álgebra, el hecho que $P$ es una proyección y tomando en cuenta que $\pi$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}^*$-álgebras tenemos:

$$\|\pi(BP)\| = \|[\pi(BP)]^*\| = \|\pi(PB^*)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n B^*\| = \lim_{n\to\infty} \|BP_n\|$$

❑

Ahora estamos en posición de caracterizar el orden de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ dentro de $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

TEOREMA 2.7. *Sean* $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *entonces son equivalentes:*

1. $\pi(P) \leq \pi(Q)$.
2. $P(1 - Q)$ *es compacto.*

3. *Existe una base* $(a)_{i\in\omega}$ *del rango de* $P$ *tal que* $\|P_n(1-Q)\| \to 0$.
4. *Existe una base* $(a)_{i\in\omega}$ *del rango de* $(1-Q)$ *tal que* $\|P(1-Q)_n\| \to 0$.
5. *Para toda base* $(a)_{i\in\omega}$ *del rango de* $P$, $\|P_n(1-Q)\| \to 0$.
6. *Para toda base* $(a)_{i\in\omega}$ *del rango de* $(1-Q)$, $\|P(1-Q)_n\| \to 0$.

Demostración. Inmediato del comentario 2.2, Teorema 2.5 y el Corolario 2.6. ❑

Así obtenemos la definición deseada de la siguiente manera

Definición 2.8. *Sean* $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *decimos que* $P \leq_{\mathcal{K}} Q$ *si y solo si cualquiera de las condiciones del Teorema 2.7 se cumple. Si* $PQ$ *es compacto diremos que* $P$ *es casi ortogonal a* $Q$ *y escribiremos* $P \perp_{\mathcal{K}} Q$.

## 2. Otras propiedades de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$

En ésta sección demostramos algunas propiedades útiles sobre las proyecciones en el álgebra de Calkin.

Definición 2.9. *Dado un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *y una base ortonormal* $\{e_i : i \in \omega\}$ *de dicho espacio podemos definir un encaje* $P_{\_} : P(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ *llevando a cada* $A \subset P(\omega)$ *a* $P_A$ *la proyección en el subespacio* $\overline{span}\{e_i : i \in A\}$. *Este encaje se conoce como el encaje diagonal de* $P(\omega)$ *con respecto a* $\{e_i : i \in \omega\}$.

Este encaje lleva subconjuntos finitos de $P(\omega)$ en proyecciones compactas, por lo tanto, induce un encaje de $P(\omega)/Fin$ en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. Esta es una de las razones por las cuales a $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ se le considera un análogo no conmutativo o "cuántico" de $P(\omega)/Fin$, una exposición mas detallada de éstas ideas se puede encontrar en el libro "mathematical quantization" de Weaver [**10**].

Para ver que éste mapeo respeta el orden basta notar que para cualesquiera $A, B \in P(\omega)$, $P_A \leq_{\mathcal{K}} P_{A\cup B} = P_A + P_{B\setminus A} = P_B + P_{A\setminus B}$.

Otras propiedades de éste encaje que vale la pena señalar son $P_A P_B = P_{A\cap B} = P_B P_A = P_B \wedge P_A$ y $P_{A\cup B} = P_A \vee P_B$. Es decir, éste encaje preserva las propiedades de lattice de $P(\omega)$.

Proposición 2.10. *Sean* $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ *proyecciones. Entonces* $pq = qp$ *si y sólo si* $pq$ *es una proyección en cuyo caso tenemos* $pq = p \wedge q$ *y* $p + q - pq = p \vee q$.

Demostración. Si $pq = qp$, entonces tenemos que $pqpq = ppqq = pq$ y $(pq)^* = q^*p^* = qp = pq$, por lo tanto $pq$ es una proyección. Si $pq$ es una proyección, $pq = (pq)^* = qp$. En este caso, claramente tenemos $pq \leq p$ y $pq \leq q$, ahora si $r \leq p$ y $r \leq q$, entonces $r = rpq$, es decir,

$r \leq pq$. Similarmente $(1-q)(1-p) = (1-p) \wedge (1-q)$ y ésto nos dice que $1-(1-q)(1-p) = 1-(1-p) \wedge (1-q) = p \vee q$. ❏

Notemos que en la proposición anterior no usamos ninguna propiedad particular de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.11. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*$-álgebra conmutativa. Entonces $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es un álgebra booleana.*

Es importante notar que dados dos elementos $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ éstos no necesariamente tienen un ínfimo o un supremo en el orden, la siguiente proposición demuestra ésta afirmación.

Proposición 2.12 (Weaver, [**4**]). *$\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ no es una lattice, es decir, existen dos proyecciones en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ que no tienen ínfimo.*

Demostración. Primero tomamos $\{\xi_{mn}, \eta_{mn} : m, n \in \omega\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y definimos

$$M = \overline{span}\{\eta_{mn} : m, n \in \omega\}$$
$$N = \overline{span}\{\sqrt{\frac{1}{n}}\xi_{mn} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\ \eta_{mn} : m, n \in \omega\}$$

Definiendo $P$ como la proyección en $M$ y $Q$ como la proyección en $N$. Queremos demostrar que $\pi((1-P))$ y $\pi((1-Q))$ no tienen ínfimo. Para ésto tomamos un $R \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $R \leq_{\mathcal{K}} (1-P)$ y $R \leq_{\mathcal{K}} (1-Q)$. Primero necesitamos la siguiente afirmación:

$$(\forall n \in \omega)(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \omega)(\forall v \in \overline{span}\{\xi_{mn} : m \geq M\})(\|v\| \leq 1 \rightarrow \|R(v)\| < \epsilon) \tag{2.1}$$

Por simplicidad, denotaremos $\zeta_{mn} = \sqrt{\frac{1}{n}}\xi_{mn} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\ \eta_{mn}$. Sea $n \in \omega$ y $v = \sum_{m \geq M} v_m \xi_{mn}$ de norma menor o igual que uno. Definamos $v' = \sum_{m \geq M} v_m \zeta_{mn}$, es fácil ver que

$$\sqrt{\frac{1}{n}}\,\|R(v)\| - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\|RP_m\| \leq \|R(v')\| \leq \|RQ_m\|$$

De donde se deduce:

$$\|R(v)\| \leq \sqrt{n}(\|RQ_m\| + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\|RP_m\|)$$

Dado que $RQ$ y $RP$ son compactos, por el Teorema 2.7 la afirmación se sigue. Definiendo $L^n$ como la proyección en $\overline{span}\{\xi_{mn} : m \in \omega\}$, ésta afirmación nos dice que $RL^n$ es compacto para cada $n$ natural.

Dada una función $f \in \omega^\omega$ definamos $R'_f$ la proyección en $\overline{span}\{\xi_{mn} : n \in \omega \wedge m < f(n)\}$. Es claro que tanto $PR'_f$ como $QR'_f$ son compactos, además, tenemos que dado $v \in \mathcal{H}$ la siguiente igualdad se cumple

$$(1 - R'_f)(v) = \sum_{i=0}^{\infty} L^i_{f(i)}(v) + P(v).$$

Ahora elijamos para cada $n$ natural un $M_n \in \omega$ como en la afirmación con $\epsilon = 1/2^n$. Tomando cualquier $f \in \omega^\omega$ tal que se tenga $M_n < f(n)$ para cada $n$ natural, es fácil ver que dado un $N \in \omega$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| R_k(1 - R'_f) \right\| \leq \lim_{k\to\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \left\| R_k L^i_{M_i} \right\| + \|R_k P\|) \leq \lim_{k\to\infty} [\sum_{i=0}^{N} \left\| R_k L^i_{M_i} \right\|] + \frac{1}{2^N} + \lim_{k\to\infty} \|R_k P\| \leq \frac{1}{2^N}$$

Por la arbitrariedad de la $N$ y, de nuevo, el Teorema 2.7 tenemos que $R \leq_{\mathcal{K}} R'_f <_{\mathcal{K}} R'_{f+1}$ (donde $(f + 1)(n) = f(n) + 1$) y éste último es el $R'$ deseado. ❑

De la demostración de la proposición anterior podemos extraer éste teorema:

Teorema 2.13. *Sea $\{X_i : i \in \omega\}$ una familia de subconjuntos de $\omega$ y $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Si para cada $i \in \omega$ tenemos que $P_{X_i}Q$ es compacto, entonces existe un $X \subset \omega$ tal que para cada $i \in \omega$ se tiene $X_i \subset^* X$ y además $P_X Q$ es compacto.*

Demostración. Para cada $i \in \omega$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \left\| (P_{X_i})_n Q \right\| = 0$. Tomemos para cada $i \in \omega$ un $N_i$ con la propiedad que $\left\| (P_{X_i})_{N_i} Q \right\| \leq 1/2^i$. Ahora definamos $X = \bigcup_{i\in\omega} \{m^i_j : j \geq N_i\}$ (donde $\{m^i_j : j \in \omega\} = X_i$, es la numeración que hereda de $\omega$ cada $X_i$), es claro que siempre se cumple $X_i \subset_* X$.

Para ver que $P_X Q$ es compacto, primero notemos que para cada $v \in \mathcal{H}$.

$$\|P_X(v)\| \leq \sum_{i=o}^{\infty} \left\| [(P_{X_i})_{N_i}](v) \right\|.$$

Esto nos dice que

$$\|P_X Q\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| (P_{X_i})_{N_i} Q \right\| \leq \sum_{i=0}^{M} \left\| (P_{X_i})_{N_i} Q \right\| + \frac{1}{2^M}$$

De donde se deduce que para cada $M \in \omega$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|P_X Q_n\| \leq \frac{1}{2^M}.$$

Por el Teorema 2.7 se sigue que $P_X Q$ es compacto. ❑

Corolario 2.14. *Sea $\{X_i : i \in \omega\}$ una familia de subconjuntos de $\omega$ y $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Si para cada $i \in \omega$ tenemos que $P_{X_i}Q$ es compacto, entonces existe un $Y \subset \omega$ tal que para cada $i \in \omega$ se tenga $|Y \cap X_i| < \omega$ y además $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y$.*

Demostración. Tomando el $X$ que nos da el Teorema 2.13, definimos $Y = \omega \setminus X$. Por la definición de la casi contención es claro que $|Y \cap X_i| < \omega$ para cada $i \in \omega$, mientras que $(1 - P_Y)Q = P_X Q$ compacto nos dice por el Teorema 2.7 que $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y$. ❏

Teorema 2.15 (Farah, [**3**]). *Si $\{p_i : i \in \omega\} \subset \mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ es una familia numerable de proyecciones que conmutan dos a dos, entonces existe $\{e_i : i \in \omega\}$ base de $\mathcal{H}$ tal que para todo $i \in \omega$ existe un $X_i \subset P(\omega)$ que cumple $p_i = \pi(P_{X_i})$.*

Demostración. Primero tomamos un conjunto $\{\eta_i : i \in \omega\}$ denso numerable dentro de $\mathcal{H}_{=1}$. Ahora, definiremos recursivamente $P_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ para cada $\alpha \in \{1.\perp\}^n$, $k(n) \in \omega$ y $\{e_i : i < k(n)\}$ conjunto ortonormal (denotaremos $r_n$ como la proyección en $\{e_i : i < k(n)\}^\perp$) respetando las siguientes condiciones:

1. $\pi(\sum_{\alpha\in\{1,\perp\}^{n-1}} P_{\alpha\hat{\ }1}) = p_{n-1}$.
2. $\sum_{\alpha\in\{1,\perp\}^n} P_\alpha = r_{n-1}$
3. $(\forall\alpha \in \{1.\perp\}^n)(P_\alpha r_n = r_n P_\alpha)$
4. $(\forall\alpha \in \{1.\perp\}^n)(\forall m \geq n)(\pi(P_\alpha)p_m = p_m\pi(P_\alpha))$
5. $(\forall\alpha \in \{1.\perp\}^n)(P_\alpha \leq P_{\alpha\downarrow_{n-1}})$
6. $(\forall\alpha,\beta \in \{1,\perp\}^n)(\alpha \neq \beta \to P_\alpha \perp P_\beta)$
7. $(k(n-1) \leq m < k(n)) \wedge (\alpha \in \{1,\perp\}^n) \to P_\alpha(e_m) \in \{e_m, 0\}$.
8. $\eta_{n-1} \in \overline{span}\{e_i : i < k(n)\}$.

Para hacer ésto primero tomemos $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\pi(P) = p_0$, ésto es posible por el Teorema 2.1. Para el paso $k = 1$ tomamos $P_{\{(0,1)\}} = P$, $P_{\{(0,\perp)\}} = (1 - P)$, $k(1) = 2$, $e_0 = P(\eta_0)/\,\|P(\eta_0)\|$ y $e_1 = (1 - P)(\eta_0)/\,\|(1 - P)(\eta_0)\|$, en éste caso $r_0 = Id$. Ahora el paso inductivo $k = n + 1$, primero para cada $\alpha \in \{1,\perp\}^n$ tenemos que $p_n\pi(r_nP_\alpha) = \pi(r_nP_\alpha)p_n$ (notemos que $\pi(r_n) = 1$ pues es la proyección en el complemento ortogonal de una proyección de rango finito), por la Proposición 2.10 éste producto es una proyección. Por el Teorema 2.1 existe un $P_{\alpha\hat{\ }1} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(r_nP_\alpha(\mathcal{H})))$ tal que $\pi(P_{\alpha\hat{\ }1}) = \pi(r_nP_\alpha)p_n$ definiendo $P_{\alpha\hat{\ }\perp} = (1 - P_{\alpha\hat{\ }1})(r_nP_\alpha)$ tenemos, usando la hipótesis de inducción (y para el caso 2 el hecho que $r_nr_{n-1} = r_n$), que 2, 4 y 6 se mantienen mientras que 5 se mantiene trivialmente. Notemos además que

$$\pi(\sum_{\alpha\in\{1,\perp\}^n} P_{\alpha\hat{\ }1}) = \pi(\sum_{\alpha\in\{1,\perp\}^n} P_\alpha)p_n = p_n$$

Es decir, 1 se cumple. Para continuar con la construcción del conjunto ortonormal primero tengamos en cuenta que (dado que 2 se mantuvo)

$$1 = r_n + (1 - r_n) = \sum_{\alpha\in\{1,\perp\}^{n+1}} P_\alpha + (1 - r_n)$$

y con ésto

$$\eta_n = \sum_{\alpha \in \{1,\perp\}^{n+1}} P_\alpha(\eta_n) + (1 - r_n)(\eta_n)$$

Como sabemos que 6 se mantuvo tenemos que $\{P_\alpha(\eta_n)/\|P_\alpha(\eta_n)\| : \alpha \in \{1,\perp\}^{n+1}\}$ es un conjunto ortonormal, además, está contenido en $ran(r_n)$, es decir, es ortogonal a $\{e_i : i < k(n)\}$. Por lo tanto, definimos el siguiente paso de la construcción del conjunto ortonormal como la unión de estos dos, con $k(n+1)$ la cardinalidad de ésta union. Es claro que 3, 7 y 8 se mantienen.

Notemos que la condición 8 hace que nuestro conjunto ortonormal sea denso en $\mathcal{H}$, es decir, que sea una base ortonormal dentro de éste. Definamos $Q_n = \sum_{\alpha \in \{1,\perp\}^n} P_{\alpha^\frown 1}$, las condiciones 5, 6 y 7 nos dicen de hecho que:

$$(k(n) < j \rightarrow Q_n(e_j) \in \{e_j, 0\})$$

Entonces si tomamos $X(n) = \{j > k(n) : Q_n(e_j) = e_j\}$, es claro que $p_n = \pi(Q_n) = \pi(P_{X(n)})$. ❏

Corolario 2.16. *Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. Si tenemos que $p \leq q$, entonces existen $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\pi(P) = p$, $\pi(Q) = q$ y $ran(P) \subset Ran(Q)$ .*

Demostración. Tenemos que $pq = qp = p$. Aplicando el Teorema 2.15 existe una base y conjuntos $X_p, X_q \subset \omega$ tal que $\pi(P_{X_p}) = p$ y $\pi(P_{X_q}) = q$. Tomamos $P = P_{X_p} P_{X_q} = P_{X_p \cap X_q}$ y $Q = P_{X_q}$. ❏

Corolario 2.17. *Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. Si $p \leq q$ entonces para cada $r \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ tenemos $\|pr\| \leq \|qr\|$.*

Demostración. Tomando $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como en el Corolario 2.16, para cada $R \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ se tiene $\|\pi(PR)\| = \lim_{n\to\infty} \|PR_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|QR_n\| = \|\pi(QR)\|$. ❏

Proposición 2.18. *Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$. Entonces existe $r \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ distinto de cero tal que $(r \leq p \wedge r \leq q)$ si y sólo si $\|pq\| = 1$.*

Demostración. Primero tomemos $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que cumplan $\pi(P) = p$ y $\pi(Q) = q$.

($\Leftarrow$) Tenemos entonces que $\|\pi(PQ)\| = 1$. Definiremos recursivamente $v_n \in ran(Q)$ tal que

1. $\|v_n\| = 1$
2. $(\forall i < n)(v_i \perp v_n)$
3. $\|(1 - P)(v_n)\| \leq \dfrac{1}{2^n}$

Tomamos $v_0$ como cualquier vector de norma uno en el rango de $Q$. Ahora, con $v_1, v_2, ..., v_n$ definidos, éstos son un subconjunto ortonormal dentro del rango de $Q$, entonces podemos extenderlos a una base $\{v_i : i \leq n\} \cup \{w_i : i > n\}$ de todo $ran(Q)$, por hipótesis y el Corolario 2.6 tenemos que $\lim_{i\to\infty} \|PQ_i\| = 1$, en particular $\|PQ_{n+1}\| = 1$ (recordemos que ésta es una sucesión decreciente), por lo tanto, existe un $v_{n+1} \in Ran(Q_{n+1})$ de norma uno, con la siguiente propiedad $\|P(v_{n+1})\| > \sqrt{1 - 1/2^{2(n+1)}}$ y ésto nos dice que $\|(1-P)(v_{n+1})\|^2 = 1 - \|P(v_{n+1})\|^2 < 1/2^{2(n+1)}$ ya que es claro que éste vector es ortogonal con todos los anteriores ($v_{n+1} \in Ran(Q_{n+1}) = \overline{span}\{w_i : i > n\}$), éste es el vector que estabamos buscando.

Definimos $R$ como la proyección en $\overline{span}\{v_i : i \in \omega\}$, la elección de los $v_i$ nos da para cada $x = \sum_{i=n}^{\infty} x_i v_i \in Ran(R_n)$ de norma menor o igual que uno

$$\|(1-P)(x)\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |x_i| \, \|(1-P)(v_i)\| < 1/2^{n-1}$$

de donde se deduce $\|(1-P)R_n\| \leq 1/2^{n-1}$, entonces por el Teorema 2.7 tenemos que $R \leq_{\mathcal{K}} P$, mientras que tenemos trivialmente $R \leq_{\mathcal{K}} Q$. El resultado se obtiene tomando $r = \pi(R)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\|\pi(PQ)\| < 1$. Entonces tomando un $R \leq_{\mathcal{K}} P$ distinto de cero tenemos que $\|\pi(R(1-Q))\| \geq 1 - \|\pi(RQ)\| \geq 1 - \|\pi(PQ)\| > 0$, donde la última desigualdad se sigue del Corolario 2.17. Es claro entonces que $\neg(R \leq_{\mathcal{K}} Q)$. ❑

Notemos de la proposición anterior que si tenemos $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, entonces estos son $\leq_{\mathcal{K}}$-incompatibles si y sólo $\lim_{n\to\infty} \|QP_n\| < 1$, mientras que estos son casi ortogonales si $\lim_{n\to\infty} \|QP_n\| = 0$, en particular, notemos que ser casi ortogonales implica ser incompatibles pero existen pares de proyecciones que no son casi ortogonales y sin embargo son $\leq_{\mathcal{K}}$-incompatibles. Un ejemplo sencillo de ésta situación es tomar $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ con rango de dimensión infinita tal que $(1-P)$ también tenga rango de dimensión infinita, una base $\{e_i : i \in \omega\}$ del rango de $P$ y una base $\{e^{\perp}{}_i : i \in \omega\}$ del rango de $(1-P)$ y definir $Q$ como la proyección en $\{(e_i + e_i^{\perp})/\sqrt{2} : i \in \omega\}$, como $\|\pi(QP)\| = 1/\sqrt{2}$ (de hecho, también tenemos $\|\pi(Q(1-P))\| = 1/\sqrt{2}$), podemos ver que $P$ y $Q$ son $\leq_{\mathcal{K}}$-incompatibles sin que su producto sea compacto.

Proposición 2.19. *Existen $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\pi(P) = \pi(Q)$ y $ran(P) \cap ran(Q) = \{0\}$.*

Demostración. Tomemos $\{\eta_n, \xi_m : n, m \in \omega\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y definamos:

$$M = \overline{span}\{\eta_n : n \in \omega\}$$

$$N = \overline{span}\{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\, \eta_n + \sqrt{\frac{1}{n}}\, \xi_n : n \in \omega\}$$

Entonces $\|P_N(1-P_M)_n\| \leq \sqrt{1/n}$ y notando que

$$N^{\perp} = \overline{span}\{\sqrt{\frac{1}{n}}\,\eta_n - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\xi_n : n \in \omega\}$$

Tenemos que $\|(1-P_N)_n P_M\| \leq \sqrt{1/n}$, entonces por Teorema 2.7 tenemos que ($P_M \leq_{\mathcal{K}} P_N$) y ($P_N \leq_{\mathcal{K}} P_M$), es claro que $ran(P_M) \cap ran(P_N) = \{0\}$ ❑

Proposición 2.20. *$\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden separativo.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, tomamos una base $\{e_i : i \in \omega\}$ del rango de $P$. Definiendo $P'$ como la proyección ortogonal en $\{e_i : i \text{ es par}\}$ y $Q' = (1-P')P$ tenemos que éstas dos proyecciones están $\leq_{\mathcal{K}}$-abajo de $P$ y son $\leq_{\mathcal{K}}$-incompatibles, de hecho, son ortogonales. ❑

Capítulo 3

# Invariantes cardinales del álgebra de Calkin

En éste capítulo hablaremos de invariantes cardinales en el álgebra de Calkin, a grandes rasgos un invariante cardinal es una fórmula en ZFC que define un cardinal a través de alguna estructura. Este tipo de definiciones es usual en la teoría de conjuntos particularmente cuando tomamos la estructura base como el conjunto potencia de los números naturales, algunos ejemplos de estos son

$\mathfrak{a} = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ es madf en $P(\omega)\}$

donde a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $P(\omega)$ se le llama familia casi dijunta (almost disjoint family) si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $|A \cap B| < \omega$ y se le llama madf (maximal almost disjoint family) si es maximal.

$\mathfrak{p} = min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P}$ es una subfamilia de $[\omega]^\omega$ con sfip y sin pseudointersección infinita $\}$

Donde a una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos infinitos de $\omega$ tiene la propiedad sfip (strong finite intersection property) si para cada subconjunto finito $F \subset \mathcal{P}$ se tiene que $|\bigcap F| = \omega$ y no tiene pseudointersección infinita si no existe $Q \subset \omega$ infinito tal que para cada $P \in \mathcal{P}$ tengamos $|Q \backslash P| < \omega$.

$\mathfrak{s} = min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S}$ es una splitting familia$\}$

Ser una familia splitting es tener la propiedad que para cada $A \in \omega$ infinito existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $|S \cap A| = |(\omega \setminus S) \cap A| = \omega$.

$\mathfrak{t} = min\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T}$ es una torre$\}$.

Donde una torre es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $P(\omega)$ tal que para cada subconjunto $F \subset \mathcal{T}$, existe un $A \in F$ con la propiedad que para cada $B \in F$ tengamos $|B \setminus A| < \omega$ y no existe $A \subset \omega$ tal que $|A \setminus B| < \omega$ para todo $B \in \mathcal{T}$.

Es útil notar que todas éstas propiedades pueden ser vistas como propiedades en $(P(\omega)/Fin, \subset^*)$ donde $[A] \subset^* [B]$ si y solo si $|A \setminus B| < \omega$. Así, ser una familia casi disjunta es ser una anticadena en este orden, tener **sfip** se traduce en que cada subconjunto finito esté acotado por abajo, no tener **pseudointersección infinita** en que no exista una cota distinta del vacío debajo de todo el conjunto, ser una familia **splitting** en que para cada elemento $A$ de $P(\omega)/Fin$ exista uno dentro de la familia tal que tanto el como su complemento sean compatibles con $A$, y una **torre** es un subconjunto de $P(\omega)/Fin$ tal que todos los subconjuntos tienen $\subset^*$-máximo y no tiene una $\subset^*$-cota inferior.

Es consistente con la teoría de conjuntos que cualquiera de estos cardinales sean estrictamente menores a la cardinalidad de los numeros reales así como es consistente que todos ellos tengan valor $\mathfrak{c}$, la meta es definir algunos de éstos usando como estructura base el álgebra de Calkin y analizar un poco que valores cardinales pueden consistentemente tener.

## 1. Invariantes cardinales del continuo y el encaje diagonal

El objetivo de esta sección es analizar los objetos sobre los cuales se definen algunos invariantes cardinales en $P(\omega)$ y su comportamiento a travéz del encaje diagonal.

Antes que nada cabe mencionar que algunas de las definiciones de los siguientes invariantes cardinales no tienen una "cuantización" clara y que pueden llegar a tener equivalencias cuyas traducciones (asumiendo que se puedan lograr) no necesariamente son equivalentes (o al menos no trivialmente equivalentes).

Empezamos con:

$$\mathfrak{a} = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ es madf en } P(\omega)\}$$

Aquí, en la literatura se encuentran dos formas de "cuantizar" ésta definición. Para entender por qué, notemos que la Proposición 2.18 nos dice que $P$ y $Q$ son incompatibles si y solo si $\|\pi(PQ)\| < 1$, mientras que es de especial interés el caso en el que $\|\pi(PQ)\| = 0$, a una familia con la propiedad que todas éstas normas son cero se le conoce como familia casi ortogonal (almost orthogonal family). Así las cosas, las definiciones son

$$\mathfrak{a}_0^* = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \quad \text{es una } \leq_{\mathcal{K}}\text{-anticadena maximal en } \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))\}$$

y

$$\mathfrak{a}_1^* = min\{|\mathcal{A}| : (|\mathcal{A}| \geq \omega)(\forall P, Q \in \mathcal{A})(\text{PQ es compacto}) \wedge \mathcal{A} \text{ es maximal}\}$$

En lo sucesivo denotaremos $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}^*$. Notemos que a través del encaje diagonal una adf va en una aof. La primera pregunta que viene a la mente es si una madf se mantiene maximal a través del encaje diagonal, esto resulta no ser cierto por un resultado de Wofsey [Teorema 3.4].

También podemos definir:

$\mathfrak{p}^* = min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P}$ es una subfamilia de $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ con sfip y sin pseudointersección infinita $\}$

Donde llamamos a un $c \in \mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ una pseudointersección infinita de $\mathcal{P}$ si $c \neq 0$ y para cada $p \in \mathcal{P}$ se tiene que $c \leq p$, en general escribiremos ésta segunda condición como $c \leq \mathcal{P}$.

$\mathfrak{t}^* = min\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T}$ es una torre$\}$.

y tenemos

Proposición 3.1. *$\mathfrak{p}^* \leq \mathfrak{t}^*$ y $\mathfrak{p}^* \leq \mathfrak{a}^*$.*

Demostración. Es claro que toda torre es en particular una familia con sfip sin "pseudointersección infinita". Para ver la otra desigualdad, para cada $\mathcal{A}$ maof infinita podemos definir $1 - \mathcal{A} = \{1 - A : A \in \mathcal{A}\}$. Ahora si tomamos un subconjunto finito $F \subset \mathcal{A}$ y un elemento $A \in \mathcal{A} \setminus F$ sabemos que para cada $P \in F$, $PA$ es compacto y por Teorema 2.5 esto implica $A \leq_{\mathcal{K}} 1 - P$, es decir, $1 - \mathcal{A}$ tiene sfip, y una "pseudointersección infinita" de ésta familia sería un elemento $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ casi ortogonal con cada $A \in \mathcal{A}$, pero ésto sería contradictorio con la maximalidad de $\mathcal{A}$. ❑

Definición 3.2. *Un $\kappa$-límite en un poset $(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$ es una pareja $(\mathcal{L}, L)$ donde $L \in \mathcal{P}$, $\mathcal{L} = \{L_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}$ bien ordenado con tipo de orden $\kappa$ y se tiene que no existe un $C \in \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{L} <_{\mathcal{P}} C$ y $C <_{\mathcal{P}} L$, cuando se tenga un $C$ con ésta propiedad diremos que $C$ interpola a $(\mathcal{L}, L)$.*

Notemos en la definición anterior que si tenemos un $\kappa$-límite $((L_\lambda)_{\lambda<\kappa}, 1)$ en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ entonces $\{1 - L_\lambda : \lambda \in \kappa\}$ es una torre, y viceversa.

Lema 3.3. *Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ con rango de dimensión infinita. Entonces*

$$\mathcal{I}_P = \{X \subset \omega : PP_X \text{ es compacto}\}$$

*es un P-Ideal de Borel propio.*

Demostración. Usaremos la bien conocida caracterización de Solecki [**8**]. Esta dice que $\mathcal{I}$ es un P-Ideal de Borel si existe una submedida semicontinua inferiormente tal que

$$\mathcal{I} = Exh(\mu) = \{X \in 2^\omega : \lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus n) = 0\}$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned} \mu : 2^\omega &\to [0, 1] \\ X &\mapsto \|P_X P\| \end{aligned}$$

Para cada $X, Y \in 2^\omega$ tenemos que $\|P_{X\cup Y}P\| \leq \|P_X P\| + \|P_Y P\|$, en particular $\|P_X P\| \leq \|P_Y P\|$ siempre que $X \subset Y$. Es decir, $\mu$ es una submedida. Ahora demostremos que para cada $X \in 2^\omega$

$$\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu(X \cap n)$$

Claramente $\lim_{n\to\infty} \|P_{X\cap n}P\| \leq \|P_X P\|$, para obtener la otra desigualdad notemos que para cada cada $v \in \mathcal{H}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_{X\cap n}P(v) = P_X P(v)$ y de aquí es fácil deducir que $\|P_X P\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|P_{X\cap n}P\|$. Es decir, $\mu$ es semicontinua inferiormente. Notemos que $\mathcal{I}_P = Exh(\mu)$ pues por el Teorema 2.5 sabemos que $\lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus n) = \|\pi(P_X P)\|$. ❑

Hacemos notar que el hecho que éste ideal es un P-ideal es una demostración alternativa del Teorema 2.13.

Teorema 3.4 (Wofsey, [**12**]). *Existe $\mathcal{A} \subset P(\omega)$ mad family tal que $P_{\mathcal{A}} = \{P_A : A \in \mathcal{A}\}$ no es maof.*

Demostración. Primero definamos

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} e_i$$

y $Q$ la proyección en $\overline{span}\{\xi_i : i \in \omega\}$, ahora tomemos $\mathcal{I} = \{A \subset P(\omega) : P_A Q \text{ es compacto }\}$, notemos para cada $A$ subconjunto de $\omega$ podemos definir $A' = \bigcup_{n\in\omega} min\{A \cap \{i \in \omega : 2^n \leq i < 2^{n+1}\}\}$ que cumple $A' \in \mathcal{I}$ y $A' \subset A$, es decir, $\mathcal{I}$ es un ideal denso en $P(\omega)$. Ahora, simplemente tomemos $\mathcal{A}$ una madf dentro de $\mathcal{I}$, por ser $\mathcal{I}$ denso tenemos que la familia es maximal en todo $P(\omega)$ y notemos que $Q$ es casi ortogonal con $P_{\mathcal{A}}$, en particular, $P_{\mathcal{A}}$ no es maximal. ❑

Teorema 3.5 (Wofsey, [**12**]). *CH implica existe un $\kappa$-límite tal que al llevarlo a travéz del mapeo diagonal no permanece límite.*

Demostración. Primero tomemos $\{A_\gamma : \gamma \in \omega_1\}$ una enumeración de los subconjuntos infinitos de $\omega$ con complemento infinito e $\mathcal{I}$ el mismo ideal que el definido en el Teorema 3.4. Definiremos recursivamente un $\omega_1$-límite de elementos dentro de éste ideal.

Definamos $L_0 = \emptyset$. Para el paso $\beta = \alpha + 1$, por la densidad de $\mathcal{I}$, tomamos un $B_\alpha \in \mathcal{I}$ infinito tal que $B_\alpha \subset (\omega \setminus A_\alpha)$ y definimos $L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup B_\alpha$. Para el paso $\beta$ límite, primero tomemos una sucesión $\{\gamma_n : n \in \omega\}$ cofinal en $\beta$. Por la Teorema 2.13 podemos tomar un $L_\beta \in \mathcal{I}$ que casi contenga a cada elemento de $\{L_{\gamma_n} : n \in \omega\}$. Es claro que $((L_\gamma)_{\gamma\in\omega_1}, 1)$ es un $\omega_1$-límite y que $(1 - Q)$ interpola a $((P_{L_\gamma})_{\gamma\in\omega_1}, 1)$. ❑

Teorema 3.6 (Básicamente Wofsey, [**12**]). *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}$ y tal que todo $F \subset \mathcal{A}$ finito es $\leq_{\mathcal{K}}$-acotado por arriba (por un elemento no equivalente con uno). Entonces existe una proyección $R \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ de dimensión infinita que es casi ortogonal con cada elemento $a \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Primero definimos un $\mathcal{Q} \subset \mathcal{H}_{=1}$ denso numerable con la propiedad que para todo $F \subset \mathcal{Q}$ finito $\mathcal{Q} \cap F^{\perp}$ sea denso en $\mathcal{H}_{=1} \cap F^{\perp}$ ($F^{\perp}$ denota el espacio $[span\{v : v \in F\}]^{\perp}$). Esto lo hacemos de la siguiente manera, tomemos un subconjunto denso numerable de $\mathcal{H}$ y dividiendo todos los elementos de éste denso entre su norma obtenemos $\mathcal{Q}_0$, después notemos que para cada $F \subset \mathcal{Q}_0$ finito, $F^{\perp} \cap \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable. Esto nos permite tomar un $\mathcal{Q}_0^F$ denso numerable dentro de $F^{\perp} \cap \mathcal{H}_{=1}$. Ahora tomemos $\mathcal{Q}_1 = \bigcup_{F \in [\mathcal{Q}_0]^{<\omega}} \mathcal{Q}_0^F$. Recursivamente definimos $\mathcal{Q}_n$ y finalmente $\mathcal{Q} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{Q}_n$ es el subconjunto deseado.

Ahora definamos un poset de la siguiente manera

$$\mathbb{P} = \{\langle s, F\rangle : s \in \mathcal{Q}^{<\omega} \wedge (\forall i, j \in dom(s))(i \neq j \to s(i) \perp s(j)) \wedge F \subset \mathcal{A} \wedge |F| < \omega\}$$

con el siguiente orden

$$\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle \leftrightarrow (s \subset s') \wedge (F \subset F') \wedge (\forall n \in dom(s') \setminus dom(s))(\forall a \in F)(\|a(s'(n))\| \leq \frac{1}{2^n}).$$

Notemos que el poset $\mathbb{P}$ es $\sigma$-centrado (basta verlo como $\mathbb{P} = \bigcup_{s\in\mathcal{Q}^{<\omega}}\{\langle s, F\rangle : F \in \mathcal{A}\}$ ya que cantidades finitas de elementos con la misma primera coordenada son claramente compatibles). Para cada $a \in \mathcal{A}$ definimos

$$D_a = \{\langle s, F\rangle : a \in F\}.$$

Cada $D_a$ es denso ($\langle s, F \cup \{a\}\rangle$ es una extensión en $D_a$ para cualquier $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}$). Junto con éstos definimos para cada $n \in \omega$

$$E_n = \{\langle s, F\rangle : n \subset dom(s)\}.$$

Para ver que cada uno de estos conjuntos es denso basta demostrar que cada $\langle s, F\rangle$ tiene una extensión en $E_{dom(s)+1}$ pues aplicando esto recursivamente podemos extender cualquier $\langle s, F\rangle$ a un elemento de $E_{dom(s)+m}$ para cualquier $m \in \omega$. Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}$, por simplicidad denotaremos $n = dom(s)$. Por hipotesis $F$ tiene una $\leq_{\mathcal{K}}$-(cota superior) $q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Ahora empezando con $\{a_i : 1 \leq i \leq N'\}$ base ortonormal de $span\{(1-q)(s(k)) : k \leq dom(s)\}$, y extendiendo a $\{a_i : i \in \omega\}$ base ortonormal del rango de $1-q$, por Teorema 2.7 tenemos que $\lim_{i\to\infty} \|p(1-q)_i\| = 0$. Ahora, tomamos un $N > N'$ tal que para cada $p \in F$ se tenga que

$$\|p(1-q)_N\| \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

En particular $\|p(a_N)\| \leq 2^{-(n+2)}$, al mismo tiempo tenemos que

$$\langle s(k), a_N\rangle = \langle s(k), (1-q)a_N\rangle = \langle q(s(k)), (1-q)a_N\rangle + \langle (1-q)(s(k)), a_N\rangle = 0$$

para cada $k \in n$, en otras palabras $a_N \in \mathcal{H}_{=1} \cap \{s(k) : k \in n\}^{\perp}$, y por la elección de $\mathcal{Q}$ podemos tomar un $v \in \mathcal{Q} \cap \{s(k) : k \in n\}^{\perp}$ tal que $\|a_N - v\| \leq 2^{-(n+2)}$, ahora tenemos que

$$\|p(v)\| \leq \|p(v - a_N)\| + \|p(a_N)\| \leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

para cada $p \in F$ y con esto notamos que $\langle s\hat{\ }v, F\rangle \leq \langle s, F\rangle$ es una extensión dentro de $E_{n+1}$. Por $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}$ y por $\mathrm{MA}_{(\sigma-centrado)}(\mathfrak{p})$ existe un genérico $G$ que intersecta a todos estos densos y éste nos permite definir $f = \bigcup\{s : (\exists F \subset \mathcal{Q})(\langle s, F\rangle \in G)\}$ una función de los naturales a $\mathcal{Q}$. Ahora tomamos $R$ como la proyección en $\overline{span}\{f(k) : k \in \omega\}$ (notemos que el rango de $f$ es una base ortonormal del rango de $R$ y por esto los $E_n$ nos dicen que el rango de $R$ es infinito) y es claro que para cada $p \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \|pR_n\| = 0$$

Pues existe un $\langle s, F\rangle \in G$ tal que $p \in F$ y para cada $n > dom(s)$ tenemos que $\|pR_n\| \leq 2^{n-1}$. ❑

Corolario 3.7.
1. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}^*$.
2. *No existen $\kappa$-límites en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ para $\kappa < \mathfrak{p}$.*
3. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}^*$.
4. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}^*$

Demostración. 1) Sea $\mathcal{P} = \{p_\lambda : \lambda < \kappa\} \subset \mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ una familia con la propiedad de sfip tal que $\kappa < \mathfrak{p}$. Primero la levantamos a $\mathcal{P}' = \{P_\lambda : \lambda < \kappa\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ por el Teorema 2.1. Entonces la familia $1-\mathcal{P}' = \{1-P : P \in \mathcal{P}'\}$ cumple la propiedad que cada subconjunto finito es $\leq_{\mathcal{K}}$-acotado por arriba, por lo tanto existe un $R \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ de dimensión infinita tal que para todo $P \in \mathcal{P}'$ tenemos que $R(1-P)$ es compacto, es decir, $R \leq_{\mathcal{K}} P$ con lo que tenemos que $\mathcal{P}$ tiene una pseudointersección infinita.

Los demás incisos se siguen de la Proposición 3.1 y el inciso 1. ❑

Corolario 3.8 (Wofsey, [**12**]). *Asumiendo MA.* $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{a}^* = \mathfrak{p}^* = 2^\omega$ *y no existen $\kappa$-límites para $\kappa < 2^\omega$.*

Demostración. MA implica que $\mathfrak{p} = 2^\omega$. ❑

Otro cardinal que tiene una cuantización conocida es:

$$\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es un subconjunto no acotado de } {}^{\omega}\omega\}$$

Para hablar de $\mathfrak{b}^*$ es necesaria la siguiente definición

Definición 3.9. *Una pareja de buenos subordenes* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *de un orden parcial es una* $(\kappa, \lambda)$*-pregap si tenemos que* $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ *(para cada* $A \in \mathcal{A}$ *y cada* $B \in \mathcal{B}$ *se tiene que* $A \leq B$*),* $cf(\mathcal{A}) = \kappa$ *y* $cf(\mathcal{B}) = \lambda$ *(donde* $cf(\mathcal{X})$ *es la cofinalidad de* $\mathcal{X}$*). Si además tenemos que no existe un* $C \in \mathcal{P}$ *tal que* $\mathcal{A} \leq C$ *y* $C \leq \mathcal{B}$*, entonces decimos que la pareja* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *es una* $(\kappa, \lambda)$*-gap.*

Notemos que en el caso de los posets que estamos manejando existe una relación "$\perp$" y una función "$^c$" tal que tiene lugar lo siguiente

$$([A]\perp[B]) \leftrightarrow ([A] \leq [B^c])$$

En $P(\omega)/Fin$ la relación "$\perp$"es $(|A \cap B| < \omega)$ y la función "$^c$" es tomar el complemento, mientras que en $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ son "$\perp_{\mathcal{K}}$" y tomar la proyección "(1-B) ", respectivamente (Teorema 2.7). Revisando la definición anterior podemos notar que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una pregap si y sólo si $\mathcal{A}\perp(\mathcal{B})^c$ (para todo $A \in \mathcal{A}$ y cada $B \in \mathcal{B}$ se tiene $[A]\perp[B^c]$), y es una gap si además se tiene que no existe $C \in \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A}\perp C$ y $(\mathcal{B})^c \leq C$. Por ésta razón en lo sucesivo cuando hablemos de gaps nos referiremos a un par de subconjuntos que cumplan ésta propiedad.

Ahora notando que se conoce la siguiente caracterización de $\mathfrak{b}$ :

$$\mathfrak{b} = min\{\kappa : \text{existe una } (\omega, \kappa)\text{-gap en } P(\omega)/Fin\}.$$

Definimos $\mathfrak{b}^*$ como el mínimo cardinal $\kappa$ tal que existe una $(\omega, \kappa)$-gap en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$.

Definición 3.10. *Sean* $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$ *dos posets dirigidos. Entonces una función* $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *se llama Tukey si la preimagen de cada subconjunto acotado de* $\mathcal{Q}$ *es un subconjunto acotado de* $\mathcal{P}$*. Una función* $G : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ *se llama convergente si lleva subconjuntos cofinales de* $\mathcal{Q}$ *a subconjuntos cofinales de* $\mathcal{P}$*.*

La existencia de una función Tukey de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ es equivalente a la existencia de una función convergente de $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{P}$. Si esto sucede decimos que $\mathcal{P}$ es Tukey reducible a $\mathcal{Q}$ y escribimos $\mathcal{P} \leq_T \mathcal{Q}$. Si tenemos también que $\mathcal{Q} \leq_T \mathcal{P}$, diremos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son Tukey equivalentes.

Teorema 3.11. *Sea* $(X_i)$ *una partición de* $\omega$ *en conjuntos infinitos y* $\{e_i : i \in \omega\}$ *una base ortonormal de* $\mathcal{H}$*. Entonces definiendo*

$$\mathcal{P} = \{X \in P(\omega) : (\forall i \in \omega)(|X_i \cap X|) < \omega\}$$

*y*

$$\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})) : (\forall i \in \omega)(P_{X_i}Q \text{ es compacto})\}$$

*tenemos que* $(\mathcal{P}, \subset^*)$ *y* $(\mathcal{Q}, \leq_{\mathcal{K}})$ *son Tukey equivalentes.*

Demostración. Por el Corolario 2.14 tenemos que para cada $Q \in \mathcal{Q}$ existe un $Y \in \mathcal{P}$ tal que $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y$.

Ahora definamos $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ como $F(X) = P_X$ (la restricción del encaje diagonal a $\mathcal{P}$). Primero demostraremos que ésta función es Tukey. Si tenemos un $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ acotado por $Q \in \mathcal{Q}$, entonces por la afirmación anterior existe un $Y \in \mathcal{P}$ tal que $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y$, esto nos dice que $F^{-1}(\mathcal{Q}')$ está acotado por $Y$. Para ver que ésta función es convergente, tomemos un subconjunto $\mathcal{P}'$ cofinal en $\mathcal{P}$ y un $Q \in \mathcal{Q}$, por la afirmación anterior existe $Y \in \mathcal{P}$ tal que $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y$, por ser cofinal, existe un $X \in \mathcal{P}'$ tal que $Y \subset^* X$, lo que implica que $Q \leq_{\mathcal{K}} P_Y \leq_{\mathcal{K}} P_X$, es decir, que $F(\mathcal{P}')$ es cofinal en $\mathcal{Q}$, por lo tanto $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son Tukey equivalentes. ❑

Corolario 3.12 (Zamora-Aviles, [**13**]). $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^*$

Demostración. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una $(\omega, \kappa)$-gap en $(\mathcal{P}(C(\mathcal{H})), \leq)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mathcal{A} = \{a_i : i \in \omega\}$ y que $\mathcal{B} = \{b_\lambda : \lambda < \kappa\}$. Por el Teorema 2.15 tenemos que existe $\{e_i : i \in \omega\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y una familia de subconjuntos $\mathcal{A}' = \{X_i \subset \omega : i \in \omega\}$ tal que para todo $i \in \omega$, $\pi(P_{X_i}) = a_i$.

Tomando $\mathcal{B}' = \{B_\lambda : \lambda < \kappa\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $\pi(B_\lambda) = b_\lambda$ tenemos que

$$\mathcal{B}' \subset \mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})) : (\forall i \in \omega)(QP_{X_i} \text{ es compacto})\}.$$

Si además definimos $\mathcal{P} = \{X \in P(\omega) : (\forall i \in \omega)(|X_i \cap X|) < \omega\}$ sabemos por el Teorema 3.11 que éstos dos conjuntos son Tukey equivalentes. En particular, existe una función Tukey de $G : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una gap, sabemos que $\mathcal{B}'$ es no acotado en $\mathcal{Q}$. Entonces $G(\mathcal{B}')$ es no acotado en $\mathcal{P}$ lo que implica que $(\phi(\mathcal{A}'), \phi(G(\mathcal{B}')))$ es una gap en $P(\omega)/Fin$, donde $\phi : P(\omega) \to P(\omega)/Fin$ es la función paso al cociente. Por lo tanto $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}^*$. De manera análoga tenemos que $\mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{b}$. ❑

De hecho, se puede demostrar que el encaje diagonal lleva gaps de $P(\omega)/Fin$ en gaps de $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$. Para ver ésto citamos sin demostración un resultado de Todorcevic [**9**].

Definición 3.13. *Decimos que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\omega$ es $\sigma$-dirigida si para cada $\{X_i : i \in \omega\} \subset \mathcal{A}$ existe un $Y \in \mathcal{A}$ tal que para cada $i \in \omega$ se tiene $X_i \subset^* Y$.*

Definición 3.14. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset P(\omega)$. Decimos que $\mathcal{A}$ está numerablemente generada en $\mathcal{B}$ si existe una sucesión $(B_n)$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que cada elemento de $\mathcal{A}$ esté contenido en alguno de los $B_n$'s.*

Definición 3.15. *Para $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\omega$ definimos $\mathcal{A}^\perp = \{B \subset \omega : (\forall A \in \mathcal{A})(|B \cap A| < \omega)\}$*

Teorema 3.16 (Todorcevic, [**9**]). *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias ortogonales de subconjuntos de $\omega$ tal que $\mathcal{A}$ es analítico. Entonces$\mathcal{A}$ está numerablemente generado en $\mathcal{B}^\perp$ si y sólo si cada subconjunto numerable de $\mathcal{B}$ puede ser separado de $\mathcal{A}$. En particular, si ambos son $\sigma$-dirigidos, entonces pueden ser separados.*

Teorema 3.17 (Zamora-Avilés, [**13**]). *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una gap en $P(\omega)/Fin$, entonces $(\pi(P_{\mathcal{A}}), \pi(P_{\mathcal{B}}))$ es una gap en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$.*

Demostración. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una gap en $P(\omega)/Fin$. Tomamos $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ conjuntos de representantes en $P(\omega)$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Ya que el encaje diagonal preserva el orden, tenemos que $(P_{\mathcal{A}'}, P_{\mathcal{B}'})$ es una pregap en $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Supongamos que tenemos un $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que los separe, para cada $A \in \mathcal{A}'$ se tiene $P_A P$ es compacto y para cada $B \in \mathcal{B}'$ tenemos $P_B(1-P)$ es compacto, ésto nos dice que tomando $\mathcal{I}_P$ y $\mathcal{I}_{(1-P)}$ definidos como en el lema 3.3 se tiene $\mathcal{A}' \subset \mathcal{I}_P$ y $\mathcal{B}' \subset \mathcal{I}_{(1-P)}$. Veamos que estos conjuntos son ortogonales. Sea $A \in \mathcal{I}_P$ y $B \in \mathcal{I}_{(1-P)}$, tenemos entonces:

$$P_{A\cap B} = P_A P_B = P_A(P + (1-P))P_B = (P_A P)(P_B) + P_A[(1-P)P_B]$$

De aquí se deduce que $P_{A\cap B}$ es compacto, lo cual es cierto si y sólo si $A \cap B$ es finito. Por el Teorema 3.16 tenemos que éstos ideales pueden ser separados, lo cual es contradictorio a que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una gap. ❑

Si definimos el espectro de gaps de un poset $\mathcal{P}$ como el conjunto $\{(\kappa, \lambda) : \text{existe una } (\kappa, \lambda)\text{-gap en } \mathcal{P}\}$. Entonces el teorema anterior nos dice que el espectro de gaps de $P(\omega)/Fin$ está contenido en el espectro de gaps de $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$. Por un resultado de Zamora-Avilés [**13**] es consistente con ZFC que el espectro de gaps de $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$ sea estrictamente más grande que el espectro de gaps de $P(\omega)/Fin$, mas específicamente, esto es cierto asumiendo el axioma de Todorcevic (Open Coloring Axiom), MA y $\mathfrak{c} = \omega_2$.

## 2. Forcing en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$

En ésta sección demostraremos entre otras cosas que es consistente con ZFC que existan $\kappa$-límites para todo $\omega_1 \leq \kappa \leq 2^\omega$ en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$. Para hacer ésto, seguimos la misma estrategia que la usada por Wofsey en [**12**] donde se toma el argumento de forcing originalmente definido por Hechler en [**6**] y se demuestra que el $\kappa$-límite obtenido a partir del filtro genérico se mantiene límite a través del encaje diagonal.

Definimos el siguiente poset para $S$ algún conjunto de ordinales:

$$T_S = \{f : F \times n \to 2 : (F \subset S) \wedge (|F| < \omega) \wedge (n \in \omega)\}.$$

Donde para $f : F \times n \to 2$ y $f' : F' \times n' \to 2$

$$f' \leq f \leftrightarrow (f \subset f') \wedge (\forall \beta, \gamma \in F)(\beta < \gamma \to (\forall k \in \omega)(n \leq k < n' \to f'(\beta, k) \leq f'(\gamma, k)))$$

Para $S' \subset S$ es claro que $T_{S'}$ se encaja completamente en $T_S$ a través de la inclusión, pues para cada $f : F \times n \to 2 \in T_S$ tenemos que $f' : (F \cap S') \times n \to 2$ es una reducción de $f$ dentro de $T_{S'}$. Para cualquier familia no numerable $\{f_\gamma : F_\gamma \times n_\gamma\}$, existe alguna $n_\gamma$ que se mantiene constante una cantidad no numerable de veces, y así por el lema del $\Delta$-sistema $T_S$ es ccc. Además, si tenemos que $\kappa^\omega = \kappa$ es fácil demostrar que $T_\kappa \Vdash$ "$2^\omega = \check{\kappa}$".

Definición 3.18. *Sea $\{a_i : i \in \omega\}$ un conjunto ortonormal. Para un $v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i a_i$ definimos el soporte de $v$ con respecto a ésta base como $sup(v) = \{i \in \omega : v_i \neq 0\}$.*

Esta definición depende del conjunto ortonormal. Sin embargo, por simplicidad cuando sea claro en el contexto que conjunto está siendo considerado para obtener el soporte obviaremos nombrar el conjunto específicamente.

Es útil notar que si tenemos una base ortonormal, el encaje diagonal y el soporte con respecto a ésta base, entonces para cada $X \subset \omega$ y cada $v \in \mathcal{H}$ tenemos que $sup(P_X(v)) = sup(v) \cap X$.

Antes de seguir con ésta demostración necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.19. *Si tenemos $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, una base $\{a_i : i \in \omega\}$ del rango de $Q$. Entonces* $\lim_{n\to\infty} \|PQ_n\| > \epsilon$ *si y sólo si para cada $n \in \omega$ existe un $w \in ran(Q_n)$ de norma menor o igual que uno y de soporte finito tal que $\|P(w)\| > \epsilon$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Para cada $n \in \omega$ existe un $v \in Ran(Q_n)$ de norma uno tal que $\|P(v)\| > \epsilon$, tomando en cuenta que $v = \sum_{i=n}^{\infty} v_i a_i$ tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| P(\sum_{i=n}^{m} v_i a_i) \right\| = \|P(v)\| > \epsilon$$

Ahora podemos tomar un $m$ adecuado y tener un $w \in ran(Q_n)$ de norma menor o igual que uno y de soporte finito tal que $\|P(w)\| > \epsilon$. La otra dirección es trivial. ❑

Lema 3.20. *Sean $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\{a_i : i \in \omega\}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$ y $X \in P(\omega)$. Si tenemos $P_{\_} : P(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ el encaje diagonal con respecto a $\{a_i : i \in \omega\}$. Entonces $QP_X$ no es compacto si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $(\forall n \in \omega)(\exists S \in [\omega \setminus n]^{<\omega})(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = S \subset X)(\|P(v)\| > \epsilon)$*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.7 y el Lema 3.19. ❑

Teorema 3.21. *Sea $\kappa$ un cardinal regular no numerable. Entonces $T_\kappa \Vdash$ " para cada $\lambda \leq \kappa$ regular no numerable existe $\lambda$-límite en $\mathcal{P}(C(\mathcal{H}))$" .*

Demostración. Sea $G$ un filtro $T_\kappa$-genérico, entonces $G : \kappa \times \omega \to 2$. Para cada $\alpha \in \kappa$ definimos $G_\alpha(k) = G(\alpha, k)$ y $A_\alpha = G_\alpha^{-1}(1)$, demostraremos que $((P_{A_\alpha})_{\alpha<\lambda}, P_{A_\lambda})$ es un $\lambda$-límite en $M[G]$ para todo $\lambda$ ordinal tal que ($\lambda \leq \kappa \wedge \lambda$ regular no numerable).

Para cada $(x \subset \omega)^{M[G]}$, es decir, un número real, podemos tomar un $T_\kappa$ buen nombre $\{\check{i} \times \mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ donde cada $\mathcal{A}_i$ es una anticadena en $T_\kappa$. Ya que $T_\kappa$ es ccc, cada uno de éstos $\mathcal{A}_i$ es numerable. Si tomamos $S = \{\alpha : (\exists i \in \omega)(\exists (p : F_p \times n_p \to 2) \in \mathcal{A}_i)(\alpha \in F_p)\}$, podemos notar que éste $T_\kappa$ nombre es de hecho es un $T_S$ nombre y que $S$ es numerable.

Supongamos que $(P <_{\mathcal{K}} P_{A_\lambda})^{M(G)}$. Entonces, ya que la desigualdad es estricta, existe $f : F_f \times n_f \to 2$ con $f \in G$ tal que

$$f \Vdash \text{“}(1 - \dot{P})P_{A_\lambda} \text{ no es compacto”}.$$

Por el Lema 3.20 tenemos que para cada $n \in \omega$

$$f \Vdash \text{“}(\exists S_n \in [\omega \setminus n]^{<\omega})(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(S_n = sup(v) \subset A_\lambda)(\left\|(1 - \dot{P})(v)\right\| > \epsilon)\text{”}$$

Tomamos un buen nombre para cada $S_n$. Ya que son una cantidad numerable de nombres para subconjuntos de $\omega$, existe un $L \subset \kappa$ numerable tal que todos éstos nombres son $T_L$ nombres, también podemos pedir $F_f \subset L$ y $\lambda \in L$. Como $L$ es numerable y $\lambda$ es regular no numerable sabemos que $L \cap \lambda$ está acotado en $\lambda$. Tomamos $\gamma \in \lambda$ una cota de éste conjunto.

Ahora definimos $D_N = \{q : F \times n \to 2 : (\exists S \in (\omega \setminus N)^{<\omega})[q \Vdash \text{“}(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = \check{S} \subset A_\lambda)(\left\|(1 - \dot{P})(v)\right\| > \epsilon)\text{”} \wedge (\gamma \in F) \wedge (S \subset n) \wedge (\forall k \in S)(q(\gamma, k) = 1)]\}$. Demostraremos que cada uno de éstos conjuntos es denso debajo de $f$.

Antes de seguir notemos que para cualquier $S$ subconjunto finito de los naturales, para cualquier $r : F \times n \to 2$ en $T_\kappa$ y para cualquier $\eta$ ordinal, se tiene que:

$$[r \Vdash \text{“}\check{S} \subset A_\eta\text{”}] \leftrightarrow [\eta \in F \wedge S \subset n \wedge (\forall k \in S)(r(\eta, k) = 1)]. \tag{3.1}$$

Sea $g : F \times n \to 2$ tal que $g \leq f$ y $N \in \omega$, sin pérdida de generalidad $\gamma \in F$. Tomando $m \geq max\{n, N\}$ tenemos que $g$ fuerza que $\dot{S}_m$ es un subconjunto finito arriba de $m$ contenido en $A_\lambda$. Sea $G'$ un $T_\kappa$-genérico que cumpla $g \in G'$, ya que el encaje $i : T_L \to T_\kappa$ es completo y $\dot{S}_m$ es un $T_L$-nombre podemos tomar un $S \in (\omega \setminus m)^{<\omega}$ y un $r \in i^{-1}(G') = \{p : F \times n \to 2 : F \subset L \wedge p \in G'\}$

abajo de $f$ tal que $r \Vdash$ "$\check{S} = \dot{S}''_m$. Tomando

$$q = r \cup g \cup \{((\alpha, k), i) : (\alpha \in (F \setminus F_r)) \wedge (k \in n_r \setminus n) \wedge r(min(F_r \setminus \alpha), k) = i\}$$
$$\cup \{((\alpha, k), 1) : (\alpha \in (F \setminus F_r)) \wedge (k \in n_r \setminus n) \wedge (F_r \setminus \alpha = \emptyset)\}$$

Entonces $q \in D_N$, para ver ésto basta observar la fórmula (3.1) y notar que $q \leq r \leq f$, $q \leq g$, $\gamma \in F \setminus F_r$ y que $min(F_r \setminus \gamma) = \lambda$.

Para cada $N$ natural, el hecho que $G \cap D_N \neq \emptyset$ nos dice:

$$[(\exists S \in (\omega \setminus N)^{<\omega})(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = S \subset A_\gamma)(\|(1 - P)(v)\| > \epsilon)]^{M[G]}$$

Por el Lema 3.20 y el Teorema 2.7 se sigue $(P_{A_\gamma} \nleq_{\mathcal{K}} P)^{M[G]}$. Por lo tanto, en $M[G]$ se tiene que no existe $P$ que interpole. ❑

Corolario 3.22. *Es consistente ZFC +* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^* = \omega_1 + \omega_2 = 2^\omega$.

Demostración. Empezamos con un modelo de CH. Forzamos con $T_{\omega_2}$, tomamos $((L_\lambda)_{\lambda<\omega_1}, 1)$ un $\omega_1$-límite de $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{H}))$ en M[G], tomando el complemento de éste limite $\{(1 - L_\lambda : \lambda < \omega_1)\}$ es claro que éste conjunto es una torre. ❑

Corolario 3.23. *Existen cadenas $\leq_{\mathcal{K}}$-maximales dentro de $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ no isomorfas es consistente con ZFC.*

Demostración. Tomamos un $G$ que sea $T_{\omega_2}$-genérico, por el teorema anterior tenemos que en $M[G]$ existe un $\omega_1$-límite $((P_\alpha)_{\alpha<\omega_1}, 1)$ y un $\omega_2$-límite $((Q_\lambda)_{\lambda<\omega_2}, 1)$. Extendemos estos límites a cadenas maximales. Ahora, si existiera un isomorfismo $\phi$ entre éstas cadenas podriamos definir una función $f(\lambda) = min\{\beta : \phi(P_\lambda) < Q_\beta\}$ cofinal de $\omega_1$ a $\omega_2$, lo cual es contradictorio. ❑

Para obtener un resultado similar para $\mathfrak{a}^*$ tomamos una familia $\mathcal{X}$ de conjuntos disjuntos y definimos el poset:

$$U_{\mathcal{X}} = \{p : F \times n : F \subset \bigcup \mathcal{X} \wedge |F| < \omega \wedge n \in \omega\}$$

con el siguiente orden: para $f : F \times n \to 2$ y $f' : F' \times n' \to 2$:

$$(f' \leq f) \leftrightarrow (f \subset f') \wedge (\forall X \in \mathcal{X})(\forall x, y \in X \cap F)(\forall k \in \omega)(n \leq k < n' \to f'(x, k) \cdot f'(y, k) = 0)$$

Por la misma razón que el poset anterior éste poset es ccc. Para $Y \subset \bigcup \mathcal{X}$, definimos $U^Y_{\mathcal{X}} = \{f : F \times n \to 2 : f \in \mathcal{X} \wedge F \subset Y\}$. Es claro que la inclusión $i : U^Y_{\mathcal{X}} \to U_{\mathcal{X}}$ es un encaje completo. Sea $X \in \mathcal{X}$, para un filtro $U_{\mathcal{X}}$-genérico $G$ y un $x \in X$ definimos $G_x(k) = G(x, k)$ y $A_x = G^{-1}_x(1)$. Antes de iniciar necesitamos un lema:

Lema 3.24. *Sea $\{a_i : i \in \omega\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{X_i : i \in n\}$ una familia finita de subconjuntos de $\omega$. Entonces $PP_{\bigcup_{i\in n} X_i}$ es compacto si y sólo si para cada $i \in m$ tenemos que $PP_{X_i}$ es compacto.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Definimos para cada $j \in n$ el conjunto $Y_j = X_j \setminus \bigcup_{i<j} X_i$. Es claro que $PP_{\bigcup_{i\in n} X_i} = PP_{\bigcup_{i\in n} Y_i} = \sum_{i\in n} PP_{Y_i}$ que es suma de compactos. La otra dirección es trivial. ❑

Teorema 3.25. *Si $\mathcal{X}$ es una familia de conjuntos disjuntos no numerables. Entonces $U_{\mathcal{X}} \Vdash$ "$(\forall X \in \mathcal{X})(\{P_{A_x} : x \in X\}$ es una maof en $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})))$".*

Demostración. Sea $G$ un filtro $U_{\mathcal{X}}$-genérico, supongamos que para algún $X \in \mathcal{X}$ se tiene que $((\exists P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})))(\forall x \in X)(P_{A_x} P$ es compacto $\wedge$ $P$ no es compacto$))^{M[G]}$. Tomamos $\dot{P}$ un nombre para ese $P$ y un $f \in G$ tal que fuerza ésto, por el Lema 3.20 (con $X = \omega$) tenemos, en particular, que para todo $n \in \omega$

$$f \Vdash \text{“}(\exists S_n \in [\omega \setminus n]^{<\omega})(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = S_n)(\left\|\dot{P}(v)\right\| > \epsilon)\text{”}$$

Tomamos $\dot{S}_n$ buenos nombres para cada uno de éstos $S_n$. Como son una cantidad numerable de $U_{\mathcal{X}}$-buenos nombres para subconjuntos de $\omega$ y $U_{\mathcal{X}}$ es ccc, existe $Y \subset \bigcup \mathcal{X}$ numerable tal que todos éstos son $U_{\mathcal{X}}^{Y}$ nombres, podemos además pedir que $F_f \subset Y$. Dado que $X$ es no numerable podemos tomar un $x_0 \in X \setminus Y$. Ahora para cada $N \in \omega$ definimos $D_N = \{q : F \times n \to 2 : (\exists S \in (\omega \setminus N)^{<\omega})[q \Vdash$ "$(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = \check{S})(\left\|\dot{P}(v)\right\| > \epsilon/2)$" $\wedge$ $(x_0 \in F) \wedge (S \subset n) \wedge (\forall k \in S)(q(x_0, k) = 1)]\}$. Demostraremos que cada uno de éstos conjuntos es denso debajo de $f$.

Sea $N \in \omega$ y $g : F \times n \to 2$ tal que $g \leq f$, sin pérdida de generalidad $x_0 \in F$. Sabemos que $g$ fuerza que $\dot{P}$ es casi ortogonal con $P_{A_x}$ para cada $x \in (F \cap X) \setminus \{x_0\}$, por el Lema 3.24, $g$ fuerza que $\dot{P}$ es casi ortogonal a $P_{\bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\})} A_x}$ , por ésto y por el Lema 3.20 (de hecho, por la contrapuesta de éste lema) podemos tomar un $g' \leq g$, $g' : F_{g'} \times n_{g'} \to 2$ y una $N'$ tal que

$$g' \Vdash \text{“}(\forall v \in \mathcal{H}_{\leq 1})[(sup(v) \in [\omega \setminus N']^{<\omega}) \to \left\|\dot{P}(P_{\bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\})} A_x}(v))\right\| < \epsilon/2]\text{”} \tag{3.2}$$

Ahora, si elejimos un $m > max\{n_{g'}, N, N'\}$ tenemos que $g'$ fuerza que $\dot{S}_m$ es un subconjunto finito de $\omega$ arriba de $m$. Tomando un $G'$ filtro $U_{\mathcal{X}}$-genérico tal que $g' \in G'$, como $i : U_{\mathcal{X}}^{Y} \to U_{\mathcal{X}}$ es un encaje completo y $\dot{S}_m$ es un $U_{\mathcal{X}}^{Y}$ nombre, podemos tomar un $r \in i^{-1}(G')$ abajo de $f$ con $F \cap Y \cap X \subset F_r$ y un $S' \in [\omega \setminus m]^{<\omega}$ tal que $r \Vdash$ "$\check{S}' = \dot{S}_m$".

Entonces con $S = \{m \in S' : r \Vdash$ "$m \notin \bigcup_{(x\in F\cap Y\cap X)} A_x$"$\}$, notemos que para todo $x \in Y \cap F \cap X$ y todo $k \in S$ tenemos que $r(x, k) = 0$ (de otra forma $r$ no podría forzar $k \notin A_x$). Ahora podemos definir

$$q = g' \cup r \cup \{((x_0,k),1) : k \in S\} \cup \{((x_0,k),0) : k \notin S \wedge (n_{g'} \leq k < n_r)\}$$
$$\cup \{((y,k),0) : k \in (n_r \setminus n_{g'}) \wedge y \in (F_{g'} \setminus F_r)\}.$$

Notemos que $q \leq r$ y $q \leq g' \leq g \leq f$. Con ésto y la fórmula 3.2 tenemos que $q$ fuerza que existe un $v$ con soporte $S'$ con la siguiente propiedad:

$$\epsilon < \left\|\dot{P}(v)\right\| \leq \left\|\dot{P}(P_{\bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\})} A_x}(v))\right\| + \left\|\dot{P}(1 - P_{\bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\}} A_x}(v))\right\| < \epsilon/2 + \left\|\dot{P}(1 - P_{\bigcup_{x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\}} .A_x}(v))\right\|$$

También tenemos que fuerza lo siguiente $sup((1 - P_{\bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\})} A_x})(v)) = \check{S}' \setminus \bigcup_{(x\in(F\cap X)\setminus\{x_0\})} A_x = \check{S} \subset A_{x_o}$. Entonces $q$ es una extensión de $g$ dentro de $D_N$. El hecho que $G \cap D_N \neq \emptyset$ nos dice que

$$((\exists S \in [\omega \setminus N]^{<\omega})(\exists v \in \mathcal{H}_{\leq 1})(sup(v) = S \subset A_{x_0})(\|P(v)\| > \epsilon/2))^{M[G]}.$$

Pero, por el Lema 3.20 ésto implica $(PP_{A_{x_0}}$ no es compacto$)^{M[G]}$. Una contradicción. ❏

Corolario 3.26. *$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* = \omega_1 + 2^\omega = \omega_2$ es consistente con ZFC.*

Demostración. Empezamos con un modelo de $CH$. Tomamos un $X$ de cardinalidad $\omega_1$ y un $X'$ de cardinalidad $\omega_2$ con intersección vacía. Definiendo $\mathcal{X} = \{X, X'\}$ forzamos con $U_{\mathcal{X}}$. ❏

# Bibliografía


[1] Tristan Bice *Spectral families and the order structure of projections in a Hilbert space modulo compact operators* (aún por ser publicado).

[2] M.D Choi and E. Christensen, Completely order Isomorphic and Close C*-Algebras need not BE *-Isomorphic Bull. London Math. Soc. (1983) 15(6): 604-610

[3] Ilijas Farah, *A twist of projections in the Calkin algebra*, Preprint.

[4] Ilijas Farah, Eric Wofsey *Set theory and operator algebras* , April 2008. (Version of May 2010.) To appear in Proceedings of the Appalachian Set Theory (James Cummings and Ernest Schimmerling, editors). http://www.math.yorku.ca/ ifarah/preprints.html. 29-30.

[5] D. Hadwin *Maximal nests in the Calkin algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), no.4 1109-1113.

[6] S. Hechler *Short complete nested sequences in $\beta N \setminus N$ and small maximal almost-disjoint families*, General Topology Appl. 2 (1972), 139-149.

[7] S.Shelah, J.Steprans *Nontrivial homeomorphisms of $\beta N$ $N$ without the continuum hypothesis*. Fund. Math, 132, no.2: 135-141, 1989.

[8] S. Solecki, *Analytic Ideals and their applications*. Annals of Pure and Applied Logic 99, (1999) 51-72.

[9] S. Todorcevic, *Analytic Gaps*, Fundamenta Mathematicae, 150 (1996) 55-66.

[10] N. Weaver, *Mathematical Quantization*, CRC Press, 2001.

[11] N. Weaver *Set theory and $C^*$-algebras*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.13, No.1 (March 2007), 1-20.

[12] Eric Wofsey *$P(\omega)/Fin$ and projections in the Calkin algebra*. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no.2, 719-726.

[13] Beatriz Zamora Avilés *The Structure of Order Ideals and Gaps in the Calkin Algebra,. PhD Thesis, Octubre 2009, York University* .