UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

# Integración invariante sobre un hiperboloide cuántico

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

PERLA CECILIA LUCIO PEÑA

*Director:* Dr. Elmar Wagner
*Codirector:* Dr. Osvaldo Osuna Castro

MORELIA, MICHOACÁN - JUNIO DE 2011.

# Índice general

# INTRODUCCIÓN

La idea principal de Geometría no conmutativa [**Connes**] es estudiar espacios geométricos por medio de álgebras de funciones sobre espacios geométricos, permitiendo tal vez álgebras no conmutativas.

Esta rama de las matemáticas trata de ampliar los conceptos ya existentes en geometría, ya que, dado el caso de que el álgebra de funciones sea dada por las funciones continuas sobre un espacio topológico de Hausdorff o por las funciones infinitamente diferenciables sobre una variedad diferenciable, la Geometría no conmutativa da los mismos resultados que en el caso clásico ya establecido.

Además el considerar álgebras no conmutativas nos permite estudiar ejemplos donde el espacio asociado es "virtual", es decir, no está dado por un conjunto de puntos que pueden variar de una manera continua, el espacio virtual está definido solamente por su álgebra de funciones no conmutativas. Una de las motivaciones primarias viene de la física subátomica donde hay problemas con la descripción del espacio por puntos y donde se busca una descripción geométrica sin hacer referencia a puntos. También en las matemáticas se conocen espacios que surgen de construcciones muy naturales y que carecen de propiedades suficientemente buenas para poder ser estudiados por la Geometría diferencial clásica, por ejemplo algunos espacios cocientes.

El objetivo de la Geometría no conmutativa es extraer información geométrica de estos espacios.

La idea de estudiar espacios a través de álgebras de funciones se realiza también en otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en Geometría algebraica se estudia una variedad algebraica afín

$$V = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n \ : \ f_1(z_1, \ldots, z_n) = \cdots = f_k(z_1, \ldots, z_n), \ f_1, \ldots f_k \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

mediante el anillo de coordenadas

$$\mathcal{O}(V) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$$

donde el ideal $I(V)$ está dado por $I(V) = \{p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ p(v) = 0, \ \forall v \in V\}$.

En Análisis funcional, se asocia a cada espacio topológico de Hausdorff localmente compacto $X$ la C*-álgebra $C_0(X)$ de funciones continuas que se anulan en el infinito. El teorema de Gelfand establece una relación uno a uno: cada C*-álgebra conmutativa, $A$, es isomorfa a $C_0(\mathrm{Spec}(A))$ donde $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Además $\mathrm{Spec}(A)$ es compacto si y solo si $1 \in A$.

Para llevar a cabo el estudio de álgebras de funciones en Geometría no conmutativa, es vital extender las herramientas clásicas, tales como cálculo diferencial e integral, transformaciones de simetría, medida invariante, al caso no conmutativo.

En el presente documento estudiamos un álgebra no conmutativa, $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$, (ver Sección 3 del Capítulo 1) que consideramos como una deformación del anillo de coordenadas $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ (con coeficientes complejos) sobre el hiperboloide

$$\mathbb{H}_s = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t_1^2 + t_2^2 - (t_3 - 1)(t_3 - s) = 0\}, \quad s \in [-1, 1),$$

por eso llamamos a $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ Hiperboloide cuántico.

Además cabe mencionar que el grupo de Lie $\mathrm{SU}(1,1)$ actúa sobre $\mathbb{H}_s$ como transformaciones de simetría y existe una medida invariante con respecto a esta acción. Si definimos un integral sobre las funciones infinitamente diferenciables e integrables sobre $\mathbb{H}_s$ con respecto a dicha medida invariante, obtendremos un funcional que se queda invariante bajo la acción del grupo.

Para objetivos de Geometría no conmutativa formulamos esta propiedad de invarianza de la integral mediante un funcional sobre un álgebra de funciones "integrables", donde la acción de $\mathrm{SU}(1,1)$ está reemplazada por una acción de una deformación del álgebra envolvente universal, $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$, del álgebra de Lie $\mathrm{su}_{1,1}$. El álgebra envolvente universal la podemos considerar como un álgebra generada por operadores diferenciales de primer orden. Entonces a las álgebras con una acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ podemos considerarlas como álgebras de funciones infinitamente diferenciables.

Justo aquí surge un problema, pues ni en el anillo de coordenadas $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ los polinomios distintos del cero son integrables. De manera que no podemos esperar que exista un integral invariante sobre $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$. Para solucionar este problema, planteamos la posibilidad de asociar a $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ un álgebra de funciones "integrables" donde se tenga definida una acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ mediante representaciones admisibles

El resultado principal de la presente tesis es dar una solución del problema planteado considerando representaciones (posiblemente no acotados) de $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ sobre espacios de Hilbert y asociando álgebras de operadores al hiperboloide cuántico que permiten una acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$. Sobre dichas álgebras existe un integral invariante dado por una traza con peso de operadores. Éstas álgebras se consideran como un álgebra de funciones diferenciables con soporte compacto y un álgebra de funciones diferenciables con decaimiento rápido en el infinito.

Otro resultado importante es la clasificación completa de las representaciones admisibles de $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$, para de esta manera conocer las posibles álgebras de funciones integrables que le podemos asociar al hiperboloide cuántico.

Un paso crucial fue dar una definición más conveniente de $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$, que la del trabajo original (ver [**Korogodsky**]), de manera que nos permitirá facilitar los cálculos, y encontrar una acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ sobre $\mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ que es más apta para nuestros objetivos que la versión original definida en el artículo de [**Korogodsky**].

Capítulo 1

# Preliminares

## 1. Grupos de Lie y álgebras de Lie

En esta sección introducimos algunos conceptos y propiedades referentes a álgebras de Lie asociadas a un grupo de Lie, para a partir de éstos establecer análogos al caso no conmutativo que se comportan de una manera semejante al caso conmutativo.

Definición 1.1. Un grupo de Lie $G$ es una variedad diferenciable tal que tiene estructura de grupo y la aplicación $G \times G \to G$, $\;(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es $C^\infty$.

Definición 1.2. Sean $G$ un grupo de Lie y $M$ una variedad diferenciable. Decimos que $G$ actúa sobre $M$ por la izquierda si existe una aplicación diferenciable $\psi : G \times M \to M$, $\psi(g, m) =: g \cdot m$, tal que

1. $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$, para todo $g, h \in G$ y $m \in M$,
2. $e \cdot m = m$, para todo $m \in M$ y $e \in G$ es el elemento identidad de $G$.

A la aplicación $\psi$ de la definición anterior se le llama acción izquierda del grupo $G$ sobre la variedad $M$.

Definición 1.3. Sean $G$ un grupo de Lie y $M$ una variedad diferenciable. Decimos que $G$ actúa sobre $M$ por la derecha si existe una aplicación diferenciable $\varphi : M \times G \to M$, $\varphi(m, g) =: m \cdot g$, tal que

1. $m \cdot (gh) = (m \cdot g) \cdot h$, para todo $g, h \in G$ y $m \in M$,
2. $m \cdot e = m$, para todo $m \in M$ y $e \in G$ es el elemento identidad de $G$.

A la aplicación $\varphi$ de la definición anterior se le llama acción derecha del grupo $G$ sobre la variedad $M$.

Dado una variedad diferenciable $M$, denotamos por $C^\infty(M)$ al espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables en $M$.

Proposición 1.4. *Sean $G$ un grupo de Lie y $\varphi : M \times G \to M$, $\varphi(m,g) =: m \cdot g$, una acción derecha del grupo de Lie $G$ en la variedad diferenciable $M$. Entonces*

$$\triangleright : G \times C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad (g \triangleright f)(z) := f(z \cdot g), \tag{1.1}$$

*es una acción izquierda de $G$ en $C^\infty(M)$, es decir, cumple con 1. y 2. de la Definición 1.2.*

Demostración. Veamos la asociatividad de $\triangleright$: Sean $g, h \in G$ y $f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$(gh \triangleright f)(z) = f(z \cdot (gh)) = f((z \cdot g) \cdot h),$$

pues $\varphi$ es asociativa. Además, si llamamos $G(z) = f(z \cdot h)$ entonces

$$(g \triangleright (h \triangleright f))(z) = (g \triangleright G)(z) = G(z \cdot g) = f((z \cdot g) \cdot h),$$

Por lo tanto $gh \triangleright f = g \triangleright (h \triangleright f)$ y así $\triangleright$ es asociativa.

Por otro lado,

$$(e \triangleright f)(z) = f(z \cdot e) = f(z),$$

de manera que $\triangleright$ es una acción izquierda de $G$ en $C^\infty(M)$. ❑

Definición 1.5. Sean $M$ una variedad diferenciable y $G$ un grupo de Lie que actúa sobre $M$ por la derecha. Una medida invariante es una medida de Borel regular $\mu$ sobre $M$ tal que

$$\int_M f(m \cdot g)\, \mathrm{d}\mu(m) = \int_M f(m)\, \mathrm{d}\mu(m) \tag{1.2}$$

para todo $g \in G$ y $f \in L_1(M, \mu)$.

Dada una medida invariante y una variedad diferenciable $M$, podemos definir el siguiente funcional lineal:

$$H : C^\infty(M) \cap L_1(M, \mu) \to \mathbb{R}, \quad H(f) = \int_M f(m)\, \mathrm{d}\mu(m). \tag{1.3}$$

Si consideramos la acción $\triangleright$ de G en $C^\infty(M) \cap L_1(M, \mu)$ dada en la Proposición 1.4, entonces el funcional $H$ tiene la siguiente propiedad de invarianza dada por la Ecuación (1.2)

$$H(g \triangleright f) = H(f), \quad f \in C^\infty(M) \cap L_1(M, \mu),\ g \in G.$$

Definición 1.6. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial real $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ junto con un operador bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_\mathbb{R} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R} \mapsto \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ (llamado corchete de Lie) tal que para todo $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$

a) $[x, y] = -[y, x]$. (Anticonmutatividad.)
b) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$. (Identidad de Jacobi.)

Definición 1.7. Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Definimos la complexificación de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ como $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ con multiplicación compleja $\alpha(\beta \otimes_{\mathbb{R}} g) := \alpha\beta \otimes_{\mathbb{R}} g$ y con corchete de Lie dado por $[\alpha \otimes_{\mathbb{R}} g, \beta \otimes_{\mathbb{R}} h] = \alpha\beta \otimes_{\mathbb{R}} [g, h]$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g, h \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Ejemplo 1.8. Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie $G$. El álgebra de Lie denotada por $\mathrm{Lie}(G)$ ó $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ asociada a un grupo de Lie $G$ es el espacio vectorial $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} := T_eG$, donde el corchete de Lie está definido por lo siguiente:

Sea $g \in G$, denotamos por $L_g$ a la traslación por la izquierda del grupo $G$, $L_g : G \to G$ dada por $L_g(h) = gh$. Esta aplicación tiene la propiedad de que es $C^\infty$ y biyectiva con inverso $L_{g^{-1}}$ de manera que $L_g$ es un difeomorfismo. Por lo tanto $L_g$ induce un isomorfismo $(L_g)_*$ entre los espacios tangentes $(L_g)_* : T_eG \to T_gG$.

Dado un vector $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = T_eG$, definimos un campo vectorial sobre $G$ por

$$X(g) = (L_g)_*(X).$$

En el espacio vectorial de los campos vectoriales se tiene la operación de corchetes cumpliendo con a) y b). Entonces definimos en $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ los corchetes por $[X, Y] := [(L_g)_*(X), (L_g)_*(Y)](e)$, convirtiendolo de esta manera en un álgebra de Lie.

Sea $\varphi : M \times G \to M$ una acción derecha de $G$ en la variedad diferenciable $M$. Consideramos ahora la versión infinitesimal de la acción (1.1). Para $f \in C^\infty(M)$ y $X = [h(t)] \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = T_eG$ definimos

$$X \triangleright f(m) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(m \cdot h(t)), \quad m \in M.$$

Aquí el vector tangente en $X \in T_eG$ está dado por una clase de equivalencia de curvas diferenciables $h(t)$ con $h(0) = e$. Demostremos que la definición de $\triangleright$ no depende de la curva diferenciable $h(t)$: como

$$X \triangleright f(m) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(m \cdot h(t)) = df([m \cdot h(t)])$$

donde $[m \cdot h(t)] \in T_mM$, basta demostrar que $[m \cdot h(t)] = [m \cdot g(t)]$ si $[h(t)] = [g(t)]$.

Sea $(U, \Psi)$ una carta de M tal que $m \in U$, tenemos que mostrar que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Psi(m \cdot h(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Psi(m \cdot g(t)).$$

Recordamos la notación $\varphi(m, h(t)) = m \cdot h(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Psi(m \cdot h(t)) &= d(\Psi \circ \varphi)([m, h(t)]) = d(\Psi \circ \varphi)([m], [h(t)]) \\ &= d(\Psi \circ \varphi)([m], [g(t)]) = d(\Psi \circ \varphi)([m, g(t)]) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Psi(m \cdot g(t)) \end{aligned}$$

donde utilizamos que $T_{(m,e)}(M \times G) = T_m M \times T_e G$ y $m$ es la curva constante; $[m] = 0 \in T_m M$. Por lo tanto $\triangleright$ está bien definida.

Ahora, dado que

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (fg)(m \cdot h(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(m \cdot h(t)) g(m \cdot h(t)) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(m \cdot h(t))\right) g(m \cdot h(0)) + f(m \cdot h(0)) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(m \cdot h(t))\right) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(m \cdot h(t))\right) g(m) + f(m) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(m \cdot h(t))\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$X \triangleright (fg) = (X \triangleright f)g + f(X \triangleright g) \quad f, g \in C^\infty(M). \tag{1.4}$$

Entonces $X$ satisface la regla de Leibniz, es decir, $X$ es una derivada. Además si $H$ es el funcional sobre las funciones $C^\infty(M)$ definido en la ecuación (1.3), entonces

$$H(X \triangleright f) = \int_M X \triangleright f(z)\, \mathrm{d}\mu(z) = \int_M \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(z \cdot h(t))\, \mathrm{d}\mu(z) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int_M f(z \cdot h(t))\, \mathrm{d}\mu(z) = 0, \tag{1.5}$$

por que $\mu$ es medida invariante y las funciones bajo el integral son $C^\infty$.

## 2. Espacios cuánticos

Queremos ahora definir el caso análogo de la acción infinitesimal del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie sobre las funciones infinitamente diferenciables y de la propiedad de invarianza que define el funcional $H$ dada en (1.5).

En el caso no conmutativo, tiene sentido definir una acción sobre un álgebra no conmutativa, pero en este caso, el objeto que actúa sobre dicha álgebra se le pide que sea álgebra de Hopf. Este concepto lo definimos a continuación.

Definición 1.9. Un álgebra de Hopf es un álgebra asociativa $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ con unidad $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ y multiplicación $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $m(a \otimes b) = ab$ tal que existen homomorfismos $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ ( co-producto), $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ y una aplicación lineal $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que

i) $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$, (Co-asociatividad del co-producto)
ii) $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$, (Co-unidad)
iii) $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon 1_{\mathcal{A}} = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$. (Propiedad del antípodo)

En seguida mostramos un ejemplo muy general de álgebra de Hopf en el cual se define un coproducto que se comporta como un operador diferencial, y justo con este ejemplo podemos notar la analogía con los elementos de un álgebra de Lie que pueden ser vistos como derivadas.

Ejemplo 1.10. Álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie. Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ un álgebra de Lie real de dimensión finita con corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ y $\mathfrak{g}$ su complexificación. Denotamos por $\mathfrak{g}^{\otimes i}$ al producto tensorial $\mathfrak{g}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{g}$ $i-$veces, $i \geq 1$ y $\mathfrak{g}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, donde $\otimes$ es el producto tensorial sobre $\mathbb{C}$. Definimos el álgebra tensorial en $\mathfrak{g}$ como $\tau(\mathfrak{g}) := \oplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{g}^{\otimes i}$, ésta es un álgebra asociativa con unitario donde el producto es: si $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k \in \mathfrak{g}^{\otimes k}$ y $w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_l \in \mathfrak{g}^{\otimes l}$ entonces

$$(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k)(w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_l) = v_1\otimes\cdots\otimes v_k\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_l \in \mathfrak{g}^{\otimes k+l},$$

y $(\alpha 1)\otimes v = v\otimes(\alpha 1) = \alpha v$, para $v \in \mathfrak{g}^{\otimes n}$.

$\tau(\mathfrak{g})$ cumple la siguiente propiedad universal: Dada una aplicación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to A$, donde $A$ es un álgebra asociativa con unitario sobre $\mathbb{C}$, existe un único homomorfismo de álgebras $\psi : \tau(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\psi(1) = 1$ y $\psi\circ i = \phi$, donde $i$ es la inclusión de $\mathfrak{g}$ en $\tau(\mathfrak{g})$, esto es, existe una única extensión de $\phi$ al álgebra tensorial $\tau(\mathfrak{g})$.

Consideremos sobre $\tau(\mathfrak{g})$ al ideal $I$ generado por los elementos $u_{x,y} = x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Al cociente $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \tau(\mathfrak{g})/I$ se le llama álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. Al igual que el álgebra tensorial en $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ cumple la siguiente propiedad universal: Dada un álgebra asociativa $A$ y una aplicación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to A$ tal que $\phi([X,Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\psi(1) = 1$ y $\psi\circ i = \phi$, donde $i$ es la inclusión de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. De esta manera, cualquier homormorfismo del álgebra de Lie se extiende a un único homomorfismo de su álgebra envolvente universal, y vice versa, dado cualquier homomorfismo del álgebra envolvente universal, su restricción al álgebra de Lie define un homomorfismo de álgebras de Lie.

Definimos los homomorfismos $\Delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\varepsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ y un anti-homomorfismo $S : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ como

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = 1\otimes 1, \quad \varepsilon(1) = 1, \quad S(1) = 1,\\
&\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X, \quad \varepsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X, \quad X \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

Observemos que como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ está generado por una base de $\mathfrak{g}$, basta definir las aplicaciones lineales anteriores en dicha base. Es fácil ver que $\Delta$, $\varepsilon$ y $S$ están bien definidas, por lo que resta comprobar que cumple la propiedad de co-asociatividad, co-unidad y la del antípodo. En efecto,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(X) &= (\Delta\otimes\mathrm{id})(X\otimes 1+1\otimes X) = \Delta(X)\otimes 1+\Delta(1)\otimes X\\ &= X\otimes 1\otimes 1+1\otimes X\otimes 1+1\otimes 1\otimes X = X\otimes\Delta(1)+1\otimes\Delta(X)\\ &= (\mathrm{id}\otimes\Delta)(X\otimes 1+1\otimes X) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta(X),\end{aligned}$$

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(X) = 0\cdot 1+1\cdot X = X = X\cdot 1+0\cdot 1 = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(X),$$

$$\begin{aligned}m\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(X) &= m\circ(S\otimes\mathrm{id})(X\otimes 1+1\otimes X) = S(X)\cdot 1+S(1)\cdot X = -X+X = 0\\ &= \varepsilon(X)1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} = X\cdot S(1)+1\cdot S(X) = m\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta(X).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tiene estructura de álgebra de Hopf.

Definición 1.11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Hopf. Entonces $\mathcal{A}$ es una *-álgebra de Hopf si $\mathcal{A}$ es una *-álgebra con involución $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ tal que $\varepsilon(a^*) = \overline{\varepsilon(a)}$ y $\Delta(a^*) = \Delta(a)^*$, para todo $a\in\mathcal{A}$. Donde $(u\otimes v)^* = u^*\otimes v^*$, para todo $u\otimes v\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$.

Observemos que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ del Ejemplo 1.10 es una *-álgebra de Hopf, definiendo por ejemplo la involución como $X^* = -X$, para todo $X\in\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{A}$ una *-álgebra de Hopf con $\Delta$, $\varepsilon$ y $S$ como en Definicón 1.9, y $\mathcal{X}$ una *-álgebra. Entonces $\mathcal{X}$ es un $\mathcal{A}$-módulo *-álgebra izquierdo si existe una acción $\triangleright:\mathcal{A}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ tal que $\triangleright$ es bilineal y satisface

$$(ab)\triangleright x = a\triangleright(b\triangleright x),\quad a\triangleright(xy) = m\left(\Delta(a)\triangleright(x\otimes y)\right),\quad (a\triangleright x)^* = S(a)^*\triangleright x^*,\quad 1\triangleright x = x,$$

para todo $a,\ b\in\mathcal{A}$, $x,y\in\mathcal{X}$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Si $1\in\mathcal{X}$, se require además que se satisfaga la siguiente relación:

$$a\triangleright 1 = \varepsilon(a)1,\quad \text{para todo } a\in\mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{X}$ es un $\mathcal{A}$-módulo *-álgebra izquierdo, con $\mathcal{A}$ como en la definición, entonces decimos que $\mathcal{X}$ es un *espacio cuántico*.

La ecuación $a\triangleright(xy) = m\left(\Delta(a)\triangleright(x\otimes y)\right)$ se lee $a\triangleright(xy) = \sum_{k=1}^{n}(a_k'\triangleright x)(a_k''\triangleright y)$, donde el co-producto de $a$ está dado por $\Delta(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k'\otimes a_k''\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Ahora ya se tienen los conceptos necesarios para poder definir un integral invariante en la *-álgebra. Esta definición es muy parecida que la dada para álgebras de Lie, simplemente en este caso, como el álgebra que actúa es álgebra de Hopf, la propiedad de invarianza en (1.5) está expresada a través del homomorphismo $\varepsilon:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$- módulo *-álgebra izquierdo con $\mathcal{A}$ una *-álgebra de Hopf. Entonces $h : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es un integral invariante en $\mathcal{X}$ si

$$h(a \triangleright x) = \varepsilon(a)\, h(x), \qquad \text{para todo } \ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathcal{X}.$$

Ejemplo 1.14. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{X}$ un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo *-álgebra izquierdo y $h : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ un integral invariante, entonces dado que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ se tiene que

$$X \triangleright (fg) = (X \triangleright f)g + f(X \triangleright g), \qquad \text{para todo } \ X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}),\ f, g \in \mathcal{X}.$$

Es decir, $X$ es una derivada de primer orden, exactamente como $X$ en (1.4), y dado que $\varepsilon(X) = 0$ también tenemos que

$$h(X \triangleright f) = \varepsilon(X) h(f) = 0, \qquad \text{para todo } \ X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}),\ f \in \mathcal{X},$$

exactamente como $H$ en (1.5). Podemos pensar en $\mathcal{X}$ como un álgebra de funciones integrables y diferenciables sobre una variedad $M$ con acción de un grupo de Lie $G$ tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ y $h(f) = \int_M f(z)\, \mathrm{d}\mu(z)$ donde $\mu$ es una medida invariante sobre $M$.

Sea $\mathbb{H}_s = \{(y, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid y\bar{y} - (x-1)(x-s) = 0\}$. Mostramos a continuación que podemos convertir a $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$, el álgebra de polinomios en coordenadas sobre $\mathbb{H}_s$, en un espacio cuántico, con acción de $\mathcal{U}(su_{1,1})$ y definimos en $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ un integral invariante. El tema central de esta tesis es estudiar un análogo cuántico de este ejemplo.

Ejemplo 1.15. Definimos $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s) := \mathbb{C}[x, y, \bar{y}]/I$, donde $I$ es el ideal generado por el polinomio $y\bar{y} - (x-s)(x-1)$. Dado que $y\bar{y} = (x-s)(x-1)$ en $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ entonces

$$\mathcal{O}(\mathbb{H}_s) = \left\{ \sum_{n=0}^{N} y^n P_n(x) + \sum_{m=1}^{M} P_{-m}(x)\bar{y}^m \mid N, M \in \mathbb{N},\ P_k(x) \in \mathbb{C}[x]\ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie generada por los operadores diferenciales

$$H = 2y\,\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \qquad E = y\,\frac{\partial}{\partial x} + (2x - (1+s))\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \qquad F = \bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x - (1+s))\,\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.6}$$

que actúan sobre $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ como operadores diferenciales de primer orden y con corchete de Lie dado por $[X, Y]\psi = X(Y\psi) - Y(X\psi)$ para todo $X$, $Y \in \mathfrak{g}$ y $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$.

Entonces se tiene:

$$
\begin{aligned}
[H,E]\psi &= \left(2y\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi - \left(y\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\left(2y\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi \\
&= 2y\frac{\partial\psi}{\partial x} + 2y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - 2\bar{y}y\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial x} + 2y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}} - 2\bar{y}(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2} - 2y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\
&- 2y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial y} + 2\bar{y}(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2} + 2y\bar{y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial \bar{y}} + 2(2x-(1+s)\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}}) \\
&= 2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi \\
&= 2E\psi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[H,F]\psi &= \left(2y\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi - \left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2y\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi \\
&= 2y\bar{y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - 2\bar{y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\bar{y}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial x} + 2y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\bar{y}(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial y} - 2y\bar{y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\
&- 2(2x-(1+s))\frac{\partial\psi}{\partial y} - 2y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\bar{y}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial \bar{y}} + 2\bar{y}(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}} \\
&= -2\left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\
&= -2F\psi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[E,F]\psi &= \left(y\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\
&- \left(\bar{y}\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x} + (2x-(1+s))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi \\
&= y\bar{y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (2x-(1+s))\frac{\partial\psi}{\partial x} + (2x-(1+s))\bar{y}\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial x} + 2y\frac{\partial\psi}{\partial y} + y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\
&+ (2x-(1+s))^2\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}\partial y} - \bar{y}y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - (2x-(1+s))\frac{\partial\psi}{\partial x} - y(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - 2\bar{y}\frac{\partial\psi}{\partial \bar{y}} \\
&- \bar{y}(2x-(1+s))\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial \bar{y}} - (2x-(1+s))^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}} \\
&= \left(2y\frac{\partial}{\partial y} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\psi \\
&= H\psi.
\end{aligned}
$$

Entonces, el álgebra de Lie generada por los operadores $H$, $E$ y $F$ es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Ahora definimos el conjunto de funciones diferenciables con decaimiento rápido en el infinito como

$$\mathcal{S}((-\infty, s] \cup [1,\infty)) = \left\{ f \in C^{\infty}((-\infty, s] \cup [1,\infty)) \mid \lim_{|x|\to\infty} |f^{(n)}(x)x^k| = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

y definimos sobre el álgebra

$$\mathcal{S}(\mathbb{H}_s) := \left\{ \sum_{n=0}^{N} y^n f_n(x) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}(x)\bar{y}^m \mid N, M \in \mathbb{N},\ f_k \in \mathcal{S}((-\infty, s] \cup [1,\infty)),\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

una acción del álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$, la cual corresponde a la definición de los operadores dados en (1.6):

$$\begin{aligned}
H \triangleright \left( \sum_{n=0}^{N} y^n f_n(x) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}(x)\bar{y}^m \right) &:= \sum_{n=0}^{N} 2ny^n f_n(x) - \sum_{m=1}^{M} 2mf_{-m}(x)\bar{y}^m,\\
E \triangleright \left( \sum_{n=0}^{N} y^n f_n(x) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}(x)\bar{y}^m \right) &:= \sum_{n=0}^{N} y^{n+1} f_n'(x) + \sum_{m=1}^{M} \left( f_{-m}'(x)y\bar{y}^m + m(2x-(1+s))f_{-m}(x)\bar{y}^{m-1} \right),\\
F \triangleright \left( \sum_{n=0}^{N} y^n f_n(x) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}(x)\bar{y}^m \right) &:= \sum_{n=0}^{N} \left( \bar{y}y^n f_n'(x) + n(2x-(1+s))y^{n-1} f_n(x) \right) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}'(x)\bar{y}^{m+1}.
\end{aligned}$$

Procedemos a demostrar que $\triangleright$ está bien definida, es decir, $\triangleright$ respeta la relación:

$$y\bar{y} - (x-s)(x-1) = 0$$

de $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
H \triangleright (y\bar{y} - (x-s)(x-1)) &= (H \triangleright y)\bar{y} + y(H \triangleright \bar{y}) - (H \triangleright (x-s))(x-1) - (x-s)(H \triangleright (x-1))\\
&= 2y\bar{y} + y(-2\bar{y}) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \triangleright (y\bar{y} - (x-s)(x-1)) &= (E \triangleright y)\bar{y} + y(E \triangleright \bar{y}) - (E \triangleright (x-s))(x-1) - (x-s)(E \triangleright (x-1))\\
&= 0 + y(2x-(1+s)) - y(x-1) - (x-s)y = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F \triangleright (y\bar{y} - (x-s)(x-1)) &= (F \triangleright y)\bar{y} + y(F \triangleright \bar{y}) - (F \triangleright (x-s))(x-1) - (x-s)(F \triangleright (x-1))\\
&= (2x-(1+s))\bar{y} + 0 - \bar{y}(x-1) - (x-s)\bar{y} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\triangleright : \mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})) \times \mathcal{S}(\mathbb{H}_s) \to \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ está bien definida.

Escribimos a $y \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ por medio de su descomposición polar $y = |y|e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Dado que $|y| = \sqrt{(x-s)(x-1)}$ entonces $y = \sqrt{(x-s)(x-1)}e^{\mathrm{i}\theta}$. Por consiguiente, cada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ se puede ver como una función de $x$ y de $\theta$.

Así, podemos definir en $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ un integral invariante bajo la acción de $\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ como:

$$h(\psi(x,\theta)) = \int_{(-\infty,s]\cup[1,\infty)} \int_0^{2\pi} \psi(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x.$$

Para demostrar la invarianza de la integral, demostramos primero el siguiente lema:

Lema 1.16. *$h(y^n f_n(x)) = 0 = h(f_{-n}(x)\bar{y}^n)$ para todo $y^n f_n(x)$, $f_{-n}(x)\bar{y}^n \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. El resultado se obtiene despues de notar que $y^n f_n(x) = ((x-s)(x-1))^{n/2}\, e^{\mathrm{i}n\theta} f_n(x)$ y $f_{-n}(x)\bar{y}^n = f_{-n}(x)\,((x-s)(x-1))^{n/2}\, e^{-\mathrm{i}n\theta}$ y $\int_0^{2\pi} e^{\pm\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ◻

Procedemos ahora a demostrar que $h$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$:

Por el Lema 1.16,

$$\begin{aligned} h(H \triangleright y^n f(x)) &= h(2ny^n f(x)) = 0 = \varepsilon(H)h(y^n f(x)),\\ h(H \triangleright f(x)\bar{y}^m) &= h(-2mf(x)\bar{y}^m) = 0 = \varepsilon(H)h(f(x)\bar{y}^m), \end{aligned}$$

para todo $n$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}((-\infty,s]\cup[1,\infty))$. Además $H \triangleright f_0(x) = 0$, y por tanto, $h$ es invariante bajo la acción de $H$.

Análogamente, por el Lema 1.16, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $f \in \mathcal{S}((-\infty,s]\cup[1,\infty))$ tenemos que:

$$\begin{aligned} h(E \triangleright y^n f(x)) &= h(y^{n+1} f'(x)) = 0 = \varepsilon(E)h(y^n f(x)),\\ h(F \triangleright f(x)\bar{y}^n) &= h(\bar{y}^{n+1} f'(x)) = 0 = \varepsilon(E)h(f(x)\bar{y}^n), \end{aligned}$$

y para todo $m \neq 1$:

$$\begin{aligned} h(E \triangleright f(x)\bar{y}^m) &= h(f'(x)y\bar{y}^m) + h(m(2x-(1+s))\bar{y}^{m-1}f(x))\\ &= h(f'(x)(x-s)(x-1)\bar{y}^{m-1}) + h(m(2x-(1+s))\bar{y}^{m-1}f(x))\\ &= 0 = \varepsilon(E)h(f(x)\bar{y}^m),\\ h(F \triangleright y^m f(x)) &= h(f'(x)\bar{y}y^m) + h(m(2x-(1+s))y^{m-1}f(x))\\ &= h(f'(x)(x-s)(x-1)y^{m-1}) + h(m(2x-(1+s))y^{m-1}f(x))\\ &= 0 = \varepsilon(F)h(y^m f(x)). \end{aligned}$$

Ahora, usando integración por partes para $m = 1$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
h(E \triangleright f(x)\bar{y}) &= h(f'(x)y\bar{y}) + h((2x-(1+s))f(x)) \\
&= 2\pi\left(\int_{-\infty}^{s} f'(x)(x-s)(x-1)\,\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{s}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx}\right. \\
&\left. + \int_{1}^{\infty} f'(x)(x-s)(x-1)\,\mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx}\right) \\
&= 2\pi\left(f(x)(x-s)(x-1)\Big|_{-\infty}^{s} - \int_{-\infty}^{s}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{s}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx}\right. \\
&\left. + f(x)(x-s)(x-1)\Big|_{1}^{\infty} - \int_{1}^{\infty}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty}(2x-(1+s))f(x)\,\mathrm{dx}\right) \\
&= 0 = \varepsilon(E)h(f(x)\bar{y}),
\end{aligned}
$$

ya que $f(x) \in \mathcal{S}((-\infty, s] \cup [1, \infty))$.

Como $h(F \triangleright yf(x)) = h(f'(x)\bar{y}y) + h(f(x)(2x-(1+s))) = h(E \triangleright f(x)\bar{y}) = 0$, tenemos también

$$h(F \triangleright yf(x)) = 0 = \varepsilon(F)h(yf(x))$$

Por tanto, se tiene que $h$ define un integral invariante en $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$.

A continuación mostraremos que se puede definir un producto escalar en $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ de manera que es posible definir una involución en $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ tal que $H^* = H$, $E^* = -F$, la cual es la involución que define a $\mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1})$.

Definimos un producto escalar en $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ como

$$\langle \phi, \psi \rangle = h(\bar{\phi}\psi), \quad \forall \phi,\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s).$$

Es fácil comprobar que $\langle , \rangle$ es una función bilineal, hermítica y positiva. Falta probar que es definida, es decir, para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$, $\langle \phi, \phi \rangle = 0$ si y sólo si $\phi = 0$.

Sea $\phi = \sum_{n=0}^{N} y^n f_n(x) + \sum_{m=1}^{M} f_{-m}(x)\bar{y}^m$. Notamos que

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}\phi = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} y^k\bar{y}^n f_k(x)\overline{f_n(x)} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{N} y^n y^m f_n(x)\overline{f_{-m}(x)} + \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} \bar{y}^n\bar{y}^m f_{-m}(x)\overline{f_n(x)} \\
+ \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} y^m\bar{y}^k f_{-k}(x)\overline{f_{-m}(x)}.
\end{aligned}
$$

Por el Lema 1.16, se tiene que

$$
\begin{aligned}
h(y^k\bar{y}^l f_k(x)\overline{f_l(x)}) = h(y^l\bar{y}^k f_{-k}(x)\overline{f_{-l}(x)}) = 0 \qquad & \forall k, l \in \mathbb{N}_0,\ k \neq l, \\
h(y^k y^l f_k(x)\overline{f_{-l}(x)}) = h(\bar{y}^k\bar{y}^l f_{-l}(x)\overline{f_k(x)}) = 0 \qquad & \forall k, l \in \mathbb{N}_0,\ k + l > 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$h(\bar{\phi}\phi) = \sum_{k=-M}^{N} h(y^{|k|}\bar{y}^{|k|} f_k(x)\overline{f_k(x)}) = 2\pi \sum_{k=-M}^{N} \int_{(-\infty,s]\cup[1,\infty)} ((x-s)(x-1))^{|k|}\, |f_k(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

Como $(x-s)(x-1) > 0$ para todo $x \in (-\infty, s) \cup (1, \infty)$ y $f_k$ es continua entonces $\langle \phi, \phi \rangle = 0$ si y sólo si $f_k(x) = 0$ para todo $k = -M, \ldots, N$. Entonces $\langle \phi, \phi \rangle = 0$ si y sólo si $\phi = 0$. De esta manera podemos concluir que $\langle , \rangle$ define un producto escalar en $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$.

Ahora veamos que la operación de tomar adjuntos define una involución $*$ en $\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ tal que $(\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})), *) = \mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1})$. En efecto, para todo $y^n f_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ y $f_{-n}(x)\bar{y}^n \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$, $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle H \triangleright y^n f_n(x), y^m f_m(x)\rangle &= \langle 2n y^n f_n(x), y^m f_m(x)\rangle = h(2n\bar{y}^n y^m \overline{f_n(x)} f_m(x)) \\
&= \delta_{n,m} 2n\, h(\bar{y}^n y^m \overline{f_n(x)} f_m(x)) = \delta_{n,m} 2m\, h(\bar{y}^n y^m \overline{f_n(x)} f_m(x)) \\
&= \langle y^n f_n(x), 2m y^m f_m(x)\rangle = \langle y^n f_n(x), H \triangleright y^m f_m(x)\rangle,
\end{aligned}$$

$$\langle H \triangleright y^n f_n(x), f_{-m}(x)\bar{y}^m\rangle = h(2n\bar{y}^{n+m})\overline{f_n(x)} f_{-m}(x)) = 0 = \langle y^n f_n(x), H \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m\rangle,$$

siguiendo con un procedimiento análogo a los casos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle H \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m, y^n f_n(x)\rangle &= 0 = \langle f_{-m}(x)\bar{y}^m, H \triangleright y^n f_n(x)\rangle, \\
\langle H \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m, f_{-n}(x)\bar{y}^n\rangle &= -\delta_{n,m} 2m\, h(y^m \bar{y}^n \overline{f_{-m}(x)} f_{-n}(x)) = \langle f_{-m}(x)\bar{y}^m, H \triangleright f_{-n}(x)\bar{y}^n\rangle.
\end{aligned}$$

De esta manera concluimos que $H^* = H$. Procedemos ahora a demostrar que $E^* = -F$:

$$\begin{aligned}
\langle E \triangleright y^n f_n(x), y^m f_m(x)\rangle &= \langle y^{n+1} f_n'(x), y^m f_m(x)\rangle = h(\bar{y}^{n+1} y^m \overline{f_n'(x)} f_m(x)) \\
&= \delta_{n+1,m}\, h(\bar{y}^{n+1} y^m \overline{f_n'(x)} f_m(x)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la fórmula de integración parcial y que $f_k \in \mathcal{S}((-\infty, s] \cup [1, \infty))$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\langle y^n f_n(x), -F \triangleright y^m f_m(x)\rangle = -\langle y^n f_n(x), \bar{y} y^m f_m'(x) + m(2x - (1+s)) y^{m-1} f_m(x)\rangle \\
&= -h(\bar{y}^n y^{m-1}(x-s)(x-1)\overline{f_n(x)} f_m'(x)) - m\, h(\bar{y}^n y^{m-1}(2x-(1+s))\overline{f_n(x)} f_m(x)) \\
&= -\delta_{n,m-1} 2\pi \left( \int_{-\infty}^{s} ((x-s)(x-1))^m \overline{f_n(x)} f_m'(x) \mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty} ((x-s)(x-1))^m \overline{f_n(x)} f_m'(x) \mathrm{dx} \right. \\
&\left. -m \int_{-\infty}^{s} \bar{y}^n y^{m-1}(2x-(1+s))\overline{f_n(x)} f_m(x) \mathrm{dx} - m \int_{1}^{\infty} \bar{y}^n y^{m-1}(2x-(1+s))\overline{f_n(x)} f_m(x) \mathrm{dx} \right) \\
&= -\delta_{n,m-1} 2\pi \left( -\int_{-\infty}^{s} ((x-s)(x-1))^m \overline{f_n'(x)} f_m(x) \mathrm{dx} - \int_{1}^{\infty} ((x-s)(x-1))^m \overline{f_n'(x)} f_m(x) \mathrm{dx} \right) \\
&= \delta_{n,m-1}\, h((x-s)^m (x-1)^m \overline{f_n'(x)} f_m(x)) \\
&= \delta_{n+1,m}\, h(\bar{y}^{n+1} y^m \overline{f_n'(x)} f_m(x)),
\end{aligned}$$

de manera que $\langle E \triangleright y^n f_n(x), y^m f_m(x)\rangle = \langle y^n f_n(x), -F \triangleright y^m f_m(x)\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}\langle E \triangleright y^n f_n(x), f_{-m}(x)\bar{y}^m\rangle &= \langle y^{n+1} f_n'(x), f_{-m}(x)\bar{y}^m\rangle = h(\bar{y}^{n+1}\bar{y}^m\overline{f_n'(x)}f_{-m}(x)) = 0 \\ &= h(-\bar{y}^n\bar{y}^{m+1}\overline{f_n(x)}f_{-m}'(x)) = \langle y^n f_n(x), -F \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m\rangle.\end{aligned}$$

Se comprueba de forma análoga que

$$\begin{aligned}\langle E \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m, y^n f_n(x)\rangle &= 0 = \langle f_{-m}(x)\bar{y}^m, -F \triangleright y^n f_n(x)\rangle, \\ \langle E \triangleright f_{-m}(x)\bar{y}^m, f_{-n}(x)\bar{y}^n\rangle &= \delta_{n+1,m}\, h(y^{n+1}\bar{y}^m\overline{f_{-m}(x)}f_{-n}'(x)) = \langle f_{-m}(x)\bar{y}^m, -F \triangleright f_{-n}(x)\bar{y}^n\rangle.\end{aligned}$$

Así, $E^* = -F$. Por lo tanto podemos concluir que $(\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})), *) = \mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1})$. Es elemental verificar que la $\mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1})$-acción satisface las condiciones de la definición 1.12. De esta forma, hemos encontrado un integral invariante sobre $\mathcal{S}(\mathbb{H}_s)$ con acción de $\mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1})$.

## 3. El hiperboloide cuántico

A continuación exponemos la *-álgebra no conmutativa con la que trabajaremos. A dicha álgebra la dotaremos de una acción para después asociarle un álgebra de funciones integrables que dejen invariante dicha acción. De ahora en adelante $q$ y $s$ siempre son números reales tales que $q \in (0,1)$ y $s \in [-1,1)$. Consideremos $\mathcal{X} := \mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q}) = $ *-alg$\{y, y^*, x = x^*\}$ con relaciones:

$$\begin{aligned} yx &= q^2 xy, \\ xy^* &= q^2 y^* x, \\ y^* y &= (q^{-2}x - s)(q^{-2}x - 1), \\ yy^* &= (x - s)(x - 1).\end{aligned}$$

Esta álgebra se ha obtenido a partir de la definición de un hiperboloide cuántico dado en el artículo de [**Korogodsky**] y definida como a continuación:

$\mathcal{O}(\mathcal{X}_{c,d})$ es la *-álgebra generada por $x = x^*$, $y$ e $y^*$ con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} yx &= q^2 xy, \\ y^* x &= q^{-2} xy^*, \\ y^* y &= (q^{-1}x - c)(q^{-1}x - d), \\ yy^* &= (qx - c)(qx - d),\end{aligned}$$

donde $c, d \in \mathbb{R}$ y $c \neq d$.

Veamos que ambas álgebras son isomorfas.

Proposición 1.17. *Las *-álgebras* $O(\mathcal{X}_{c,d})$ *y* $O(\mathbb{H}_{s,q})$ *son isomorfas, donde* $s = \frac{c}{d}$ *si* $|d| \geq |c|$ *y* $s = \frac{d}{c}$ *si* $|c| \geq |d|$.

Demostración. Sin perder la generalidad, podemos suponer que $|c| \leq |d|$ y además $d \neq 0$. Definimos $\Psi : O(\mathcal{X}_{c,d}) \to O(\mathbb{H}_{\frac{c}{d},q})$ por

$$\Psi(y) = \tfrac{1}{d}y, \qquad \Psi(y^*) = \tfrac{1}{d}y^*, \qquad \Psi(x) = \tfrac{q}{d}x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(y)\Psi(x) &= \tfrac{q}{d^2}yx = q^2\tfrac{q}{d^2}xy = q^2\Psi(x)\Psi(y),\\
\Psi(y^*)\Psi(x) &= \tfrac{q}{d^2}y^*x = q^{-2}\tfrac{q}{d^2}xy^* = q^{-2}\Psi(x)\Psi(y^*),\\
\Psi(y^*)\Psi(y) &= \tfrac{1}{d^2}(q^{-1}x - c)(q^{-1}x - d) = (q^{-2}\Psi(x) - \tfrac{c}{d})(q^{-2}\Psi(x) - 1),\\
\Psi(y)\Psi(y^*) &= \tfrac{1}{d^2}(qx - c)(qx - d) = (\Psi(x) - \tfrac{c}{d})(\Psi(x) - 1).
\end{aligned}$$

Por tanto $\Psi$ está bien definida. Además $\Psi(a^*) = \Psi(a)^*$ para todo $a \in O(\mathcal{X}_{c,d})$ por definición. Obviamente, el inverso de $\Psi$ está dada por $\Psi^{-1}(y) = dy$, $\Psi^{-1}(y^*) = dy^*$ y $\Psi^{-1}(x) = \frac{d}{q}x$. ❏

Como *-álgebra de Hopf consideraremos una deformación del álgebra envolvente universal del álgebra de Lie $\mathrm{su}_{1,1}$ tal como lo sugiere [**Korogodsky**]. La *-álgebra de Hopf $\mathcal{U} := \mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ está generada por $E$, $F$, $K$ y su inversa $K^{-1}$ con relaciones

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \;\; KE = q^2EK, \;\; FK = q^2KF, \;\; EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1}),$$

y estructura de Hopf

$$\begin{gathered}
\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \Delta(K) = K \otimes K,\\
\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \;\; \varepsilon(K) = 1, \;\; S(E) = -K^{-1}E, \;\; S(F) = -FK, \;\; S(K) = K^{-1},
\end{gathered}$$

y con involución $K^* = K$, $E^* = -KF$.

Comentario 1. Cabe mencionar que podemos obtener las relaciones del caso cuántico $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ $= \mathrm{alg}\{K, E, F\}$ a partir de las relaciones del caso clásico $\mathcal{U}(\mathrm{su}_{1,1}) = \mathrm{alg}\{H, E, F\}$ definiendo formalmente $K = q^H$ y $K^{-1} = q^{-H}$.

De esta manera, dado que en el caso clásico se tiene que $[H, E] = 2E$ y $[H, F] = -2F$ entonces $H^nE = E(2 + H)^n$ y $H^nF = F(H - 2)^n$. Así tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}
KE &= q^HE = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q)^n}{n!}H^nE = E\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q)^n}{n!}(2 + H)^n = Eq^{2+H} = q^2EK\\
KF &= q^HF = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q)^n}{n!}H^nF = F\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q)^n}{n!}(H - 2)^n = Fq^{H-2} = q^{-2}FK,
\end{aligned}$$

del caso cuántico. Además si $q \to 1$ entonces podemos recuperar el caso clásico pues

$$\lim_{q\to 1}[E,F] = \lim_{q\to 1}(q-q^{-1})^{-1}\left(K-K^{-1}\right) = \lim_{q\to 1}(q-q^{-1})^{-1}\left(q^H-q^{-H}\right) = (q^H)'|_{q=1} = H.$$

En la siguiente proposición consideramos una $\mathcal{U}$-acción sobre $\mathcal{X}$ que es diferente de la acción definida en [**Korogodsky**] y más apta para nuestros objetivos.

Proposición 1.18. *El hiperboloide cuántico $\mathcal{X}$ se convierte en un $\mathcal{U}$-módulo *-álgebra con la acción definida por*

$$\begin{array}{lll} K \triangleright y = q^2 y, & E \triangleright y = 0, & F \triangleright y = q^{1/2}((1+q^{-2})x-(1+s)), \\ K \triangleright x = x, & E \triangleright x = q^{1/2}y, & F \triangleright x = q^{5/2}y^*, \\ K \triangleright y^* = q^{-2}y^*, & E \triangleright y^* = q^{-3/2}((1+q^{-2})x-(1+s)), & F \triangleright y^* = 0. \end{array}$$

Antes de dar una demostración, podemos notar que si hacemos $q \to 1$ obtenemos la acción de $E$ y $F$ del caso clásico dadas en el Ejemplo 1.15. Y si en el caso clásico, hacemos $K = q^H$ obtenemos exactamente la acción de $K$ dada en esta proposición.

Demostración. Tomamos como definición a la acción $\triangleright$ y veamos que está bien definida. Más aún, como definición de $\triangleright$ pediremos que satisfaga

$$f \triangleright (uv) = \sum_{k=1}^{n}(f_k' \triangleright u)(f_k'' \triangleright v), \tag{1.7}$$

$$f \triangleright 1 = \varepsilon(f)1, \tag{1.8}$$

para todo $u, v \in \mathcal{X}$ y $f \in \mathcal{U}$, donde $\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f_k' \otimes f_k'' \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ es el co-producto de $f$. En particular,

$$K \triangleright uv = (K \triangleright u)(K \triangleright v), \quad K^{-1} \triangleright uv = (K^{-1} \triangleright u)(K^{-1} \triangleright v),$$
$$E \triangleright uv = (E \triangleright u)v + (K \triangleright u)(E \triangleright v), \quad F \triangleright uv = (F \triangleright u)(K^{-1} \triangleright v) + u(F \triangleright v),$$

para todo $u, v \in \mathcal{X}$.

A continuación procedemos a demostrar que los generadores de $\mathcal{U}$ respetan las relaciones del hiperboloide $\mathcal{X}$.

$$K \triangleright yx = q^2 yx = q^2(q^2 xy) = q^2 x(q^2 y) = q^2 K \triangleright xy = K \triangleright q^2 xy.$$

$$K^{-1} \triangleright yx = q^{-2} yx = xy = q^2 x(q^{-2} y) = q^2 K^{-1} \triangleright xy = K^{-1} \triangleright q^2 xy.$$

$$E \triangleright yx = q^2(q^{1/2} y^2) = q^2 E \triangleright xy = E \triangleright q^2 xy.$$

$$\begin{aligned}
F \triangleright yx &= q^{1/2}\Big((1+q^{-2})x-(1+s)\Big)\,x + q^{5/2}yy^* \\
&= (q^{1/2}+q^{-3/2})x^2 - q^{1/2}(1+s)x + q^{5/2}(x-s)(x-1) \\
&= (q^{5/2}+q^{1/2}+q^{-3/2})x^2 - (q^{5/2}+q^{1/2})(1+s)x + q^{5/2}s \\
&= q^{5/2}\Big((q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1)\Big) + (q^{5/2}+q^{1/2})x^2 - q^{5/2}(1+s)x \\
&= q^2\Big(q^{-2}q^{5/2}y^*y + (q^{1/2}+q^{-3/2})x^2 - q^{1/2}(1+s)x\Big) \\
&= F \triangleright q^2xy.
\end{aligned}$$

De esta manera los generadores de $\mathcal{U}$ respetan la relación $yx = q^2yx$ de $\mathcal{X}$ según la definición dada en la ecuación (1.7).

$$K \triangleright xy^* = q^{-2}xy^* = y^*x = q^2(q^{-2}y^*)x = q^2K \triangleright y^*x = K \triangleright q^2y^*x.$$

$$K^{-1} \triangleright xy^* = q^2xy^* = q^4y^*x = q^2(q^2y^*)x = q^2K^{-1} \triangleright y^*x = K^{-1} \triangleright q^2y^*x.$$

$$\begin{aligned}
E \triangleright xy^* &= q^{1/2}yy^* + q^{-3/2}x\Big((1+q^{-2})x-(1+s)\Big) \\
&= q^{1/2}(x-s)(x-1) + (q^{-3/2}+q^{-7/2})x^2 - q^{-3/2}(1+s)x \\
&= (q^{1/2}+q^{-3/2}+q^{-7/2})x^2 - (q^{1/2}+q^{-3/2})(1+s)x + q^{1/2}s \\
&= q^{1/2}\Big((1+q^{-2})x^2-(1+s)x\Big) + q^{1/2}(q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1) \\
&= q^2\Big(q^{-3/2}\Big((1+q^{-2})x-(1+s)\Big)\,x + q^{-2}q^{1/2}y^*y\Big) \\
&= E \triangleright q^2y^*x.
\end{aligned}$$

$$F \triangleright xy^* = q^{5/2}q^2y^{*2} = q^2(q^{5/2}y^*)y^* = q^2y^*(q^{5/2}y^*) = q^2F \triangleright y^*x = F \triangleright q^2y^*x.$$

Así los generadores de $\mathcal{U}$ respetan la relación $xy^* = q^2y^*x$ de $\mathcal{X}$.

$$K \triangleright y^*y = y^*y = (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1) = K \triangleright (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1).$$

$$K^{-1} \triangleright y^*y = y^*y = (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1) = K^{-1} \triangleright (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1).$$

$$\begin{aligned}
E \triangleright y^*y &= q^{-3/2}\Big((1+q^{-2})x-(1+s)\Big)\,y \\
&= q^{-3/2}q^{-2}yx + q^{-3/2}q^{-2}xy - q^{-3/2}(1+s)y \\
&= q^{-2}(q^{1/2}y)(q^{-2}x-1) + (q^{-2}x-s)(q^{-2}q^{1/2}y) \\
&= E \triangleright (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F \triangleright y^*y &= q^{1/2}y^*\left((1+q^{-2})x-(1+s)\right)\\&= q^{1/2}\left(y^*(q^{-2}x-1)+y^*(x-s)\right)\\&= q^{1/2}\left(y^*(q^{-2}x-1)+(q^{-2}x-s)y^*\right)\\&= q^{-2}q^{5/2}y^*(q^{-2}x-1)+(q^{-2}x-s)(q^{-2}q^{5/2}y^*)\\&= F \triangleright (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1).\end{aligned}$$

Por lo tanto los generadores de $\mathcal{U}$ respetan la relación $y^*y = (q^{-2}x-s)(q^{-2}x-1)$ de $\mathcal{X}$.

$$K \triangleright yy^* = yy^* = (x-s)(x-1) = K \triangleright (x-s)(x-1).$$

$$K^{-1} \triangleright yy^* = yy^* = (x-s)(x-1) = K^{-1} \triangleright (x-s)(x-1).$$

$$\begin{aligned}E \triangleright yy^* &= q^{1/2}y\left((1+q^{-2})x-(1+s)\right)\\&= q^{1/2}y\left((x-1)+(q^{-2}x-s)\right)\\&= q^{1/2}y(x-1)+q^{1/2}(x-s)y\\&= E \triangleright (x-s)(x-1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F \triangleright yy* &= q^{5/2}\left((1+q^{-2})x-(1+s)\right)y^*\\&= q^{5/2}\left((q^{-2}x-1)+(x-s)\right)y^*\\&= q^{5/2}y^*(x-1)+q^{5/2}(x-s)y^*\\&= F \triangleright (x-s)(x-1).\end{aligned}$$

De esta manera los generadores de $\mathcal{U}$ respetan la relación $yy^* = (x-s)(x-1)$ de $\mathcal{X}$. Por lo tanto las acciones de $E$, $F$, $K$ y $K^{-1}$ dadas en Proposición 1.18 y extendidas al álgebra $\mathcal{X}$ por la ecuación (1.7) están bien definidas.

Procedemos a demostrar que $\triangleright$ está bien definida, esto es, $\triangleright$ respeta las relaciones de $\mathcal{U}$. Por lo anterior y la ecuación (1.7) basta demostrar que $\triangleright$ verifica las relaciones de $\mathcal{U}$ para los generadores $x = x^*$, $y$ e $y^*$ de $\mathcal{X}$.

$$\begin{aligned}KE \triangleright x &= K \triangleright q^{1/2}y = q^2(q^{1/2}y) = q^2EK \triangleright x,\\KE \triangleright y &= K \triangleright 0 = 0 = q^2EK \triangleright y,\\KE \triangleright y^* &= K \triangleright q^{-3/2}\left((1+q^{-2})x-(1+s)\right) = q^{-3/2}\left((1+q^{-2})x-(1+s)\right)\\&= q^2E \triangleright (q^{-2}y^*) = q^2EK \triangleright y^*.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\triangleright$ respeta la relación $KE = q^2EK$.

$$\begin{aligned}
KK^{-1} \triangleright x &= K \triangleright x = x = K^{-1}K \triangleright x, \\
KK^{-1} \triangleright y &= K \triangleright q^{-2}y = y = K^{-1}K \triangleright y, \\
KK^{-1} \triangleright y^* &= K \triangleright q^2y^* = y^* = K^{-1}K \triangleright y^*.
\end{aligned}$$

De esta manera, $\triangleright$ respeta la relación $KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$.

$$\begin{aligned}
FK \triangleright x &= F \triangleright x = q^{5/2}y^* = q^2q^{-2}(q^{5/2}y^*) = q^2KF \triangleright x, \\
FK \triangleright y &= F \triangleright q^2y = q^2q^{1/2}\Big((1 + q^{-2})x - (1 + s)\Big) = q^2KF \triangleright y, \\
FK \triangleright y^* &= F \triangleright q^{-2}y^* = 0 = q^2KF \triangleright y^*.
\end{aligned}$$

Así $\triangleright$ respeta la relación $FK = q^2KF$.

$$\begin{aligned}
(EF - FE) \triangleright x &= E \triangleright q^{5/2}y^* - F \triangleright q^{1/2}y \\
&= q^{5/2}q^{-3/2}\Big((1 + q^{-2})x - (1 + s)\Big) - q^{1/2}q^{1/2}\Big((1 + q^{-2})x - (1 + s)\Big) = 0 \\
&= (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1}) \triangleright x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EF - FE) \triangleright y &= q^{1/2}E \triangleright \Big((1 + q^{-2})x - (1 + s)\Big) - F \triangleright 0 \\
&= q(1 + q^{-2})y = (q - q^{-1})^{-1}(q^2 - q^{-2})y \\
&= (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1}) \triangleright y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EF - FE) \triangleright y^* &= E \triangleright 0 - q^{-3/2}F \triangleright \Big((1 + q^{-2})x - (1 + s)\Big) \\
&= -q(1 + q^{-2})y^* = (q - q^{-1})^{-1}(q^{-2} - q^2)y^* \\
&= (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1}) \triangleright y^*.
\end{aligned}$$

De esta forma también tenemos que $\triangleright$ respeta la relación $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$, para la cual hemos usado que se satisface la ecuación (1.8), y por tanto la acción $\triangleright$ está bien definida.

Finalmente comprobamos que $\triangleright$ respeta la involución. Por lo ya demostrado basta verificarlo sólo en los generadores.

$$(K \triangleright x)^* = x^* = K^{-1} \triangleright x^* = S(K)^* \triangleright x^*,$$
$$(K \triangleright y)^* = q^2 y^* = K^{-1} \triangleright y^* = S(K)^* \triangleright y^*,$$
$$(K \triangleright y^*)^* = q^{-2} y = K^{-1} \triangleright y = S(K)^* \triangleright y.$$

$$(K^{-1} \triangleright x)^* = x^* = K \triangleright x^* = S(K^{-1})^* \triangleright x^*,$$
$$(K^{-1} \triangleright y)^* = q^{-2} y^* = K \triangleright y^* = S(K^{-1})^* \triangleright y^*,$$
$$(K^{-1} \triangleright y^*)^* = q^2 y = K \triangleright y = S(K^{-1})^* \triangleright y.$$

$$(E \triangleright x)^* = q^{1/2} y^* = q^{-2}(q^{5/2} y^*) = q^{-2} F \triangleright x^* = KFK^{-1} \triangleright x^* = -(K^{-1}E)^* \triangleright x^* = S(E)^* \triangleright x^*,$$
$$(E \triangleright y)^* = 0 = q^{-2} F \triangleright y^* = KFK^{-1} \triangleright y^* = -(K^{-1}E)^* \triangleright y^* = S(E)^* \triangleright y^*,$$
$$(E \triangleright y^*)^* = q^{-3/2}\Big((1+q^{-2})x - (1+s)\Big) = q^{-2} q^{1/2}\Big((1+q^{-2})x - (1+s)\Big) = q^{-2} F \triangleright y = S(E)^* \triangleright y.$$

$$(F \triangleright x)^* = q^{5/2} y = q^2(q^{1/2} y) = q^2 E \triangleright x^* = KEK^{-1} \triangleright x^* = -(FK)^* \triangleright x^* = S(F)^* \triangleright x^*,$$
$$(F \triangleright y)^* = q^{1/2}\Big((1+q^{-2})x - (1+s)\Big) = q^2 q^{-3/2}\Big((1+q^{-2})x - (1+s)\Big) = q^2 E \triangleright y^* = S(F)^* \triangleright y^*,$$
$$(F \triangleright y^*)^* = 0 = q^2 E \triangleright y = S(F)^* \triangleright y.$$

❑

Capítulo 2

# *-Representaciones de $\mathcal{X}$

## 1. Definiciones

Siguiendo con nuestros objetivos, una manera de asociar a $\mathcal{X}$ un álgebra de operadores integrables es considerar representaciones. Por esta razón se expone a continuación algunos conceptos referentes a representaciones sobre el álgebra de operadores en un espacio de Hilbert.

Dado un operador $T$ (no acotado) en un espacio de Hilbert, denotamos como $D(T)$, $\mathrm{Spec}(T)$, $\bar{T}$ y $T^*$ al dominio, al espectro, a la cerradura y al adjunto del operador $T$, respectivamente.

Sea $D$ un subespacio denso del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el espacio vectorial

$$\mathcal{L}^+(D) := \{z \in \mathrm{End}(D) \;:\; D \subset D(z^*),\;\; z^*D \subset D\}$$

es una *-álgebra unitaria de operadores cerrables con involución

$$z \mapsto z^+ := z^*|_D$$

y producto como la composición de operadores. Seguiremos escribiendo $z^*$ en lugar de $z^+$ sin riesgos de confusión.

De ahora en adelante $D$ siempre es un subespacio denso de un espacio de Hilbert $H$.

Definición 2.1. Una *-representación $\pi$ de una *-álgebra $\mathcal{A}$ en un dominio $D$ es un *-homomorfismo $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$. Además si $1 \in \mathcal{A}$, pedimos $\pi(1) = \mathrm{id}$. Decimos que $\pi$ es no-trivial si $\pi \neq 0$.

Por la definición de $\mathcal{L}^+(D)$ podemos ver que $\pi$ es un *-homomorfismo equivale a decir que $D \subset D(\pi(a)^*)$ y $\pi(a^*) = \pi(a)^*|_D$.

Sean $I$ un conjunto de índices y $\mathcal{H}_i$ un espacio (pre-)Hilbert para todo $i \in I$. Definimos la suma directa de los espacios $\mathcal{H}_i$ como

$$\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i = \{f : I \longrightarrow \cup_{i\in I}\mathcal{H}_i \mid f(i) \in \mathcal{H}_i,\; \{i \in I \mid f(i) \neq 0\} \text{ es finito}\}$$

con producto escalar definido por $\langle f, g\rangle := \sum_{i\in I}\langle f(i), g(i)\rangle$ y $\bar{\oplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ la cerradura de $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$.

Definición 2.2. Sean $\mathcal{A}$ una *-álgebra, $I$ un conjunto de índices y $\pi_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_i)$ una *-representación en un dominio $D_i$ para todo $i \in I$. Definimos la suma directa de representaciones $\oplus_{i\in I}\pi_i$ por

$$\bigoplus_{i\in I}\pi_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}^+(\oplus_{i\in I}D_i), \qquad \bigoplus_{i\in I}\pi_i(a)((f(i))_{i\in I}) := (\pi_i(a)f(i))_{i\in I}.$$

Decimos que una *-representación $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ es *reducible* si existen *-representaciones no-triviales $\pi_1$ y $\pi_2$ tal que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. En el caso contrario decimos que $\pi$ es *irreducible*.

Sea $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación. Como $D \subset D(\pi(a)^*)$, todos los operadores $\pi(a)$ son cerrables. Denotamos por $\bar{\pi}(a) := \overline{\pi(a)}$ la cerradura de $\pi(a)$.

Debemos asegurar que la *-álgebra que se le asociará al hiperboloide cuántico con el que trabajamos esté bien definida bajo la representación, y que de cierta manera tenga "buen comportamiento". Es por este motivo que debemos imponer ciertas condiciones sobre los operadores no acotados bajo consideración. A las representaciones que cumplen estas condiciones se dicen que son "admisibles".

Definición 2.3. Diremos que una *-representación de $\mathcal{X} := O(\mathbb{H}_{s,q})$ es *admisible* si $\bar{\pi}(x)$ es autoadjunta y si $f(\bar{\pi}(x))\pi(y) \subset \pi(y)f(q^{-2}\bar{\pi}(x))$, $f(\bar{\pi}(x))\pi(y^*) \subset \pi(y^*)f(q^2\bar{\pi}(x))$ para toda $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ acotada Borel-medible, donde $x$, $y$ e $y^*$ denotan los generadores de $\mathcal{X}$ dados en el capítulo anterior.

Para $A \subset \mathbb{R}$ Borel-medible, sea

$$\chi_A(t) := \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

La definición 2.3 implica

$$\begin{aligned} &\chi_A(\bar{\pi}(x))\,\pi(y) \subset \pi(y)\chi_A(q^{-2}\bar{\pi}(x)) = \pi(y)\chi_{q^2A}(\bar{\pi}(x)), \\ &\chi_A(\bar{\pi}(x))\,\pi(y^*) \subset \pi(y^*)\chi_A(q^{2}\bar{\pi}(x)) = \pi(y^*)\chi_{q^{-2}A}(\bar{\pi}(x)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

para toda representación admisible.

A continuación haremos una clasificación de todas las *-representaciones de $\mathcal{X}$ que son admisibles.

## 2. Resultados generales

De aquí en adelante, $\mathcal{X}$ denota el hiperboloide cuántico $O(\mathbb{H}_{s,q})$ generado por $x = x^*$, $y$ e $y^*$. Para una *-representación admisible $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ denotamos por $E_\lambda$ la medida espectral de $\bar{\pi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.

LEMA 2.4. *Sea $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación admisible de $\mathcal{X}$. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

- *Si* $q^2 \leq s < 1$ *entonces* $\operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, q^2 s] \cup [q^2, s] \cup [1, \infty)$.
- *Si* $0 \leq s < q^2$ *entonces* $\operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, q^2 s] \cup [1, \infty)$.
- *Si* $-1 \leq s < 0$ *entonces* $\operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, s] \cup [1, \infty)$.

*Además*

- *Si* $q^2 \leq s < 1$ *entonces* $\ker(\pi(y)) = E_\lambda(\{q^2 s, q^2\})D$, $\ker(\pi(y^*)) = E_\lambda(\{s, 1\})D$.
- *Si* $0 \leq s < q^2$ *entonces* $\ker(\pi(y)) = E_\lambda(\{q^2 s\})D$, $\ker(\pi(y^*)) = E_\lambda(\{1\})D$.
- *Si* $-1 \leq s < 0$ *entonces* $\ker(\pi(y)) = \{0\}$, $\ker(\pi(y^*)) = E_\lambda(\{s, 1\})D$.

DEMOSTRACIÓN. Primeramente notemos que $\bar{\pi}(x)^* = \bar{\pi}(x)$ implica que $\operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset \mathbb{R}$.

Veamos que $(q^2 s, q^2) \notin \operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x))$, es decir, $E_\lambda((q^2 s, q^2)) = 0$. Supongamos lo contrario, entonces para $\mu \in (q^2 s, q^2)$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon] \subset (q^2 s, q^2)$ y $E_\lambda([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon])D \neq \{0\}$. Sea $\varphi \in E_\lambda([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon])D$, $\varphi \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(x)\varphi &= \bar{\pi}(x)E_\lambda([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon])\varphi = \left(\int_{\operatorname{Spec}(\bar{\pi})} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda\right)\left(\int_{\operatorname{Spec}(\bar{\pi})} \chi_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]}(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda\right)\varphi \\
&= \left(\int_{\operatorname{Spec}(\bar{\pi})} \lambda \chi_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]}(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda\right)\varphi = \left(\int_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda\right)\varphi.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle \pi(y)\varphi, \pi(y)\varphi \rangle &= \langle \pi(y^*)\pi(y)\varphi, \varphi \rangle = \langle (q^{-2}\pi(x) - s)(q^{-2}\pi(x) - 1)\varphi, \varphi \rangle \\
&= \langle \int_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} (q^{-2}\lambda - s)(q^{-2}\lambda - 1) \mathrm{d}E_\lambda \varphi, \varphi \rangle \\
&= \int_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} (q^{-2}\lambda - s)(q^{-2}\lambda - 1) \, \mathrm{d}(E_\lambda)_{\varphi,\varphi},
\end{aligned}$$

donde usamos que $(E_\lambda)_{\varphi,\varphi}(A) = \langle E_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle$ para todo conjunto Borel medible $A$.

Sea $f_1(t) := (q^{-2}t - s)(q^{-2}t - 1)$ la función continua definida en el intervalo $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$, notamos que $f_1(t) < 0$ para todo $t \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$ de manera que $M = \text{máx}_{t \in [\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} f_1(t) < 0$. De esta manera llegamos a que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} (q^{-2}\lambda - s)(q^{-2}\lambda - 1) \, \mathrm{d}(E_\lambda)_{\varphi,\varphi} \leq M \int_{[\mu-\epsilon,\mu+\epsilon]} 1 \, \mathrm{d}(E_\lambda)_{\varphi,\varphi} \\
&= M(E_\lambda)_{\varphi,\varphi}([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]) = M\langle E_\lambda([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon])\varphi, \varphi \rangle = M\|\varphi\|^2 < 0
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $E_\lambda((q^2 s, q^2)) = 0$.

Ahora veamos que $E_\lambda((s,1)) = 0$. Supongamos que $E_\lambda((s,1)) \neq 0$, entonces para $\gamma \in (s,1)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $[\gamma-\epsilon, \gamma+\epsilon] \subset (s,1)$ y $E_\lambda([\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon])D \neq \{0\}$. Sea $\psi \in E_\lambda([\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon])D$, $\psi \neq 0$, entonces de la misma forma que en el caso anterior tenemos que

$$\bar{\pi}(x)\psi = \left(\int_{[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda\right)\psi$$

y

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \pi(y^*)\psi, \pi(y^*)\psi\rangle &= \langle \pi(y)\pi(y^*)\psi, \psi\rangle = \langle (\bar{\pi}(x)-s)(\bar{\pi}(x)-1)\psi, \psi\rangle \\ &= \int_{[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]} (\lambda - s)(\lambda-1)\mathrm{d}(E_\lambda)_{\psi,\psi}. \end{aligned}$$

Ahora, si llamamos $f_2(t) := (t-s)(t-1)$ a la función continua definida en el intervalo $[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]$, tenemos que $f_2(t) < 0$ para todo $t \in [\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]$. Por lo tanto $M = \text{máx}_{t\in[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]} f_2(t) < 0$. De esta manera obtenemos que

$$0 \leq \int_{[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]} (\lambda-s)(\lambda-1)\mathrm{d}(E_\lambda)_{\psi,\psi} \leq \int_{[\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon]} M \, \mathrm{d}(E_\lambda)_{\psi,\psi} = M\|\psi\|^2 < 0$$

lo cual es una contradicción, de manera que $E_\lambda((s,1)) = 0$.

De esta forma hemos probado que $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset \mathbb{R} \setminus ((q^2 s, q^2) \cup (s,1))$, entonces

$$\begin{aligned} &\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, q^2 s] \cup [q^2, s] \cup [1,\infty), \quad q^2 \leq s < 1, \\ &\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, q^2 s] \cup [1,\infty), \quad 0 \leq s < q^2, \\ &\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \subset (-\infty, s] \cup [1,\infty), \quad -1 \leq s < 0. \end{aligned}$$

Para concluir la segunda parte del lema demostramos primero que $\ker \pi(y)\pi(y^*) = \ker \pi(y^*)$. En efecto,

$$\begin{aligned} h \in \ker \pi(y)\pi(y^*) &\iff 0 = \langle \pi(y)\pi(y^*)h, h\rangle = \langle \pi(y^*)h, \pi(y^*)h\rangle = \|\pi(y^*)h\|^2 \\ &\iff \pi(y^*)h = 0 \iff h \in \ker \pi(y^*). \end{aligned}$$

De igual manera se muestra que $\ker \pi(y^*)\pi(y) = \ker \pi(y)$.

Luego, como $(E_\lambda)_{\varphi,\varphi}$ definida por $(E_\lambda)_{\varphi,\varphi}(A) := \langle E_\lambda(A)\varphi, \varphi\rangle$ es una medida de Borel no-negativa y las funciones $f_1(t) = (q^{-2}t - s)(q^{-2}t-1)$ y $f_2(t) = (t-s)(t-1)$ son continuas y no-negativas sobre $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$, tenemos para $i = 1,2$ y $\varphi \in D$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} f_i(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda\, \varphi = 0 \iff \langle \int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} f_i(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda\, \varphi, \varphi\rangle = 0 \iff \int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} f_i(\lambda)\, \mathrm{d}(E_\lambda)_{\varphi,\varphi} = 0 \\ &\iff (E_\lambda)_{\varphi,\varphi}(\{t \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \mid f_i(t) > 0\}) = 0 \iff E_\lambda(\{t \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \mid f_i(t) > 0\})\varphi = 0 \\ &\iff \varphi \in E_\lambda(\{t \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \mid f_i(t) = 0\})D. \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\ker \pi(y) &= \{\varphi \in D \mid \pi(y^*)\pi(y)\varphi = 0\} \\
&= \left\{\varphi \in D \mid (q^{-2}\pi(x) - s)(q^{-2}\pi(x) - 1)\varphi = 0\right\} \\
&= \left\{\varphi \in D \mid \left(\int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} (q^{-2}\lambda - s)(q^{-2}\lambda - 1)\,\mathrm{d}E_\lambda\right)\varphi = 0\right\} \\
&= E_\lambda\Big(\{q^2 s, q^2\} \cap \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))\Big)D.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ker \pi(y^*) &= \{\varphi \in D \mid \pi(y)\pi(y^*)\varphi = 0\} \\
&= \{\varphi \in D \mid (\pi(x) - s)(\pi(x) - 1)\varphi = 0\} \\
&= \left\{\varphi \in D \mid \left(\int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} (\lambda - s)(\lambda - 1)\,\mathrm{d}E_\lambda\right)\varphi = 0\right\} \\
&= E_\lambda\Big(\{s, 1\} \cap \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))\Big)D.
\end{aligned}$$

Aplicando la primera parte del lema concluimos la prueba. ❑

Lema 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de Borel entonces*

$$\begin{aligned}
E_\lambda(A)\pi(y) &\subset \pi(y)E_\lambda(q^2 A), \\
E_\lambda(A)\pi(y^*) &\subset \pi(y^*)E_\lambda(q^{-2} A).
\end{aligned}$$

*Además,*

$$\begin{aligned}
\pi(y)E_\lambda(q^2 A)D &\subset E_\lambda(A)D, \\
\pi(y^*)E_\lambda(q^{-2} A)D &\subset E_\lambda(A)D.
\end{aligned}$$

Demostración. Dado que $\pi$ es una representación admisible, tenemos que

$$f(\bar{\pi}(x))\pi(y) \subset \pi(y)f(q^{-2}\bar{\pi}(x)), \quad f(\bar{\pi}(x))\pi(y^*) \subset \pi(y^*)f(q^2\bar{\pi}(x))$$

para toda función acotada Borel-medible.

En partícular como $E_\lambda(A) = \int_{\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))} \chi_A(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \chi_A(\bar{\pi}(x))$ y

$$\begin{aligned}
\chi_A(q^{-2}\bar{\pi}(x)) &= \chi_{q^2 A}(\bar{\pi}(x)) = E_\lambda(q^2 A), \\
\chi_A(q^2\bar{\pi}(x)) &= \chi_{q^{-2} A}(\bar{\pi}(x)) = E_\lambda(q^{-2} A).
\end{aligned}$$

Entonces obtenemos el resultado por (2.1).

Para obtener el resultado de la segunda parte, observemos que $E_\lambda(A)$ es un operador acotado y por tanto

$$D(E_\lambda(A)\pi(y)) = D(\pi(y)) = D,$$
$$D(E_\lambda(A)\pi(y^*)) = D(\pi(y^*)) = D.$$

Así, por la primera parte del lema, $D$ está contenido en el dominio de los operadores $\pi(y)E_\lambda(q^2A)$ y $\pi(y^*)E_\lambda(q^{-2}A))$ y

$$\pi(y)E_\lambda(q^2A)|_D = E_\lambda(A)\pi(y), \qquad \pi(y^*)E_\lambda(q^{-2}A)|_D = E_\lambda(A)\pi(y^*).$$

Ya que $\pi(y)D \subset D$ y $\pi(y^*)D \subset D$, entonces $\pi(y)E_\lambda(q^2A)D \subset E_\lambda(A)D$ y $\pi(y^*)E_\lambda(q^{-2}A)D \subset E_\lambda(A)D$. ❏

Lema 2.6. *Sean $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación admisible, $\bar{\pi}(x) = \int_{\mathrm{Spec}(\pi(x))} \lambda dE_\lambda$ la representación espectral de $\bar{\pi}(x)$ y $A \subset \mathbb{R}$ Borel medible tal que*

$$\pi(y)E_\lambda(A)D \subset E_\lambda(A)D,$$
$$\pi(y^*)E_\lambda(A)D \subset E_\lambda(A)D.$$

*Entonces $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$, donde $D_0 := E_\lambda(A)D$, $D_1 := (1-E_\lambda(A))D$, $D = D_0 \oplus D_1$, y $\pi_0 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_0)$ y $\pi_1 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_1)$ están dadas por restricción de $\pi$.*

Demostración. Primeramente notemos que $E_\lambda(A)$ y $(1 - E_\lambda(A))$ son proyecciones ortogonales, de manera que $D = E_\lambda(A)D \oplus (1 - E_\lambda(A))D$. Además $\pi(x)E_\lambda(B)D \subset E_\lambda(B)D$ para todo $B \subset \mathbb{R}$ Borel medible ya que $E_\lambda$ es la medida espectral de $\bar{\pi}(x)$.

Falta verificar que $\pi(y)$ y $\pi(y^*)$ dejan invariante al subespacio $(1-E_\lambda(A))D$. En efecto, dado que

$$\langle \pi(y)(1 - E_\lambda(A))d, E_\lambda(A)e\rangle = \langle (1 - E_\lambda(A))d, \pi(y^*)E_\lambda(A)e\rangle$$

para todo $d, e \in D$, y $\pi(y^*)E_\lambda(A)D \subset E_\lambda(A)D$ tenemos que $\langle \pi(y)(1-E_\lambda(A)d, E_\lambda(A)e\rangle = 0$ para todo $d, e \in D$. De igual manera, dado que

$$\langle \pi(y^*)(1 - E_\lambda(A))d, E_\lambda(A)e\rangle = \langle (1 - E_\lambda(A))d, \pi(y)E_\lambda(A)e\rangle$$

y $\pi(y)E_\lambda(A)D \subset E_\lambda(A)D$ entonces $\langle \pi(y^*)(1 - E_\lambda(A)d, E_\lambda(A)e\rangle = 0$ para todo $d, e \in D$.

Así los operadores $\pi(y)$ y $\pi(y^*)$ dejan invariante al subespacio $(1 - E_\lambda(A))D$. Por lo tanto $\pi$ se descompone como $\pi_0 \oplus \pi_1$ donde $\pi_0$ y $\pi_1$ son *-representaciones de $\mathcal{X}$ con dominio $D_0 = E_\lambda(A)D$ y $D_1 = (1 - E_\lambda(A))D$, respectivamente. ❏

Lema 2.7. *Sea $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación de $\mathcal{X}$. Entonces*

*a)* $\pi(y) : E_\lambda(\{t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2}t\})D$ *es un isomorfismo si* $t \notin \{q^2 s,\ q^2\}$.
*b)* $\pi(y^*) : E_\lambda(\{t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{q^2 t\})D$ *es un isomorfismo si* $t \notin \{s,\ 1\}$.

*Sea* $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ *la descomposición polar de la cerradura,* $\bar{\pi}(y)$*, de* $\pi(y)$*. Entonces*

*a*)* $u : E_\lambda(\{t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2}t\})D$ *es un operador unitario para* $t \notin \{q^2 s,\ q^2\}$.
*b*)* $u^* : E_\lambda(\{t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{q^2 t\})D$ *es un operador unitario para* $t \notin \{s,\ 1\}$.

Demostración. Utilizando que $E_\lambda(\{t\})^2 = E_\lambda(\{t\})$ y el Lema 2.5 obtenemos

$$E_\lambda(\{q^{-2}t\})\pi(y)E_\lambda(\{t\}) \subset \pi(y)E_\lambda(\{t\}),$$

pero como $D(\pi(y)E_\lambda(\{t\})) = D(E_\lambda(\{q^{-2}t\})\pi(y)E_\lambda(\{t\}))$ obtenemos la igualdad, es decir,

$$\pi(y)E_\lambda(\{t\}) = E_\lambda(\{q^{-2}t\})\pi(y)E_\lambda(\{t\}).$$

Entonces $\pi(y)(E_\lambda(\{t\})D) \subset E_\lambda(\{q^{-2}t\})D$. Analogamente se verifica $\pi(y^*)(E_\lambda(\{t\})D) \subset E_\lambda(\{q^2 t\})D$.

a) El operador $z : E_\lambda(\{q^{-2}t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{t\})D$, dado por $ze := \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}\pi(y^*)e$ es el inverso del operador $\pi(y)|_{E_\lambda(\{t\})D}$. En efecto:

Para todo $e \in E_\lambda(\{t\})D$ tenemos

$$\begin{aligned} z\pi(y)e &= \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}\pi(y^*)\pi(y)e \\ &= \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}(q^{-2}\pi(x)-s)(q^{-2}\pi(x)-1)e \\ &= \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)e \\ &= e. \end{aligned}$$

Así como también, para todo $e \in E_\lambda(\{q^{-2}t\})D$ tenemos

$$\begin{aligned} \pi(y)ze &= \pi(y)\frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}\pi(y^*)e \\ &= \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}(\pi(x)-s)(\pi(x)-1)e \\ &= \frac{1}{(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)}(q^{-2}t-s)(q^{-2}t-1)e \\ &= e. \end{aligned}$$

b) El operador $z^* : E_\lambda(\{q^2 t\})D \longrightarrow E_\lambda(\{t\})D$, dado por $z^*e := \frac{1}{(t-s)(t-1)}\pi(y)e$ es el inverso del operador $\pi(y^*)|_{E_\lambda(\{t\})D}$. En efecto:

Para todo $e \in E_\lambda(\{t\})D$ tenemos

$$\begin{aligned} z^*\pi(y^*)e &= \frac{1}{(t-s)(t-1)}\pi(y)\pi(y^*)e \\ &= \frac{1}{(t-s)(t-1)}(\pi(x)-s)(\pi(x)-1)e \\ &= \frac{1}{(t-s)(t-1)}(t-s)(t-1)e \\ &= e. \end{aligned}$$

Así como también, para todo $e \in E_\lambda(\{q^2t\})D$ tenemos

$$\begin{aligned} \pi(y^*)z^*e &= \pi(y^*)\frac{1}{(t-s)(t-1)}\pi(y)e \\ &= \frac{1}{(t-s)(t-1)}(q^{-2}\pi(x)-s)(q^{-2}\pi(x)-1)e \\ &= \frac{1}{(t-s)(t-1)}(t-s)(t-1)e \\ &= e. \end{aligned}$$

Los resultados a*) y b*) se obtiene después de notar que si $a = u|a|$ es la descomposición polar de un operador cerrado e invertible, entonces $u$ es unitario. ❑

## 3. La descomposición $D = D_- \oplus D_0 \oplus D_+$

Sea $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación admisible de $\mathcal{X}$ en el espacio de operadores con dominio $D$ definido anteriormente.

Supongamos que $0 \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$ y $\bar{\pi}(x) = \int_{\mathrm{Spec}(\pi(x))} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ entonces, por Lema 2.5,

$$\begin{aligned} \pi(y)E_\lambda(\{0\})D &\subset E_\lambda(\{0\})D, \\ \pi(y^*)E_\lambda(\{0\})D &\subset E_\lambda(\{0\})D. \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 2.6 tenemos que $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$, donde $\pi_0$ es una *-representación con dominio $D_0 = E_\lambda(\{0\})D$ y $\pi_1$ es una *-representación con dominio $D_1 = (1 - E_\lambda(\{0\}))D$.

Sea ahora $\pi := \pi_1$ una *-representación sobre $D_1$. Entonces $E_\lambda(\{0\}) = 0$ y, por Lema 2.5, se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(y)E_\lambda((-\infty,0))D_1 \subset E_\lambda((-\infty,0))D_1, \\ \pi(y^*)E_\lambda((-\infty,0))D_1 \subset E_\lambda((-\infty,0))D_1. \end{aligned}$$

Entonces, nuevamente por el Lema 2.6 tenemos que $\pi = \pi_- \oplus \pi_+$, donde $\pi_-$ es una *-representación sobre $D_- := E_\lambda((-\infty, 0))D_1$ y $\pi_+$ es una *-representación sobre $D_+ := \Big(1 - E_\lambda((-\infty, 0))\Big)D_1 = E_\lambda((0, \infty)D_1$.

De esta manera, tenemos que $D = D_- \oplus D_0 \oplus D_+$ y $\pi = \pi_- \oplus \pi_0 \oplus \pi_+$.

## 3.1. Las representaciones sobre $D_0$.

### *3.1.1. El caso* $s \in (0, 1)$.

Sea $s \in (0, 1)$. Consideremos una *-representación $\pi$ sobre $D_0$, entonces

$$\pi(x) = 0,$$
$$\pi(y)\pi(y^*) = s,$$
$$\pi(y^*)\pi(y) = s.$$

Si definimos $u := \frac{1}{\sqrt{s}}\pi(y)$, entonces $u$ es unitario, i.e., $uu^* = 1 = u^*u$. De esta forma obtenemos una *-representación $\pi_u := \pi$ definida como:

$$\pi_u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_0), \quad \pi_u(x) = 0, \quad \pi_u(y) = \sqrt{s}u, \quad \pi_u(y^*) = \sqrt{s}u^*.$$

Inversamente, si $u$ es un operador unitario entonces las fórmulas anteriores definen una *-representación sobre $D_0$.

### *3.1.2. El caso* $s = 0$.

Si $s = 0$, entonces toda *-representación sobre $D_0$ está dada por:

$$\pi_0 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_0), \quad \pi_0(x) = 0, \quad \pi_0(y) = 0, \quad \pi_0(y^*) = 0,$$

y $\pi_0(1) = 1$. Además notemos que si $s < 0$, $D_0$ no existe por que $0 \notin \operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x))$.

## 3.2. Las representaciones sobre $D_+$.

Sea $\pi = \pi_+$ una *-representación de $\mathcal{X}$ con dominio $D_+$.

### *3.2.1. Caso* $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$.

Supongamos que $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) &= E_\lambda(\{q^2 s,\ q^2\})D_+ \cap E_\lambda(\{s,\ 1\})D_+ \\
&= E_\lambda(\{q^2 s,\ q^2\})E_\lambda(\{s,\ 1\})D_+ \\
&= E_\lambda(\{q^2 s,\ q^2\} \cap \{s,\ 1\})D_+.
\end{aligned}$$

Por lo que si $s = q^2$ obtenemos $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) = E_\lambda(\{q^2\})D_+$. De esta manera tendremos que $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$ si y sólo si $q^2 = s$ y $\{0\} \neq E_\lambda\{q^2\}D_+ \subset D_+$.

Supongamos entonces que $s = q^2$ y $\{0\} \neq E_\lambda(\{q^2\})D_+$. Entonces para todo $e \in E_\lambda(\{q^2\})D_+$ tenemos $\pi(x)e = q^2 e$, $\pi(y)e = 0 = \pi(y^*)e$. Además

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(y)E_\lambda(\{q^2\})D_+ \subset E_\lambda(\{q^2\})D_+ \,, \\ 0 &= \pi(y^*)E_\lambda(\{q^2\})D_+ \subset E_\lambda(\{q^2\})D_+ \,. \end{aligned}$$

Así por el Lema 2.6 tenemos que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_1^\circ$, donde $\pi_1 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_1)$ es una *-representación sobre $D_1 = E_\lambda(\{q^2\})D_+$ y $\pi_1^\circ : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_1^\circ)$ es una *-representación sobre $D_1^\circ = (1 - E_\lambda(\{q^2\}))D_+ = \Big(E_\lambda((0, q^4]) + E_\lambda([1, \infty))\Big) D_+$.

Además, dado que $s = q^2$ y $\ker(\pi(y)) = E_\lambda(\{q^2 s,\ q^2\})D_+$ se tiene que $\pi(y)E_\lambda(\{q^4\})D_+ = \{0\}$, también como el intervalo $(q^4, q^2) \notin \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$ tenemos que $E_\lambda((q^4, q^2))D_+ = \{0\}$, de tal manera que

$$\begin{aligned} \pi(y)E_\lambda((0, q^4])D_+ &= \pi(y)E_\lambda((0, q^4))D_+ \\ &\subset E_\lambda((0, q^2))D_+ \\ &= \Big(E_\lambda((0, q^4]) + E_\lambda((q^4, q^2))\Big) D_+ \\ &= E_\lambda((0, q^4])D_+ \,, \\ \\ \pi(y^*)E_\lambda((0, q^4])D_+ &\subset E_\lambda((0, q^6])D_+ \subset E_\lambda((0, q^4])D_+ \,. \end{aligned}$$

Entonces nuevamente aplicando el Lema 2.6 tenemos que $\pi_1^\circ = \pi_2 \oplus \pi_3$, donde $\pi_2$ y $\pi_3$ son *-representaciones de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{L}^+(D_2)$ y $\mathcal{L}^+(D_3)$, respectivamente, donde $D_2 = E_\lambda((0, q^4])D_+$ y $D_3 = E_\lambda([1, \infty))$.

Por lo tanto, si $s = q^2$ y $E_\lambda\{q^2\}D_+ \neq \{0\}$ entonces $D_+ = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ y $\pi_+ = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3$ definidas como antes.

Así, si $s = q^2$ y $D_1 \neq \{0\}$, tenemos la siguiente *-representación $\pi_q := \pi_1$ sobre $D_1$ definida como:

$$\pi_q : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(D_1), \quad \pi_q(x) = q^2, \quad \pi_q(y) = 0, \quad \pi_q(y^*) = 0.$$

Por lo anterior, si $s = q^2$, redefinimos $D_+ := D_2 \oplus D_3$ y $\pi_+ := \pi_2 \oplus \pi_3$. Ahora $\pi_+$ es una *-representación sobre $D_+$ tal que $\ker(\pi_+(y)) \cap \ker(\pi_+(y^*)) = \{0\}$.

A partir de ahora, podemos suponer que $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$.

*3.2.2. Caso* $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$ *y* $\ker(\pi(y)) \neq \{0\}$.

Para todo $s$, consideramos $\pi := \pi_+$ una *-representación sobre $D_+$ tal que $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$ y supongamos ademas que $\ker(\pi(y)) \neq \{0\}$.

Por Lema 2.4 y lo anterior tenemos $E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \neq \{0\}$ para todo $s \in (0, q^2]$. Si $s \in (q^2, 1)$, tenemos $E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \neq \{0\}$ ó $E_\lambda(\{q^2\})D_+ \neq \{0\}$.

- Caso $E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \neq \{0\}$.

Sea $E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \neq \{0\}$ y $s \in (0,1)$. Consideremos $\pi := \pi_+$ una *-representación sobre $D_+$. Entonces por el Lema 2.7 tenemos que el operador $\pi(y^*) : E_\lambda(\{q^{2n} s\})D_+ \to E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s\})D_+$ es un isomorfismo y $u^* : E_\lambda(\{q^{2n} s\})D_+ \longrightarrow E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s\})D_+$ es un operador unitario para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $u$ está definida por la decomposición polar $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$.

Definimos

$$M_1 := E_\lambda(\{q^{2n} s \mid n \in \mathbb{N}\})D_+ = \oplus_{n=0}^{\infty} E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s\})D_+ .$$

Entonces notando que $E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \subset \ker(\pi(y))$ tenemos que

$$\begin{aligned} \pi(y) M_1 &= \pi(y)\left(E_\lambda(\{q^2 s\}) + E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s \mid n \in \mathbb{N}\})\right) D_+ \\ &= \pi(y) E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s \mid n \in \mathbb{N}\}) D_+ \\ &\subset E_\lambda(\{q^{2n} s \mid n \in \mathbb{N}\}) D_+ \\ &= M_1, \\ \pi(y^*) M_1 &\subset E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s \mid n \in \mathbb{N}\} D_+ \subset M_1. \end{aligned}$$

Luego por el Lema 2.6 se tiene que $\pi := \pi_1 \oplus \pi_1^\circ$, donde $\pi_1 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_1)$ y $\pi_1^\circ : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_1^\circ)$ son *-representaciones con $M_1 = E_\lambda(\{q^{2n} s \mid n \in \mathbb{N}\})D_+$ y $M_1^\circ = (1 - E_\lambda(\{q^{2n} s \mid n \in \mathbb{N}\}))D_+$. Además, $\bar{\pi}_1^\circ(x)$ no tiene como espectro puntual al conjunto $\{q^{2n} s \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Consideramos al operador $u^{*n} : E_\lambda(\{q^2 s\})D_+ \longrightarrow E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s\})D_+$, el cual es un isomorfismo isométrico. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $e_0 \in E_\lambda(\{q^2 s\})D_+$, definimos $e_n := u^{*n} e_0$, de manera que

$$E_\lambda(\{q^{2(n+1)} s\})D_+ = \{e_n = u^{*n} e_0 \mid e_0 \in E_\lambda(\{q^2 s\})D_+\}.$$

Utilizando $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$, $\bar{\pi}(y^*) = |\bar{\pi}(y)|u^*$ y $|\bar{\pi}(y)| = \sqrt{(q^{-2}\bar{\pi}(x) - s)(q^{-2}\bar{\pi}(x) - 1)}$, la *-representación $\pi_1 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_1)$ está dada por

$$\begin{aligned} \pi_1(x) e_n &= q^{2(n+1)} s e_n, \\ \pi_1(y^*) e_n &= \sqrt{(q^{2(n+1)} s - s)(q^{2(n+1)} s - 1)}\, e_{n+1}, \\ \pi_1(y) e_n &= \sqrt{(q^{2(n)} s - s)(q^{2(n)} s - 1)}\, e_{n-1}, \quad n \neq 0, \quad \pi_1(y) e_0 = 0. \end{aligned}$$

• Caso $E_\lambda(\{q^2\})D_+ \neq \{0\}$.

Consideremos que $E_\lambda(\{q^2\})D_+ \neq \{0\}$ para $s \in (q^2, 1)$ y procedemos como en el caso anterior. Por la elección de $s$ y por el Lema 2.7, tenemos que $\pi(y^*) : E_\lambda(\{q^{2n}\})D_+ \longrightarrow E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+$ es un isomorfismo y $u^* : E_\lambda(\{q^{2n}\})D_+ \longrightarrow E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+$ es un operador unitario para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera podemos considerar al operador $u^{*n} : E_\lambda(\{q^2\})D_+ \longrightarrow E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+$ el cual es un isomorfismo isométrico.

Para todo $e_0 \in E_\lambda(\{q^2\})D_+$, definimos $e_n := u^{*n}e_0$, de manera que $e_n \in E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+$. Entonces

$$M_2 := E_\lambda(\{q^{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\})D_+ = \oplus_{n=0}^{\infty} E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+ = \oplus_{n=0}^{\infty}\{e_n = u^{*n}e_0 \,|\, e_0 \in E_\lambda(\{q^2\})D_+\}.$$

Además notando que $E_\lambda(\{q^2\})D_+ \subset \ker(\pi(y))$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\pi(y)M_2 &= \pi(y)\left(E_\lambda(\{q^2\}) + E_\lambda(\{q^{2(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\})\right)D_+\\
&= \pi(y)E_\lambda(\{q^{2(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\})D_+\\
&\subset E_\lambda(\{q^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\})D_+\\
&= M_2,
\end{aligned}$$

$$\pi(y^*)M_2 \subset E_\lambda(\{q^{2(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\})D_+ \subset M_2.$$

Entonces por el Lema 2.6 obtenemos que $\pi = \pi_2 \oplus \pi_2^\circ$. Donde $\pi_2$ es una *-representación con dominio $M_2$ y $\pi_2^\circ$ es una *-representación con dominio $M_2^\circ = (1 - E_\lambda(\{q^{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}))D_+$, además el operador $\bar{\pi}_2^\circ(x)$ no tiene como espectro puntual a elementos del conjunto $\{q^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

La representación $\pi_2 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_2)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_2(x)e_n &= q^{2(n+1)}e_n,\\
\pi_2(y^*)e_n &= \sqrt{(q^{2(n+1)} - s)(q^{2(n+1)} - 1)}\,e_{n+1},\\
\pi_2(y)e_n &= \sqrt{(q^{2n} - s)(q^{2n} - 1)}\,e_{n-1}, \quad n \neq 0, \quad \pi_2(y)e_0 = 0,
\end{aligned}$$

donde $e_n = u^{*n}e_0 \in E_\lambda(\{q^{2(n+1)}\})D_+$, $n \in \mathbb{N}_0$, para un $e_0 \in E_\lambda(\{q^2\})D_+$.

Ahora notemos que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, pues si no lo fuese tendriamos que existen $k_0$ y $n_0$, $n_0 < k_0$, tal que $s = q^{2(k_0 - n_0)}$, lo cual contradice que $s \in (q^2, 1)$.

Por este motivo tenemos que $D_+ = M_1 \oplus M_2 \oplus M$ y $\pi_+ = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_M$ donde $\pi_1$ y $\pi_2$ son las representaciones anteriores y $\pi_M : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M)$, donde $M = (M_1 \oplus M_2)^\perp \cap D_+$. De esta manera tenemos que $\pi_M$ es una *-representación tal que $\ker \pi_M(y) = \{0\}$.

*3.2.3. Caso* $\ker(\pi(y)) = \{0\}$ *y* $\ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$.

Sea $\pi := \pi_M$ una *-representación de $\mathcal{X}$ sobre $M$ tal que $\ker(\pi(y)) = \{0\}$ y $\ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$. Entonces $E_\lambda\{q^2 s,\, q^2\} = \{0\}$ y $E_\lambda\{s\}M \neq \{0\}$ ó $E_\lambda(\{1\})M \neq \{0\}$ por Lema 2.4.

• Caso $E_\lambda\{s\}M \neq \{0\}$.

Sea $E_\lambda(\{s\})M \neq \{0\}$. Por el Lema 2.4 y $M \subset D_+$ tenemos $s \in [q^2, 1)$. Además $s \neq q^2$ por los resultados de la Sección 3.2.1, entonces $s \in (q^2, 1)$.

Sea $\pi := \pi_M$. Ahora por el Lema 2.7 se tiene que $\pi(y) : E_\lambda(\{q^{-2(n-1)}s\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M$ es un isomorfismo y $u : E_\lambda(\{q^{-2(n-1)}s\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M$ es un operador unitario para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$. Consideramos el isomorfismo isométrico $u^n : E_\lambda(\{s\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M$. Definimos para todo $e_0 \in E_\lambda(\{s\})M$ al elemento $e_n := u^n e_0 \in E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M$. De esta manera

$$M_3 \;:=\; E_\lambda(\{q^{-2n}s \,|\, n \in \mathbb{N}_0\})M \;=\; \oplus_{n=0}^{\infty} E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M \;=\; \oplus_{n=0}^{\infty}\{e_n = u^n e_0 \,|\, e_0 \in E_\lambda(\{s\})M\}$$

y además considerando que $E_\lambda(\{s\})M \subset \ker(\pi(y^*))$ tenemos:

$$\pi(y)M_3 \;\subset\; E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}s \,|\, n \in \mathbb{N}_0\})M \;\subset\; M_3,$$

$$\begin{aligned}
\pi(y^*)M_3 \;&\subset\; \pi(y^*)\Big(E_\lambda(\{s\}) + E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}s \,|\, n \in \mathbb{N}_0\})\Big)M \\
&=\; \pi(y^*)E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}s \;:\; n \in \mathbb{N}_0\})M \\
&\subset\; E_\lambda(\{q^{-2n}s \,|\, n \in \mathbb{N}_0\})M \\
&=\; M_3.
\end{aligned}$$

Entonces por el Lema 2.6 tenemos que $\pi = \pi_3 \oplus \pi_3^\circ$ donde $\pi_3$ es la *-representación con dominio $M_3$ y $\pi_3^\circ$ es una *-representación con dominio $M_3^\circ = (1 - E_\lambda(\{q^{-2n}s \;:\; n \in \mathbb{N}_0\}))M$. Además el operador $\bar{\pi}_3^\circ(x)$ no contiene elementos del conjunto $\{q^{-2(n+1)}s \;:\; n \in \mathbb{N}_0\}$ en su espectro puntual.

La representación $\pi_3 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_3)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\pi_3(x)e_n \;&=\; q^{-2n}s e_n, \\
\pi_3(y)e_n \;&=\; \sqrt{(q^{-2(n+1)}s - s)(q^{-2(n+1)}s - 1)}\, e_{n+1}, \\
\pi_3(y^*)e_n \;&=\; \sqrt{(q^{-2n}s - s)(q^{-2n}s - 1)}\, e_{n-1}, \quad n \neq 0, \quad \pi_3(y^*)e_0 = 0,
\end{aligned}$$

para todo $e_n = u^n e_0 \in E_\lambda(\{q^{-2n}s\})M$ y $n \in \mathbb{N}_0$.

• Caso $E_\lambda(\{1\})M \neq \{0\}$.

Sea $E_\lambda(\{1\})M \neq \{0\}$. Entonces por el Lema 2.7, $\pi(y) : E_\lambda(\{q^{-2(n-1)}\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}\})M$ es un isomorfismo y $u : E_\lambda(\{q^{-2(n-1)}\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}\})M$ es un operador unitario, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ es la descomposición polar de $\bar{\pi}(y)$.

Consideremos el isomorfismo isométrico $u^n : E_\lambda(\{1\})M \longrightarrow E_\lambda(\{q^{-2n}\})M$. Para todo $e_0 \in E_\lambda(\{1\})M$, definimos $e_n := u^n e_0 \in E_\lambda(\{q^{-2n}\})M$. Entonces

$$M_4 \;:=\; E_\lambda(\{q^{-2n}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\})M \;=\; \oplus_{n=0}^{\infty} E_\lambda(\{q^{-2n}\})M \;=\; \oplus_{n=0}^{\infty}\{e_n = u^n e_0\,|\,e_0 \in E_\lambda(\{1\})M\}.$$

Además dado que $E_\lambda(\{1\})M \subset \ker(\pi(y^*))$ se tiene

$$\pi(y)M_4 \;\subset\; E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\})M \;\subset\; M_4,$$

$$\begin{aligned}
\pi(y^*)M_4 &= \pi(y^*)\left(E_\lambda(\{1\}) + E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\})\right)M \\
&= \pi(y^*)E_\lambda(\{q^{-2(n+1)}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\})M \\
&\subset E_\lambda(\{q^{-2n}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\})M \\
&= M_4.
\end{aligned}$$

Entonces por el Lema 2.6 tenemos que $\pi := \pi_4 \oplus \pi_4^\circ$, donde $\pi_4$ es una *-representación con dominio $M_4$ y $\pi_4^\circ$ es una *-representación con dominio $M_4^\circ = (1 - E_\lambda(\{\, q^{-2n}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\,\}))M$. Además el operador $\bar{\pi}_4^\circ(x)$ no tiene como espectro puntual a los elementos del conjunto $\{q^{-2n}\,|\,n \in \mathbb{N}_0\}$.

La representación $\pi_4 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{L}^+(M_4)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\pi_4(x)e_n &= q^{-2n}e_n, \\
\pi_4(y)e_n &= \sqrt{(q^{-2(n+1)} - s)(q^{-2(n+1)} - 1)}\,e_{n+1}, \\
\pi_4(y^*)e_n &= \sqrt{(q^{-2n} - s)(q^{-2n} - 1)}\,e_{n-1}, \quad n \neq 0, \quad \pi_4(y^*)e_0 = 0,
\end{aligned}$$

para todo $e_n = u^n e_0 \in E_\lambda(\{q^{-2n}\})M$ y para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Observemos que $M_3 \cap M_4 = \{0\}$ pues de lo contrario existiría $k_0$ y $n_0$ tal que $q^{-2n_0} = q^{-2k_0}s$, lo cual llevaría a que $s = q^{2(k_0-n_0)}$ lo que es una contradicción pues $s \in (q^2, 1)$.

Por lo tanto $M = M_3 \oplus M_4 \oplus N$ y $\pi = \pi_3 \oplus \pi_4 \oplus \pi_N$, donde $\pi_3$ es la *-representación con dominio $M_3$, $\pi_4$ es la *-representación con dominio $M_4$, y $\pi_N$ es una *-representación con dominio $N = (M_3 \oplus M_4)^\perp \cap M$, y tal que $\ker(\pi_N(y^*)) = 0 = \ker(\pi_N(y))$.

*3.2.4. Caso* $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$.

Empezamos con algunos resultados generales.

Sea $\pi = \pi_N$ una *-representación sobre $N$ tal que $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = 0$, entonces $E_\lambda(\{q^2 s, q^2\}) = E_\lambda(\{s, 1\}) = 0$. Consideremos $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ la descomposición polar de $\bar{\pi}(y)$, de manera que $u$ es unitario. Usando la relación $\pi(y^*)\pi(x) = q^{-2}\pi(x)\pi(y^*)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\pi(y^*)\pi(x) - q^{-2}\pi(x)\pi(y^*)\Big)v \\ &= \Big(|\bar{\pi}(y)|u^*\bar{\pi}(x) - q^{-2}\bar{\pi}(x)|\bar{\pi}(y)|u^*\Big)v \\ &= |\bar{\pi}(y)|\Big(u^*\bar{\pi}(x) - q^{-2}\bar{\pi}(x)u^*\Big)v, \end{aligned}$$

para todo $v \in N$. Como $\ker(|\bar{\pi}(y)|) = 0$, entonces se ha demostrado que

$$u^*\bar{\pi}(x) - q^{-2}\bar{\pi}(x)u^* = 0 \tag{2.2}$$

sobre $N$. Tomando la cerradura de operadores y multiplicando por $u$ y $u^*$ también obtenemos

$$u^*\bar{\pi}(x)u - q^{-2}\bar{\pi}(x) = 0 \quad \text{y} \quad u\bar{\pi}(x)u^* - q^2\bar{\pi}(x) = 0. \tag{2.3}$$

A partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3) tenemos

Lema 2.8. *Sea $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ la descomposición polar de $\bar{\pi}(y)$. Entonces*

$$u^* f(\bar{\pi}(x))u = f(q^{-2}\bar{\pi}(x)), \quad u f(\bar{\pi}(x))u^* = f(q^2\bar{\pi}(x)), \tag{2.4}$$

*para todo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ acotado y Borel medible.*

Demostración. Observamos que $\{u^*E_\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ y $\{E_{q^2\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ son las medidas espectrales del mismo operador $q^{-2}\bar{\pi}(x)$. Por la unicidad de la medida espectral tenemos

$$u^* f(\bar{\pi}(x))u = u^*\Big(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{dE}_\lambda\Big)u = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}(u^*E_\lambda u) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}E_{q^2\lambda} = \int_{\mathbb{R}} f(q^{-2}\lambda)\mathrm{d}E_\lambda = f(q^{-2}\bar{\pi}(x))$$

para todo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ acotado y Borel medible. ❑

Corolario 2.9. *Sea $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ la descomposición polar de $\bar{\pi}(y)$ y $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel. Entonces $u^*E_\lambda(M)u = E_\lambda(q^2M)$ y $uE_\lambda(M)u^* = E_\lambda(q^{-2}M)$.*

Demostración. El corolario es una consecuencia del lema anterior con $f = \chi_M$, la función característica de $M$. ❑

Lema 2.10. *Para toda representación admisible $\pi$ tal que* $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$ *tenemos* $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$ *si y sólo si* $q^{2n}\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$, *para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Dado que $\rho(\bar{\pi}(x)) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x))$, demostrar el lema es equivalente a demostrar que $\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x))$ si y sólo si $q^{2n}\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x))$. Usando la ecuación (2.3) concluimos

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bar{\pi}(x) - \lambda 1 \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad u\bar{\pi}(x)u^* - \lambda 1 \text{ es invertible}\\
&\Longleftrightarrow \quad q^2\bar{\pi}(x) - \lambda 1 \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\pi}(x) - q^{-2}\lambda \text{ es invertible}\\
&\Longleftrightarrow \quad q^{-2}\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bar{\pi}(x) - \lambda 1 \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad u^*\bar{\pi}(x)u - \lambda 1 \text{ es invertible}\\
&\Longleftrightarrow \quad q^{-2}\bar{\pi}(x) - \lambda 1 \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\pi}(x) - q^{2}\lambda \text{ es invertible}\\
&\Longleftrightarrow \quad q^{2}\lambda \in \rho(\bar{\pi}(x)).
\end{aligned}$$

Tomando luego que $q^{-2}\lambda$ y $q^2\lambda$ pertenecen a la resolvente obtenemos que $q^{-4}\lambda$ y $q^4\lambda$ pertenecen a la resolvente de $\pi(x)$. Siguiendo de manera inductiva obtenemos el resultado. ❏

Corolario 2.11. *Sea $\pi$ una representación admisible de $\mathcal{X}$ tal que* $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$.

*a) Si* $s \in [q^2, 1)$ *entonces* $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (0,\infty) \subset \cup_{k\in\mathbb{Z}}[q^{2(k+1)}, q^{2k}s]$.
*b) Si* $s \in [-1, q^2)$ *entonces* $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (0,\infty) = \emptyset$.
*c) Si* $s \in [-1, 0)$ *entonces* $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$.

Demostración. Por los Lemas 2.4 y 2.10 tenemos

a) $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (0,\infty) \subset (0,\infty) \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}}(q^{2k}s, q^{2k}) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[q^{2(k+1)}, q^{2k}s]$.
b) $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (0,\infty) \subset (0,\infty) \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}}(q^{2k}s, q^{2k}) = \emptyset$ ya que $q^{2k}s < q^{2(k+1)}$.
c) Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[-q^{2k_0}, -q^{2(k_0+1)}] \subset (s, 0)$. Entonces

$$\mathrm{Spec}(\bar{\pi}(x)) \cap (-\infty, 0) \subset (-\infty, 0) \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}}[-q^{2(k_0+k)}, -q^{2(k_0+k+1)}] = \emptyset.$$

❏

Proposición 2.12. *Sea* $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^+(N)$ *una representación admisible tal que* $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$, *y sea* $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ *la descomposición polar de* $\bar{\pi}(y)$. *Entonces*

$$u : E_\lambda((q^{2(n+1)}, q^{2n}])N \longrightarrow E_\lambda((q^{2n}, q^{2(n-1)}])N$$

*es isomorfismo unitario con inversa*

$$u^* : E_\lambda((q^{2n}, q^{2(n-1)}])N \longrightarrow E_\lambda((q^{2(n+1)}, q^{2n}])N.$$

Demostración. Por el Corolario 2.9 se tiene que :

$$\begin{aligned} u E_\lambda((q^{2(n+1)}, q^{2n}])N &= E_\lambda((q^{2n}, q^{2(n-1)}])N, \\ u^* E_\lambda((q^{2n}, q^{2(n-1)}])N &= E_\lambda((q^{2(n+1)}, q^{2n}])N. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $uu^* = u^*u = 1$ y por tanto $u$ es isomorfismo unitario. ❑

Seguimos con la clasificación de representaciones admisibles sobre $D_+$. Ahora sea $N \subset D_+$ y $\pi$ una representación admisible sobre $N$ tal que $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$. Por el Corolario 2.11 y los resultados de la Sección 3.2.1 tal representación no existe para $s \in [-1, q^2]$. Por tanto suponemos que $s \in (q^2, 1)$.

Definimos $\mathcal{H}_0 := E_\lambda([q^2, s])N$. Como $E_\lambda(\{q^2\}) \subset \ker(\pi(y)) = \{0\}$ por el Lema 2.4, tenemos $\mathcal{H}_0 := E_\lambda((q^2, s])N$. Luego $E_\lambda(\{q^{2n}\}) = u^{*n-1} E_\lambda(\{q^2\}) u^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ por el Corolario 2.9. Entonces, por el Corolario 2.11 y la Proposición 2.12,

$$N = E_\lambda((0,\infty))N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_\lambda((q^{2(n+1)}, q^{2n}s])N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} u^{*n} \left(E_\lambda((q^2, s])\right) N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} u^{*n}\mathcal{H}_0.$$

Sea $e_0 \in \mathcal{H}_0$, definimos $e_n = u^{*n} e_0$ y $B = \int_{[q^2,s]} \lambda dE_\lambda$. Notamos que $\operatorname{Spec}(B) \subset [q^2, s]$. Además $q^2$ y $s$ no son valores propios de $B$ por el Lema 2.4.

Con abuso de notación, definimos $Be_n := u^{*n} B e_0$. Entonces se tiene la siguiente representación $\pi_B$ sobre $N$:

$$\begin{aligned} \pi_B(x) e_n &= q^{2n} B e_n, \\ \pi_B(y^*) e_n &= \sqrt{(q^{2n}B - s)(q^{2n}B - 1)}\, e_{n+1}, \\ \pi_B(y) e_n &= \sqrt{(q^{2(n-1)}B - s)(q^{2(n-1)}B - 1)}\, e_{n-1}, \end{aligned}$$

para todo $e_n = u^{*n} e_0 \in u^{*n}\mathcal{H}_0$ y $n \in \mathbb{Z}$.

### 3.3. Las representaciones sobre $D_-$.

Consideremos $\pi = \pi_-$ una representación admisible con dominio $D_- = E_\lambda((-\infty, 0))D$. Por el caso $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$ de la Sección 3.2 tenemos que $\ker(\pi(y)) \cap \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$. Además dado que $\ker(\pi(y)) = E_\lambda(\{q^2 s, q^2\})D_-$ se tiene que $\ker(\pi(y)) = \{0\}$ pues si $s < 0$ entonces $q^2 s \notin \operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x))$.

*3.3.1. Caso* $\ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$.

Sea $\pi = \pi_-$ una representación admisible tal que $\ker(\pi(y^*)) \neq \{0\}$. Entonces $E_\lambda(\{s\})D_- \neq \{0\}$ para $s \in (-1,0)$ por el Lema 2.4. Este caso es idéntico al Caso $E_\lambda(\{s\})M \neq \{0\}$ de la Sección 3.2.3, sólo que $M = D_-$ y $s \in (-1,0)$. Teniendo en cuenta dicho caso se tiene la siguiente *-representación $\pi_{-1}$ con dominio $M_{-1} := E_\lambda(\{q^{-2n}s \,|\, n \in \mathbb{N}_0\})D_- = \oplus_{n=0}^{\infty}\{e_n = u^n e_0 \,|\, e_0 \in E_\lambda(\{s\})D_-\}$:

$$\begin{aligned}\pi_{-1}(x)e_n &= q^{-2n}se_n,\\ \pi_{-1}(y)e_n &= \sqrt{(q^{-2(n+1)}s - s)(q^{-2(n+1)}s - 1)}\,e_{n+1},\\ \pi_{-1}(y^*)e_n &= \sqrt{(q^{-2n}s - s)(q^{-2n}s - 1)}\,e_{n-1},\ \ n \neq 0, \quad \pi_{-1}(y^*)e_0 = 0,\end{aligned}$$

para todo $e_n = u^n e_0 \in E_\lambda(\{q^{-2n}s\})D_-$ y $n \in \mathbb{N}_0$.

Y tenemos además que $D_- = M_{-1} \oplus M_{-1}^\circ$ y $\pi_- = \pi_{-1} \oplus \pi_{-1}^\circ$, donde $\pi_{-1}$ es una *-representación con dominio $M_{-1}$ y $\pi_{-1}^\circ$ es una *-representación con dominio $M_{-1}^\circ = (1 - E_\lambda(\{q^{-2n}s \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}))D_-$ y además $\ker(\pi_{-1}^\circ(y^*)) = 0$.

*3.3.2. Caso* $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$.

Sea $\pi = \pi_{-1}^\circ$ una representación admisible sobre $M_{-1}^\circ$. Por lo anterior tenemos que $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$.

Proposición 2.13. *Sean $\pi$ una *-representación con dominio $M_{-1}^\circ$ y $\bar{\pi}(y) = u|\bar{\pi}(y)|$ la descomposición polar de $\bar{\pi}(y)$. Entonces*

$$u : E_\lambda([-q^{2n}, -q^{2(n+1)}))M_{-1}^\circ \longrightarrow E_\lambda([-q^{2(n-1)}, -q^{2n}))M_{-1}^\circ$$

*es un operador unitario con inverso*

$$u^* : E_\lambda([-q^{2(n-1)}, -q^{2n}))M_{-1}^\circ \longrightarrow E_\lambda([-q^{2n}, -q^{2(n+1)}])M_{-1}^\circ.$$

Demostración. Por el Corolario 2.9 se tiene que $uE_\lambda([-q^{2n}, -q^{2(n+1)}))M_{-1}^\circ \subset E_\lambda([-q^{2(n-1)}, q^{2n}))M_{-1}^\circ$ y $u^*E_\lambda([-q^{2(n-1)}, -q^{2n}))M_{-1}^\circ \subset E_\lambda([-q^{2n}, -q^{2(n+1)}))M_{-1}^\circ$. Además $\ker(\pi(y)) = \ker(\pi(y^*)) = \{0\}$ implica que $u$ es unitario. ❑

Así por Corolario 2.11 tendremos una representación sobre $M_{-1}^\circ$ siempre que $s \in [0,1)$.

Para $s \geq 0$ definamos $\mathcal{H}_0 = E_\lambda([-1, -q^2))M_{-1}^\circ$. Entonces

$$M_{-1}^\circ = E_\lambda((-\infty, 0))M_{-1}^\circ = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}E_\lambda([-q^{2n}, -q^{2(n+1)}))M_{-1}^\circ = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}u^{*n}\mathcal{H}_0.$$

Para $e_0 \in \mathcal{H}_0$ y $n \in \mathbb{Z}$, escribimos $e_n = u^{*n}e_0 \in u^{*n}\mathcal{H}_0$. Sea $A := -\int_{[-1,-q^2)} \lambda\, dE_\lambda$. Entonces $\mathrm{Spec}(A) \subset [q^2, 1]$ y $q^2$ no es valor propio de $A$.

Con abuso de notación, definimos $Ae_n = u^{*n}Ae_0$. De esta manera tenemos la siguiente representación $\pi_A$ sobre $M^{\circ}_{-1}$:

$$\begin{aligned}
\pi_A(x)e_n &= -q^{2n}Ae_n,\\
\pi_A(y^*)e_n &= \sqrt{(q^{2n}A+s)(q^{2n}A+1)}\,e_{n+1},\\
\pi_A(y)e_n &= \sqrt{(q^{2(n-1)}A+s)(q^{2(n-1)}A+1)}\,e_{n-1},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $e_n = u^{*n}e_0 \in u^{*n}\mathcal{H}_0$.

## 4. Clasificación de las representaciones admisibles

Teorema 2.14. *Sean $\mathcal{H}_0$ un subespacio denso de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $u$ un operador unitario en $\mathcal{H}_0$, y sean $A$ y $B$ operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}_0$ tal que* $\mathrm{Spec}(A) \subset [q^2, 1]$ *y* $\mathrm{Spec}(B) \subset [q^2, s]$, *donde $q^2$ no es valor propio de $A$ y $B$, y $s$ no es valor propio de $B$. Entonces toda *-representación admisible de $\mathcal{X}$ es una suma directa de representaciones dadas por:*

| | | |
|---|---|---|
| $s = 0:$ | $\pi_0(x) = 0,\ \pi_0(y) = 0,\ \pi_0(1) = 1$ | *sobre* $\mathcal{H}_0$. |
| $s = q^2:$ | $\pi_q(x) = q^2,\ \pi_q(y) = 0$ | *sobre* $\mathcal{H}_0$. |
| $s \in (0,1):$ | $\pi_u(x) = 0,\ \pi_u(y) = \sqrt{s}u$ | *sobre* $\mathcal{H}_0$, |
| | $\pi_1(x)e_n = q^{2(n+1)}se_n,\ \pi_1(y)e_n = \sqrt{(q^{2n}s-s)(q^{2n}s-1)}e_{n-1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}_0$. |
| $s \in [0,1):$ | $\pi_A(x)e_n = -q^{2n}Ae_n,\ \pi_A(y)e_n = \sqrt{(q^{2(n-1)}A+s)(q^{2(n-1)}A+1)}e_{n-1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_0$. |
| $s \in (q^2,1):$ | $\pi_2(x)e_n = q^{2(n+1)}e_n,\ \pi_2(y)e_n = \sqrt{(q^{2n}-s)(q^{2n}-1)}e_{n-1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}_0$, |
| | $\pi_3(x)e_n = q^{-2n}se_n,\ \pi_3(y)e_n = \sqrt{(q^{-2(n+1)}s-s)(q^{-2(n+1)}s-1)}e_{n+1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}_0$, |
| | $\pi_B(x)e_n = q^{2n}Be_n,\ \pi_B(y)e_n = \sqrt{(q^{2(n-1)}B-s)(q^{2(n-1)}B-1)}e_{n-1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_0$. |
| $s \in [-1,0):$ | $\pi_{-1}(x)e_n = q^{-2n}se_n,\ \pi_{-1}(y)e_n = \sqrt{(q^{-2(n+1)}s-s)(q^{-2(n+1)}s-1)}e_{n+1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}_0$. |
| $s \in [-1,1):$ | $\pi_4(x)e_n = q^{-2n}e_n,\ \pi_4(y)e_n = \sqrt{(q^{-2(n+1)}-s)(q^{-2(n+1)}-1)}e_{n+1}$ | *sobre* $\oplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}_0$. |

*Todas las representaciones del generador $x$ son invertibles excepto para las representaciones $\pi_0$ y $\pi_u$. Una representación de esta lista es irreducible si y sólo si $\mathcal{H}_0 \cong \mathbb{C}$. En este caso $u$, $A$ y $B$ son números complejos tal que $|u| = 1$, $A \in (q^2, 1]$ y $B \in (q^2, s)$. Las únicas *-representaciones irreducibles conmutativas (puntos clásicos) son $\pi_0$, $\pi_q$ y $\pi_u$.*

Demostración. Cálculos directos demuestran que las fórmulas del teorema definen *-representaciones y los resultados de la Sección 3 demuestran que no hay más.

Solamente las representaciones $\pi_0(x)$ y $\pi_u(x)$ de $x$ tienen un kernel no trivial, en los otros casos la representación de $x$ es invertible. Las representaciones son irreducibles si y sólo si $\mathcal{H}_0$ no es suma ortogonal de dos subespacios no triviales, entonces $\dim(\mathcal{H}_0) = 1$. Las únicas representaciones irreducibles de dimensión 1, y por lo tanto conmutativas, son $\pi_0$, $\pi_q$ y $\pi_u$. ❏

Capítulo 3

# Teoría de integración invariante

Recordamos que $\mathcal{X} = \mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ y $x$, $y$ e $y^*$ denotan a los generadores de $\mathcal{X}$ dados en la Sección 3 del Capítulo 1. La idea fundamental para asociar al hiperboloide cuántico álgebras de funciones diferenciables e integrables es considerar *-representaciones $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^+(D)$ y dotar $\mathcal{L}^+(D)$ con una acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$. El paso crucial es expresar la acción de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ mediante relaciones algebraicas de operadores en $\mathcal{L}^+(D)$ para después poder extender la acción a subálgebras de $\mathcal{L}^+(D)$. Esto es el objetivo de la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^+(D)$ una *-representación tal que $\pi(x)$ es invertible en $\mathcal{L}^+(D)$, definimos*

$$e := q^{-1/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(y), \quad f := -q^{1/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(y)^*, \quad k := q\pi(x)^{-1}.$$

*Entonces*

$$ke = q^2 ek, \quad fk = q^2 kf, \quad ef - fe = (q - q^{-1})^{-1}(sk - k^{-1}), \tag{3.1}$$

*y*

$$K \triangleright a = kak^{-1}, \quad E \triangleright a = ea - kak^{-1}e, \quad F \triangleright a = fak - afk, \quad a \in \mathcal{L}^+(D), \tag{3.2}$$

*define una acción en $\mathcal{L}^+(D)$, convirtiendolo en un $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$-módulo *-algebra izquierdo tal que*

$$X \triangleright \pi(z) = \pi(X \triangleright z)$$

*para todo $z \in \mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$.*

Demostración. Para probar (3.1) haremos uso de las relaciones que verifica $\mathcal{X}$ y por tanto $\mathcal{L}^+(D)$. En efecto,

$$ke = q^{1/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(y),$$

y

$$\begin{aligned} ek &= q^{1/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(x)^{-1} \\ &= q^{-2}q^{1/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(y). \end{aligned}$$

Entonces $ke = q^2 ek$.

$$fk = -q^{3/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(y)^*\pi(x)^{-1},$$

y

$$\begin{aligned} kf &= -q^{3/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\pi(y)^* \\ &= -q^{-2}q^{3/2}(q - q^{-1})^{-1}\pi(y)^*\pi(x)^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces $fk = q^2 kf$.

$$\begin{aligned} ef - fe &= (q - q^{-1})^{-2}\left(-\pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(y)^* + \pi(y)^*\pi(x)^{-1}\pi(y)\right) \\ &= (q - q^{-1})^{-2}\pi(x)^{-1}\left(q^2(q^{-2}\pi(x) - s)(q^{-2}\pi(x) - 1) - (\pi(x) - s)(\pi(x) - 1)\right) \\ &= (q - q^{-1})^{-2}\left(q^{-2}\pi(x) + q^2 s\pi(x)^{-1} - \pi(x) - s\pi(x)^{-1}\right) \\ &= (q - q^{-1})^{-2}\left(q(q - q^{-1})s\pi(x)^{-1} - q^{-1}(q - q^{-1})\pi(x)\right) \\ &= (q - q^{-1})^{-1}(sk - k^{-1}). \end{aligned}$$

Ahora tomemos las ecuaciones (3.2) como definición y mostraremos que la acción $\triangleright$ definida de esta manera hace de $\mathcal{L}^+(D)$ un $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$-módulo *-álgebra izquierdo. Para demostrar que $\triangleright$ está bien definida, hacemos uso de las relaciones de conmutatividad dadas en (3.1). Sea $z \in \mathcal{L}^+(D)$ entonces

$$\begin{aligned} KE \triangleright z &= K \triangleright (ez - kzk^{-1}e) = k(ez - kzk^{-1}e)k^{-1} = q^2(ekzk^{-1} - kkzk^{-1}k^{-1}e) \\ &= q^2 EK \triangleright z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FK \triangleright z &= F \triangleright (kzk^{-1}) = fkz - kzk^{-1}fk = q^2 k(fzk - zfk)k^{-1} \\ &= q^2 KF \triangleright z, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} EF - FE \triangleright z &= E \triangleright (fzk - zfk) - F \triangleright (ez - kzk^{-1}e) \\ &= e(fzk - zfk) - k(fzk - zfk)k^{-1}e - f(ez - kzk^{-1}e)k + (ez - kzk^{-1}e)fk \\ &= efzk - ezfk - kfze + kzfe - fezk + kfze + ezfk - kzef \\ &= efzk + kzfe - fezk - kzef \\ &= (ef - fe)zk - kz(ef - fe) \\ &= (q - q^{-1})^{-1}\left((sk - k^{-1})zk - kz(sk - k^{-1})\right) \\ &= (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1}) \triangleright z. \end{aligned}$$

Por lo tanto la acción está bien definida. Ahora verificaremos las relaciones de la Definición 1.12 para que $\mathcal{L}^+(D)$ sea un $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$-módulo *-álgebra.

Dado que $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$ está generado por $K$, $K^{-1}$, $E$ y $F$ y la acción es asociativa, es suficiente probar las relaciones para los generadores. Sean $a$ y $b$ en $\mathcal{L}^+(D)$, entonces

$$(K \triangleright a)(K \triangleright b) = kak^{-1}kbk^{-1} = kabk^{-1} = K \triangleright (ab),$$

$$\begin{aligned}(E \triangleright a)b + (K \triangleright a)(E \triangleright b) &= (ea - kak^{-1}e)b + kak^{-1}(eb - kbk^{-1}e) = eab - kabk^{-1}e \\ &= E \triangleright (ab),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(F \triangleright a)(K^{-1} \triangleright b) + a(F \triangleright b) &= (fak - afk)k^{-1}bk + a(fbk - bfk) = fabk - abfk \\ &= F \triangleright (ab).\end{aligned}$$

Además se tiene que

$$K^{\pm 1} \triangleright 1 = 1 = \varepsilon(K^{\pm 1})1, \quad E \triangleright 1 = e1 - k1k^{-1}e = 0 = \varepsilon(E), \quad F \triangleright 1 = f1k - 1fk = 0 = \varepsilon(F).$$

Por último verificamos la involución:

$$(K^{\pm 1} \triangleright a)^* = k^{\mp 1}a^*k^{\pm 1} = S(K^{\pm 1})^* \triangleright a^*.$$

Tomando en cuenta que $e^* = -kf$ y $S(E)^* = -(K^{-1}E)^* = KFK^{-1} = q^{-2}F$ tenemos

$$(E \triangleright a)^* = -a^*kf + kfk^{-1}a^*k = q^{-2}(fa^*k - a^*fk) = S(E)^* \triangleright a^*.$$

De la misma manera, dado que $f^* = -ek^{-1}$ y $S(F)^* = -(FK)^* = KEK^{-1} = q^2E$, tenemos

$$(F \triangleright a)^* = (fak - afk)^* = -ka^*ek^{-1} + kek^{-1}a^* = q^2(ea^* - ka^*k^{-1}e) = q^2E \triangleright a^* = S(F)^* \triangleright a^*.$$

Ahora procedamos a verificar que $X \triangleright \pi(z) = \pi(X \rhd z)$ para $z \in \mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$. Dado que se tiene que $\triangleright$ es asociativa, $\rhd$ respeta las relaciones de $\mathcal{X}$ y $\pi$ es homomorfismo, entonces solo verificaremos en los generadores de $\mathcal{X}$ y de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$. En efecto,

$$\begin{aligned}K \triangleright \pi(x) &= k\pi(x)k^{-1} = \pi(x)^{-1}\pi(x)\pi(x) = \pi(x) = \pi(K \rhd x),\\ K \triangleright \pi(y) &= k\pi(y)k^{-1} = \pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(x) = q^2\pi(y) = \pi(K \rhd y),\\ K \triangleright \pi(y^*) &= k\pi(y^*)k^{-1} = \pi(x)^{-1}\pi(y^*)\pi(x) = q^{-2}\pi(y^*) = \pi(K \rhd y^*).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E \triangleright \pi(x) &= e\pi(x) - k\pi(x)k^{-1}e = q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}\left(\pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(x) - \pi(y)\right) \\
&= q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}(q^2-1)\pi(y) = q^{1/2}\pi(y) = \pi(E \rhd x), \\
E \triangleright \pi(y) &= e\pi(y) - k\pi(y)k^{-1}e = q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}\left(\pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(y) - \pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(y)\right) = 0 = \pi(E \rhd y), \\
E \triangleright \pi(y^*) &= e\pi(y^*) - k\pi(y^*)k^{-1}e = q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\left(\pi(y)\pi(y^*) - \pi(y^*)\pi(y)\right) \\
&= q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}\pi(x)^{-1}\left((\pi(x)-s)(\pi(x)-1) - (q^{-2}\pi(x)-s)(q^{-2}\pi(x)-1)\right) \\
&= q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}\left((1-q^{-4})\pi(x) - (1-q^{-2})(1+s)\right) \\
&= q^{-1/2}(q-q^{-1})^{-1}(1-q^{-2})\left((1+q^{-2})\pi(x) - (1+s)\right) \\
&= q^{-3/2}\left((1+q^{-2})\pi(x) - (1+s)\right) \\
&= \pi(E \rhd y^*).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F \triangleright \pi(x) &= f\pi(x)k - \pi(x)fk = q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}\left(-\pi(y^*) + \pi(x)\pi(y^*)\pi(x)^{-1}\right) \\
&= q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}(q^2-1)\pi(y^*) = q^{5/2}\pi(y^*) = \pi(F \rhd x), \\
F \triangleright \pi(y) &= f\pi(y)k - \pi(y)fk = q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}\left(\pi(y)\pi(y^*) - \pi(y^*)\pi(y)\right)\pi(x)^{-1} \\
&= q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}\left((\pi(x)-s)(\pi(x)-1) - (q^{-2}\pi(x)-s)(q^{-2}\pi(x)-1)\right)\pi(x)^{-1} \\
&= q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}(1-q^{-2})\left((1+q^{-2})\pi(x) - (1+s)\right) \\
&= q^{1/2}\left((1+q^{-2})\pi(x) - (1+s)\right) = \pi(F \rhd y), \\
F \triangleright \pi(y^*) &= f\pi(y^*)k - \pi(y^*)fk = q^{3/2}(q-q^{-1})^{-1}\left(-\pi(y^*)\pi(y^*)\pi(x)^{-1} + \pi(y^*)\pi(y^*)\pi(x)^{-1}\right) = 0 \\
&= \pi(F \rhd y^*).
\end{aligned}
$$

❑

Dado un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, y una base ortonormal $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, decimos que un operador compacto $A$ sobre $\mathcal{H}$ es de *clase traza* si $\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n, |A|\,\phi_n\rangle < \infty$, y definimos la *traza* de $A$ como $\mathrm{Tr}A := \sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi_n, A\,\phi_n\rangle$. [**ReedSimon**, Teorema VI.18] muestra que esta definición no depende de la base ortonormal escogida.

Definimos a continuación dos *-subálgebras de $\mathcal{L}^+(D)$ que consisten de operadores de clase traza. La primera de ellas es el álgebra de los operadores de rango finito:

$$\mathbb{F}(D) := \{l \in \mathcal{L}^+(D) \mid \bar{l} \text{ es acotado, } \bar{l}\mathcal{H} \subset D,\ \bar{l}^*\mathcal{H} \subset D \text{ y } \dim(\bar{l}\mathcal{H}) < \infty\},$$

y dada una *-subálgebra unitaria $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}^+(D)$, definimos

$$\mathbb{B}_1(\mathfrak{A}) := \{t \in \mathcal{L}^+(D) \mid \overline{atb} \text{ es de clase traza para todo } a, b \in \mathfrak{A},\ \overline{atb}\mathcal{H} \subset D \text{ y } (\overline{atb})^*\mathcal{H} \subset D\}.$$

Por el Lema 5.1.4 de [**Schmüdgen**] se tiene que $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ es una *-subálgebra de $\mathcal{L}^+(D)$. Para ver que $\mathbb{F}(D)$ es una *-algebra basta notar que $\overline{\mathrm{ran}(\bar{l}^*)} = \ker(\bar{l})^\perp \cong \mathcal{H}/\ker(\bar{l}) \cong \mathrm{ran}(\bar{l})$, entonces $\dim(\mathrm{ran}(\bar{l}^*)) < \infty$, por tanto $\bar{l}^*|_D \in \mathbb{F}(D)$.

En el siguiente teorema damos el resultado principal de la tesis. Demostraremos que se puede asociar álgebras $\mathbb{F}(D)$ y $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ a *-representaciones de $\mathcal{X}$ tal que estas álgebras son $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$-módulos *-álgebras y un integral invariante está dada por una fórmula de traza con peso. Versiones de este teorema se encuentra en [**KürstenWag**], [**OsunaWag**] y [**Wagner**].

Teorema 3.2. *Supongamos que* $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^+(D)$ *es una *-representación de* $\mathcal{X}$ *tal que* $\pi(x)$ *es invertible en* $\mathcal{L}^+(D)$*. Sea* $\mathfrak{A}$ *la *-álgebra generada por los elementos de* $\pi(\mathcal{X})$ *y* $\pi(x)^{-1}$*. Entonces las *-álgebras* $\mathbb{F}(D)$ *y* $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ *son* $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$*- módulos *-álgebras, donde la acción está dada por las fórmulas de la Proposición 3.1, ecuación* (3.2)*.*

*Además, el funcional*

$$h(a) := c\,\mathrm{Tr}(\overline{k^{-1}a}), \qquad c \in \mathbb{R},$$

*define un integral invariante en* $\mathbb{F}(D)$ *y en* $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$*.*

Demostración. Primeramente debemos mostrar que la acción $\triangleright$ deja invariante a las *-subálgebras $\mathbb{F}(D)$ y $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$. Esto es, mostraremos que $ulv \in \mathbb{F}(D)$ y $utv \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$, para todo $u, v \in \mathfrak{A}$, $l \in \mathbb{F}(D)$ y $t \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$.

En efecto, dado que $\bar{l}\mathcal{H} \subset D$, tenemos que $\overline{vl} = v\bar{l} = \overline{v\bar{l}}$ es acotado por el teorema del gráfico cerrado ya que $\overline{vl}$ es cerrado y $D(\overline{vl}) = D(v\bar{l}) = D(\overline{v\bar{l}}) = \mathcal{H}$. Además $\overline{vl}\mathcal{H} = v(\bar{l}\mathcal{H}) \subset D$. Como $(\overline{vl})^*$ también es acotado y $\bar{l}^*\mathcal{H} \subset D$ es cerrado por ser de dimensión finita, tenemos $(\overline{vl})^*\mathcal{H} = \overline{(\overline{vl})^*D} = \overline{\bar{l}^*v^*D} \subset \overline{\bar{l}^*\mathcal{H}} \subset D$. Por último, $\dim(\overline{vl}\mathcal{H})) = \dim(v(\bar{l}\mathcal{H})) \leq \dim(\bar{l}\mathcal{H}) < \infty$, entonces $vl \in \mathbb{F}(D)$. Como $\mathbb{F}(D)$ es una *-subalgebra de $\mathcal{L}^+(D)$, tenemos también $lv = (v^*l^*)^* \in \mathbb{F}(D)$, por tanto $ulv = (ul)v \in \mathbb{F}(D)$. De esta manera la acción $\triangleright$ definida en (3.2) deja invariante a la *-subálgebra $\mathbb{F}(D)$.

Ahora comprobemos que $\triangleright$ también deja invariante a la *-subálgebra $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$. Sean como antes $u, v \in \mathfrak{A}$ y $t \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$. Sólo nos falta comprobar que $u_0(utv)v_0 = (u_0u)t(vv_0) \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ para todo $u_0, v_0 \in \mathfrak{A}$. Pero esto es claro desde que $u_0u$ y $vv_0$ pertenecen a $\mathfrak{A}$ y $t \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$.

De la Proposición 3.1 concluimos que ambas *-subálgebras $\mathbb{F}(D)$ y $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ son $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$- módulos *-álgebras. Además como todos los operadores de rango finito son de clase traza tenemos que $\mathbb{F}(D) \subset \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$.

Ahora mostremos que el funcional $h(g) := c\,\mathrm{Tr}(\overline{k^{-1}g})$, $c \in \mathbb{R}$, define una integral invariante en las *-álgebras anteriores. En efecto, usaremos la propiedad de la traza, $\mathrm{Tr}(\overline{utv}) = \mathrm{Tr}(\overline{tvu}) = \mathrm{Tr}(\overline{vut})$, que se cumple para todo $u, v \in \mathfrak{A}$ y para todo $t \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ (ver [**Schmüdgen**]). Además, dado que $\triangleright$ es asociativa y $\varepsilon$ es homomorfismo, basta probar la invarianza de $h$ para los generadores de $\mathcal{U}_q(\mathrm{su}_{1,1})$.

Sea $g \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$, entonces

$$\begin{aligned} h(K \triangleright g) &= \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}kgk^{-1}}\right) = \operatorname{Tr}\left(\overline{gk^{-1}}\right) = \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}g}\right) = \varepsilon(K)h(g), \\ h(E \triangleright g) &= \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}(eg - kgk^{-1}e)}\right) = \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}eg}\right) - \operatorname{Tr}\left(\overline{gk^{-1}e}\right) = \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}eg}\right) - \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}eg}\right) = 0 \\ &= \varepsilon(E)h(g), \\ h(F \triangleright g) &= \operatorname{Tr}\left(\overline{k^{-1}(fgk - gfk)}\right) = \operatorname{Tr}\left(\overline{fg}\right) - \operatorname{Tr}\left(\overline{gf}\right) = 0 = \varepsilon(F)h(g). \end{aligned}$$

De esta forma, $h$ define un integral invariante en $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ y por tanto tambien en $\mathbb{F}(D)$. ❑

Recordando los ejemplos 1.14 y 1.15, podemos pensar en $\mathcal{L}^+(D)$ como un álgebra de funciones integrables y diferenciables sobre el hiperboloide cuántico. Por el Teorema 2.14, las representaciones que cumplen con la hipótesis del Teorema 3.2 son $\pi_q$, $\pi_A$, $\pi_B$ y $\pi_i$, $i = -1, 1, \ldots 4$. En el límite $q \to 1$, el hiperboloide cuántico $\mathcal{X} := \mathcal{O}(\mathbb{H}_{s,q})$ se transforma en el álgebra conmutativa $\mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$, donde

$$\mathbb{H}_s = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t_1^2 + t_2^2 - (t_3 - 1)(t_3 - s) = 0\}, \quad s \in [-1, 1),$$

y $x, y \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_s)$ están dadas por $x((t_1, t_2, t_3)) = t_3$ e $y((t_1, t_2, t_3)) = t_1 + \mathrm{i}t_2$. Entonces diferentes representaciones corresponden a diferentes partes del hiperboloide (cuántico) según el espectro de $\bar{\pi}(x)$. Más precisamente:

⋆ $\pi_0$ corresponde a la representación de $\mathcal{X}$ sobre el punto $(0, 0, 0) \in \mathbb{H}_0$.

⋆ Notando que $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}_q(x)) = \{q^2\}$ y $\pi_q(y) = 0$, entonces $\pi_q$ es una representación de $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\{(0, 0, q^2)\} \subset \mathbb{H}_s$, $s = q^2$.

⋆ Continuando ahora con $\pi_u$, tenemos $\bar{\pi}_u(x) = 0$ y $|\bar{\pi}_u(y)|^2 = \bar{\pi}_u(y)^*\bar{\pi}_u(y) = s$. En el caso conmutativo $q = 1$, esto corresponde a $x(t_1, t_2, t_3) = t_3 = 0$ y $|y(t_1, t_2, t_3)|^2 = |t_1 + \mathrm{i}t_2|^2 = s$. Entonces la representación $\pi_u$ de $\mathcal{X}$ corresponde al conjunto de puntos $\{(t_1, t_2, 0) \,|\, t_1^2 + t_2^2 = s\} \subset \mathbb{H}_s$, $s \in (0, 1)$, del hiperboloide.

⋆ Siguiendo con $\pi_1$, podemos observar que $0 < \bar{\pi}_1(x)) < s$ y para todo $\lambda \in (0, s)$ existe un $q \in (0, 1)$ tal que $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}_1(x))$. En el caso conmutativo $q = 1$, esto corresponde a $0 < t_3 < s$. Además $\ker(\bar{\pi}_1(y)) = \ker(|\bar{\pi}_1(y)|) \neq 0$, entonces $0 \in \mathrm{Spec}(|\bar{\pi}_1(y))|$. En el caso conmutativo $q = 1$, la ecuación $|y(t_1, t_2, t_3)| = 0$ implica $t_3 = s$ ó $t_3 = 1$. Ya que $t_3 < s$, excluimos el punto $(0, 0, 1)$ e incluimos el punto $(0, 0, s)$. Entonces la representación $\pi_1$ corresponde al conjunto $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in (0, s]\}$ para $s \in (0, 1)$.

$\star$ Ahora, para ver que parte del hiperboloide corresponde a la representación $\pi_A$, observamos que $\bar{\pi}_A(x) < 0$ y para todo $\lambda \in (-\infty, 0)$ existe un $A$ tal que $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}_A(x))$. Además $\ker(|\bar{\pi}_A(y)|) = \ker(|\bar{\pi}_A(y^*)|) = \{0\}$ de manera que $|\bar{\pi}_A(y)| > 0$ y $|\bar{\pi}_A(y^*)| > 0$. Así, la representación $\pi_A$ de $\mathcal{X}$ corresponde al conjunto $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 < 0\}$, $s \in [0, 1)$, del hiperboloide.

$\star$ Continuando con la representación $\pi_2$, observamos que $0 < \bar{\pi}_2(x) < s$ y para todo $\lambda \in (0, s)$ existe un $q \in (0, \sqrt{s})$ tal que $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}_2(x))$. Más aún, $\ker(|\bar{\pi}_2(y)|) \neq \{0\}$. Procediendo como en el caso para $\pi_1$ concluimos que la representación $\pi_2$ de $\mathcal{X}$ corresponde al conjunto $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in (0, s]\}$, $s \in (q^2, 1)$, del hiperboloide.

$\star$ Siguiendo con la representación $\pi_3$, podemos observar que esta representación tiene un comportamiento muy peculiar pues ésta empieza en una hoja del hiperboloide y después brinca hacia la otra hoja. Observamos que $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}_3(x)) \subset \{s\} \cup [1, \infty)$, $s \in (q^2, 1)$ y para todo $\lambda \in (1, \infty)$ existe un $q \in (0, \sqrt{s})$ tal que $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}_3(x))$. Además $\ker(|\bar{\pi}_3(y^*)|) = E_\lambda(\{s\})D \neq \{0\}$, $\ker(|\bar{\pi}_3(y)|) = \{0\}$ y $E_\lambda(\{1\}) = 0$. Por eso incluimos al punto $(0, 0, s)$ y excluimos al punto $(0, 0, 1)$. Entonces la representación $\pi_3$ de $\mathcal{X}$ corresponde a la parte $\{(0, 0, s)\} \cup \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 > 1\}$, $s \in (q^2, 1)$, del hiperboloide.

$\star$ La representación $\pi_B$ tiene un efecto parecido al de la representación $\pi_3$, para analizarla, vemos que $\mathrm{Spec}(\bar{\pi}_B(x)) \subset \cup_{n\in\mathbb{Z}}[q^{2(n+1)}, q^{2n}s]$, $s \in (q^2, 1)$, y para todo $\lambda \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(q^{2(n+1)}, q^{2n}s)$ existe un $B$ tal que $\lambda \in \mathrm{Spec}(\bar{\pi}_B(x))$ (por su comportamiento particular no variamos al $q$). Luego $E_\lambda(\{q^{2n}\}) = E_\lambda(\{q^{2n}s\}) = 0$. Además cabe mencionar que $\ker(|\bar{\pi}_B(y)|) = \ker(|\bar{\pi}_B(y^*)|) = \{0\}$ de manera que $|\bar{\pi}_B(y)| > 0$ y $|\bar{\pi}_B(y^*)| > 0$. De esta forma la representación $\pi_B$ de $\mathcal{X}$ corresponde al conjunto $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(q^{2(n+1)}, q^{2n}s)\}$, $s \in (q^2, 1)$, del hiperboloide.

$\star$ Para $\pi_{-1}$, notamos que $\bar{\pi}_{-1}(x) \leq s$ $\ker(|\bar{\pi}_{-1}(y)|) = \{0\}$ $\ker(|\bar{\pi}_{-1}(y^*)|) = E_\lambda(\{s\}D \neq \{0\}$. Procediendo como en el caso para $\pi_1$ concluimos que la representación $\pi_{-1}$ de $\mathcal{X}$ corresponde al conjunto $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \leq s\}$, $s \in [-1, 0)$, del hiperboloide.

$\star$ Por último, $\bar{\pi}_4(x) \geq 1$, $\ker(|\bar{\pi}_4(y)|) = \{0\}$ y $\ker(|\bar{\pi}_4(y^*)|) = E_\lambda(\{1\}D \neq \{0\}$. Así la representación $\pi_4$ de $\mathcal{X}$ corresponde a la parte $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \geq 1\}$, $s \in [-1, 1)$, del hiperboloide.

En resumen,

$\pi_0$: $\{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{H}_0$,
$\pi_q$: $\{(0, 0, q^2)\} \subset \mathbb{H}_s$, $q^2 = s$,
$\pi_u$: $\{(t_1, t_2, 0) \,|\, t_1^2 + t_2^2 = s\} \subset \mathbb{H}_s$, $s \in (0, 1)$,
$\pi_1$: $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in (0, s]\}$, $s \in (0, 1)$,
$\pi_A$: $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 < 0\}$, $s \in [0, 1)$,
$\pi_2$: $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in (0, s]\}$, $s \in (q^2, 1)$,
$\pi_3$: $\{(0, 0, s)\} \cup \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 > 1\}$, $s \in (q^2, 1)$,

$$
\begin{aligned}
\pi_B &: \quad \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(q^{2(n+1)}, q^{2n}s)\}, \;\; s \in (q^2, 1),\\
\pi_{-1} &: \quad \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \le s\}, \;\; s \in [-1, 0),\\
\pi_4 &: \quad \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{H}_s \,|\, t_3 \ge 1\}, \;\; s \in [-1, 1).
\end{aligned}
$$

Observamos que a partir de $\pi_1$ los subconjuntos de $\mathbb{H}_s$ son localmente compactos pero no compactos.

Un operador $l \in \mathbb{F}(D)$ se puede escribir como $l = \sum_{j=1}^{k} v_j \otimes w_j$, donde $v_j, w_j \in D$, $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ran}(l) = \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_k\}$, $\operatorname{ran}(l^*) = \operatorname{gen}\{w_1, \ldots, w_k\}$, y $(\sum_{j=1}^{k} v_j \otimes w_j)(v) := \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v\rangle v_j$ para todo $v \in D$. Si $D = \operatorname{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces

$$
h(l) = c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, e_n\rangle \langle e_n, k^{-1} v_j\rangle = c \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, k^{-1} v_j\rangle.
$$

Sea ahora $\pi(x)(e_n) = \lambda_n e_n$, donde $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y sea $f : \operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x)) \to \mathbb{C}$ acotada. Si $f(\bar{\pi}(x))$ pertenece a $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)||\lambda_n|^k < \infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En efecto, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la función $f(\bar{\pi}(x))|\bar{\pi}(x)|^k$ es de clase traza por definición de $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$. Luego

$$
\begin{aligned}
\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, |f(\bar{\pi}(x))\,|\bar{\pi}(x)|^k| e_n\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \int_{\operatorname{Spec}(\bar{\pi}(x))} |f(\lambda)|\,|\lambda|^k e_n\rangle\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\lambda_s \,:\, s\in\mathbb{N}\}} |f(\lambda)|\,|\lambda|^k \,\mathrm{d}(E_\lambda)_{e_n,e_n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |f(\lambda_s)|\,|\lambda_s|^k \langle e_n, E_\lambda(\{\lambda_s\}) e_n\rangle\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|\,|\lambda_s|^n.
\end{aligned}
$$

De esta manera, $f(\bar{\pi}(x)) \in \mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ implica $\lim_{n\to\infty} |f(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Así, podemos considerar al álgebra $\mathbb{B}_1(\mathfrak{A})$ como un álgebra de funciones diferenciables con decaimiento rápido en el infinito sobre la parte del hiperboloide cuántico determinado por la representación $\pi$.

En este caso,

$$
h(f(\bar{\pi}(x))) = q^{-1} c \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\lambda_n.
$$

Si $f(\bar{\pi}(x)) \in \mathbb{F}(D)$ entonces el soporte de $f$ es finito. En efecto, supongamos que $f(\bar{\pi}(x)) \in \mathbb{F}(D)$, entonces dado que $f(\bar{\pi}(x))e_n = f(\lambda_n)e_n$, si $f(\lambda_n) \neq 0$ entonces $e_n = \frac{1}{f(\lambda_n)} f(\bar{\pi}(x))e_n \in \operatorname{Ran}(f(\bar{\pi}(x)))$ y $\dim(\operatorname{Ran}(f(\bar{\pi}(x)))) < \infty$. De esta manera, obtenemos que el soporte de $f$ es finito. Esta observación motiva a considerar a $\mathbb{F}(D)$ como un álgebra de funciones diferenciables con soporte compacto.

# Bibliografía


[Connes] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.

[ReedSimon] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern Mathematical Physics, Vol I: Funcional Analysis*, Academic Press, San Diego, 1980.

[Schmüdgen] K. Schmüdgen, *Unbounded operator algebras and representation theory*, Birkhäuser, Basel, 1990.

[KlimSchm] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[Korogodsky] L. I. Korogodsky, *Representation of quantum algebras arising from non-compact quantum groups: quantum orbit method and super-tensor products*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, 1996.

______, *Complimentary series representations and quantum orbit method.* ArXiv: q-alg/9708026v1.

[KürstenWag] K.-D. Kürsten, E. Wagner, *An operator-theoretic approach to invariant integrals on quantum homogeneous* $\mathrm{SU}_{n,1}$*-spaces*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43**, 2007, 1–37.

[OsunaWag] O. Osuna Castro, E. Wagner, *Quantum moment map and invariant integration theory on quantum spaces*, Acta Polytechn. **51**, 2011, 29–32.

[Wagner] E. Wagner, *Hilbert space representations of some quantum algebras.* Dissertation, Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2002.