



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Acreción de Materia en simetría esférica

Tesis

que para obtener el título de

Maestro en Ciencias en el área de Física

presenta:

Eliana Yanet Chaverra Sánchez

Asesor:

Dr. Olivier Charles-Albert Sarbach
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

Morelia, Michoacán. Julio de 2011

A mi familia y a Max.

Agradecimientos

A Olivier Sarbach por la disponibilidad y el gran empeño que dedica al enseñar, a Thomas Zannias por sus numerosos preguntas y comentarios en nuestros seminarios, a Ulises Nucamendi por la ayuda incondicional desde mi llegada a Morelia, y a Néstor Ortiz por las muy agradables conversaciones de física.

Índice general

1. Introducción	7
2. Fluidos perfectos relativistas	9
2.1. Descripción general de los fluidos perfectos relativistas	9
2.2. Límite Newtoniano	12
2.3. La ecuación de estado para un gas de Fermi	14
2.4. La ecuación de estado politrópica	17
3. Acreción de materia en simetría esférica	19
3.1. Espacio-tiempos esféricamente simétricos	19
3.2. Fluidos perfectos esféricamente simétricos	21
3.3. Conservación de número de partículas	22
3.4. Conservación de la energía	24
3.5. Las ecuaciones para la acreción radial	26
4. Análisis del espacio fase	27
4.1. Consideraciones generales	27
4.2. Comportamiento para $x \rightarrow \infty$	31
4.3. Puntos críticos	33
4.4. La naturaleza del punto crítico	36
4.5. Extensión de las ramas estables e inestables	40
4.6. Comportamiento global de la rama física para $1 < \gamma \leq 5/3$	45
4.7. Comportamiento para $\gamma > 5/3$	46
4.7.1. El subcaso (a)	46
4.7.2. El subcaso (c)	47
5. Acreción de gas de Fermi	53
6. Acreción de polvo	59

7. Conclusiones 61

A. Apéndice 63

Capítulo 1

Introducción

En la presente tesis, estudiaremos la acreción estacionaria de materia por un agujero negro en simetría esférica, basados en el artículo de Michel [1]. El agujero negro recordemos, es el estado final del colapso gravitacional completo de una estrella muy masiva (mayor a tres masas solares). La acreción, es el proceso por el cual la materia cae hacia un objeto, en este caso a un agujero negro, por efectos del campo gravitacional. En una situación astrofísica realista, el agujero negro está rotando. Esta rotación hace que el agujero negro arrastre materia de sus alrededores (por ejemplo de una estrella) formando un disco llamado disco de acreción. Uno de los casos por el cual estos discos son de interés [2], es debido a que el gas cuando se acerca al agujero negro, las grandes velocidades que adquieren los discos de acreción cerca del horizonte hacen que la materia, por efectos de viscosidad, se caliente y emita rayos X. Esto permite observar el espectro y compararlo luego con modelos teóricos, y esperar de esta manera que se pueda observar y diferenciar los agujeros negros de estrellas de neutrones de manera indirecta.

Como indicamos arriba, en este trabajo, consideramos únicamente la acreción en simetría esférica. Esta simetría es un caso muy particular ya que con la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío obtenemos la métrica de Schwarzschild g . En este problema suponemos un fondo fijo donde la métrica es g y esto nos permite dejar de lado las ecuaciones de Einstein y resolver sólo las ecuaciones para el fluido. Esto se debe a que el fluido no deforma el espacio-tiempo debido a que se desprecian los efectos del fluido sobre la métrica ya que suponemos que la masa del gas es mucho menor que la masa del agujero negro. Estamos despreciando además en la descripción del fluido acrecido, efectos de viscosidad y producción de entropía. Con las suposiciones antes mencionadas, el problema a solucionar es: dado un baño de partículas en el infinito, ¿existe un único flujo radial, estacionario sobre el fondo de Schwarzschild que sea regular en el horizonte? Notamos que este modelo también se ha usado para entender la acreción de materia oscura, ver por ejemplo [3].

Bajo estas suposiciones, las ecuaciones del fluido se reducen al estudio de las curvas de nivel de una función $F_\mu(x, z)$, donde x y z se refieren al radio de área y a la densidad de partículas normalizadas. Entonces, se busca una curva de nivel que se puede representar globalmente de la forma $z = z(x)$, es decir, a cada radio de área le corresponde un único valor de la densidad. Esta solución global es física en el sentido que describe un flujo estacionario de acreción de la materia en el agujero negro. En esta tesis vamos a estudiar dichas soluciones físicas para diferentes ecuaciones de estado: la ecuación de estado politrópica, la ecuación de

estado para un gas de Fermi y la ecuación para un gas de polvo, es decir, donde la presión es cero.

Para estudiar las curvas de nivel, vamos a usar el teorema de las funciones implícitas y técnicas de los sistemas dinámicos, ver por ejemplo [4, 5] para referencias sobre estos temas. Para esto, definimos un campo vectorial cuyas curvas integrales generan las curvas de nivel. Como vamos a demostrar, este campo vectorial posee un punto crítico hiperbólico [5], con ramas estables e inestables correspondientes. Usando métodos globales para extender estas ramas probaremos que existe una única solución física al problema, dado una densidad de partículas en el infinito.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 2, vamos a dar la descripción general de los fluidos perfectos relativistas y el comportamiento de estos en el límite Newtoniano. Derivamos la ecuación de estado para el gas de Fermi, y basado en ella también motivamos la ecuación de estado politrópica. En el capítulo 3 vamos a ver las ecuaciones que describen la acreción estacionaria de materia en simetría esférica y las cantidades conservadas debidas a las simetrías del problema. En el capítulo 4 describimos el espacio de fase para las curvas de nivel de la función $F_\mu(x, z)$. Encontramos sus puntos críticos y analizamos de que tipo son (punto silla o extremo local), y qué representan para el sistema dinámico. Luego, se analizará el comportamiento global del sistema dinámico y se identificarán las soluciones físicas que describen el flujo de acreción radial. Por último, en los capítulos 5 y 6 vamos a ver la acreción estacionaria para el gas de Fermi y el polvo, respectivamente. Finalmente, en el apéndice describimos la linealización de un sistema dinámico alrededor de los puntos críticos y analizamos el flujo del problema linealizado para distintos casos.

Capítulo 2

Fluidos perfectos relativistas

En este capítulo analizaremos la descripción general de los fluidos perfectos relativistas (ver por ejemplo [6]) en un espacio-tiempo dado. En la sección 2.1, veremos qué suposiciones físicas se tienen que hacer para la descripción de dichos fluidos, y veremos que pasa con las ecuaciones de movimiento del fluido relativista cuando vamos al límite Newtoniano. En la sección 2.2, estudiaremos el comportamiento del fluido para el gas de Fermi. En este caso, encontraremos la ecuación de estado que describe este gas. Por último, en la sección 2.3 de este capítulo, definiremos la ecuación de estado politrópica y miraremos cómo se relaciona con la ecuación de estado del gas de Fermi.

2.1. Descripción general de los fluidos perfectos relativistas

Consideramos un espacio-tiempo (M, g) dado. El ejemplo más simple, es el espacio de Minkowski, donde $M = \mathbb{R}^4$ y g es

$$g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

donde c es la velocidad de la luz. Otro ejemplo de un espacio-tiempo (M, g) es el agujero negro de Schwarzschild que se discutirá en el capítulo 3.

Para el caso que queremos analizar, el fluido perfecto relativista, se desprecian los efectos de viscosidad y el transporte de calor. Las cantidades que describen este fluido son n (la densidad de partículas), ρ (la densidad de energía), p (la presión) medidos por un observador que se está moviendo con el fluido y u^μ (la cuadrivelocidad). Las funciones n , ρ , p y el campo vectorial $u = u^\mu \partial_\mu$ son cantidades sobre (M, g) . Por definición u es tal que $g(u, u) = -c^2$.

Ahora, la dinámica del fluido está descrita por las ecuaciones de movimiento [6]

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.2}$$

donde la ecuación (2.1) viene de la conservación del número de partículas y la ecuación (2.2) viene del acoplamiento entre la métrica y los campos materiales. Esto es,

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) son las ecuaciones de Einstein, $G^{\mu\nu}$ el tensor de Einstein y G_N es la constante gravitacional Newtoniana.

Por las identidades de Bianchi,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0,$$

entonces, de (2.3) tenemos

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

La solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío y simetría esférica es la métrica de Schwarzschild, ver por ejemplo [7]. En esta sección, suponemos un fondo fijo cuya métrica de fondo es g . Podemos suponer que el fluido no deforma significativamente el espacio-tiempo por sí mismo. Entonces, no es necesario resolver las ecuaciones de Einstein, podemos despreciar la autogravedad del fluido y fijamos la métrica. Para el fluido perfecto, la densidad de corriente de las partículas J^μ y el tensor de energía-impulso $T^{\mu\nu}$ son

$$J^\mu := nu^\mu, \quad (2.4)$$

$$T^{\mu\nu} := (p + \rho)u^\nu u^\mu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

respectivamente.

Para encontrar el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento del fluido, contraemos (2.2) una vez con u_ν y otra vez con el proyector $h_\nu^\alpha := \delta_\nu^\alpha + \frac{u^\alpha u_\nu}{c^2}$ que proyecta en dirección ortogonal a u . Los resultados de la contracción, son las ecuaciones relativistas de continuidad y de Euler dadas por

$$\nabla_u \rho + (\rho + p)\theta = 0 \quad (2.6)$$

y

$$h_\mu{}^\nu \nabla_\nu p + (\rho + p)a_\mu = 0, \quad (2.7)$$

respectivamente, donde $\theta := \nabla_\mu u^\mu$ es la expansión y $a_\mu := \nabla_u u_\mu$ es la aceleración de un elemento de fluido.

Tenemos además, otra ecuación de la conservación del número de partículas.

$$\nabla_u n + n\theta = 0 \quad (2.8)$$

que viene de $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Despejando θ de (2.6) y reemplazandola en (2.8) obtenemos,

$$\nabla_u \rho - f \nabla_u n = 0, \quad (2.9)$$

donde f es la entalpía por partícula, definida por

$$f := \varepsilon + \frac{p}{n}$$

con $\varepsilon := \frac{E}{n}$ la energía por partícula.

Tenemos para nuestro sistema 5 ecuaciones independientes (1 ecuación de (2.6), 3 ecuaciones de (2.7) y 1 ecuación de (2.8)) y 6 cantidades a encontrar, ρ , p , n y u^μ . Entonces nos falta una ecuación para cerrar el sistema. Una posibilidad para la sexta ecuación, es dar una ecuación de estado en la forma

$$p = p(\rho), \quad (2.10)$$

y considerarla junto con las 4 ecuaciones (2.6) y (2.7). De esta manera se obtiene un sistema cerrado para las 5 cantidades ρ , p y u^μ .

Otra posibilidad es dar funciones,

$$\rho = \rho(n), \quad p = p(n).$$

Para esta última, vemos que tenemos 7 ecuaciones y 6 cantidades desconocidas. Entonces, no todas las ecuaciones son independientes. Veamos porque. Tomemos un elemento de fluido y supongamos que es válida la primera ley de la termodinámica en este elemento. Como es válida la primera ley, cada elemento de fluido se mantiene en equilibrio durante su evolución. Esto es

$$d\varepsilon = Tds - pdv, \quad (2.11)$$

donde T es la temperatura, s la entropía y v el volumen del elemento. Este último se relaciona con la densidad de partículas de la forma $v = 1/n$.

La ecuación (2.11) es equivalente a

$$d\varepsilon - p \frac{dn}{n^2} = Tds \quad (2.12)$$

y a la vez,

$$d\rho - fdn = nTds. \quad (2.13)$$

Para un cambio infinitesimal, el elemento de fluido se mantiene en equilibrio. Las derivadas totales de (2.13) se pueden cambiar por derivadas del tiempo de la forma

$$\nabla_u \rho - f \nabla_u n = nT \nabla_u s. \quad (2.14)$$

Con esta suposición del fluido en equilibrio, para que las ecuaciones (2.14) y (2.9) coincidan,

$$\nabla_u s = 0.$$

Esto significa que no hay producción de entropía a lo largo de las trayectorias del fluido. Vemos entonces que no se pueden elegir las funciones $\rho(n)$ y $p(n)$ de manera arbitraria. Se

requiere que se cumpla la primera ley de la termodinámica, $d\rho = f dn$.

Otra cantidad a definir, es la de la velocidad del sonido V_s que será de mucha utilidad en los siguientes capítulos. La definición de V_s es

$$\left(\frac{V_s}{c}\right)^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (2.15)$$

y en general,

$$\left(\frac{V_s}{c}\right)^2 = \frac{d \log(f)}{d \log(n)},$$

porque, de la primera ley y de $ds = 0$,

$$df = d\varepsilon + d\left(\frac{p}{n}\right) = -pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(p\frac{1}{n}\right) = \frac{dp}{n},$$

de tal manera que

$$\frac{d \log f}{d \log n} = \frac{n}{f} \frac{dp}{ndn} = \frac{1}{f} \frac{dp}{dn} = \frac{dp}{d\rho}.$$

2.2. Límite Newtoniano

Para conectar las ecuaciones dinámicas del fluido relativista (2.6)-(2.8) al caso Newtoniano, vamos a tomar el límite no-relativista de dichas ecuaciones.

En el límite Newtoniano, existe una carta local de (M, g) tal que

1. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, (la métrica $g_{\mu\nu}$ es casi plana y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski),
2. $\frac{1}{c}|\partial_t h_{\mu\nu}| \ll |\partial_i h_{\mu\nu}|$, con $i=1,2,3$, (casi estacionaria),
3. $p \ll \rho$, (velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, $|\vec{v}| \ll c$).

De manera más precisa, suponemos $h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^2)$, $\frac{v}{c} = O(\varepsilon)$, con un parámetro pequeño ε .

Como vamos a ver, las ecuaciones relativistas de continuidad y de Euler, se reducen a la ecuación de continuidad y a las ecuaciones de Euler de la hidrodinámica clásica (sin viscosidad). Con $\rho \approx c^2 \rho_m$, donde ρ_m es la densidad de masa y, los índices μ y ν se refieren a las componentes espaciales y temporales. En (2.6) tenemos

$$\nabla_u \rho = u^\mu \nabla_\mu \rho = u^\mu \partial_\mu \rho,$$

donde $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$. En nuestra aproximación, la condición $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$ implica que $\gamma = 1 + O(\varepsilon^2)$. Tenemos además, el término de la expansión

$$\theta = \nabla_\mu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{|g|} u^\mu).$$

Expandiendo este último término tenemos

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h} \frac{\partial}{\partial x^0} [(1 + O(\varepsilon^2)) c] + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h} \frac{\partial}{\partial x^i} [(1 + O(\varepsilon^2)) v^i] = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + O(\varepsilon^3).$$

Dividiendo a θ entre γ ,

$$\frac{\theta}{\gamma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + O(\varepsilon^2).$$

Entonces despreciando términos cuadráticos en ε^2 , llegamos a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

De (2.7) miremos la componente i

$$h^{i\nu} \nabla_\nu p + (\rho + p) a^i = 0, \quad (2.16)$$

como $p \ll \rho$ entonces,

$$h^{i\nu} \nabla_\nu p + \rho a^i = 0. \quad (2.17)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} a^i &= \gamma^2 c^2 \eta^{il} \left[\frac{v^k}{c} (h_{0l,k} - h_{0k,l}) + \frac{v^j}{c} (h_{l0,j} - h_{j0,l}) + \frac{v^j v^k}{c^2} (h_{jl,k} + h_{lk,j} - h_{jk,l}) \right] \\ &+ \frac{1}{c^2} \partial^i \Phi + \gamma \frac{\partial}{\partial t} (\gamma v^i) + \gamma v^j \partial^j (\gamma v^i), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $\Phi = -\frac{c^2 h_{00}}{2}$, es el potencial gravitacional Newtoniano. El término entre corchetes lo despreciamos frente a los otros porque, $h \sim \varepsilon^2$ y $v/c \sim \varepsilon$ entonces, el corchete es del orden ε^3 y los otros términos van como ε^2 . Reemplazando esta aproximación en (2.18) llegamos a

$$a^i \approx \frac{1}{c^2} \partial^i \Phi + \gamma \frac{\partial}{\partial t} (\gamma v^i) + \gamma v^j \partial^j (\gamma v^i),$$

y lo mismo ocurre para $h^{i\nu} \nabla_\nu p$ entonces,

$$h^{i\nu} \nabla_\nu p \approx \partial^i p.$$

Con las aproximaciones vistas antes en (2.7), llegamos a la ecuación de Euler de la hidrodinámica clásica

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} \Phi \right) = -\vec{\nabla} p.$$

En resumen, las ecuaciones en el límite Newtoniano son :

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0, \quad (\text{conservación del número de partículas}) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (\text{conservación de la masa}) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi. \quad (\text{ecuaciones de Euler no-relativista}) \quad (2.21)$$

2.3. La ecuación de estado para un gas de Fermi

Como ejemplo de ecuación de estado vamos a tratar el caso del gas de Fermi. Esto es, un gas de partículas relativistas libres, de espín $1/2$ y masa m cada una. Por simplicidad, asumimos el gas dentro de una caja cúbica de lado $L_x = L_y = L_z = L$ y además, asumimos condiciones de frontera periódicas. El cubo de lado L es grande a nivel microscópico pero, pequeño a nivel macroscópico.

Calculemos la energía total de los fermiones que se encuentran en el cubo a temperatura cero. Para esto, vamos a recurrir al principio de exclusión de Pauli (dos fermiones no pueden coexistir en un mismo estado cuántico). Cada fermión contribuye con una energía relativista

$$\varepsilon(\underline{k}) = c\sqrt{(\hbar\underline{k})^2 + m^2c^2}, \quad (2.22)$$

y debido a las condiciones de frontera periódicas, esto determina los posibles valores del número de onda \underline{k} ,

$$\underline{k} \in \Lambda^* := \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3.$$

La energía total para los fermiones dentro del cubo es,

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\varepsilon(0, 0, 0) + \varepsilon(2\pi/L, 0, 0) + 2\varepsilon(0, 2\pi/L, 0) + 2\varepsilon(0, 0, 2\pi/L) + 2\varepsilon(2\pi/L, 2\pi/L, 0) + \dots \\ &= 2 \sum_{\underline{k} \in \Lambda^*, |\underline{k}| < k_f} \varepsilon(\underline{k}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde k_f es el número de onda máximo, llamado número de onda de Fermi, que se relaciona abajo con el número de partículas N dentro de la caja.

Reemplazando (2.22) en (2.23),

$$E_0 = 2 \sum_{\underline{k} \in \Lambda^*, |\underline{k}| < k_f} c\sqrt{(\hbar\underline{k})^2 + m^2c^2}. \quad (2.24)$$

El factor 2 viene del hecho que hay 2 estados cuánticos (correspondientes a los valores de espín $\pm 1/2$) para cada $\underline{k} \in \Lambda^*$. Los dos primeros fermiones se encuentran en el estado base, los dos siguientes en el primer estado excitado y así sucesivamente debido al principio de exclusión de Pauli.

Con la energía total dentro del cubo podemos definir ahora la densidad de energía fermiónica

de la siguiente manera:

$$\rho(n) := \frac{E_0}{L^3}, \quad (2.25)$$

donde $n = \frac{N}{L^3}$ es la densidad de partículas. En el límite continuo $L \rightarrow \infty$ obtenemos de esta manera

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{L^3} &= \frac{2c}{8\pi^3} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda^*, |\mathbf{k}| < k_f} \sqrt{(\hbar \mathbf{k})^2 + m_f^2 c^2} \\ &=_{L \rightarrow \infty} \frac{c}{4\pi^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_f} \sqrt{(\hbar \mathbf{k})^2 + m_f^2 c^2} d^3 k. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Integrando el lado derecho de la ecuación (2.26) llegamos a la siguiente expresión para la densidad

$$\rho(n) = \frac{c\hbar}{8\pi^2 \lambda_c^4} [x_f \sqrt{x_f^2 + 1} (2x_f^2 + 1) - \operatorname{arcsinh}(x_f)], \quad (2.27)$$

con $x_f = \lambda_c k_f$, λ_c es definida como la longitud de onda de Compton dada por

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}.$$

Para relacionar n con x_f y k_f , notamos que

$$N = 2 \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda^*, |\mathbf{k}| < k_f} 1, \quad (2.28)$$

y tomando el límite continuo

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{L^3} =_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_f} d^3 k \\ &= \frac{1}{3\pi^2} k_f^3 = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{x_f}{\lambda_c}\right)^3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Con la densidad de energía podemos encontrar la presión suponiendo equilibrio termodinámico local y ausencia de producción de entropía. Para esto, calculamos primero

$$f = \frac{d\rho}{dn} = mc^2 \sqrt{1 + x_f^2} \quad (2.30)$$

y esto implica $\frac{p}{n} = f - \varepsilon$, entonces

$$p = nf - \rho$$

con $\rho = n\epsilon$ la densidad de energía. Entonces, la presión es,

$$p(n) = mc^2 n \frac{x_f(2x_f^2 - 3)\sqrt{1+x_f^2} + 3\operatorname{arcsenh}(x_f)}{8x_f^3}. \quad (2.31)$$

En resumen, obtenemos para un gas de Fermi,

- $\rho(n) = \frac{3}{8}mc^2 n \frac{1}{x_f^3} [x_f \sqrt{1+x_f^2}(1+2x_f^2) - \operatorname{arcsenh}(x_f)],$
- $p(n) = \frac{1}{8}mc^2 n \frac{1}{x_f^3} [x_f(2x_f^2 - 3)\sqrt{1+x_f^2} + 3\operatorname{arcsenh}(x_f)],$
- $f(n) = mc^2 \sqrt{1+x_f^2},$

con $x_f = \lambda_c(3\pi^2 n)^{1/3}$.

Ahora vamos a analizar límites particulares:

- (i) $x_f \ll 1$ (Límite no-relativista. Significa que todas las partículas satisfacen $|\vec{v}| \ll c$): sabemos que x_f es proporcional a $n^{1/3} \frac{\hbar}{mc}$ pues, $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$. Si n es muy pequeño (densidad de partículas pequeña) entonces todo el término es pequeño.

Con lo anterior, la expansión de Taylor para las expresiones $\sqrt{1+x_f^2}$ y $\operatorname{arcsenh}(x_f)$ que están dentro de las ecuaciones (2.27) y (2.31) para la densidad de partículas y la presión son:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_f^2} &= 1 + \frac{1}{2}x_f^2 + O(x_f^4), \\ \operatorname{arcsenh}(x_f) &= x_f - \frac{1}{6}x_f^3 + O(x_f^5), \end{aligned}$$

y reemplazándolas en la ecuación (2.27) tenemos

$$\rho(n) = mc^2 n \left[1 + \frac{3}{10} \lambda_c^2 (3\pi^2 n)^{2/3} + O(x_f^4) \right] \quad (2.32)$$

y

$$p(n) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} n^{5/3} [1 + O(x_f^2)], \quad (2.33)$$

la densidad de energía y la presión en el límite no-relativista. Aquí $mc^2 = \epsilon_0$ es la energía en reposo por partícula. Notamos que $\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}p = \epsilon_0 n + \frac{3}{2}p$.

- (ii) $x_f \gg 1$ (Límite ultra-relativista. Número de partículas grande y la mayoría de los fermiones tiene velocidades cercanas a c): Las aproximaciones para este caso son

$$x_f(1+2x_f^2)\sqrt{x_f^2+1} \approx 2x_f^4,$$

y

$$\operatorname{arcsenh}(x_f) \approx \log x_f,$$

que al reemplazarlas en (2.27) y (2.31) obtemos

$$\rho(n) = \frac{c\hbar}{8\pi^2\lambda^4} 2x_f^4 = \frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3}c\hbar n^{4/3}, \quad (2.34)$$

y

$$p(n) = \frac{1}{4}(3\pi^2)^{1/3}c\hbar n^{4/3}, \quad (2.35)$$

la densidad de energía y la presión en el límite ultra-relativista. Notamos que $\rho = 3p$.

2.4. La ecuación de estado politrópica

En la sección anterior, encontramos para el gas de Fermi,

- $p \sim n^{4/3}$ en el límite ultra-relativista,
- $p \sim n^{5/3}$ en el límite no-relativista.

Proponemos entonces una ecuación de la forma

$$p(n) = Kn^\gamma, \quad (2.36)$$

que es la ecuación de estado politrópica donde $K > 0$ y $\gamma > 1$ son constantes. Con esto, vemos que para el caso no-relativista, $\gamma = \frac{5}{3}$ y $K = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m}$ y para el caso ultra-relativista, $\gamma = \frac{4}{3}$ y $K = \frac{(3\pi^2)^{1/3}c\hbar}{4}$.

Encontremos la forma de la densidad de energía a partir de la ecuación (2.36). Usando la primera ley con $ds = 0$,

$$d\epsilon = Kn^{\gamma-2}dn, \quad (2.37)$$

integrando y multiplicando por n llegamos a

$$\begin{aligned} \rho = n\epsilon &= \left(\frac{K}{\gamma-1}n^{\gamma-1} + \epsilon_0 \right) n \\ &= \frac{p}{\gamma-1} + \epsilon_0 n, \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde ϵ_0 es la energía de reposo por partícula.

En resumen para la ecuación de estado politrópica encontramos que

- $\epsilon(n) = \frac{K}{\gamma-1}n^{\gamma-1} + \epsilon_0$,
- $\rho(n) = \frac{p}{\gamma-1} + \epsilon_0 n$,
- $f(n) = \epsilon_0 + \frac{K\gamma n^{\gamma-1}}{\gamma-1}$,
- $\frac{V_s^2(n)}{c^2} = \frac{\gamma(\gamma-1)Kn^{\gamma-1}}{\epsilon_0(\gamma-1) + K\gamma n^{\gamma-1}}$.

Capítulo 3

Acreción de materia en simetría esférica

En el presente capítulo vamos a derivar las ecuaciones de movimiento para un fluido perfecto con simetría esférica que representa el material acretado por un agujero negro. El fluido perfecto es estacionario. Se desprecia la corrección que el fluido perfecto induce sobre la métrica, porque suponemos que su masa es mucho menor que la masa del agujero negro. Otra suposición es, el agujero negro es no-rotante y esto implica que la métrica que describe el campo gravitacional es la métrica de Schwarzschild.

3.1. Espacio-tiempos esféricamente simétricos

Considérese un espacio-tiempo (M, g) , donde M es una variedad diferenciable de dimensión cuatro y g es una métrica Lorenziana sobre M . En este trabajo se requiere que (M, g) sea esféricamente simétrica, esto significa que la variedad es de la forma $M = \tilde{M} \times S^2$ de tal manera que (\tilde{M}, \tilde{g}) es una variedad pseudo-Riemmaniana de dimensión dos y S^2 es la 2-esfera unitaria con métrica $\hat{g} = d\vartheta^2 + \text{sen}^2 \vartheta d\varphi^2$ en coordenadas polares (ϑ, φ) . Además, $r \geq 0$ es una función real sobre \tilde{M} definida de la siguiente manera: Sea $p \in \tilde{M}$, y sea $S_p := \{p\} \times S^2$ la esfera que pasa por p . Entonces por definición, $r(p)$ es tal que el área de S_p es $A(p) = 4\pi r^2(p)$, es decir, $r(p) = \sqrt{\frac{A(p)}{4\pi}}$, $r(p)$ es llamado radio de área.

Para el problema que vamos a estudiar, la métrica g es la de Schwarzschild, donde

$$\tilde{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (cdt)^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad r > 2m. \quad (3.1)$$

Entonces, \tilde{g} posee el vector de Killing estático, $k = \frac{\partial}{\partial t}$. Esta métrica es la solución más general en simetría esférica a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, ver por ejemplo [7]. La constante m , es proporcional a la masa M del objeto central y es de la forma

$$m = \frac{GM}{c^2},$$

siendo G la constante gravitacional y c la velocidad de la luz.

En lo que sigue, usamos unidades tales que $c = 1$.

Veamos que pasa en (3.1) cuando analizamos los puntos $r \rightarrow \infty$, $r = 2m$ y $r = 0$:

- $r \rightarrow \infty$, $\tilde{g} \rightarrow -dt^2 + dr^2$ y $g \rightarrow \eta$ (la métrica de Schwarzschild converge a la métrica de Minkowski). Entonces, el espacio-tiempo es asintóticamente plano.
- $r = 2m$ (singularidad en la componente g_{rr}).
- $r = 0$ (singularidad en la componente g_{tt}).

¿Qué tipo de singularidades son estas?, ¿singularidades de la geometría o singularidades de las coordenadas?

Para $r = 0$, la singularidad puede ser encontrada calculando el escalar de curvatura $I = R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ donde tenemos que para Schwarzschild, el escalar es

$$I = \frac{48m^2}{r^6}.$$

Para

$$r \rightarrow 0, I \rightarrow \infty,$$

entonces, $r = 0$ es una singularidad de la geometría. La métrica no puede ser regular en $r = 0$. Para $r = 2m$, se tiene una singularidad de las coordenadas, no de la geometría. Para ver esto, introducimos las coordenadas $(T, r, \vartheta, \varphi)$ de Eddington-Finkelstein donde $T = t + r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|$. En estas coordenadas, la métrica se ve como

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dT^2 + 2dTdr + r^2 \hat{g}. \quad (3.2)$$

Vemos entonces que en $r = 2m$ la singularidad desaparece. Físicamente el espacio-tiempo (M, g) con $g = \tilde{g} + r^2 \hat{g}$ y \tilde{g} como (3.1) describe un agujero negro, en donde $r = 2m$ es el radio del horizonte de eventos, también llamado radio de Schwarzschild.

En forma más general, podemos considerar la dos-métrica

$$\tilde{g} = -S(r)^2 N(r) dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)}, \quad (3.3)$$

donde $S, N : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones suaves con $S > 0$ y

- $N(r_H) = 0$,
- $N(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$,
- $N(r) > 0$, $r > r_H$.

¿Cuál es el significado geométrico de N y S ?

$$N = \tilde{g}^{rr} = \tilde{g}(dr, dr),$$

y

$$S^2 N = -\tilde{g}(k, k) = -\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

entonces N es la norma cuadrada de la diferencial dr del radio de área y $-S^2 N$ es la norma cuadrada del vector de Killing $k = \frac{\partial}{\partial t}$. Para el caso de Schwarzschild: $S = 1$ y $N = 1 - \frac{2m}{r}$, pero para espacio-tiempos esféricamente simétricos en la presencia de materia las funciones S y N podrían tomar formas más generales.

3.2. Fluidos perfectos esféricamente simétricos

En esta sección consideraremos (M, g) definido anteriormente y las ecuaciones (2.1) y (2.2). Por la simetría esférica de nuestro problema, la cuadrivelocidad solamente tiene componentes radial y temporal

$$(u^\mu) = (u^t, u^r, 0, 0),$$

es decir, u es tangente a \tilde{M} . Además, u^t , u^r , n , ρ , p , por describir un flujo estacionario solamente dependen de r .

La pregunta es ¿cómo definir una velocidad radial del flujo? Queremos una definición covariante, independiente de coordenadas locales. Una posibilidad es definirla como $u^r = dr(u)$. La definición es covariante porque r lo es, y también dr y u , de tal manera que $dr(u)$ es una función bien definida sobre (M, g) . Pero, ¿qué significa físicamente? En el caso de Minkowski la dos-métrica tiene la forma

$$\tilde{g} = -dt^2 + dr^2,$$

y $(u^a) = \gamma(1, \beta)$, donde β es la velocidad radial con respecto a observadores inerciales que se mueven a lo largo de $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. De esto, vemos que $u^r = \gamma\beta \neq \beta$, entonces u^r no es buena definición de velocidad, porque incluso puede ser mayor que la velocidad de la luz.

El caso anterior (de Minkowski) motiva a expandir a u en una base ortonormal preferida, una base adaptada al vector de Killing $k = \frac{\partial}{\partial t}$ fuera del horizonte (en el horizonte, el vector de Killing es nulo $\tilde{g}(k, k) = 0$).

Sea $\hat{k} = \frac{1}{S(r)N(r)}k$ y otro campo vectorial \hat{l} sobre \tilde{M} tal que

$$\tilde{g}(\hat{k}, \hat{l}) = 0,$$

$$\tilde{g}(\hat{l}, \hat{l}) = 1,$$

$$\tilde{g}(\hat{k}, \hat{k}) = -1$$

y

$$\hat{l}[r] = dr(\hat{l}) > 0.$$

Entonces $\{\hat{k}_p, \hat{l}_p\}$ es una base ortonormal del espacio tangente $T_p\tilde{M}$ para cada $r(p) > r_H$. Para $r > r_H$, expandimos

$$u = \gamma(\hat{k} + \beta\hat{l}),$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $|\beta| < 1$.

En Minkowski, $S(r) = N(r) = 1$; por lo tanto $\hat{k} = \frac{\partial}{\partial t}$ y $\hat{l} = \frac{\partial}{\partial r}$ y

$$u = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

entonces β es la velocidad radial. En general, físicamente, β es la velocidad radial medida por un observador estacionario que se mueve sobre una curva integral de \hat{k} .

¿Cuál es la relación entre las dos definiciones anteriores? Para $r > r_H$ en coordenadas de Schwarzschild, $\hat{k} = \frac{1}{S(r)\sqrt{N(r)}} \frac{\partial}{\partial t}$ y $\hat{l} = \sqrt{N(r)} \frac{\partial}{\partial r}$, entonces

$$u = \gamma \left(\frac{1}{S(r)\sqrt{N(r)}} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \sqrt{N(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

de donde se tiene que $u^r = \gamma\beta\sqrt{N(r)}$, otra confirmación que la u^r es invariante geométrico.

¿Qué pasa en $r \rightarrow r_H$? Puesto que $N \rightarrow 0$ y si $u^r \neq 0$ entonces $\gamma\beta \rightarrow \infty$ y esto implica que $\beta \rightarrow -1$ pero, dado que β es acotada ($|\beta| < 1$) entonces, β no está bien definida y esto se debe a que el vector de Killing en el horizonte, es un vector nulo, $\tilde{g}(k, k) = 0$.

En conclusión, con la primera idea para definir una velocidad radial, tenemos que $u^r = dr(u)$ está bien definida geoméricamente incluso en el horizontes pero, cuando vamos al límite de Minkowski, vemos que u^r no es una buena definición de la velocidad. Con la segunda idea, cuando expandimos u en la base ortonormal adaptada al vector de Killing, se tiene una definición que mide la velocidad radial con respecto a los observadores de Killing, pero la definición se rompe en el horizonte, debido a que el vector de Killing k es nulo sobre el horizonte $r = r_H$.

3.3. Conservación de número de partículas

En esta sección analizamos la ecuación de conservación de la densidad de corriente

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (3.4)$$

para un fluido esféricamente simétrico estacionario sobre un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Expandiendo la derivada covariante,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J^\mu &= \partial_\mu J^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu} J^\nu \\ &= \partial_\mu J^\mu + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|g|} \right) J^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{|g|} J^\mu), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel contraídos y, están dados en términos de la

métrica del espacio-tiempo por

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\{g_{\mu\gamma,\nu} + g_{\gamma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\gamma}\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{|g|}, \quad (3.6)$$

donde $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\tilde{g}|}r^2 \sin\vartheta$. En nuestro caso, el problema que estamos considerando es un agujero negro con simetría esférica, entonces la métrica que describe la geometría radial es (3.1) o de manera mas general (3.3). Puesto que $J^\mu = nu^\mu$ no tiene componentes angulares, y que $\sqrt{\tilde{g}}J^\mu$ no depende de t , la ecuación (3.5) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{|g|}J^r) = 0, \quad (3.7)$$

con

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|\tilde{g}|}r^2 \sin\vartheta = S(r)r^2 \sin\vartheta.$$

Integrando la ecuación anterior con $J^r = nu^r$ encontramos

$$S(r)r^2nu^r = c_1, \quad (3.8)$$

donde c_1 es una constante de integración.

Para entender la interpretación física de c_1 , integramos la ley de conservación (3.4) sobre un volumen $\Omega = [T_1, T_2] \times [2m, R] \times S^2$ en el espacio tiempo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla_{\mu}J^{\mu} \\ &= (T_2 - T_1)4\pi \int_{2m}^R \frac{d}{dr}(r^2S(r)nu^r)dr \\ &= (T_2 - T_1)4\pi r^2S(r)nu^r|_{2m}^R. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definiendo el número de partículas que pasa por la superficie $r = R = \text{const}$ por unidad de tiempo como

$$j_n := 4\pi r^2S(r)nu^r = \text{const} = 4\pi c_1, \quad (3.10)$$

y de (3.9) llegamos a

$$j_n = 4\pi r^2S(r)nu^r|_R = 4\pi r^2S(r)nu^r|_{2m}.$$

Tenemos entonces que el flujo de partículas que pasa a través de la superficie $r = R$ ($R \gg 2m$) es igual al flujo de partículas que pasa a través de la superficie $r = 2m$ (el horizonte), como se esperaba de la conservación de partículas. Concluimos que la constante c_1 en (3.8) es directamente proporcional a dicho flujo.

3.4. Conservación de la energía

A continuación, analizamos las implicaciones de la ecuación,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.11)$$

donde el tensor de momento-energía es

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

La divergencia covariante es

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha}. \quad (3.13)$$

Por ser una ecuación vectorial y no escalar, no podemos integrar la ecuación (3.13) como lo hicimos con (3.4). Entonces para obtener una ecuación escalar que podemos integrar, vamos a contraer primero la ecuación (3.13) con el vector de Killing $k = \frac{\partial}{\partial t}$:

$$k_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (k_\nu T^{\mu\nu}) - T^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu, \quad (3.14)$$

pero el segundo término del lado derecho se cancela porque $T^{\mu\nu}$ es simétrico en μ y ν mientras que de la ecuación de Killing ($\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$), el otro término es antisimétrico en los mismos índices. Por lo tanto,

$$\nabla_\mu (-k^\nu T_\nu^\mu) = \nabla_\mu P^\mu = 0, \quad (3.15)$$

con $P^\mu := -k^\nu T_\nu^\mu$.

Como en el caso de la conservación del flujo de partículas, la ecuación (3.15) se reduce a la ley de conservación radial simple

$$\partial_r (S(r)r^2 P^r) = 0, \quad (3.16)$$

lo que implica que

$$S(r)r^2 P^r = \text{const} = c_2, \quad (3.17)$$

con una constante c_2 , donde

$$P^r = -(\rho + p)u_t u^r. \quad (3.18)$$

Para encontrar a u_t en función de u^r usamos

$$u^r u_r + u^t u_t = -1, \quad (3.19)$$

$$u_r = g_{rr} u^r = \frac{1}{N(r)} u^r, \quad (3.20)$$

$$u^t = g^{tt}u_t = -\frac{1}{S(r)^2 N(r)}u_t. \quad (3.21)$$

Reemplazando (3.20) y (3.21) en (3.19) obtenemos u_t

$$u_t = -S(r)\sqrt{(u^r)^2 + N(r)}.$$

Sustituyendo u_t en (3.18)

$$P^r = S(r)(\rho + p)u^r \sqrt{(u^r)^2 + N(r)}. \quad (3.22)$$

Para encontrar el significado de la constante c_2 , integramos (3.15)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla_{\mu} P^{\mu} \\ &= (T_2 - T_1)4\pi \int_{2m}^R \frac{d}{dr} (r^2 S(r) P^r) dr \\ &= (T_2 - T_1)4\pi r^2 S(r) P^r \Big|_{2m}^R, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde el flujo de energía se define como

$$j_{\varepsilon} := 4\pi r^2 S(r) P^r = \text{const} = 4\pi c_2 \quad (3.24)$$

y de (3.23) llegamos a

$$4\pi r^2 S(r) P^r \Big|_R = 4\pi r^2 S(r) P^r \Big|_{2m}.$$

Entonces el flujo de energía que pasa a través de la superficie $r = R$ ($R \gg 2m$) es igual al flujo de energía que pasa a través de la superficie $r = 2m$ (el horizonte). Concluimos que la constante c_2 en (3.17) es directamente proporcional a dicho flujo.

Hasta ahora, solamente analizamos las componentes de $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ paralelas a k , pero ¿qué pasa con las otras componentes? Podemos contraer con u . En este caso, la ecuación que obtenemos es equivalente a la ecuación para la conservación del número de partículas, como vimos en la sección 2.1. Luego, podemos contraer $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ con los tres generadores $l^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, de las rotaciones sobre la esfera (ver, por ejemplo, la ecuación (3.1) en [8]),

$$l^{(1)} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \varphi}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad l^{(2)} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad y \quad l^{(3)} = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Esta es la base de vectores que generan la rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Lo que obtenemos de la contracción con estos vectores es la conservación de las componentes del momento angular. Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sqrt{|\tilde{g}|} l_{\nu}^{(j)} T^{r\nu}) = 0,$$

entonces

$$r^2 \sqrt{|\tilde{g}|} l_\nu^{(j)} T^{r\nu} = \text{const.}$$

Pero en nuestro caso, $T^{r\nu} = 0$ porque las componentes angulares de u son cero.

En conclusión, de la ecuación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ tenemos 4 ecuaciones, que al contraerlas con los vectores $k, u, l^{(j)}$, se obtiene la conservación de 5 cantidades físicas. Estas son, la conservación de la energía, la conservación del número de partículas, y las tres componentes del momento angular. En nuestro caso, las componentes del momento angular son triviales (iguales a cero) pues el flujo es radial.

3.5. Las ecuaciones para la acreción radial

Reemplazando (3.22) en (3.17) y dividiendo entre (3.8) obtenemos

$$\frac{S^2(r)r^2 u^r (\rho + p) \sqrt{(u^r)^2 + N(r)}}{S(r)r^2 u^r n} = \frac{j_\varepsilon}{j_n} = \text{const.}, \quad (3.25)$$

cancelando términos y elevando al cuadrado

$$f^2(n) S^2(r) [(u^r)^2 + N(r)] = \left(\frac{j_\varepsilon}{j_n} \right)^2 = \text{const.}, \quad (3.26)$$

donde recordamos que $f(n) = \frac{\rho + p}{n}$ es la entalpía por partícula. Para la métrica de Schwarzschild, $S(r) = 1$ y $N(r) = 1 - \frac{2m}{r}$, por lo tanto las ecuaciones que determinan la acreción estacionaria están dadas por el sistema

$$r^2 n(r) u^r(r) = \frac{j_n}{4\pi} = \text{const.}, \quad (3.27)$$

$$f(n)^2 \left[1 - \frac{2m}{r} + (u^r)^2 \right] = \left(\frac{j_\varepsilon}{j_n} \right)^2 = \text{const.}, \quad (3.28)$$

donde $n(r)$ y $u^r(r)$ son las desconocidas, representando la densidad de partículas y la velocidad radial, y donde j_n y j_ε son el flujo de partículas y de energía, respectivamente.

Capítulo 4

Análisis del espacio fase

En este capítulo, primero expresaremos las ecuaciones para la acreción radial en términos de cantidades adimensionales. Esto nos simplifica las ecuaciones y nos facilita el trabajo cuando queremos hacer un análisis sobre el comportamiento de las soluciones. Reduciremos el problema al análisis de las curvas de niveles de una función $F_\mu(x, z)$ de dos variables, donde x y z representan el radio de área y la densidad de partículas, respectivamente. Lo que queremos, es una curva de nivel que se puede escribir globalmente de la forma $z = z(x)$, donde $z(x)$ es una función diferenciable en x definida para todo x en y fuera del horizonte. Esto es, para cada radio x dado existe un único valor de la densidad $z(x)$, y este valor depende suavemente de x .

Para esto, estudiamos primero los puntos críticos de $F_\mu(x, z)$, esto es, donde $\nabla F_\mu(x, z) = 0$. Estos puntos son de interés porque, son puntos donde el teorema de funciones implícitas ya no es aplicable. Por ejemplo, si uno de los puntos críticos es un punto de silla, en este punto se cruzan dos curvas de nivel y la solución ya no es única. Otro ejemplo donde se viola las suposiciones del teorema de funciones implícitas es un máximo o mínimo local de F_μ . En este punto, la curva se degenera a un punto. Es decir, cerca de un punto crítico no podemos escribir la curva de nivel como $z = z(x)$. Definiremos un campo vectorial $X_F(x, z)$ ortogonal a $\nabla F_\mu(x, z)$ el cual, es tangente a las curvas $F_\mu = \text{const}$. Con este campo vectorial obtenemos el sistema dinámico $(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda})$ cuya solución son las curvas integrales a X_F , y por ende, generan las curvas de nivel de F_μ . Analizaremos el diagrama de fase mediante la linealización del campo vectorial alrededor del punto crítico el cual, es un comportamiento local. Por último, para el caso específico de la ecuación de estado politrópica estudiaremos el (o los) punto crítico (s), su naturaleza y el comportamiento global de las líneas de nivel de F_μ . Como veremos, solamente una de estas líneas de nivel corresponde a una solución física describiendo un proceso de acreción.

4.1. Consideraciones generales

Queremos expresar las ecuaciones (3.27) y (3.28) en cantidades adimensionales. Para esto, definimos

- $x = r/2m$ (el radio de área normalizado tal que el horizonte sea en $x = 1$)

- $u = \frac{u^r}{c}$ (la componente radial de la cuadrivelocidad entre la velocidad de la luz, $c = 1$)
- $z = n/n_0$ (la densidad de partículas dividida por una densidad típica, n_0 , que se determina abajo para el caso politrópico)
- $h(z) = \frac{f(n)}{\varepsilon_0}$ (donde $h(z)$ es la entalpía específica y ε_0 es la energía en reposo del gas)
- $V^2(z) = \frac{\partial \log h(z)}{\partial \log z}$ (V es la velocidad del sonido V_s entre c)
- $W(z) = \frac{z}{V} \frac{\partial V}{\partial z}$

Con esto, podemos escribir $f(n) = \varepsilon_0 h(z)$, donde $z = n/n_0$.

Para el caso de una ecuación de estado politrópica $p = Kn^\gamma$, donde K es una constante y $\gamma > 1$ el índice politrópico. En este caso,

$$f(n) = \varepsilon_0[1 + Az^{\gamma-1}], \quad (4.1)$$

donde $A = \frac{k\gamma n_0^{\gamma-1}}{\varepsilon_0(\gamma-1)}$.

Ahora elegimos n_0 tal que $A = 1$, y $h(z) = 1 + z^{\gamma-1}$. Entonces, $n_0^{\gamma-1} := \frac{\varepsilon_0}{K} \frac{\gamma-1}{\gamma}$.

Calculemos $V^2(z)$ para luego encontrar $\frac{\partial V}{\partial z}$ y así, calcular W :

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{\partial \log h(z)}{\partial \log z} \\ &= \frac{(\gamma-1)z^{\gamma-1}}{1+z^{\gamma-1}} \\ &= \gamma-1 - \frac{\gamma-1}{1+z^{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La derivada de V respecto a z es

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2V} \frac{(\gamma-1)^2 z^{\gamma-2}}{(1+z^{\gamma-1})^2}, \quad (4.3)$$

y W es entonces,

$$W = \frac{\gamma-1}{2(1+z^{\gamma-1})}. \quad (4.4)$$

De esta manera las funciones, h , V y W para una ecuación de estado politrópico son

- $h(z) = 1 + z^{\gamma-1}$,
- $V(z)^2 = \frac{(\gamma-1)z^{\gamma-1}}{1+z^{\gamma-1}}$,
- $W(z) = \frac{\gamma-1}{2(1+z^{\gamma-1})}$.

Reemplazando en (3.27) las cantidades n y r en términos de las cantidades adimensionales

$$x^2 uz = \mu, \quad (4.5)$$

donde $\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{j_n}{n_0(2m)^2}$. Vemos entonces que μ es proporcional al flujo de partículas a través del horizonte.

Entonces $u = \frac{\mu}{zx^2}$ y reemplazando en (3.28) obtenemos

$$h(z)^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\mu^2}{z^2 x^4} \right) = E_1, \quad (4.6)$$

donde $E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{j_\varepsilon}{j_n} \right)^2$, con j_ε el flujo de energía y j_n el flujo de partículas. Definimos ahora la función,

$$F_\mu(x, z) := h(z)^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\mu^2}{z^2 x^4} \right), \quad x > 0, z > 0. \quad (4.7)$$

De acuerdo a (4.6), buscamos las curvas de nivel de F_μ , $F_\mu(x, z) = \text{const} = E_1$.

Una forma de estudiar las curvas de nivel, es considerar la intersección de la gráfica de F_μ con el plano $E_1 = \text{constante}$ en el espacio xzE_1 , donde se obtiene el conjunto de los puntos (x, z, E_1) tales que $F_\mu(x, z) = E_1 = \text{const}$. Buscamos una curva de nivel que proviene del horizonte y se extiende hasta $x \rightarrow \infty$, es decir una curva que se puede describir globalmente de la forma $z = z(x)$, porque para cada radio de área esperamos tener cantidades físicas como densidad de partículas, la energía y la velocidad bien definidas.

Como no se puede resolver explícitamente $z = z(x)$, entonces hay que hacer uso del teorema de función implícita. Para obtener la función implícita, hay que ver si se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita (ver, por ejemplo [4]) que nos dice:

Teorema 4.1.1 *Sea $F_\mu : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable sobre un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Sea $(x_0, z_0) \in U$ tal que $F_\mu(x_0, z_0) = c_0$ y $\frac{\partial}{\partial z} F_\mu(x_0, z_0) \neq 0$. Entonces existe una única solución $z = z(x)$ local de $F_\mu(x, z(x)) = c_0$ tal que $z(x_0) = z_0$. Además, $\frac{dz}{dx}$ es localmente de la forma*

$$\frac{dz}{dx}(x) = - \left[\frac{\partial F_\mu}{\partial z}(x, z(x)) \right]^{-1} \frac{\partial F_\mu}{\partial x}(x, z(x)). \quad (4.8)$$

Una segunda versión del teorema se da para el caso donde los papeles de x y z se invierten, es decir, si se cumple $\frac{\partial}{\partial x} F_\mu(x_0, z_0) \neq 0$ entonces, existe una única solución $x = x(z)$ local de $F_\mu(x(z), z) = c_0$ tal que $x(z_0) = x_0$.

Una tercera versión del teorema es cuando $\nabla F_\mu(x_0, z_0) \neq 0$. En este caso, si $\frac{\partial F_\mu}{\partial x}(x_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F_\mu}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$ entonces, existe una única solución $z = z(x)$ y para el caso contrario, donde $\frac{\partial F_\mu}{\partial z}(x_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F_\mu}{\partial x}(x_0, z_0) \neq 0$ entonces existe una única solución $x = x(z)$.

Definición 4.1.1 *Sea $(x_c, z_c) \in U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla F_\mu(x_c, z_c) = 0$, entonces (x_c, z_c) se llama un punto crítico de F_μ .*

Para el problema que estamos estudiando (acreción de materia), queremos investigar la existencia de estos puntos críticos. En estos puntos las suposiciones del teorema de funciones implícitas ya no se cumple pues $\nabla F_\mu(x_c, z_c) = 0$ y por lo tanto, no pasa una única curva a través de dicho punto.

Nos preguntamos entonces, ¿qué pasa con las curvas de nivel cerca de un punto crítico (x_c, z_c) ? Para responder a esta pregunta, primero introducimos un campo vectorial $X_F(x, z)$ que es ortogonal a $\nabla F_\mu(x, z)$ para todo (x, z) , definido de la siguiente forma:

$$X_F(x, z) := (\nabla F_\mu(x, z))^\perp = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

y, el sistema dinámico asociado como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\lambda} &= \frac{\partial F_\mu(x(\lambda), z(\lambda))}{\partial z}, \\ \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{\partial F_\mu(x(\lambda), z(\lambda))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Lo elegimos así para que sea análogo a un sistema Hamiltoniano (ver, por ejemplo [5]). Dado un Hamiltoniano $H(q, p)$ sobre el espacio fase $\{(q, p)\}$, dicho sistema es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

En nuestro caso el espacio de fase consiste de los puntos (x, z) , $x > 0, z > 0$, y el sistema Hamiltoniano con respecto a F_μ es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = X_F(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Dado que fuera de los puntos críticos de F_μ , el campo vectorial X_F es ortogonal a ∇F_μ que a su vez es ortogonal a las curvas de nivel, X_F es tangente a dichas curvas. Por lo tanto, las curvas integrales $(x(\lambda), z(\lambda))$ del sistema dinámico Hamiltoniano (4.11) generan las curvas de nivel. Entonces otra manera de estudiar las curvas de nivel es a través del espacio fase (x, z) del sistema dinámico (4.11).

Los puntos críticos (x_c, z_c) de F_μ coinciden con los puntos de equilibrio de X_F , es decir $X_F(x_c, z_c) = 0$ si y sólo si $\nabla F_\mu(x_c, z_c) = 0$. Entonces para analizar el comportamiento de las curvas de nivel cerca de dichos puntos, podemos acudir a la teoría de los sistemas dinámicos y linealizar el campo vectorial $X_F(x, z)$ alrededor de un punto crítico, obteniendo

$$DX_F(x_c, z_c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z} \end{pmatrix} \Bigg|_{x_c, z_c}. \quad (4.12)$$

Definición 4.1.2 *Un punto de equilibrio $(x_c, z_c) \in U$ se llama punto de equilibrio hiperbólico de (4.11) si ninguno de los eigenvalores de la matriz (4.12) tienen parte real cero.*

Con la linealización del campo vectorial X_F alrededor de los puntos críticos, encontramos el flujo del sistema lineal en términos de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz (4.12). Los eigenvalores son importante pues nos determinan que tipo de punto crítico se tiene, ver el apéndice A. Con el flujo del sistema lineal, podemos entender el comportamiento del sistema lineal en la vecindad de este punto. Para regresar al sistema no lineal, vamos a hacer uso del teorema de Hartman-Grobman (ver [5], página 119) o teorema de linealización. Este teorema se refiere al comportamiento local de un sistema dinámico en la vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico (ver [5], página 102). En palabras, el teorema de Hartman-Grobman dice que el comportamiento de un sistema dinámico cerca de un punto de equilibrio hiperbólico localmente tiene el mismo comportamiento de su linealización cerca del punto de equilibrio. Por lo tanto, cuando se trata del punto crítico hiperbólico se puede usar la linealización del sistema y ver el comportamiento de éste al menos localmente en el sistema no linealizado.

En nuestro caso, la linealización (4.12) del campo vectorial X_F satisface $\text{Tr}(DX_F(x_c, z_c)) = 0$, entonces sus eigenvalores λ satisfacen $\lambda^2 + \mathcal{D} = 0$, donde $\mathcal{D} = \det(DX_F(x_c, z_c)) = \det(\nabla^2 F_\mu(x_c, z_c))$. Distinguiamos tres casos:

- 1) $\mathcal{D} < 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{|\mathcal{D}|}$. Tenemos un punto de equilibrio hiperbólico con un eigenvalor positivo y uno negativo. Las soluciones correspondientes al eigenvalor positivo convergen al punto crítico en el pasado, y generan una curva en el espacio fase, llamada *rama inestable*. Su vector tangente en el punto crítico es dado por el eigenvector correspondiente. De manera similar, las soluciones correspondientes al eigenvalor negativo convergen al punto crítico en el futuro, y generan la *rama estable*. Este punto crítico representa un punto silla de la función F_μ .
- 2) $\mathcal{D} > 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\mathcal{D}}$. En este caso, los eigenvalores de $DX_F(x_c, z_c)$ son puramente imaginarios, y por lo tanto son puntos de equilibrio no-hiperbólicos de X_F . Representan un extremo local de la función F_μ . Notamos que el Hessiano $\nabla^2 F_\mu(x_c, z_c)$ de F_μ no coincide con la matriz $DX_F(x_c, z_c)$. Aunque sus determinantes son iguales, el Hessiano es simétrico y por lo tanto sus eigenvalores son reales.
- 3) $\mathcal{D} = 0$. En este caso no se puede decir nada a menos que analicemos las terceras derivadas de $F_\mu(x, z)$.

En resumen, hay dos maneras de formular nuestro problema de acreción radial. La primera es mediante el teorema de funciones implícitas siempre que $\nabla F_\mu(x_c, z_c) \neq 0$. A partir del cual, podemos encontrar la función $z = z(x)$ o $x = x(z)$, dependiendo de cuál derivada parcial de $F_\mu(x, z)$ es distinto de cero en (x_c, z_c) . La otra es mediante el sistema dinámico Hamiltoniano (4.11) cuyas curvas integrales generan las curvas de nivel. Un punto crítico de F_μ corresponde a un punto de equilibrio de X_F , y podemos entender el comportamiento del flujo cerca de este punto linealizando el sistema dinámico alrededor de (x_c, z_c) , siempre y cuando el punto de equilibrio (x_c, z_c) es hiperbólico.

4.2. Comportamiento para $x \rightarrow \infty$

Para analizar el comportamiento asintótico de las curvas de nivel para $x \rightarrow \infty$, definamos primero $s = \frac{1}{x}$, $s \in (0, \infty)$, de tal manera que $x = \infty$ corresponda al punto $s = 0$. Entonces

definimos

$$\tilde{F}_\mu(s, z) = F_\mu\left(\frac{1}{s}, z\right) = h(z)^2(1 - s + u^2), \quad u = \frac{\mu s^2}{z}. \quad (4.13)$$

Nos interesa saber que pasa cerca de $s = 0$. En $s = 0$, suponemos que $z > 0$,

$$\tilde{F}_\mu(0, z) = h(z)^2. \quad (4.14)$$

Las derivadas parciales de $\tilde{F}_\mu(s, z)$ respecto a s y a z evaluadas en $s = 0$ son

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}_\mu(s, z)}{\partial s} \right|_{s=0} = -h(z)^2, \quad (4.15)$$

y

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}_\mu(s, z)}{\partial z} \right|_{s=0} = 2 \frac{h(z)^2 V(z)^2}{z} > 0, \quad (4.16)$$

si $z > 0$.

Usando el Teorema de funciones implícitas

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial z} \right|_{s=0} \neq 0,$$

existe una única familia de soluciones local $z = z(s)$ con $z(s = 0) = z_\infty > 0$ y además,

$$\tilde{F}_\mu(s, z(s)) = \text{const} = h(z_\infty)^2. \quad (4.17)$$

Derivando la ecuación (4.17) respecto a $\frac{d}{ds}$ tenemos

$$\frac{\partial \tilde{F}_\mu(s, z(s))}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{F}_\mu(s, z(s))}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0, \quad (4.18)$$

y esto implica que

$$\frac{dz}{ds} = - \left(\frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial s}. \quad (4.19)$$

Evaluando $\frac{dz}{ds}$ en $s = 0$,

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=0} = - \left(\frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial z} \right)^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{z_\infty}{2h(z_\infty)^2 V(z_\infty)^2} h(z_\infty)^2 = \frac{z_\infty}{2V(z_\infty)^2}, \quad (4.20)$$

encontramos que asintóticamente, las curvas de niveles tienen la forma

$$z(x) = z_\infty \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{V_\infty^2} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]. \quad (4.21)$$

De la ecuación (4.21) tenemos la densidad de partículas en función del radio de área para radios grandes. Nos preguntamos ahora si alguna de estas soluciones se puede extender hasta el horizonte $x = 1$.

4.3. Puntos críticos

A continuación, encontramos los puntos críticos de la ecuación (4.7). Para esto, igualamos a cero las derivadas parciales de $F_\mu(x, z)$,

$$\frac{\partial}{\partial x} F_\mu(x, z) = \frac{h(z)^2}{x^2} \left[1 - 4 \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right] = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_\mu(x, z) = \frac{2h(z)^2}{xz} \left[V(z)^2 \left(x - 1 + \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right) - \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right] = 0. \quad (4.23)$$

Despejando el término $\frac{\mu^2}{x^3 z^2}$ de las ecuaciones (4.22) y (4.23) llegamos a

$$(4x_c - 3)V_c^2 = 1, \quad (4.24)$$

donde el subíndice c se refiere a un punto crítico. Reemplazando la ecuación (4.24) en (4.23) encontramos

$$z_c^2 = \frac{4\mu^2}{x_c^3}. \quad (4.25)$$

Ahora queremos ver si existe un punto crítico y si es único. Tenemos que analizar el sistema de ecuaciones (4.24) y (4.25). Para ello, necesitamos la ecuación de estado. Vamos a tomar el caso de la ecuación de estado politrópica $p = Kn^\gamma$, y como sabemos de la introducción de este capítulo,

$$V^2 = \frac{(\gamma - 1)z^{\gamma-1}}{1 + z^{\gamma-1}}. \quad (4.26)$$

Introduciendo (4.26) en (4.24) obtenemos

$$(4x_c - 3) \frac{(\gamma - 1)z_c^{\gamma-1}}{1 + z_c^{\gamma-1}} = 1. \quad (4.27)$$

Despejando z_c en términos de x_c en (4.25) y reemplazandola en (4.27),

$$(\gamma - 1) \frac{4x_c - 3}{1 + \left(\frac{x_c^3}{4\mu^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}} = 1.$$

Y esto también se puede escribir como

$$(\gamma - 1)(4x_c - 3) = 1 + \left(\frac{x_c^3}{4\mu^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Para analizar las soluciones para x_c de esta ecuación definimos la función

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &:= \left(\frac{x^3}{4\mu^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} + 1 - (\gamma - 1)(4x - 3) \\ &= (2\mu)^{-(\gamma-1)} x^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} - 4(\gamma - 1)x + 3\gamma - 2 \\ &= x \left[\frac{1}{(2\mu)^{(\gamma-1)} x^{\frac{1}{2}(5-3\gamma)}} - 4(\gamma - 1) \right] + 3\gamma - 2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $\mathcal{F}(x)$ evaluado en el punto x_c es cero.

Vamos a ver los siguientes tres casos:

■ **Caso I:** $1 < \gamma < 5/3$:

De la ecuación (4.28) vemos que cuando

$$x \rightarrow \infty, \quad \mathcal{F}(x) \rightarrow -\infty$$

porque cuando vamos al infinito, el término lineal en x crece mas rápido que el término con exponencial $3(\gamma - 1)/2$. Por otro lado, $\mathcal{F}(0) = 3\gamma - 2 > 0$. Por la continuidad de \mathcal{F} , existe por lo menos un cero de \mathcal{F} para $x > 0$.

La función \mathcal{F} se comporta como se muestra a continuación en los diferentes intervalos:

para

$$0 < x \leq \frac{3\gamma - 2}{4(\gamma - 1)}, \quad (4.29)$$

$\mathcal{F}(x)$ es positivo. Entonces un cero de $\mathcal{F}(x)$ debe estar en el intervalo

$$x > \frac{3(\gamma - 1) + 1}{4(\gamma - 1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(\gamma - 1)} > \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8}. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, un punto crítico x_c satisface $x_c > \frac{9}{8}$, es decir, se encuentra fuera del horizonte de eventos.

Ahora nos preguntamos si el punto crítico x_c es único. Para esto, calculamos la derivada de (4.28),

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial x} = \frac{3}{2}(\gamma - 1)(2\mu)^{-(\gamma-1)} x^{\frac{1}{2}(3\gamma-5)} - 4(\gamma - 1). \quad (4.31)$$

De $\mathcal{F}(x_c) = 0$ se tiene que,

$$\frac{x_c^{\frac{3}{2}(\gamma-1)}}{(2\mu)^{\gamma-1}} = 4(\gamma-1)x_c - (3\gamma-2).$$

Evaluando (4.31) en x_c se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x_c) = (\gamma-1) \left[(6\gamma-10) - \frac{3}{2}(3\gamma-2) \frac{1}{x_c} \right] < 0. \quad (4.32)$$

Entonces existe un único punto crítico porque para los ceros de la función \mathcal{F} acabamos de mostrar que la derivada en ese punto es menor que cero. Es decir, si la curva corta al eje donde la función es cero, lo hace por encima del eje y por tanto, sólo existe un punto crítico, porque si existiera otro punto crítico entonces la derivada en algún momento cortaría al eje por debajo y esto implicaría que la derivada en el punto cero es positiva y esto estaría en contradicción con lo que se acabamos de mostrar.

■ **Caso II:** $\gamma = 5/3$:

Para este caso, la ecuación (4.28) se reduce a la función lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= 1 + \frac{x}{(4\mu^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{3}(4x-3) \\ &= 3 + x \left[\frac{1}{(4\mu^2)^{1/3}} - \frac{8}{3} \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entonces existe un único punto crítico si y sólo si la pendiente de la recta correspondiente es negativa. Como vemos, esto nos pone una restricción sobre el parámetro μ , y ocurre si y sólo si $2\mu > (\frac{3}{8})^{\frac{3}{2}}$. En este caso,

$$x_c = \frac{9(2\mu)^{\frac{2}{3}}}{8(2\mu)^{\frac{2}{3}} - 3} > \frac{9}{8}, \quad (4.34)$$

y como en el caso I, el punto crítico se encuentra fuera del horizonte de eventos.

■ **Caso III:** $\gamma > 5/3$:

En este caso,

$$\mathcal{F}(x) > 0$$

es positivo sobre el intervalo

$$0 < x \leq \frac{3}{4}$$

y para

$$x \rightarrow \infty.$$

Para ver si $\mathcal{F}(x)$ también toma valores negativos, determinamos su mínimo. Si x_0 denota la posición del mínimo, la derivada de $\mathcal{F}(x)$ es cero en x_0 , y de la ecuación (4.31) obtenemos

$$x_0^{\frac{1}{2}(3\gamma-5)} = \frac{8}{3}(2\mu)^{\gamma-1}.$$

Entonces $\mathcal{F}(x_0)$ es

$$\mathcal{F}(x_0) = -4x_0 \left[\gamma - \frac{5}{3} \right] + 3\gamma - 2,$$

donde $\gamma - \frac{5}{3}$ y $3\gamma - 2$ son positivos. Por lo tanto, tenemos que distinguir entre los tres siguientes subcasos:

- (a) Si $x_0 < \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-\frac{5}{3})}$, entonces $\mathcal{F}(x_0) > 0$ y la función \mathcal{F} no posee ceros.
- (b) Si $x_0 = \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-\frac{5}{3})}$, entonces $\mathcal{F}(x_0) = 0$ y \mathcal{F} posee un único cero en $x_c = x_0$.
- (c) Si $x_0 > \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-\frac{5}{3})}$, entonces $\mathcal{F}(x_0) < 0$, y \mathcal{F} posee dos ceros x_{c1} y x_{c2} , uno en el intervalo $3/4 < x_{c1} < x_0$ y el otro en $x_{c2} > x_0$. Esto se debe al comportamiento de la función \mathcal{F} que vimos arriba.

Obtenemos más información sobre los ceros x_{c1} y x_{c2} en el subcaso (c): definamos el siguiente término

$$B := \frac{3\gamma - 2}{4(\gamma - 5/3)}.$$

Para este caso, sabemos que $x_{c2} > x_0 > B$ entonces, $x_{c2} > B$ pero, para $3/4 < x_{c1} < x_0$, no sabemos si x_{c1} está por debajo o por encima de B . Miremos donde se encuentra x_{c1} . Sabemos:

- 1) $3/4 < x_{c1} < x_0$, $x_0 > B$,
- 2) $B^{1/2(3\gamma-5)} < x_0^{1/2(3\gamma-5)} = \frac{8}{3}(2\mu^{\gamma-1})$,
- 3) $\mathcal{F}(B) = (2\mu)^{-(\gamma-1)} B^{3/2\gamma-5/2} B - 4(\gamma-1)B + 3\gamma - 2 < \frac{8}{3}B - 4(\gamma-1)B + 3\gamma - 2 = 0$.

En 3), primero usamos 2) y después, reemplazamos B . Concluimos que $\mathcal{F}(B) < 0$ y por tanto, $\frac{3}{4} < x_{c1} < B = \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-5/3)}$.

Entonces para $\gamma > 5/3$, la función $F_\mu(x, z)$ puede tener ninguno, uno o dos puntos críticos, dependiente del valor de μ .

4.4. La naturaleza del punto crítico

A continuación, vamos a analizar si los puntos críticos encontrados en la sección previa corresponden a máximos locales, mínimos locales o a puntos silla de la función F_μ . Para esto, calculamos el Hessiano de F_μ en los puntos críticos.

Definamos primero G_1 y G_2 de la siguiente forma

$$G_1(x, z) := \frac{\partial}{\partial x} F_\mu(x, z) = \frac{h(z)^2}{x^2} \left[1 - \frac{4\mu^2}{x^3 z^2} \right], \quad (4.35)$$

$$G_2(x, z) := \frac{\partial}{\partial z} F_\mu(x, z) = \frac{2h(z)^2}{xz} \left[V(z)^2 \left(x - 1 + \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right) - \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right]. \quad (4.36)$$

Entonces, el Hessiano de F_μ evaluado en los puntos críticos es:

$$J_c := \begin{pmatrix} \partial_x G_1 & \partial_z G_1 \\ \partial_x G_2 & \partial_z G_2 \end{pmatrix} \Big|_{(x_c, z_c)}. \quad (4.37)$$

Las segundas derivadas evaluadas en los puntos críticos son entonces:

$$\begin{aligned} \partial_x G_1|_{(x_c, z_c)} &= \frac{2h_c^2}{x_c^3} \left[\frac{10\mu^2}{x_c^3 z_c^2} - 1 \right] \\ \partial_z G_1|_{(x_c, z_c)} &= \frac{2h_c^2}{z_c x_c^2} \left[V_c^2 \left(1 - \frac{4\mu^2}{x_c^3 z_c^2} \right) + \frac{4\mu^2}{x_c^3 z_c^2} \right] \\ \partial_x G_2|_{(x_c, z_c)} &= \frac{2h_c^2}{z_c x_c} \left[V_c^2 \left(1 - \frac{3\mu^2}{z_c^2 x_c^4} \right) + \frac{3\mu^2}{z_c^2 x_c^4} \right] \\ \partial_z G_2|_{(x_c, z_c)} &= \frac{4h_c^2}{x_c z_c^2} \left[V_c^2 W_c \left(x_c - 1 + \frac{\mu^2}{z_c^2 x_c^3} \right) + \frac{\mu^2}{z_c^2 x_c^3} (1 - V_c^2) \right] \end{aligned}$$

donde recordemos que $h_c := h(z_c)$, $V_c := V(z_c)$ etc. Concluimos que

$$J_c = \frac{h_c^2}{x_c^2} \begin{pmatrix} \frac{3}{x_c} & \frac{2}{z_c} \\ \frac{2}{z_c} & \frac{x_c}{z_c^2} [W_c + 1 - V_c^2] \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Ahora, calculemos la determinante de (4.38). Definamos,

$$\mathcal{D} := \det(J_c). \quad (4.39)$$

Si \mathcal{D} es menor que cero entonces, el punto crítico es un punto de silla. Si \mathcal{D} es mayor que cero, el punto crítico es un extremo local (un máximo o un mínimo local). Si \mathcal{D} es igual a cero, no se puede decir nada mirando nada más al Hessiano.

Calculamos entonces \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\partial_x G_1)(\partial_z G_2) - (\partial_x G_2)(\partial_z G_1)|_{(x_c, z_c)} \\ &= \frac{h_c^2}{z_c^2 x_c^2} [3(W_c + 1 - V_c^2) - 4] = -\frac{h_c^2}{z_c^2 x_c^2} \mathcal{Y}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde

$$\mathcal{Y} := 1 - 3(W_c - V_c^2).$$

Entonces el punto crítico (x_c, z_c) representa un punto silla si $\mathcal{Y} > 0$ y un extremo local si $\mathcal{Y} < 0$. Analizamos esta condición para el caso de la ecuación de estado politrópica en los tres casos

- $1 < \gamma < 5/3$,
- $\gamma = 5/3$,

- $\gamma > 5/3$.

Para esto, encontramos primero una expresión simple para \mathcal{Y} . De las ecuaciones (4.2) y (4.4) obtenemos primero

$$\mathcal{Y} = \frac{(6\gamma - 4)z_c^{\gamma-1} - (3\gamma - 5)}{2(1 + z_c^{\gamma-1})}. \quad (4.41)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (4.28) y $z_c = \frac{2\mu}{x_c^{3/2}}$,

$$0 < z_c^{1-\gamma} = \frac{x_c^{\frac{3}{2}(\gamma-1)}}{(2\mu)^{\gamma-1}} = 4(\gamma - 1)x_c - (3\gamma - 2),$$

llegamos a la expresión

$$\mathcal{Y} = \frac{3}{8} \frac{4x_c \left(\frac{5}{3} - \gamma\right) + 3\gamma - 2}{x_c - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} - \gamma\right) + \frac{9}{8} \frac{1}{x_c - \frac{3}{4}}. \quad (4.42)$$

Recordamos que, de acuerdo a la ecuación (4.30), $x_c - 3/4 > 1/(4(\gamma - 1)) > 0$, y por lo tanto, $\mathcal{Y} < 3\gamma - 2$.

- **Casos I y II:** $1 < \gamma \leq 5/3$:

Concluimos enseguida que $\mathcal{Y} > 0$, por lo tanto $\mathcal{D} < 0$ y el punto crítico es un punto silla de F_μ .

- **Caso III:** $\gamma > 5/3$:

Como vimos en la sección previa, en este caso puede haber ninguno (subcaso (a)), un único (subcaso (b)) o dos (subcaso (c)) puntos críticos, dependiente del valor de μ .

En el subcaso (a), no hay nada que hacer. En el subcaso (b), tenemos $x_c = x_0 = \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-\frac{5}{3})}$, y llegamos a $\mathcal{Y} = 0$. Entonces, $\mathcal{D} = 0$ y no podemos llegar a ninguna conclusión en este momento.

En el subcaso (c) tenemos dos puntos críticos, x_{c1} y x_{c2} . El primero se encuentra en el intervalo $3/4 < x_{c1} < \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-5/3)}$, y por lo tanto, $\mathcal{Y} > 0$. Concluimos que x_{c1} es un punto silla. El otro punto crítico satisface $x_{c2} > x_0 > \frac{(3\gamma-2)}{4(\gamma-5/3)}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y} < 0$ y entonces \mathcal{D} es positivo y tenemos un extremo local de F_μ . Este extremo debe ser un mínimo local porque de acuerdo a la ecuación (4.38) se tiene $(F_\mu)_{xx} = 3h_c^2/x_c^3 > 0$.

Como habíamos mencionado, los puntos críticos (x_c, z_c) de F_μ corresponden a puntos de equilibrio del sistema dinámico (4.11). En estos puntos, el campo vectorial linealizado (4.12) es

$$DX_F(x_c, z_c) = \frac{h_c^2}{x_c^2} \begin{pmatrix} \frac{2}{z_c} & \frac{x_c}{z_c^2} [1 + W_c - V_c^2] \\ -\frac{3}{x_c} & -\frac{2}{z_c} \end{pmatrix} = \frac{h_c^2}{x_c^2 z_c} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3\Lambda} (4 - D^2) \\ -3\Lambda & -2 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

donde hemos definido $\Lambda := z_c/x_c$ y $D := \sqrt{\mathcal{Y}}$. Los eigenvalores de la matriz (4.43) son dados por

$$\lambda_\pm = \pm \frac{h_c^2}{x_c^2 z_c} D. \quad (4.44)$$

Los eigenvectores correspondientes son

$$x_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3\Lambda}{2+D} \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

$$x_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3\Lambda}{2-D} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Sabemos $D = \sqrt{\mathcal{Y}} < \sqrt{3\gamma - 2}$, entonces $D < 2$ para $\gamma \leq 2$. Las pendientes para x_+ y x_- respectivamente son,

$$z_+ = \frac{-3\Lambda}{2+D}, \quad (4.47)$$

$$z_- = \frac{-3\Lambda}{2-D}. \quad (4.48)$$

A continuación, mostramos la gráfica de la curva de nivel que pasa por el punto crítico en la figura 4.1. Como vemos, está generada por el punto crítico y las ramas estables e inestables correspondientes. La figura sugiere que la rama inestable se extiende hasta $x \rightarrow \infty$ por un lado, y hasta el horizonte en $x = 1$ por el otro. Este comportamiento se establecerá en la siguiente sección para todo $1 < \gamma < 5/3$.

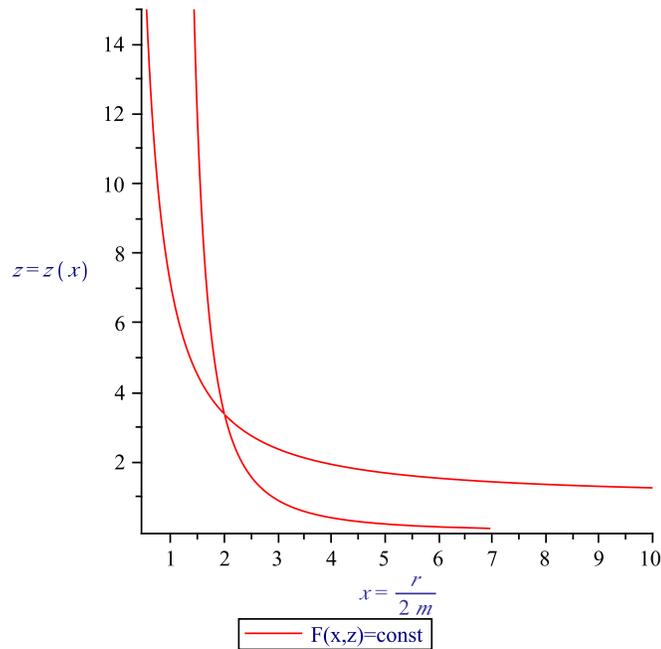


Figura 4.1: Gráfica donde se muestra el punto crítico y las ramas estables e inestables para $\gamma = 4/3$, $x_c = 2.0$ y $\mu = 4.77$.

4.5. Extensión de las ramas estables e inestables

En esta sección, vamos a ver si es posible que las ramas (estables e inestables) del punto crítico, se extiendan hasta $x = \infty$ y además, si cortan el horizonte en $x = 1$. La extensión de estas dos ramas, nos permiten ver si existe una curva física que nos describa si tenemos o no acreción.

Primero, vamos a ver el comportamiento de las dos curvas no físicas Γ_1 y Γ_2 donde Γ_1 , es la curva determinada por

$$z_1(x) = \frac{2\mu}{x^{2/3}}, \quad (4.49)$$

y que viene de

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x} = h(z)^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4u^2}{x} \right) = 0,$$

y Γ_2 es la curva tal que

$$x^3(x-1) = \left(\frac{1}{V(z)^2} - 1 \right) \frac{\mu^2}{z^2} =: H(z), \quad (4.50)$$

que viene de

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial z} = \frac{2h(z)^2}{xz} \left[V^2 \left(x - 1 + \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right) - \frac{\mu^2}{x^3 z^2} \right] = 0.$$

El análisis de las curvas Γ_1 y Γ_2 , nos van a permitir dividir el espacio de fase en 6 regiones, ver figura 4.2, de las cuales sólo analizaremos cuatro de ellas. Con ayuda de estas regiones, vamos a poder determinar la extensión de las ramas estables e inestables. De (4.49) tenemos que

- $z_1(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$,
- $z_1(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$,
- $z_1(x) \rightarrow 2\mu$ cuando $x \rightarrow 1$,

y su derivada, $z_1'(x) = -\frac{4}{3} \frac{\mu}{x^{5/3}}$ es menor que cero para todo x . Entonces $z_1(x)$, es una función monótona decreciente. De (4.50), $H(z)$ es una función invertible porque,

- $H(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 0$,
- $H(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$,

y en los otros puntos tenemos que la derivada de $H(z)$ es

$$H'(z) = -\frac{2\mu^2}{z^3} \left[\frac{W}{V^2} + \left(\frac{1}{V^2} - 1 \right) \right] = -\frac{2\mu^2}{z^3} \left[\frac{\gamma + 1 + 2(2 - \gamma)z^{\gamma-1}}{2(\gamma - 1)z^{\gamma-1}} \right] < 0,$$

donde el término entre corchetes para la ecuación de estado politrópica y $1 < \gamma \leq 2$ es mayor que cero. Entonces se tiene que $H'(z) < 0$ para toda z y por lo tanto, la función

$H(z)$ es una función monótona decreciente. $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ entonces su inversa H^{-1} es $H^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$.

La función $z_2(x)$ se puede encontrar a partir de

$$z_2(x) = H^{-1}(x^3(x-1)). \quad (4.51)$$

Como $H(z) = x^3(x-1)$, en el horizonte $H(z) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 1$. Por lo tanto $z_2 : (1, \infty) \rightarrow (\infty, 0)$.

De las ecuaciones (4.49) y (4.51) podemos entonces ver que las funciones $z_1(x)$ y $z_2(x)$ van a cero cuando x va al infinito y, en el horizonte, $x = 1$, $z_2(x)$ se va al infinito mientras que $z_1(x)$ cruza el horizonte. Las pendientes de las curvas Γ_1 y Γ_2 respectivamente son:

$$l_1 := \left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x_c} = -\frac{3}{2}\Lambda, \quad (4.52)$$

$$l_2 := \left. \frac{dz_2}{dx} \right|_{x_c} = -\frac{3\Lambda}{2-D} \frac{2}{2+D}, \quad (4.53)$$

donde recordamos que $\Lambda = \frac{z_c}{x_c}$ y $D = \sqrt{\mathcal{Y}}$, con $\mathcal{Y} = 1 - 3(W_c - V_c^2)$. Comparando con las pendientes z_+ y z_- correspondientes de las ramas estables e inestables (ver (4.47) y (4.48)) tenemos

- $z_+ > z_-$, la rama inestable, con vector tangente x_+ pasa por encima de la rama estable, con vector tangente vector x_- del lado derecho del punto crítico (x_c, z_c) , y del lado izquierdo del mismo punto, pasa por debajo.
- $l_1 > l_2$, la curva Γ_1 pasa por encima de la curva Γ_2 del lado derecho del punto crítico (x_c, z_c) y del lado izquierdo del mismo punto, pasa por debajo.
- $z_+ > l_1$, la rama inestable con pendiente z_+ pasa por encima de la curva Γ_1 del lado derecho del punto crítico (x_c, z_c) y del lado izquierdo del mismo punto, pasa por debajo.
- $l_2 > z_-$, la curva Γ_2 pasa por encima de la rama estable con pendiente z_- del lado derecho del punto crítico (x_c, z_c) y del lado izquierdo del mismo punto, pasa por debajo.

Concluimos que para $1 < \gamma \leq 2$,

$$z_- < l_2 < l_1 < z_+.$$

Entonces, las curvas Γ_1 y Γ_2 en una vecindad del punto crítico, se encuentran entre de las ramas estables e inestables. Ahora, analicemos el comportamiento de las ramas en las regiones *I, II, III, VI*, ver la figura 4.2, donde Γ_i se refiere a la rama inestable y Γ_e a la rama estable. Para el siguiente análisis, suponemos que $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$.

- Para la región *I*, que está por encima de la curva Γ_1 del lado derecho del punto crítico, $x > x_c$ y $z(x) > z_1(x) = \frac{2\mu}{x^{3/2}}$, tenemos $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$.

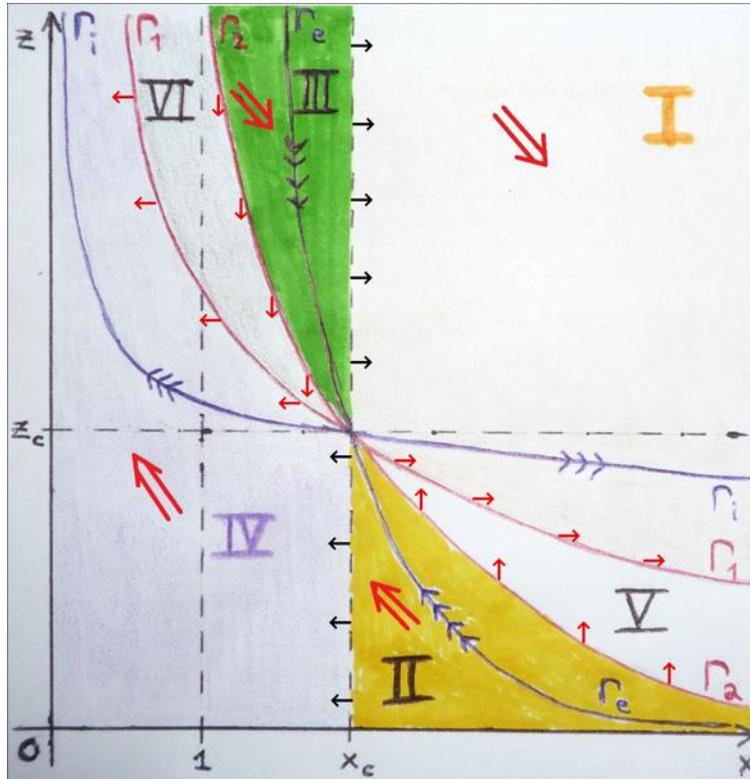


Figura 4.2: Gráfica donde se muestran las seis regiones, donde Γ_i indica la rama inestable y Γ_e indica la rama estable.

Por lo tanto, dentro de esta región, x crece y z decrece en el sistema dinámico (4.11). Además, el campo vectorial X_F apunta *dentro* de la región I en sus fronteras ($x = x_c, z > z_c$) y ($x > x_c, z = z_1(x)$). (En los puntos ($x > x_c, z = z_1(x)$) el flujo apunta en dirección x positivo.). Entonces la región I es atrapada en el sentido que el flujo no puede salir de ella.

Estas observaciones implican que la rama inestable se extiende hasta $x \rightarrow \infty$, pues no puede salir de la región I , y por ende x crece y z decrece.

- Para la región II , que se encuentra por debajo de Γ_2 del lado derecho del punto crítico, $x > x_c$ y $z(x) < z_2(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x} < 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} < 0$.

Entonces x decrece y z crece en el sistema dinámico (4.11). Además, el campo vectorial X_F apunta *fuera* de la región en sus fronteras. Por lo tanto, el flujo es atrapado en el pasado, y la rama estable no puede salir de ella. Entonces podemos extender la rama estable en el pasado hasta $x \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow 0$.

- Para la región III , que se encuentra por encima de Γ_2 del lado izquierdo del punto crítico, $x < x_c$ y $z(x) > z_2(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$.

Por lo tanto dentro de esta región, x crece y z decrece en el sistema dinámico (4.11). Además el campo vectorial X_F apunta *fuera* de la región de sus fronteras. Por lo tanto, el flujo es atrapado en el pasado, y la rama estable no puede salir de ella. Entonces podemos extender la rama estable en el pasado hasta $z \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow 1$.

- Para la región IV , que se encuentra por debajo de Γ_1 del lado izquierdo del punto crítico, $x < x_c$ y $z(x) < z_1(x) = \frac{2\mu}{x^{3/2}}$ en Γ_1 , $\frac{\partial F}{\partial x} < 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} < 0$.

Por lo tanto, dentro de esta región, x decrece y z crece en el sistema dinámico (4.11). Además, el campo vectorial X_F apunta *dentro* de la región IV en sus fronteras ($x = x_c, z < z_c$) y ($x < x_c, z = z_1(x)$). (En los puntos ($x < x_c, z = z_1(x)$) el flujo apunta en dirección x negativo.). Entonces la región IV es atrapada en el sentido que el flujo no puede salir de ella.

Estas observaciones implican que la rama inestable se extiende hasta $x = 1$, pues no puede salir de la región IV , y por ende x decrece y z crece.

Del análisis anterior, vemos que las ramas estable e inestable no pueden salir de las regiones I, II, III y IV . En el caso de la rama inestable, tenemos la rama física que buscamos pues, es la única rama cuya curva de nivel conecta el horizonte con $x \rightarrow \infty$. Por ejemplo si tomamos otra curva integral en la región I , esta conecta $x \rightarrow \infty$; por otro lado no puede conectar el horizonte porque de otra manera tendría que cortar la rama estable en la región III . La rama estable, en cambio, no genera una curva de nivel física, porque al no poder salir de la región III , se va a infinito en el horizonte, lo que implicaría una densidad de partículas que diverge en el horizonte. Concluimos que para el diagrama de fase, existe una única curva de nivel que se extiende hasta el infinito y que corta al horizonte. Es decir, existe una única curva física $z = z(x)$ que describe acreción de materia.

La figura 4.3 nos muestra las curvas de nivel de F_μ para un caso particular.

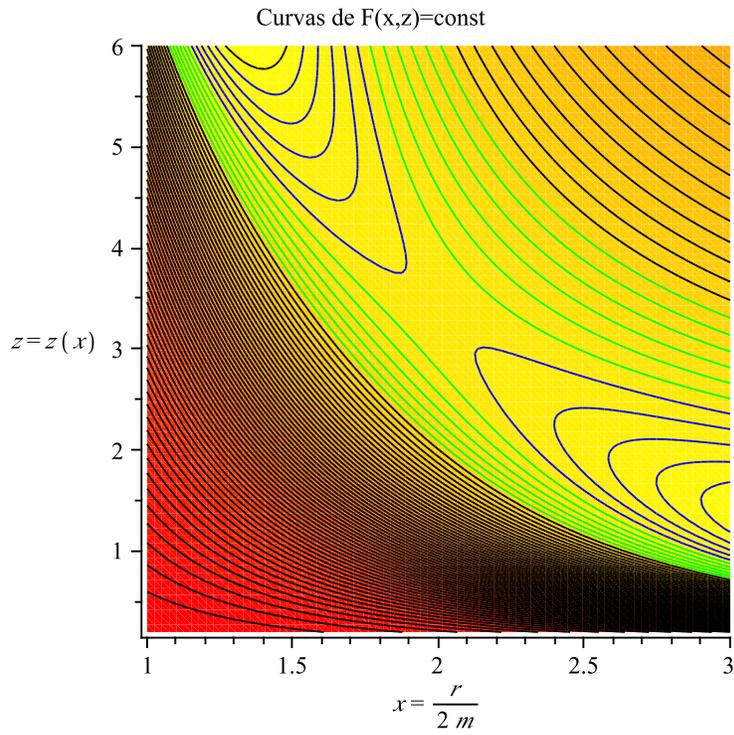


Figura 4.3: Gráfica donde se muestran las curvas de nivel de F_μ para $\gamma = 4/3$, $x_c = 2.0$, $\mu = 4.77$ y $z_c = 3.37$.

4.6. Comportamiento global de la rama física para $1 < \gamma \leq 5/3$

Lo que queremos ahora, es ver si podemos conectar la rama física con una de las soluciones asintóticas que vimos en la sección 4.2. Para esto definamos la siguiente función

$$\mathcal{L}(x) := \left[1 + \frac{1}{4x(\gamma - 1) - 3\gamma + 2} \right]^2 \left[1 - \frac{3}{4x} \right], \quad (4.54)$$

tal que

$$\mathcal{L}(x_c) = F_\mu(x_c, z_c).$$

Para que la rama se conecte con una de las soluciones asintóticas en la sección 4.2, necesitamos que

$$\mathcal{L}(x_c) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} F_\mu(x, z) = h_\infty^2, \quad (4.55)$$

donde $h_\infty := 1 + z_\infty^{\gamma-1}$ y $z_\infty > 0$ un parámetro libre. Vemos de la definición de \mathcal{L} que,

- $\mathcal{L}(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$,
- $\mathcal{L}(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow x_{lim}$, donde $x_{lim} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(\gamma-1)}$.

Derivando a $\mathcal{L}(x)$, se tiene

$$\mathcal{L}'(x) = \frac{[(\gamma - 1)(4x - 3)]^2 [4x(3\gamma - 5) + 3(2 - 3\gamma)]}{4x^2 [4x(\gamma - 1) - 3\gamma + 2]^3}, \quad (4.56)$$

donde vemos que $\mathcal{L}'(x) < 0$ para todo $x > x_{lim}$ mientras que $1 < \gamma \leq 5/3$. Entonces, $\mathcal{L}(x)$ es una función monótona decreciente y

- $\mathcal{L} : (x_{lim}, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ es invertible y existe $\mathcal{L}^{-1} : (1, \infty) \rightarrow (x_{lim}, \infty)$.

El comportamiento típico de la función \mathcal{L} para $1 < \gamma \leq 5/3$ se muestra en la figura 4.4.

Concluimos que dado un valor $z_\infty > 0$ para la densidad de partículas en el infinito, existe una única posición x_c del punto crítico para la cuál se cumple la condición necesaria (4.55) para la conexión de la rama inestable con una de las soluciones asintóticas.

Para ver si las ramas realmente se conectan, analizamos el comportamiento asintótico de la rama inestable para $x \rightarrow \infty$. Dado que x crece y z decrece a lo largo de la rama, existe el límite $z_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) \geq 0$. Entonces para que la rama se conecte con una de las soluciones asintóticas de la sección 4.2, basta mostrar que $z_\infty \neq 0$. Para demostrar esto, notamos primero que en la región I vale $z > z_1(x) = 2\mu/x^{2/3}$. Por lo tanto,

$$u = \frac{\mu}{x^2 z} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} 1/(2\sqrt{x}) = 0$, y entonces $u_\infty = 0$. Por ende, la rama inestable $z = z(x)$ satisface

$$\mathcal{L}(x_c) = F_\mu(x_c, z_c) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x, z(x)) = h_\infty^2,$$

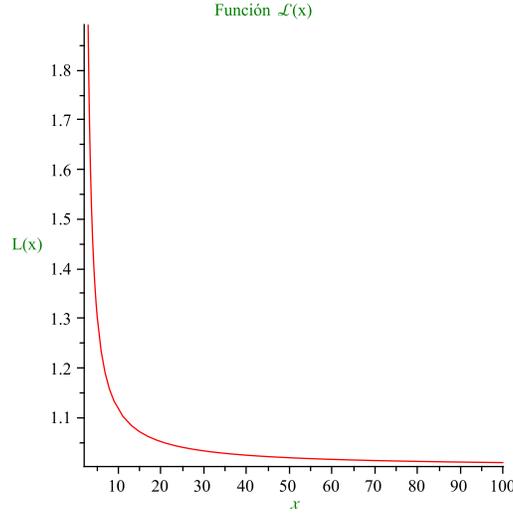


Figura 4.4: Gráfica de $\mathcal{L}(x)$ para el caso $\gamma = 1.3$.

y dado que $\mathcal{L}(x_c) > 1$, concluimos que $z_\infty > 0$.

Para la rama estable, en cambio, tenemos $z_\infty = 0$ y $1 < \mathcal{L}(x_c) = F_\mu(x_c, z_c) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x, z(x)) = 1 + u_\infty^2$, lo que implica que $u_\infty \neq 0$.

Concluimos entonces que dado una densidad de partículas z_∞ que viene del medio interestelar, este valor fija la posición x_c del punto crítico a través de la ecuación (4.55), y entonces μ y z_c quedan únicamente determinados por la ecuaciones (4.28) y (4.25), respectivamente. Por lo tanto existe un único flujo estacionario y radial que es regular en el horizonte para un valor de z_∞ dado.

4.7. Comportamiento para $\gamma > 5/3$

En esta sección analizamos el caso III, en donde $\gamma > \frac{5}{3}$. Recordamos que en este caso, existen tres subcasos que corresponden a ninguno, uno o dos puntos críticos de F_μ , respectivamente. Empezamos con el análisis del subcaso (a), en donde no hay ningún punto crítico. Luego, presentaremos algunos resultados parciales en el subcaso (c), donde existe un punto silla y un mínimo local de F_μ .

4.7.1. El subcaso (a)

Para el subcaso (a), donde no hay puntos críticos, las curvas Γ_1 y Γ_2 definidas en las ecuaciones (4.49) y (4.50) no se cortan. Mientras tanto $5/3 < \gamma \leq 2$, las funciones $z_1(x)$ y $z_2(x)$ que describen dichas curvas decaen monótonamente a cero para $x \rightarrow \infty$. Además, la función z_2 tiende al infinito cuando $x \rightarrow 1$ se acerca al horizonte. El comportamiento típico de estas curvas se puede observar en la figura 4.5, donde tenemos Γ_2 , la curva verde y Γ_1 ,

es la curva roja.

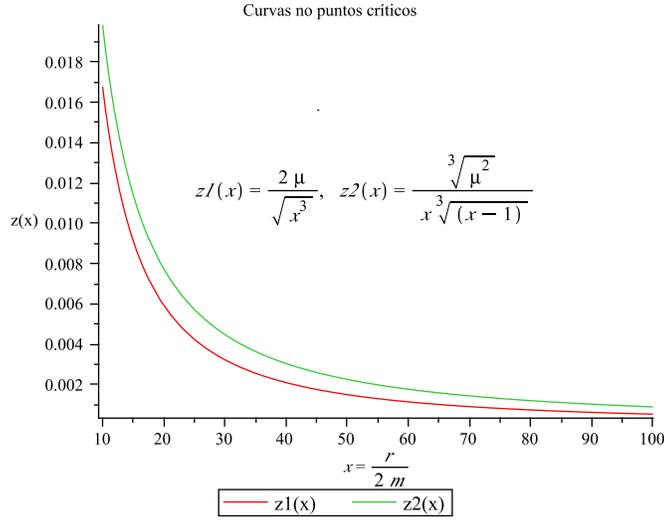


Figura 4.5: Gráfica de las curvas Γ_1 y Γ_2 para el caso $\gamma = 2$.

De la figura 4.5 se puede observar que las curvas Γ_1 y Γ_2 dividen el espacio fase en tres regiones. La región I que se encuentra por encima de Γ_2 , la región II está por debajo de la curva Γ_1 y la región III que se encuentra entre las curvas Γ_1 y Γ_2 . Analicemos que pasa en las regiones I y II, ver figura 4.6.

- Para la región I, $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$, entonces en el sistema dinámico (4.11) x crece y z decrece. Como el campo vectorial X_F apunta en la dirección z negativa en todos los puntos de la frontera Γ_2 de esta región, el flujo es atrapado en el pasado. Por lo tanto, una curva integral que emana de un punto dentro de esta región, no se puede extender hasta el horizonte, porque tendría que cruzar la curva Γ_2 en el pasado.
- En la región II, $\frac{\partial F}{\partial x} < 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} < 0$, entonces x decrece y z crece. Como el campo vectorial X_F apunta en la dirección x negativa en todos los puntos de la frontera Γ_1 de esta región, el flujo es atrapado en el futuro.

Concluimos entonces que no pueden existir curvas de nivel $z = z(x)$ que toman un valor finito en el horizonte y que se extienden hasta $x \rightarrow \infty$ con un valor positivo $z_\infty > 0$. Por lo tanto, en el subcaso (a), no hay acreción de materia con un baño de partículas finito.

4.7.2. El subcaso (c)

Finalmente, analizamos el subcaso (c), donde existe un punto silla y un mínimo local de F_μ , ver la sección 4.4. La posición del punto silla x_{c1} se encuentra en el intervalo $3/4 < x_{c1} < x^* := \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-5/3)} < x_0$ y la posición x_{c2} del mínimo local satisface $x_{c2} > x_0$.

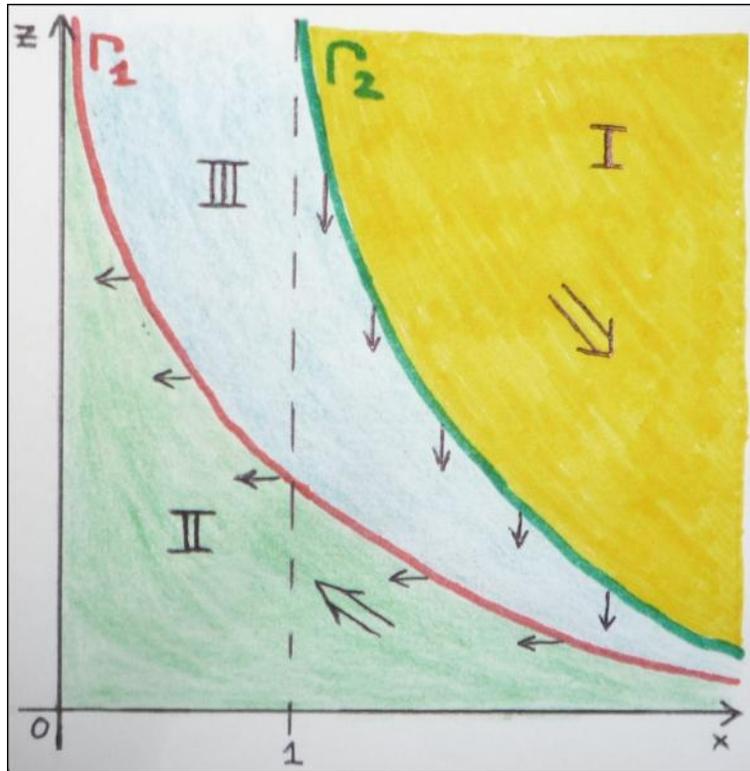


Figura 4.6: Gráfica donde se muestran las tres regiones.

Recordamos que una condición necesaria para que la rama inestable se conecte con una solución asintótica con $z_\infty > 0$ es $\mathcal{L}(x_c) = h_\infty^2$, donde la función \mathcal{L} está definida en la ecuación (4.54). Lo interesante del caso $\gamma > 5/3$ es que la función \mathcal{L} ya no es monótona. Efectivamente, de la ecuación (4.56) se puede ver que \mathcal{L} posee un mínimo local en $x^* = \frac{3\gamma-2}{4(\gamma-5/3)}$, donde \mathcal{L} toma un valor menor que uno, ver la figura 4.7. Como $h_\infty^2 > 1$ para $z_\infty > 0$, esto implica que la posición del punto silla x_{c1} no puede tomar valores arbitrarios, sino que debe encontrarse en el intervalo

$$x_{lim} < x_{c1} < x_{cmax},$$

donde x_{cmax} es el punto donde la función \mathcal{L} toma el valor de uno. Es decir,

$$\mathcal{L}(x_{cmax}) = 1 = \left[1 + \frac{1}{4x_{cmax}(\gamma-1) - 3\gamma + 2} \right]^2 \left[1 - \frac{3}{4x_{cmax}} \right].$$

Simplificando, encontramos la ecuación cuadrática,

$$\frac{3}{4}(\gamma-1)^2(4x_{cmax} - 3)^2 = [8x_{cmax}(\gamma-1) - 6\gamma + 5]x_{cmax},$$

que tiene la siguiente solución, tomando en cuenta que $x_{cmax} > x_{lim}$,

$$x_{cmax} = \frac{18\gamma^2 - 42\gamma + 23 + \sqrt{12\gamma - 11}}{4(\gamma-1)(6\gamma-10)}.$$

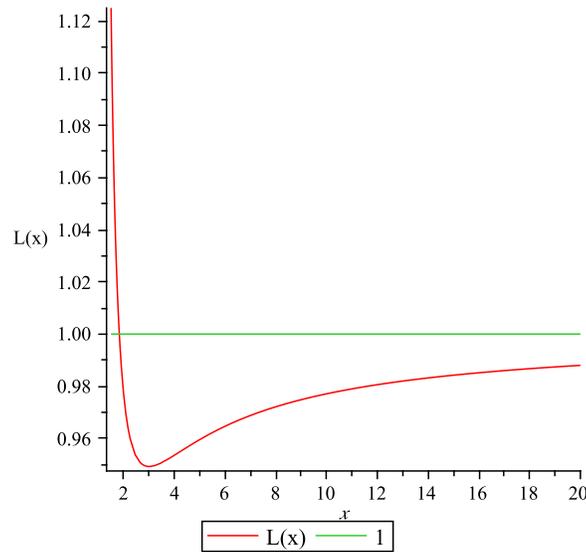


Figura 4.7: Gráfica de $\mathcal{L}(x)$ para el caso $\gamma = 2$, donde $x_{lim} = 1$ y $x^* = 3$.

De ahora en adelante, analizamos el caso específico $\gamma = 2$. Para este caso, tenemos $x_{lim} = 1$ y $x_{cmax} \approx 1.8257$, y entonces la condición necesario para tener una curva de nivel global que pasa por el punto silla se reduce a

$$1 < x_{c1} < 1.8257. \quad (4.57)$$

Para encontrar la posición del otro punto crítico, acudimos a la ecuación (4.28) con $\gamma = 2$ y obtenemos

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^{3/2}}{2\mu} - 4x + 4.$$

Evaluando en el punto x_c , es decir, $\mathcal{F}(x_c) = 0$, llegamos a la siguiente ecuación para x_c

$$x_c^3 = 16(2\mu)^2(x_c - 1)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada obtenemos

$$x_c^{3/2} = 8\mu(x_c - 1).$$

Definamos la siguiente ecuación

$$y^3 + 8\mu(1 - y^2) = 0, \quad (4.58)$$

donde $y = x^{1/2}$. Tomemos un valor de x_{c1} dentro del intervalo $1 < x_{c1} < 3$ y encontremos el otro punto crítico mediante la ecuación (4.58) es decir,

$$y^3 - \frac{y_1^3}{1 - y_1^2}(1 - y^2) = (y - y_1) \left(y^2 + y_1 \frac{y + y_1}{1 - y_1^2} \right) = 0,$$

donde $8\mu = -\frac{y_1^3}{1 - y_1^2}$, con $y_1 = x_{c1}^{1/2}$.

El primer cero, lo encontramos en $y = y_1$ y el segundo cero, en $y^2(1 - x_{c1}) + y\sqrt{x_{c1}} + x_{c1} = 0$ y esto es,

$$\sqrt{x_{c2}} = y = \frac{\sqrt{x_{c1}} + \sqrt{x_{c1}(4x_{c1} - 3)}}{2(x_{c1} - 1)}.$$

A continuación mostramos dos ejemplos, uno que satisface la condición necesaria (4.57) para que la rama inestable se conecte en el infinito y otro que viola dicha condición.

En el primer ejemplo, $x_{c1} = 1.82$ y $x_{c2} \approx 6.37$. Las figuras 4.8 y 4.9 muestran las ramas estables e inestables y las curvas de nivel de F_μ para este caso. Se espera que la rama inestable se extienda hasta $x \rightarrow \infty$ en este caso.

En el segundo ejemplo, $x_{c1} = 2.4$ y $x_{c2} \approx 3.90$. Las figuras 4.10 y 4.11 muestran las ramas estables e inestables y las curvas de nivel de F_μ para este caso. Como podemos ver de las figuras, la rama inestable no se extiende hasta el infinito en este caso, sino que se conecta con la rama estable.

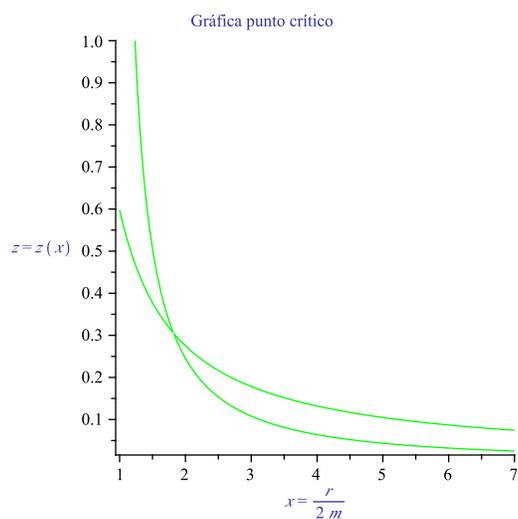


Figura 4.8: Gráfica donde se muestra el punto crítico y las ramas estable e inestable para $\gamma = 2$, $x_{c1} = 1.82$ y $x_{c2} = 6.37$.

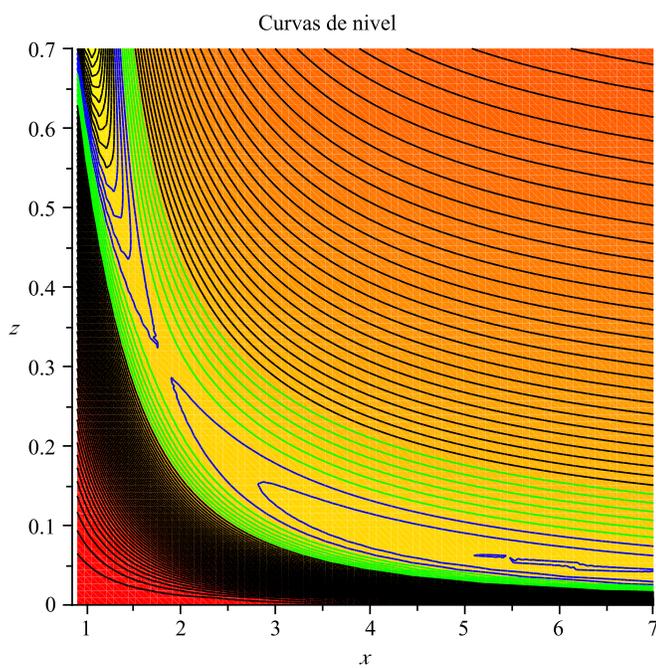


Figura 4.9: Curvas de niveles de la función F_μ para $\gamma = 2$ y $x_{c1} = 1.82$. El segundo punto crítico (el mínimo local) está en $x_{c2} = 6.37$.

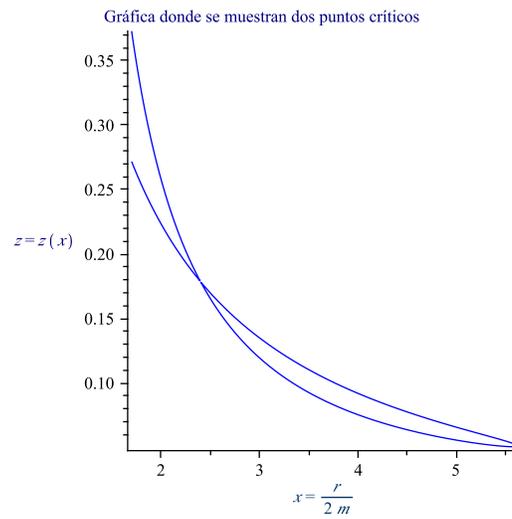


Figura 4.10: Gráfica que muestra las ramas estables e inestables para $\gamma = 2$, $x_{c_1} = 2.4$ y $x_{c_2} = 3.90$. Como se puede ver, las dos ramas se conectan en este caso.

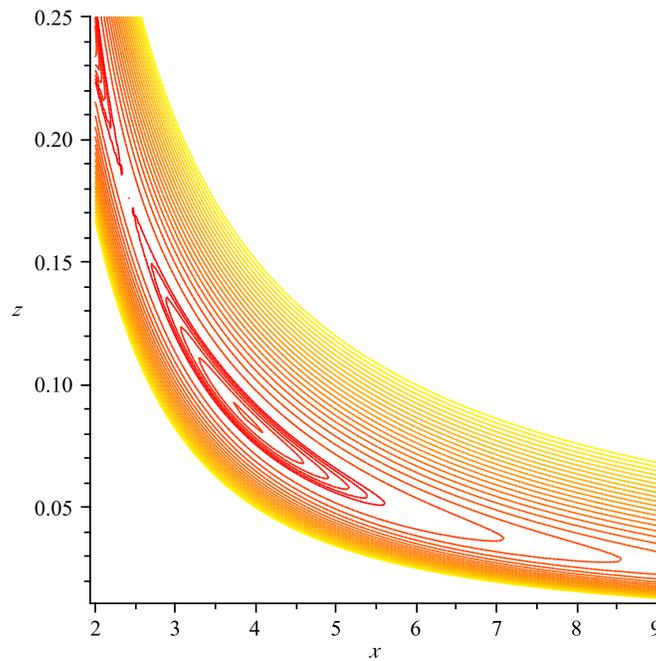


Figura 4.11: Curvas de niveles de la función F_μ para $\gamma = 2$ y $x_{c_1} = 2.4$. El segundo punto crítico (el mínimo local) está en $x_{c_2} = 3.90$.

Capítulo 5

Acreción de gas de Fermi

En esta sección, queremos ver si para un gas de Fermi, este puede ser acretado por el agujero negro. Primero encontramos la función $F_\mu(x, z)$ para este gas. Para ello, tenemos que $f(n) = \frac{d\rho}{dn}$ y de la ecuación (2.30),

$$\frac{d\rho}{dn} = mc^2 \sqrt{1 + x_f^2},$$

donde $\varepsilon_0 = mc^2$ es la energía en reposo y x_f , esta relacionado con z de la forma $x_f = z^{1/3}$. Esta relación es dada porque

$$x_f = \lambda_c (3\pi n)^{1/3}$$

donde λ_c es la longitud de Compton.

Tenemos que $z = n/n_0$ entonces, reemplazamos z en la ecuación anterior y obtenemos

$$x_f = \lambda_c (3\pi^2 n_0)^{1/3} (z)^{1/3}$$

y definimos entonces

$$n_0 := \frac{1}{3\pi^2 \lambda_c^3}.$$

Quedando la expresión para $f(n)$ de la forma,

$$f(n) = mc^2 \sqrt{1 + z^{2/3}}.$$

Ahora como $h(z) = \frac{f(n)}{\varepsilon_0}$, tenemos que

$$h(z)^2 = 1 + z^{2/3},$$

y la ecuación (4.7) queda de la forma

$$F_\mu(x, z) = (1 + z^{2/3}) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\mu^2}{z^2 x^4} \right).$$

Teniendo la ecuación anterior encontremos sus puntos críticos, es decir, los puntos (x_c, z_c) tales que

$$\nabla F_\mu(x_c, z_c) = 0.$$

Las componentes de esta ecuación son $\partial_x F_\mu(x_c, z_c) = 0$ y $\partial_z F_\mu(x_c, z_c) = 0$, y implican las ecuaciones:

$$z(x) = \frac{2\mu}{x^{3/2}}, \quad (5.1)$$

y

$$x^3(x-1) = \frac{\mu^2}{z^2} \left(2 + \frac{3}{z^{2/3}} \right) = H(z). \quad (5.2)$$

Vamos a ver si existen puntos crítico. Para ello, reemplazamos (5.1) en (5.2), obteniendo

$$x \left(4 - \frac{3}{(4\mu^2)^{1/3}} \right) = 6. \quad (5.3)$$

Vemos de (5.3), que hay una restricción para μ porque, el término dentro del paréntesis tiene que ser positivo. Esto es,

$$4 - \frac{3}{(4\mu^2)^{1/3}} > 0$$

entonces,

$$(4\mu^2)^{1/3} > 3/4.$$

Tenemos entonces que la ecuación (5.3) es lineal en x y por tanto, es una función monótona y tiene un único cero.

Analizamos ahora el determinante del Hessiano (4.38) para ver que tipo de punto crítico es el punto que tenemos. Recordemos que la determinante es dada por

$$\mathcal{D} = -\frac{h_c^2}{z_c^2 x_c^2} \mathcal{Y}_f,$$

donde $\mathcal{Y}_f := 1 - 3(W_c - V_c^2)$. Los términos W_c y V_c^2 , se encuentran a partir de las definiciones $V(z)^2 = \frac{\partial \log h(n)}{\partial \log n}$ y $W(z) = \frac{z}{V} \frac{\partial V}{\partial z}$. Y de esta encontramos $V(z)^2 = \frac{1}{3} \frac{z^{2/3}}{1+z^{2/3}}$ y $W(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1+z^{2/3}}$. Estos términos, los evaluamos en \mathcal{Y}_f y encontramos el signo de \mathcal{Y}_f que nos va a decir que tipo de punto crítico tenemos. Esto es,

$$\mathcal{Y}_f = \frac{2z_c^{2/3}}{1+z_c^{2/3}} > 0,$$

lo que implica que $\mathcal{D} < 0$. Entonces, el punto crítico, es un punto de silla de F_μ .

Miremos ahora que tenemos que el punto crítico es un punto de silla, el comportamiento global de las ramas estable e inestable (asociados a los autovalores negativo y positivo de DX_F). Para ello, vamos a analizar las curvas Γ_1 y Γ_2 , cuyas ecuaciones respectivamente son (5.1) y (5.2).

El comportamiento de la curva Γ_1 , con la ecuación (5.1) que la vamos a llamar $z_1(x)$, nos muestra que en los extremos $z_1(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$ y $z_1(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Como la derivada de $z_1(x)$ es negativa para toda x , entonces tenemos que la función $z_1(x)$ es monótona decreciente.

El comportamiento de la curva Γ_2 , con la ecuación (5.2), nos muestra que en los extremos $H(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 0$ y $H(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. En los otros puntos tenemos que la derivada es $H'(z) = -\frac{4\mu^2}{z^3} \left(1 + \frac{2}{z^{2/3}}\right) < 0$ para todo z . Entonces, $H(z)$ es una función monótona decreciente. $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ y existe la inversa $H^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. La función $z_2(x)$, se puede encontrar a partir de $z_2(x) = H^{-1}[x^3(x-1)]$.

Del análisis anterior, tenemos que las curvas Γ_1 y Γ_2 son monótonas decrecientes. Miremos ahora las pendientes de estas curvas,

Para Γ_1 tenemos

$$\left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x_c} = -\frac{3}{2}\Lambda, \quad (5.4)$$

y para Γ_2

$$\left. \frac{dz_2}{dx} \right|_{x_c} = -2\Lambda \frac{1}{[W_c - V_c^2 + 1]} = \left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x_c} \frac{4}{3} \frac{1}{W_c - V_c^2 + 1}, \quad (5.5)$$

donde $\Lambda = \frac{z_c}{x_c}$.

Introduciendo las expresiones explícitas el W_c y V_c^2 encontrados anteriormente, llegamos a

$$\frac{1}{W_c - V_c^2 + 1} = \frac{3}{2} \frac{1 + z^{2/3}}{2 + z^{2/3}},$$

y reemplazandola en (5.5) tenemos

$$\left. \frac{dz_2}{dx} \right|_{x_c} = \left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x_c} \frac{2(1 + z^{2/3})}{2 + z^{2/3}}.$$

Como $\frac{2(1+z^{2/3})}{2+z^{2/3}} > 1$, tenemos que la pendiente asociada a Γ_2 es menor que la pendiente asociada a Γ_1 , por tanto, las curvas se cruzan.

La ecuación (5.5) también la podemos expresar en términos de $D = \sqrt{\mathcal{Y}_f}$ como

$$\left. \frac{dz_2}{dx} \right|_{x_c} = \left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x_c} \frac{4}{4 - D^2}$$

para así, poderla comparar con las pendientes a las ramas que veremos a continuación.

Los pendientes asociados a las ramas inestable y estable son respectivamente,

$$z_+ = \frac{-3\Lambda}{2 + D}, \quad (5.6)$$

$$z_- = \frac{-3\Lambda}{2-D}, \quad (5.7)$$

donde vemos que la pendiente de la rama estable z_- es menor que la pendiente z_+ de la rama inestable. Comparando estas pendientes z_+ y z_- con las pendientes para las curvas Γ_1 y Γ_2 , se tienen que la pendiente z_- es menor que la pendiente $\frac{dz_2}{dx}|_{x_c}$ y la pendiente z_+ es mayor que la pendiente $\frac{dz_1}{dx}|_{x_c}$.

El diagrama fase para el gas de Fermi tiene exactamente el mismo comportamiento que el gas politrópico con $1 < \gamma < 5/3$, ver la sección 4.5. La rama inestable no puede salir de las regiones *I* y *II*. Miremos si es posible conectar la rama inestable con una solución asintótica. Esto es, si se puede asociar a una densidad z_∞ en el infinito dado, un único punto crítico (x_c, z_c) . Analizamos entonces la función

$$\mathcal{L}_f(x) = \left(1 + \frac{3}{4x-6}\right) \left(1 - \frac{3}{4x}\right), \quad (5.8)$$

donde $\mathcal{L}_f(x_c) = F_\mu(x_c, z_c)$ y donde $z^{2/3} = \frac{3}{4x-6}$. El comportamiento en los extremos es $\mathcal{L}_f(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, y $\mathcal{L}_f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \downarrow 3/2$.

Veamos mediante la derivada el comportamiento de $\mathcal{L}_f(x)$ en los otros puntos. La derivada de $\mathcal{L}_f(x)$ es

$$\mathcal{L}'_f(x) = \frac{-9(4x-3)}{8x^2(2x-3)}. \quad (5.9)$$

Vemos que $\mathcal{L}'_f(x) < 0$ para todo $x > 3/2$ entonces, la función $\mathcal{L}_f(x)$ es monótona decreciente. Sabemos que $z^2 > \frac{4\mu}{x^3}$ en la región *I*. Entonces,

$$u = \frac{\mu}{zx^2} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

De la ecuación anterior concluimos que

$$u_\infty = 0.$$

Esto implica que $F_\mu(x, z) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$. Como

$$F_\mu(x_c, z_c) > 1$$

porque,

$$\mathcal{L}_f(x_c) = F_\mu(x_c, z_c) > 1$$

pues $\mathcal{L}_f(x)$ ya mostramos es una función monótona decreciente entonces,

$$z_\infty > 0,$$

donde recordemos, el punto crítico se encuentra en el intervalo $3/2 < x_c < \infty$. Entonces la rama inestable se extiende hasta el horizonte $x = 1$ y a $x \rightarrow \infty$.

Concluimos entonces que dado una densidad de partículas z_∞ que viene del medio interestelar, existe un único flujo radial y estacionario que es regular en el horizonte. Ver las figuras 5.1 y 5.2 donde se muestran las ramas estable e inestable y las curvas de nivel de F_μ .

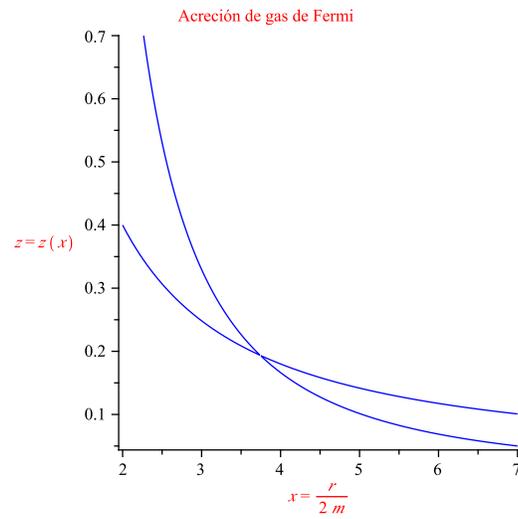


Figura 5.1: Gráfica donde se muestra el punto crítico y las ramas estable e inestable para $\mu = 0.7$, $x_c = 3.76$ y $z_c = 0.19$. La solución física que describe la acreción corresponde a la curva de nivel generada por el punto crítico y la rama inestable.

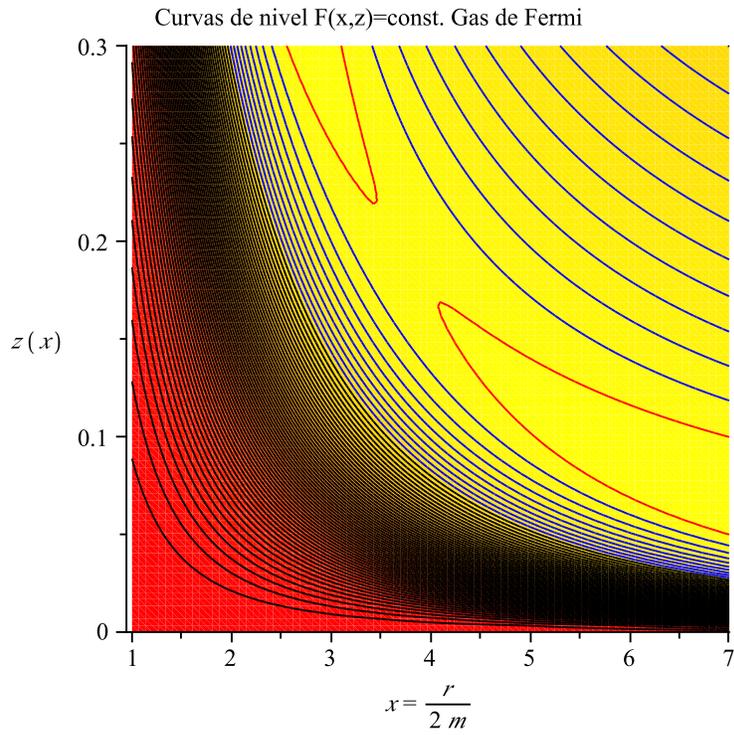


Figura 5.2: Gráfica donde se muestran las curvas de nivel de $F_\mu(x, z) = \text{const}$ para $\mu = 0.7$ y $x_c = 3.76$.

Capítulo 6

Acreción de polvo

Finalmente, en este capítulo, analizamos un caso sencillo del fluido de partículas donde la ecuación de estado, es la de polvo. En este caso, la presión p es cero lo que implica que $f = \varepsilon_0$ y $h(n) = 1$. Entonces, la función (4.7) toma la forma simple

$$F_\mu(x, z) = 1 - \frac{1}{x} + u^2, \quad u = \frac{\mu}{x^2 z}, \quad x > 0, z > 0. \quad (6.1)$$

Cuando x tiende al infinito, queremos que la velocidad u se haga cero. Por lo tanto, la solución física es dada por la curva de nivel $F_\mu(x, z) = 1$, y entonces,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Como $x^2 u z = \mu$, tenemos que la función densidad de partículas para la ecuación de polvo es

$$z(x) = \frac{\mu}{\sqrt{x^3}}, \quad (6.2)$$

y obtenemos una función bien comportada para todo $x > 0$ y todo $\mu > 0$. Sin embargo, notamos que estas soluciones tienen $z_\infty = 0$, y por lo tanto no es posible conectarlas con un baño de partículas en el infinito.

Una gráfica que describe la densidad de partículas se encuentra en la figura 6.1.

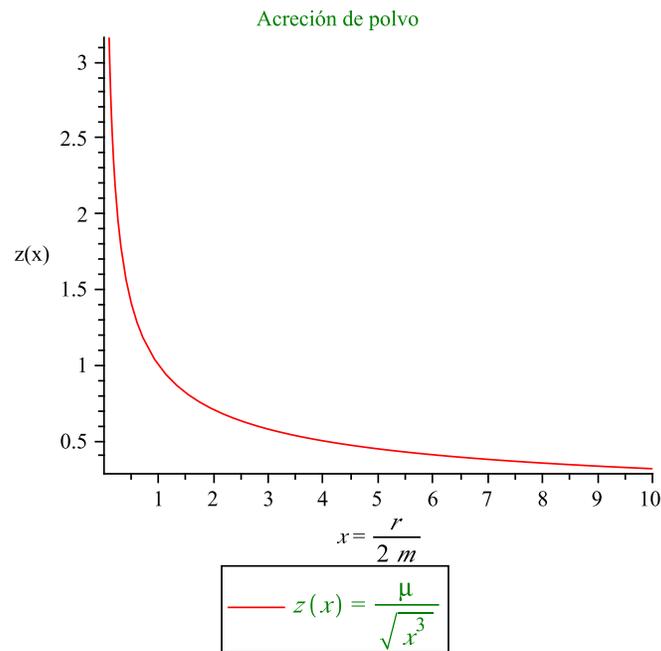


Figura 6.1: Gráfica de la densidad de partículas $z(x)$ en función de x para $\mu = 1$.

Capítulo 7

Conclusiones

En el trabajo presentado, estudiamos la acreción estacionaria de materia por un agujero negro con simetría esférica. Supusimos que el espacio-tiempo es un fondo fijo, es decir, despreciamos los efectos del $T^{\mu\nu}$ de fluido sobre la métrica de fondo. Además, despreciamos efectos de viscosidad y de producción de entropía. Supusimos un fluido estacionario. Estudiamos la acreción de materia para la ecuación de estado politrópica donde encontramos un punto crítico en el espacio fase y demostramos que dicho punto es un punto hiperbólico del sistema dinámico. Linealizamos el sistema dinámico alrededor de este punto crítico. De los eigenvalores y eigenvectores del campo vectorial linealizado, obtenemos el flujo del problema linealizado que, localmente por el teorema de Hartman-Grobman, también describe el flujo del problema no lineal. En nuestro caso, encontramos ramas estables e inestables del sistema, que corresponden a los puntos que convergen al punto crítico en el futuro y el pasado, respectivamente. Usando métodos globales, demostramos que la rama inestable se pueden extender hasta el horizonte y la región asintótica, y se puede llegar a un entendimiento del espacio de fase.

Mostramos que para el caso donde el índice politrópico γ está dentro del intervalo $1 < \gamma \leq 5/3$, la rama física, describiendo acreción de materia, es la rama inestable. Además, demostramos que dado una densidad de partículas z_∞ existe un único flujo radial y estacionario que es regular en el horizonte. Es decir, resolvimos el problema astrofísico: Dado una densidad de partículas que proviene del medio interestelar, existe un único flujo radial y estacionario de acreción. Luego, estudiamos el caso para $\gamma = 2$ y al igual que en el caso anterior, estudiamos el espacio de fase. Encontramos que, dependiendo de los parámetros, pueden existir un único, dos o ningún punto crítico. En caso de dos puntos críticos, demostramos que uno de ellos es un punto silla y el otro un extremo local. Para el punto de silla, tenemos que las ramas estables e inestables en el espacio de fase se comportan, localmente, igual que para $1 < \gamma \leq 5/3$. En el caso $\gamma = 2$, no sabemos aún si hay o no acreción ya que, puede suceder que la rama inestable se extienda al infinito, o bien que la rama inestable se conecte con la rama estable. También estudiamos el gas de Fermi y el gas de polvo (presión cero) y se pudo ver que para estos dos casos, también hay acreción de materia.

El estudio de la acreción de materia no termina aquí. Una continuación de este trabajo, se podría extender al caso para $\gamma > 5/3$ donde parcialmente se analizó $\gamma = 2$ pero, no se estudió a fondo. Otro tema a estudiar en el futuro es el caso donde el agujero negro está rotando y examinar la posible formación de discos de acreción alrededor de él, lo que representa un

caso más realista que el estudiado en este trabajo.

Apéndice A

Apéndice

En este apéndice analizamos el flujo local cerca de los puntos críticos de un sistema dinámico Hamiltoniano de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = X_F(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x, z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial F(x, z)}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Tomemos un punto crítico (x_c, z_c) , donde $X_F(x_c, z_c) = 0$, y miremos qué pasa cerca de él. Hacemos entonces una expansión de X_F en serie de Taylor alrededor de este punto,

$$X_F(x, z) = X_F(x_c, z_c) + \epsilon DX_F(x_c, z_c) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.2})$$

El primer término de la derecha se cancela pues $X_F(x_c, z_c) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ z_c \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

entonces de la ecuación (A.1) encontramos,

$$\epsilon \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \epsilon DX_F(x_c, z_c) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.4})$$

Despreciamos el término cuadrático (pues lo que queremos es un análisis lineal en ϵ) y cancelando términos iguales tenemos

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = DX_F(x_c, z_c) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

siendo $A = DX_F(x_c, z_c)$ el Jacobiano de $X_F(x, z)$ en el punto crítico.

La solución del problema linealizado es

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} \Big|_{t=0}. \quad (\text{A.6})$$

Si A es diagonalizable,

$$A = U\Lambda U^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

siendo U la transformación lineal que tiene los eigenvalores de A como columna. Entonces,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{U\Lambda U^{-1}t} \\ &= Ue^{\Lambda t}U^{-1} \\ &= U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} U^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Si definimos

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} := U^{-1} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi(t) \\ &= U^{-1}A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} \\ &= U^{-1}AU\xi(t) = \Lambda\xi(t) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xi(t), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

de donde

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \xi(0). \quad (\text{A.11})$$

Concluimos que

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} (t) = U\xi(t) = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \xi(0). \quad (\text{A.12})$$

Este análisis de linealizar el sistema es para luego compararlo localmente con el problema real no linealizado. Esto se puede hacer mediante el Teorema de Hartman-Grobman (ver, por ejemplo [5]) que nos dice que el flujo linealizado describe cualitativamente el flujo no

lineal bajo la condición $Re(\lambda_i) \neq 0$ (punto de equilibrio hiperbólico).

Para el caso donde los eigenvalores son reales y la matriz es 2×2 , tenemos 5 casos para λ_1 y λ_2 . Estos son (ver [5]):

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 < 0, \quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1, \quad 0 < \lambda_2 = \lambda_1.$$

Para el caso donde $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$, tenemos un punto crítico y su gráfica en el espacio de fase donde se muestran las curvas de nivel se muestra en la figura A.1. Las ramas estables e inestables corresponden a los puntos para los cuales la solución converge al punto crítico $(0, 0)$ en el futuro y el pasado, respectivamente.

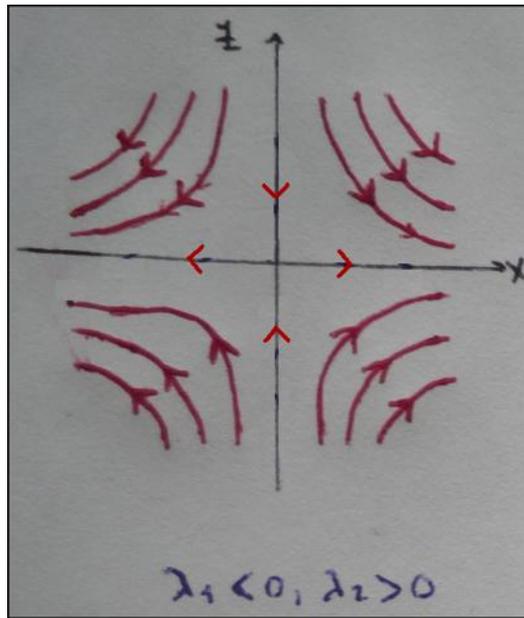
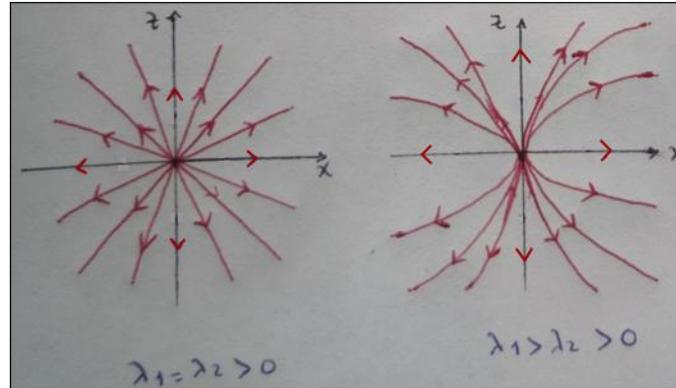
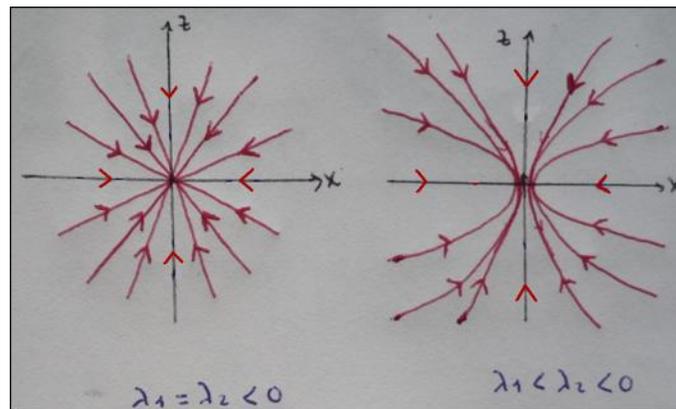


Figura A.1: Gráfica del espacio de fase para $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$.

Para el caso donde $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$, tenemos un nodo propio inestable y para $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ tenemos un nodo impropio inestable, ver la figura A.2.

Para el caso donde $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ tenemos un nodo propio estable y para $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ tenemos un nodo estable impropio, ver la figura A.3.

Figura A.2: Gráfica del espacio de fase para $0 < \lambda_2 \leq \lambda_1$.Figura A.3: Gráfica del espacio de fase para $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$.

Bibliografía

- [1] F.C. Michel. Accretion of matter by condensed objects. *Astrophysics and Space Science*, 15:153–160, 1972.
- [2] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [3] F. S. Guzmán and F. D. Lora-Clavijo. Exploring the effects of pressure on the radial accretion of dark matter by a schwarzschild supermassive black hole. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 000:1–9, 2011.
- [4] M. Spivak. *Calculus on manifolds*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.
- [5] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems (3rd ed.)*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [6] S. Weinberg. *Gravitación and cosmology*. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [7] N. Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [8] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003.