Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Marcos en espacios de Krein.

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Kevin Michael Esmeral García

Director

Dr. Elmar Wagner.

Morelia, Michoacán - agosto de 2011.

Índice general

Agradecimientos III

INTRODUCCIÓN V

Capítulo 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO INDEFINIDO 1
1. Nociones Básicas 1
2. Espacios de Krein dado por una $W-$Métrica sobre un espacio de Hilbert 6

Capítulo 2. MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT 11
1. Propiedades Básicas 11
2. Marcos de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$ 14
2.1. Condiciones Necesarias 14
2.2. Condiciones Suficientes 15

Capítulo 3. MARCOS EN ESPACIOS DE KREIN 19
1. Equivalencia de Marcos Entre espacios de Krein y espacios de Hilbert 19
2. Marcos en espacios de Hilbert con $W-$Métrica 35
2.1. Generalidades 36
2.2. Marcos en espacios de Krein regulares 37
2.3. Marcos en espacios de Krein singulares 39
2.3.1. 1^{er} Caso: $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es un operador de Gram con $W > 0$ 40
2.3.2. 2^{do} Caso: $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es un operador de Gram tal que $0 \in \sigma(W) \subset [-\|W\|, \|W\|]$ 41
2.4. El operador de Gram W es no Acotado 43
2.4.1. 1^{er} Caso: El operador de Gram W es no acotado con $0 \notin \sigma(W)$ 46
2.4.2. 2^{do} Caso: El operador de Gram W no acotado con $0 \in \sigma(W)$ 47

Capítulo 4. Ejemplos 49

Bibliografía 55

Agradecimientos

Debido a la gran importancia que tiene para mí la cualidad de ser agradecido, no quiero dejar de nombrar a nadie en esta parte. Por eso agradezco a todo aquel que no pueda nombrar aquí.

Gracias a Dios protector, a mi madre quienes son mis guías en la vida, por ser todo de mi y también por darme la oportunidad de cruzar en mi vida a personas que con su carisma, sencillez, amabilidad y sinceridad le dieron luz al camino para legar a cumplir éste sueño. Al Dr. Elmar Wagner, el cual más que un asesor es un gran amigo, por ser ejemplo para mí como persona e investigador, que no dudó de mis capacidades para llegar a este punto. A Adriana Briseño, una mujer espléndida, amiga, una guerrera que me tendió su mano y fue factor fundamental para mi viaje a Mexico. A CONACyT cuyo apoyo fue indispensable para realizar mis estudios. A mi hermano Kelmar Esmeral, quien es mi compañero de lucha, mi compadre del alma, que a pesar de las dificultades y los tropiezos me dió la fortaleza y la esperanza para que pudiera cumplir el sueño de ser maestro en ciencias matemáticas. A mi abuela querida, bella y hermosa Heliodora Izaguirre por su sacrificio y por su fé puesta en mí. A mi padre Nicanor Esmeral y mi hermano Kenny Esmeral quienes fueron los que colocaron la primera piedra para construir este camino que se ha forjado por trabajo sudor y lágrimas. A mis grandes amigos por su apoyo incondicional, a los profesores del posgrado conjunto en ciencias matemáticas UNAM-UMSNH quienes con su paciencia para conmigo plantaron en mí el deseo de ser parte de una comunidad muy especial, la cual es ser investigador en matemáticas de alto nivel.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de espacios con producto escalar uno de los conceptos más importantes es el de Base Ortonormal. Este concepto permite que cada elemento en el espacio sea escrito como “ combinación lineal ”de elementos de la Base Ortonormal; sin embargo algunas de las condiciones para que una familia de elementos en el espacio con producto escalar sea Base Ortonormal son muy restrictivas; como por ejemplo la dependencia lineal y algunas veces la ortogonalidad respecto a un producto escalar se hace difícil y hasta casi imposible de probar en muchos casos. Esta es la razón por la cual se deben encontrar herramientas más flexibles.

Los Marcos (Frames) son una de esas herramientas. Un Marco para un espacio con producto escalar permite que cada elemento en el espacio pueda ser escrito como “combinación lineal ”de elementos en el Marco; pero la independencia lineal y la ortogonalidad entre los elementos del Marco son condiciones que no se requieren, intuitivamente se puede pensar acerca de los Marcos como una “ Base generalizada”, ya que este tiene más elementos.

Los Marcos aparecieron por primera vez en 1952 en el trabajo *A Class of Non-Harmonic Fourier Series*, realizado por Duffin R.J. y Schaeffer A.C.[**11**]. En este trabajo los Marcos (Frames) se usaron como herramienta en el estudio de series de Fourier no armónicas. Y 30 años después, en 1986, Daubechies, I., Grossmann A., Meyer, Y. en su trabajo denominado *Painless nonorthogonal expansions*[**9**], usaron los Marcos para encontrar expansiones en series de funciones en $L_2(\mathbb{R})$ muy similares a la expansión en series utilizando Bases Ortonormales.

Durante los últimos años la teoría de Marcos ha sido desarrollada rápidamente debido al desarrollo de nuevas aplicaciones. Los Marcos son comúnmente aplicados en el procesamiento de señales e imágenes, comprensión de datos, pero también son usados para mitigar efectos de perdidas de sistemas de comunicaciones basados en paquetes, y por lo tanto para mejorar la transmisión de datos (ver [**8**]).

En este proyecto abarcaremos los Marcos en espacios de Krein. La investigación se centra en mostrar que si se tienen Marcos para espacios de Krein se tienen Marcos para el espacio de Hilbert asociado y viceversa. También se analiza que sucede con los marcos para $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ cuando sobre éste se considera la forma bilineal $\langle W_\varphi \cdot, \cdot \rangle$, donde $W_\varphi : L_2(\mathbb{R}, d\mu) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ es un operador lineal autoadjunto tal que $W_\varphi f = \varphi f$ con ker $W_\varphi = \{0\}$ y φ una función real medible que satisface $\varphi f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ si $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$.

En el capítulo 1 se dan nociones y propiedades básicas de espacios de Krein, se construyen ejemplos de estos espacios a partir de espacios de Hilbert mediante la asignación de $W-$métricas y este proceso nos da como resultado espacios de Krein llamados regulares o singulares.

En el capítulo 2 se dan las nociones y propiedades básicas de los Marcos para espacios de Hilbert, algunos resultados importantes que serán analizados a fondo para ver si siguen siendo válidos en los diferentes tipos de espacios de Krein construidos en el capítulo 1. También en este capítulo encontraremos una clase importantes de Marcos para el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$, el cual es llamado Marcos de Gabor (Gabor Frames). Estos son muy importantes en la teoría de Marcos y en el análisis de señales e imágenes por su estrecha conexión con el análisis de Fourier. Todos los resultados en este capítulo son dados sin demostración, ya que estas pueden ser encontrados en [**7**].

El capítulo 3 es el centro de el proyecto, aquí encontraremos el resultado principal, el cual nos dice que hay una equivalencia de Marcos entre espacios de Krein y Marcos en el espacio de Hilbert asociado, se estudia si los resultados básicos y de gran importancia dados en el capítulo 2 siguen siendo validos en los diferentes tipos de espacios de Krein construidos en el capítulo 1, y si no lo son, se dan resultados análogos a los dados para espacios de Hilbert. Se muestra el comportamiento de los Marcos en espacios de Krein regulares y singulares, el cual es equivalente al usual en espacios de Hilbert cuando se considera un espacio de Krein regular, y se muestra que en espacios de Krein singulares el comportamiento es totalmente diferente debido a las propiedades de la $W-$métrica, señalando las causas de este hecho.

Finalizamos este proyecto mostrando en el capítulo 4 ejemplos que ilustran las diferentes situaciones que explican el ¿Por que? del desarrollo de este proyecto.

CAPíTULO 1

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO INDEFINIDO

En este capítulo se dan algunas nociones básicas de los espacios con producto interno indefinido. Los resultados de este capítulo pueden ser encontrados en [**3**], [**4**] y [**5**].

1. Nociones Básicas

DEFINICIÓN 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un *producto interno* en V, es una función $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

1. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ para todo $x, y, z \in V$.
2. $[\alpha x, y] = \alpha [x, y]$ para todo $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $[x, y] = \overline{[y, x]}$ para todo $x, y \in V$.

Al par $(V, [\cdot,\cdot])$ se le llama *espacio con producto interno* .

DEFINICIÓN 1.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ es un producto interno tal que para cada $x \in V$ se satisface:

1. $[x, x] \geq 0$,
2. $[x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Entonces se dice que $[\cdot,\cdot]$ es un *Producto Escalar*. En caso de que el segundo item no se cumpla se dice que el producto interno es *Semi-definido*.

DEFINICIÓN 1.3. Sea $(V,\ [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno. Decimos que $x \in V$ es:

- *Positivo*, si $[x, x] > 0$.
- *Negativo*, si $[x, x] < 0$.
- *Neutro*, si $[x, x] = 0$.

Ésta definición nos lleva a distinguir los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\beta^{+} &:= \{x \in V : [x,x] > 0\},\\
\beta^{-} &:= \{x \in V : [x,x] < 0\},\\
\beta^{++} &:= \{x \in V : [x,x] > 0 \text{ ó } x = 0\},\\
\beta^{--} &:= \{x \in V : [x,x] < 0 \text{ ó } x = 0\}.
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.4. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno. Si este posee elementos positivos como negativos, se dice entonces que $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto *Interno Indefinido*. Esto es, $\beta^{+} \neq \{0\}$ y $\beta^{-} \neq \{0\}$.

DEFINICIÓN 1.5. Sean $V, V' \subset W$ subespacios de W tales que $V \cap V' = \{0\}$, la suma directa (en el sentido usual) de V y V' es denotada $V \oplus V'$. Se define $V[\dotplus]V'$ como la suma directa de V y V' tal que para $x \in V$ y $y \in V'$ se tiene que $[x,y] = 0$.

DEFINICIÓN 1.6. Decimos que $(V, [\cdot,\cdot])$ es *descomponible* si admite una representación de la forma

$$V = V^{0}\,[\dotplus]\,V^{+}\,[\dotplus]\,V^{-}, \qquad V^{+} \subseteq\, \beta^{++}, \qquad V^{-} \subseteq \beta^{--},$$

donde $V^{0} := \{x \in V : [x,y] = 0 \quad \forall y \in V\}$ es la parte isotrópica de V, y V^{-}, V^{+} son subespacios de V.

DEFINICIÓN 1.7. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio descomponible, se dice que V es *no degenerado* si $V^{0} = \{0\}$. En este caso

$$V = V^{+}[\dotplus]V^{-}$$

Tal descomposición recibe el nombre de *Descomposición Fundamental*.

OBSERVACIÓN 1.8. Si $(V, [\cdot,\cdot])$ admite una Descomposición Fundamental, entonces todo $x \in V$ se puede escribir de manera única

$$x = x^{+} + x^{-}, \quad x^{\pm} \in V^{\pm}$$

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea* $(V, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado. Sobre V definimos*

$$(x,y) := [x^{+}, y^{+}] - [x^{-}, y^{-}] \tag{1.1}$$

entonces tenemos que $(\cdot,\cdot)$ *es un producto escalar sobre* V.

Demostración. Sea $x \in V$ entonces $(x,x) = [x^+, x^+] - [x^-, x^-]$, pero como $x^\pm \in V^\pm$ entonces $\pm[x^\pm, x^\pm] > 0$, por lo cual $(x,x) \geq 0$. Si $(x,x) = 0$ entonces tenemos que $[x^+, x^+] = [x^-, x^-]$, pero como $[x^+, x^+] \geq 0$ y $[x^-, x^-] \leq 0$, sólo nos queda que $x^+ = x^- = 0$, y por ende $x = 0$.

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$(\alpha x, y) = [\alpha x^+, y^+] - [\alpha x^-, y^-] = \alpha\left([x^+, x^+] - [x^-, x^-]\right) = \alpha(x,y)$$

Por otro lado sean $x, y, z \in V$, teniendo en cuenta que la escritura de $x + y \in V$ única entonces $(x+y)^\pm = x^\pm + y^\pm$, por lo cual

$$\begin{aligned}(x+y, z) &= [(x+y)^+, z^+] - [(x+y)^-, z^-] = [x^+ + y^+, z^+] - [x^- + y^-, z^-] \\ &= [x^+, z^+] - [x^-, z^-] + [y^+, z^+] - [y^-, z^-] = (x,z) + (y,z).\end{aligned}$$

Obviamente se tiene $(x,y) = \overline{(y,x)}$. En conclusión $(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar sobre V. ❑

Observación 1.10. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, que admite una Descomposición Fundamental, entonces si sobre V definimos el producto escalar dado en (1.1) este hace que $(V^+, [\cdot,\cdot])$ y $(V^-, -[\cdot,\cdot])$ sean espacios pre-Hilbert. Esto es, no son completo con respecto a la norma generada por estos productos escalares.

Definición 1.11 (**Espacios de Krein**). Un espacio con producto interno $(V, [\cdot,\cdot])$ que admite una descomposición fundamental de la forma

$$V = V^+ \,[\dot{+}]\, V^-, \qquad V^+ \subseteq \beta^{++}, \qquad V^- \subseteq \beta^{--}$$

con $(V^+, [\cdot,\cdot])$ y $(V^-, -[\cdot,\cdot])$ espacios de Hilbert con respecto a las normas $\|x^\pm\| = \sqrt{\pm[x^\pm, x^\pm]}$ si $x^\pm \in V^\pm$ recibe el nombre de *espacio de Krein*.

Comentario 1.12. De ahora en adelante cuando se considere un espacio de Krein será denotado $\mathfrak{K}$. Con descomposición fundamental $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+[\dot{+}]\mathfrak{K}^-$.

Definición 1.13. Sea $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+[\dot{+}]\mathfrak{K}^-, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, consideremos las siguientes proyecciones $P^\pm : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^\pm$ dadas por

$$P^+(x^+ + x^-) = x^+, \quad P^-(x^+ + x^-) = x^- \tag{1.2}$$

que están bien definidas y son ortogonales con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)$ definido en (1.1). Los operadores $P^\pm$ se llaman *Proyectores Fundamentales* y el operador $J(x^+ + x^-) = x^+ - x^-$ se llama *Simetría Fundamental*.

Definición 1.14. Sea $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+[\dot{+}]\mathfrak{K}^-, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, consideremos la siguiente forma sesquilineal $[\cdot,\cdot]_J : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ definida por

$$[x, y]_J := [Jx, y]$$

A esta se le llama *J-producto interno* y a la norma inducida denotada por $\|\cdot\|_J = \sqrt{[\cdot,\cdot]_J}$ se le llama *J-norma*.

Comentario 1.15. El J-producto interno satisface la siguiente igualdad $[x, y]_J = [x^+, y^+] - [x^-, y^-] = (x, y)$.

Definición 1.16. Sea $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+[\dot{+}]\mathfrak{K}^-$, sean $x, y \in \mathfrak{K}$, decimos que x es ortogonal a y si $[x, y]_J = 0$ y es denotado $x \perp y$. Decimos que x es $J-$ortogonal a y si $[x, y] = 0$ y es denotado $x[\perp]y$.

Observación 1.17. Como el propósito principal será estudiar operadores lineales actuando en espacios de Krein, la topología de éste espacio es importante para cuestiones relacionadas con la acotación, cerradura de operadores y su teoría espectral etc. Dicha topología es generada por la J-Norma dada en la definición 1.14. La proposición 1.9 y la definición 1.14 pueden crear la impresión de que dicha topología dependa de la elección de la Descomposición Fundamental de $\mathfrak{K}$, más sin embargo, Azizov y Iokhvidov [**3**] (capítulo I) demuestran que: *Todas las normas definidas por diferentes Descomposiciones Fundamentales resultan ser equivalentes. Así la topología generada por la J-norma no depende de la elección de la Simetría Fundamental*.

Observación 1.18. La Simetría Fundamental y el producto interno indefinido satisfacen las siguientes condiciones:

1. Se satisface $J^2 = \text{Id}, \quad J = J^{-1}$,
   $[Jx, y] = [x^+, y^+] - [x^-, y^-] = [x^-, y^+ - y^-] + [x^-, y^+ - y^-] = [x, Jy]$,
   $[Jx, Jy] = [J^2x, y] = [x, y]$.
2. $P^+ = \dfrac{J + \text{Id}}{2}$, en forma similar se tiene que $P^- = \dfrac{\text{Id} - J}{2}$.
3. $[x, x]_J \geq 0, \qquad |[x, y]| \leq \|x\|_J \|y\|_J$.

Definición 1.19. El sistema $\{e_j\}_{j\in A}$ en $\mathfrak{K}$, donde A es cualquier conjunto arbitrario de indices, es llamado J- *ortonormal* si $[e_j, e_i] = \pm\delta_{j,i}$, donde $\delta_{j,i}$ es la delta Kronecker.

Definición 1.20. Un sistema J-ortonormal $\{e_j\}_{j\in A}$ en $\mathfrak{K}$, se dice *Maximal* si no hay otro sistema $J-$ortonormal que lo contenga, y se dice ser J-completo si no hay un vector J-ortogonal a este sistema.

Un ejemplo sencillo de un sistema J-ortogonal de $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{+}[\dotplus]\mathfrak{K}^{-}$ es la union de dos sistemas ortogonales de los subespacios $\mathfrak{K}^{\pm}$. Además el sistema $J-$ortogonal es linealmente independiente y el subespacio generado es no degenerado. En efecto dado $N \subset A$ un subconjunto de indices finito, entonces para dados $\alpha_j \in \mathbb{C}$ con $j \in N$, se tiene que

$$\left[\sum_{j\in N} \alpha_j e_j, e_i\right] = \alpha_i[e_i, e_i] = \pm\alpha_i.$$

Teorema 1.21. [**4**] *Sea $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un sistema $J-$ortonormal en el espacio de Krein $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{+}[\dotplus]\mathfrak{K}^{-}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i). $\mathfrak{K}$ *admite descomposición fundamental*

$$\mathfrak{K} = \widetilde{\mathfrak{K}}^{+}[\dotplus]\widetilde{\mathfrak{K}}^{-} \qquad \widetilde{\mathfrak{K}}^{+} \subset \beta^{++}, \quad \widetilde{\mathfrak{K}}^{-} \subset \beta^{--}$$

tales que los e_j's con $[e_j, e_j] = 1$ están en $\widetilde{\mathfrak{K}}^{+}$ y forman en $\left(\widetilde{\mathfrak{K}}^{+}, [\cdot,\cdot]\right)$ un sistema ortonormal completo, además los e_j's con $[e_j, e_j] = -1$ están en $\widetilde{\mathfrak{K}}^{-}$ y forman en $\left(\widetilde{\mathfrak{K}}^{-}, -[\cdot,\cdot]\right)$ un sistema ortonormal completo

ii). *Tenemos que* $\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|\left[k, e_j\right]\right|^2 < \infty \quad \forall k \in \mathfrak{K}$ *y*

$$-\sum_{[e_j,e_j]=-1} \left|\left[k, e_j\right]\right|^2 \leq [k,k] \leq \sum_{[e_j,e_j]=1} \left|\left[k, e_j\right]\right|^2 \quad \forall k \in \mathfrak{K}$$

iii). *Se tiene*

$$[k_1, k_2] = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left[e_j, e_j\right]\left[k_1, e_j\right]\left[e_j, k_2\right] \quad \forall k_1, k_2 \in \mathfrak{K}.$$

Definición 1.22. Sea $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{+}[\dotplus]\mathfrak{K}^{-}$ un espacio de Krein separable, decimos que el sistema $J-$ortonormal $\{e_j\}_{j\in A}$ en $\mathfrak{K}$ es una *Base J-ortonormal* si $\{e_j\}_{j\in A}$ en $\mathfrak{K}$ es un sistema $J-$ortonormal el cual es base (Schauder) en $\mathfrak{K}$. (A lo más contable.)

Comentario 1.23. En Azizov y Iokhvidov [**3**] se muestra: Si el sistema $J-$ortonormal $\{e_j\}_{j\in A}$ en $\mathfrak{K}$ es una Base $J-$ortonormal entonces los subespacios

$$\mathcal{L}_{\pm} = \operatorname{Span}\left\{e_j : [e_j, e_j] = \pm1, \quad j \in A\right\}$$

de $\mathfrak{K}$ son subespacios maximales de β^{++} y β^{--} respectivamente.

Observación 1.24. Como cada espacio de Krein $\mathfrak{K}$ se transforma en un espacio de Hilbert cuando se considera el J-Producto interno, entonces algunas definiciones de la teoría de operadores se tienen[**1**]. Por ejemplo, se define el conjunto de operadores lineales y acotados sobre $\mathfrak{K}$ como

$$\mathcal{B}(\mathfrak{K}) = \left\{T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} : \text{ lineal y } \quad \|T\| = \sup_{x\in\mathfrak{K}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_J}{\|x\|_J} < \infty\right\}$$

Por otro lado, si $T : \mathfrak{K} \to \widetilde{\mathfrak{K}}$ acotado donde $\mathfrak{K}$ y $\widetilde{\mathfrak{K}}$ espacios de Krein con Simetría Fundamental J y $\widetilde{J}$ respectivamente, entonces existe el operador lineal $T^{*\widetilde{J}}$ que satisface $[Tx, y]_{\widetilde{J}} = [x, T^{*\widetilde{J}}y]_J$. También existe el operador lineal $T^{[*]}$ que satisface $[Tx, y]_{\widetilde{\mathfrak{K}}} = [x, T^{[*]}y]_{\mathfrak{K}}$ para todo $x \in \mathfrak{K}$, $y \in \widetilde{\mathfrak{K}}$, ya que

$$\begin{aligned}[Tx, y] &= \left[\widetilde{J}Tx, y\right]_{\widetilde{J}} = \left[Tx, \widetilde{J}y\right]_{\widetilde{J}} = \left[x, T^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}y\right]_J \\ &= \left[x, JT^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}y\right]\end{aligned}$$

entonces $T^{[*]} = JT^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}$. El operador lineal $T^{[*]}$ es llamado el operador adjunto de T en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Notamos que $T^{*\widetilde{J}}$ y $T^{[*]}$ son unitariamente equivalentes, por lo tanto las propiedades de $T^{*\widetilde{J}}$ las preserva $T^{[*]}$.

Un operador T se dice *Autoadjunto* en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ si $T = T^{[*]}$. Un operador T se dice $J-$*Autoadjunto* si $T = T^{*J}$.

Un operator autoadjunto T tal que $[Tk, k] \geq 0$ para cada $k \in \mathfrak{K}$ se dice *Positivo*. Un operador autoadjunto T tal que $[Tk, k] \geq \alpha \|k\|_J$ para cada $k \in \mathfrak{K}$ y para algún $\alpha > 0$ se dice *Uniformemente Positivo*. Un operador $U : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{K}$ se dice *Unitario en el espacio de Krein* (o simplemente *unitario* si no hay peligro de confusión)$\mathfrak{K}$ si $UU^{[*]} = U^{[*]}U = \mathrm{Id}$.

Teorema 1.25. ([**3**] *y* [**4**]). *Cada operador uniformemente positivo $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ es invertible.*

2. Espacios de Krein dado por una $W-$Métrica sobre un espacio de Hilbert

En esta sección daremos una construcción muy natural de generar espacios de Krein a partir de un espacio de Hilbert. Esta construcción es importante por que en este tipo de espacios de Krein que queremos construir hay muchas propiedades que son de gran interés y que nos ayudan a extender los Marcos de espacios de Hilbert a Marcos en Espacios de Krein.

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Consideremos un operador $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ autoadjunto, la forma sesquilineal Hermitiana

$$[\cdot,\cdot] = \langle W(\cdot), \cdot\rangle \tag{1.3}$$

define sobre $\mathfrak{H}$ un producto interno indefinido, el cual llamaremos W-métrica, o, W-Producto interno. A el operador lineal W que satisface (1.3) se le llama *Operador de Gram*.

Notemos que

$$|[x, y]| = |\langle Wx, y\rangle| \leq \|W\|\,\|x\|\,\|y\| \quad \forall x, y \in \mathfrak{H},$$

i.e, para $y \in \mathfrak{H}$ el funcional lineal $f(\cdot) = [\cdot, y]$ es acotado sobre $\mathfrak{H}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Sobre $\mathfrak{H}$ vamos a considerar la siguiente condición:

(A) El espacio $\mathfrak{H}$ es no degenerado con respecto a la W-Métrica.

Esta condición nos permite tener una descomposición fundamental, y además es equivalente a:

(A′) $0 \notin \sigma_p(W)$, donde $\sigma_p(W)$ denota el *Espectro Puntual* del operador W.

Esto nos indica que $\lambda = 0$ no es un autovalor de W (o lo que es igual es que el operador W^{-1} exista pero no necesariamente acotado).

(A″) $\overline{\text{Rang } W} = \mathfrak{H}$.

Así el dominio $\mathcal{D}_{W^{-1}} = \text{Rang } W$, es denso en $\mathfrak{H}$ y por ende el operador W^{-1} es un operador autoadjunto (pero no necesariamente acotado).

Observemos la siguiente cualidad

$$\ker W = \{x \in \mathfrak{H} : \langle Wx, x\rangle = 0\} = \{x \in \mathfrak{H} : [x, x] = 0\}$$

Esto nos indica que $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio no degenerado si y sólo si la condición (A'') se satisface, ya que $\overline{Rang\ W}^{\perp} = \ker W = \mathfrak{H}^{\perp} = \{0\}$.

Consideremos el operador de Gram W, luego $\sigma(W) \subseteq [-\|W\|, \|W\|]$, entonces por el teorema espectral de operadores normales acotados [**13**] tenemos que existe una única medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$ tal que

$$W = \int_{[-\|W\|,\|W\|]} \lambda d\mathbf{E}_\lambda \tag{1.4}$$

por lo cual tendremos que los Proyectores Fundamentales vienen dados por

$$P^- = \int_{[-\|W\|,0]} d\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_\lambda([-\|W\|, 0]), \quad P^+ = \int_{[0,\|W\|]} d\mathbf{E}_\lambda = \text{Id} - \mathbf{E}_\lambda([-\|W\|, 0]). \tag{1.5}$$

Definición 1.26. El W-Producto interno se dice*regular* cuando $0 \in \rho(W)$. Y se dice *singular* cuando $0 \in \sigma_c(W)$.

En el caso de la pertenencia de 0 a el conjunto Resolvente $\rho(W)$ juega un papel importante. Pues en este caso la $W-$métrica es regular, i.e, las normas $\|\cdot\|_W = \sqrt{\langle \sqrt{W}\cdot, \sqrt{W}\cdot\rangle}$ y la norma usual $\|\cdot\|$ son equivalentes. El ejemplo más simple es cuando el operador de Gram es la Simetría fundamental, i.e $W = J$.

Si W es el operador de Gram tal que $0 \in \rho(W)$, entonces en $\mathfrak{H}$ podemos introducir un nuevo producto escalar $(\cdot,\cdot)_1$ análogo a (1.1). El cual da en $\mathfrak{H}$ una nueva estructura de Hilbert $\mathfrak{H}_1$ con la norma $\|x\|_1 = \sqrt{(x,x)_1}$ equivalente a la norma original y tal que $[x,y] = (J_1 x, y)_1$, donde $J_1 = P^+ - P^-$ es la Simetría Fundamental de $\mathfrak{H}_1$ con $P^\pm$ dados en (1.5) (los casos $J_1 = \pm\mathrm{Id}$ no se excluyen).

La anterior construcción está contenida como un caso especial en un argumento más general aplicable cuando $0 \notin \rho(W)$, esto es, $0 \in \sigma_c(W)$ donde $\sigma_c(W)$ denota el espectro continuo de el operador de Gram W.

Proposición 1.27. *Un espacio de Hilbert con una $W-$métrica arbitraria puede ser encajado de manera densa en un espacio de Krein $\mathfrak{H}_W$ con Simetría fundamental J.*

Idea de la demostración:. Sean $\mathfrak{H}$ un $W-$Espacio, y $P^\pm$ los orto-proyectores dados en (1.5). Introducimos en $\mathfrak{H}$ un nuevo producto escalar dado en forma análoga a (1.1)

$$\widetilde{(x,y)} = [x^+, y^+] - [x^-, y^-] \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}$$

y su correspondiente norma $\|\cdot\|_W = \sqrt{\widetilde{(\cdot,\cdot)}}$, donde $[\cdot,\cdot]$ es dada en (1.3). Entonces la forma $[x,y]$ es continuamente extendible sobre la completación $\mathfrak{H}_W$ de $\mathfrak{H}$. Así $\mathfrak{H}_W$ es un espacio de Krein relativo a la forma $[x,y] = \widetilde{(Jx,y)}$, donde J es la Simetría Fundamental de $\mathfrak{H}_W$ tal que es una extensión de $J_0 := P^+ - P^-$ de $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{H}_W$. ❑

Comentario 1.28. De ahora en adelante supondremos que sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ una cierta $W-$Metríca es dada, y que la condición de no degenerado (A) se satisface.

Sea T un operador linear arbitrario en $\mathfrak{H}$ con dominio $\mathcal{D}_T$ y consideremos

$$\mathcal{D}_{T^{[*]}} = \{y \in \mathfrak{H} : \text{ existe } z \in \mathfrak{H} : [Tx, y] = [x, z] \quad \forall x \in \mathcal{D}_T\}$$

notamos que el vector z es únicamente determinado si $\mathcal{D}_T$ es denso en $\mathfrak{H}$, si esto ocurre, una vez verificado que $\mathcal{D}_{T^{[*]}}$ es un subespacio lineal entonces el operador $T^{[*]}$ dado por $T^{[*]}y = z$ $(y \in \mathcal{D}_{T^{[*]}})$ es llamado $W-$Adjunto del operador lineal T. Ahora algunas propiedades del operador T^* (en sentido usual) son retenidas por el $W-$adjunto de T.

Proposición 1.29. [**2**] *Sean $\mathfrak{K}$ un W−espacio de Krein y $T : \mathcal{D}_T \subset \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ un operador lineal tal que $\overline{W\mathcal{D}_T} = \mathfrak{H}$, entonces algunas propiedades del operador lineal $T^{[*]}$ son:*

i). *El operador $T^{[*]}$ es cerrado.*
ii). $T_1^{[*]} + T_2^{[*]} \subset (T_1 + T_2)^{[*]}$.
iii). $T_2^{[*]} T_1^{[*]} \subset (T_1 T_2)^{[*]}$.
iv). *Supongamos que el operador T es uno a uno de $\mathcal{D}_T$ sobre Rang T con ambos densos en $\mathfrak{H}$, entonces el siguiente operador existe*
$$\left(T^{[*]}\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^{[*]}$$
en particular, $\left(W^{[*]}\right)^{-1} = \left(W^{-1}\right)^{[*]}$.
v). *Si $T_1 \subset T_2$ y el dominio de T_1 es denso en $\mathfrak{H}$, entonces $T_2^{[*]} \subset T_1^{[*]}$.*
vi). *Supongamos que el operador T tiene cerradura $\overline{T}$ y el dominio de T es denso en $\mathfrak{H}$, entonces $\left(\overline{T}\right)^{[*]} = T^{[*]}$.*
vii). *Si el dominio de T y de $T^{[*]}$ son densos en $\mathfrak{H}$, entonces $T \subset T^{[*][*]}$.*

Notemos que por la condición (A) el operador W^{-1} es únicamente definido sobre el dominio $\mathcal{D}_{W^{-1}} =$ Rang W el cual es denso en $\mathfrak{H}$, y es un operador autoadjunto (no necesariamente acotado). Por otro lado, demostremos que $W^{-1}T^*W \subset T^{[*]}$: Sea $y \in \mathcal{D}_{W^{-1}T^*W}$, luego para todo $x \in \mathcal{D}_T$ tenemos
$$[Tx, y] = \langle Tx, Wy\rangle = \langle x, T^*Wy\rangle = \langle x, WW^{-1}T^*Wy\rangle = [x, W^{-1}T^*Wy]$$
Esto es, $y \in \mathcal{D}_{T^{[*]}}$ y $T^{[*]}y = W^{-1}T^*Wy$, por lo cual se establece lo dicho.

Ahora, sea $y \in \mathcal{D}_{T^{[*]}}$. Para todo $x \in \mathcal{D}_T$ se tiene
$$[Tx, y] = [x, T^{[*]}y] = \langle x, WT^{[*]}y\rangle$$
pero es equivalente a
$$[Tx, y] = \langle WTx, y\rangle = \langle Tx, Wy\rangle$$
por ende, $\langle Tx, Wy\rangle = \langle x, WT^{[*]}y\rangle$ y por lo tanto $Wy \in \mathcal{D}_{T^*}$ y $WT^{[*]}y = T^*Wy$. Esto es, $T^*Wy \in$ Rang $W = \mathcal{D}_{W^{-1}}$ y $W^{-1}T^*Wy = T^{[*]}y$, lo cual nos dice que
$$T^{[*]} \subset W^{-1}T^*W$$
indicando ello que $T^{[*]} = W^{-1}T^*W$.

Definición 1.30. Se dice que un operador T con dominio $\mathcal{D}_T$ denso en $\mathfrak{H}$, es W−Simétrico si $[Tx, y] = [x, Ty]$ para todo $x, y \in \mathcal{D}_T$, o que es lo mismo $\langle WTx, y\rangle = \langle x, WTy\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{D}_T$.

Ejemplo 1.1. *Un ejemplo de operador $W-$simétrico es el mismo operador W y su inversa W^{-1}.*

Observación 1.31. Para que un operador T sea $W-$simétrico es suficiente y necesario que $T \subset T^{[*]}$

Definición 1.32. Un operador lineal V con dominio $\mathcal{D}_V$ se dice $W-$isométrico si $[Vx, Vy] = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathcal{D}_V$.

Observación 1.33. Es claro que si un operador $W-$isométrico T es invertible, entonces T^{-1} también es un operador $W-$isométrico.

Definición 1.34. Un operador $W-$isométrico T es llamado W-semi-unitario si $\mathcal{D}_T = \mathfrak{H}$, y se dice W-unitario si $\mathcal{D}_T = \text{Rang } T = \mathfrak{H}$.

Las pruebas de las afirmaciones anteriores son dadas por Azizov y Iokhvidov en [**2**].

CAPíTULO 2

MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT

En este capítulo se dan algunas propiedades básicas de Marcos en espacios de Hilbert incluyendo resultados importantes sin demostración, estas se pueden hallar [**6**], [**7**], [**8**], [**10**] y [**12**].

1. Propiedades Básicas

Definición 2.1. Una familia de elementos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{H}$ es llamado un Marco para $\mathfrak{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tal que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathfrak{H}. \tag{2.1}$$

Los números A, B son llamados *Cotas del Marco*. Estas no son únicas, las cotas óptimas del marco son el mayor valor posible de A y el menor valor posible de B que satisfacen (2.1). Si sucede el caso que $A = B$, es llamado *Marco Ajustado*. Si se deja de ser un marco cuando se remueve un elemento de la familia, entonces recibe el nombre de *Marco Exacto*.

Definición 2.2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para $\mathfrak{H}$, el operador lineal

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{H}, \qquad T\{c_n\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n \tag{2.2}$$

es llamado *Operador Pre-marco*.

Observación 2.3. En la anterior definición el operador T es acotado por que

$$\begin{aligned}
\|Tc\| &= \sup_{\|g\|=1} |\langle Tc, g\rangle| = \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{c_n}\langle x_n, g\rangle \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{c_n}\langle x_n, g\rangle| \leq \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, g\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|c\| \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle g, x_n\rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \sqrt{B} \sup_{\|g\|=1} \|g\| \\
&= \|c\| \sqrt{B}
\end{aligned}$$

por lo cual $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

Definición 2.4. El operador adjunto del operador Pre-Marco es dado por

$$T^* : \mathfrak{H} \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^* x = \{\langle x, x_n \rangle\}_{n\in\mathbb{N}} . \tag{2.3}$$

Definición 2.5. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para $\mathfrak{H}$. Definimos el operador lineal

$$S : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \qquad S x = TT^* x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle x_n \tag{2.4}$$

llamado el *Operador Marco*.

Observación 2.6. El operador Marco S es acotado, y autoadjunto. En efecto,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 \leq B$$

y se satisface que $S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$.

Definición 2.7. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Marcos para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, tales que

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, y_n \rangle\, x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle\, y_n \quad \forall x \in \mathfrak{H}. \tag{2.5}$$

Entonces se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *Marco Dual* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 2.8. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. El operador Marco S satisface las siguientes propiedades:*

i). *Es invertible y satisface*

$$B^{-1}\mathrm{Id} \leq S^{-1} \leq A^{-1}\mathrm{Id}.$$

ii). *$\{S^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco con cotas B^{-1}, A^{-1}, llamado el Marco dual de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 2.9 (**Descomposición de Marcos.**). *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Entonces se satisface*

$$x = SS^{-1}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n, \quad \textit{para todo } x \in \mathfrak{H}.$$

También puede ser usado de la forma

$$x = S^{-1}Sx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle S^{-1}x_n, \quad \textit{para todo } x \in \mathfrak{H}.$$

Teorema 2.10. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco ajustado para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ con cotas $A = B = 1$. Si $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Base Ortonormal para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$.*

Lema 2.11. *Supongamos que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en el subespacio denso* $V \subset \mathfrak{H}$ *tal que existen* $A, B > 0$ *que satisfacen*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad \forall x \in V.$$

Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para* $\mathfrak{H}$ *con cotas* A, B.

El siguiente resultado es una caracterización de Los Marcos en espacios de Hilbert.

Teorema 2.12. [7] *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{H}$ *es un Marco para el espacio de Hilbert* $\mathfrak{H}$ *si y sólo si el operador lineal*

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{H}, \quad \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n.$$

es bien definido y sobreyectivo.

Observación 2.13. Se puede dar una explicación intuitiva del ¿Por que? los Marcos son importantes. Supongamos que se quiere transmitir la señal x perteneciendo a un espacio con producto escalar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, de un transmisor $\mathcal{A} \subseteq V$ a un receptor $\mathcal{R} \subseteq V$. Si ambos tienen conocimiento de un Marco $\{x_n\}_{n=1}^m$ para V, la transmisión puede hacerse de la siguiente manera:

Si $\mathcal{A}$ envía los coeficientes $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}_{n=1}^m$, entonces el receptor $\mathcal{R}$ basado en estos coeficientes puede reconstruir la señal x utilizando el teorema de Descomposición de Marcos (teorema 2.9). Supongamos ahora que $\mathcal{R}$ no recibe una señal muy buena. Es decir, se tiene una perturbación de los coeficientes, y los nuevos coeficientes son

$$\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle + c_n\}_{n=1}^m.$$

Por lo cual, el receptor $\mathcal{R}$ basado en estos nuevos coeficientes tendría que la señal emitida fue:

$$\sum_{n=1}^m \left(\langle x, S^{-1}x_n\rangle + c_n\right) x_n = \sum_{n=1}^m \langle x, S^{-1}x_n\rangle x_n + \sum_{n=1}^m c_n x_n = x + \sum_{n=1}^m c_n x_n$$

implicando ello que se difiere de la señal correcta x por una perturbación $\sum_{n=1}^m c_n x_n$. Si $\{x_n\}_{n=1}^m$ es sobre completa (se repiten los elementos de la sucesión, por ejemplo $x_n = x_{n+1} = x_{n+2}$ para $n = 1, 4, \ldots, m-2$) el operador pre-Marco podría tener un Kernel no trivial, implicando que la parte de la perturbación agregada podría ser cero. Sin embargo esto no sucede si $\{x_n\}_{n=1}^m$ es una base ortonormal, en tal caso,

$$\left\|\sum_{n=1}^m c_n x_n\right\| = \sum_{n=1}^m |c_n|^2$$

así cada contribución de la perturbación empeora la reconstrucción.

Luego debemos ver que dado $x \in V$ los coeficientes del Marco $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}_{n=1}^{m}$ tienen norma ℓ_2-minimal a lo largo de todas las sucesiones $\{d_n\}_{n=1}^{m}$ para los cuales tengamos que

$$x = \sum_{n=1}^{m} d_n x_n.$$

2. Marcos de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$

Consideremos los siguientes operadores lineales sobre $\mathfrak{H} := L_2(\mathbb{R})$.

- Traslación por $a \in \mathbb{R}$, $T_a : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $(T_a f)(x) = f(x-a)$,
- Modulación por $b \in \mathbb{R}$, $E_b : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $(E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$.

Definición 2.14. Un Marco de Gabor es un Marco para $\mathfrak{H}$ de la forma $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, donde $a, b > 0$ y $g \in \mathfrak{H}$ es una función fija.

A la función g se le llama *Función Ventana (Window Function) o el Generador*. Explícitamente,

$$E_{mb}T_{na}g(x) = e^{2\pi i m b x} g(x - na)$$

Los siguientes resultados dados pueden ser encontrados en [**7**].

Lema 2.15. *Sean $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, y $a, b > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na)\overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Converge absolutamente para casi toda $x \in \mathbb{R}$. Dicha serie define una función de periodo a. La restricción de 2.6 al intervalo $[0, a]$ pertenece a $L_1(0, a)$.

2.1. Condiciones Necesarias.

Ahora la cuestión acerca de como obtener Marcos de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ para $L_2(\mathbb{R})$.

Definición 2.16. Sean $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert. Una familia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{H}$ es llamada sucesión de *Riesz* si existen constantes $0 < c \le C < +\infty$ que satisfacen:

$$c\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right) \le \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \le C\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right) \tag{2.7}$$

para toda sucesión de escalares $\{a_n\}$ en el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$. Una sucesión de Riesz es una *Base de Riesz* si

$$\overline{\text{gen}\{\ x_n :\ n \in \mathbb{N}\}} = \mathfrak{H}. \tag{2.8}$$

Uno de los resultados fundamentales establece que el producto ab decide si es posible que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un Marco para $L_2(\mathbb{R})$:

TEOREMA 2.17. *Sea $g \in L_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ son dados. Entonces lo siguiente se cumple:*

i). *Si $ab > 1$ entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es un Marco para $L_2(\mathbb{R})$*
ii). *Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco, entonces $ab = 1 \Leftrightarrow \{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una Base de Riesz.*

Esto es, sólo es posible para $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ser un Marco si $ab \leq 1$, y es un Marco sobre completo si $ab < 1$.

La siguiente Proposición da una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un Marco para $L_2(\mathbb{R})$, esta sólo depende de la función g y su traslación por un parámetro a. La siguiente función es usada frecuentemente, simplemente nosotros escribimos

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 . \tag{2.9}$$

PROPOSICIÓN 2.18. *Sea $g \in L_2(\mathbb{R})$, $a, b > 0$ son dados, supongamos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco con cotas $A, B > 0$ entonces*

$$bA \leq G(x) \leq bB \quad c.t.p \text{ en } \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Mas precisamente: Si la condición de cota superior en (2.10) no se satisface, entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es una sucesión de Bessel; si la condición de cota inferior en (2.10) no se satisface, entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no satisface la condición Marco de cota inferior.

2.2. Condiciones Suficientes.

Las condiciones suficientes para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un Marco para $L_2(\mathbb{R})$ se conocen desde 1988.

TEOREMA 2.19. *Sea $g \in L_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ son dados, supongamos que existen $A, B > 0$ tal que*

$$A \leq G(x) \leq B \quad c.t.p. \text{ en } \mathbb{R} \tag{2.11}$$

y

$$\sum_{k\neq 0} \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g \; T_{na+\frac{k}{b}}\overline{g} \right\|_\infty < A \tag{2.12}$$

entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$

Para demostrar que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un Marco, se necesita estimar la serie $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2$. El siguiente lema da una formula para $|\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|$ en términos de coeficientes de Fourier de una función $\frac{1}{b}$- periódica.

LEMA 2.20. *Sean $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ dados. Dado $n \in \mathbb{Z}$ consideremos la función $F_n \in L(0, \frac{1}{b})$ definida por*

$$F_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(x - \frac{k}{b}\right)\overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}$$

entonces, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle = \int_0^{\frac{1}{b}} F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx$$

en particular, el $m-th$ coeficiente de Fourier para F_n con respecto a la base ortonormal $\left\{\sqrt{b}e^{2\pi imbx}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ para $L_2(0, \frac{1}{b})$ es

$$c_m = \sqrt{b}\,\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\,.$$

A continuación se calcula la serie $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2$ usando la función G dada en 2.9 y expresiones como en 2.6 y es herramienta indispensable para saber cuando $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un Marco.

LEMA 2.21. *Supongamos que f es una función acotada y medible con soporte compacto y que la función G definida en (2.10) es acotada. Entonces*

(2.13)

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, G(x)dx + \frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}f\left(x - \frac{k}{b}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}dx$$

Los lemas anteriores nos ayudan a mostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.22. *Sea $g \in L_2(\mathbb{R})$, $a, b > 0$ y supongamos que*

$$B := \frac{1}{b}\sup_{x\in[0,a]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na)\overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}\right| \leq \infty \tag{2.14}$$

entonces tenemos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de Bessel com cota del Marco B. Si también

$$A := \frac{1}{b}\inf_{x\in[0,a]}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 - \sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na)\overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}\right|\right] > 0 \tag{2.15}$$

entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco para $L_2(\mathbb{R})$ con cotas A, B.

EJEMPLO 2.1. *i). La función $g = \chi_{[0,1)}$ genera un Marco de Gabor para todo $0 < a,\ b \leq 1$. Ya que se sigue inmediatamente que la función G dada en (2.9) es una función simple para todos los valores de $0 < a\ b \leq 1$. Y por lo tanto satisface el teorema 2.19*[**12**].

ii). Sean $a = b = 1$ y definamos la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, & si\ x \in (0,1], \\ \frac{x}{2}, & si\ x \in (1,2], \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.16}$$

Consideremos para $n,\ k \in \mathbb{Z}$ la función $x \longmapsto g(x-n)g(x-n-k)$ para $x \in (0,1]$. Dado que g es de soporte compacto, entonces esta es no cero si $n \in \{-1,\ 0\}$. Para $n = -1$ puede ser no cero para $k \in \{0,\ 1\}$, y para $n = 0$ puede ser no cero para $k \in \{-1,\ 0\}$. Por lo tanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) = \begin{cases} g(x)g(x+1), & si\ k = -1, \\ g(x)^2 + g(x+1)^2, & si\ k = 0, \\ g(x+1)g(x), & si\ k = 1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2}, & si\ k = -1, \\ \frac{5(x+1)^2}{4}, & si\ k = 0, \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & si\ k = 1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así

$$G(x) = \frac{5(x+1)^2}{4}, \quad x \in (0,1],$$

por lo tanto se tiene que

$$\sum_{k\neq 0} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) \right| = (1+x)^2, \quad x \in (0,1],$$

entonces el teorema 2.22 nos dice que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$ con cotas $A = \frac{1}{4},\ B = 9$ (ver [**7**]*).*

CAPíTULO 3

MARCOS EN ESPACIOS DE KREIN

En este capítulo abarcamos la generalización de algunos de los resultados dados en [**7**], garantizando en primera instancia la existencia de Marcos para espacios de Krein. Además se muestran resultados análogos a los dados en la teoría de Marcos en espacios de Hilbert.

1. Equivalencia de Marcos Entre espacios de Krein y espacios de Hilbert

Un resultado adaptado de [**10**] nos da una idea intuitiva de como encontrar Marcos en espacios de Krein, el cual es el siguiente.

Teorema 3.1 (***Existencia de Marcos en espacios de Krein***).
Si $\{k_n^+\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathfrak{K}^+, [\cdot,\cdot])$ *y* $\{k_n^-\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathfrak{K}^-, -[\cdot,\cdot])$ *son Marcos para los espacios de Hilbert* $(\mathfrak{K}^+, [\cdot,\cdot])$, $(\mathfrak{K}^-, -[\cdot,\cdot])$ *con cotas* $A^\pm, B^\pm > 0$, *respectivamente, entonces* $\{k_n^+\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{k_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Hilbert* $(\mathfrak{K}^+[\dotplus]\mathfrak{K}^-, [\cdot,\cdot]_J)$ *con cotas* $\text{mín}\{A^+, A^-\}, \text{máx}\{B^+, B^-\}$.

Demostración. Dado $k \in \mathfrak{K}$ se tiene que $k = k^+ + k^-$. Por lo tanto si $k_n = k_n^+ + k_n^-$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k, k_n^+ + k_n^-]_J\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k^+, k_n^+]\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k^-, k_n^-]\right|^2 \\ &\le B^+[k^+, k^+] - B^-[k^-, k^-] \le \text{máx}\{B^+, B^-\}\left([k^+, k^+] - [k^-, k^-]\right) \\ &= \text{máx}\{B^+, B^-\}\ \|k\|_J^2.\end{aligned}$$

Y para la cota inferior se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k, k_n^+ + k_n^-]_J\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k^+, k_n^+]\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|[k^-, k_n^-]\right|^2 \\ &\ge A^+[k^+, k^+] - A^-[k^-, k^-] \ge \text{mín}\{A^+, A^-\}\left([k^+, k^+] - [k^-, k^-]\right) \\ &= \text{mín}\{A^+, A^-\}\ \|k\|_J^2.\end{aligned}$$

❑

A continuación se introduce la noción de Marcos en espacios de Krein.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein. $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{K}$ es llamado un *Marco* si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \leq B\|k\|_J^2, \quad \forall k \in \mathfrak{K}. \tag{3.1}$$

Los números A, B son llamados *Cotas del Marco* . Estas no son únicas, las cotas del marco óptimas son el mayor valor posible de A y el menor valor posible de B en (3.1). Si sucede el caso que $A = B$, es llamado *Marco Ajustado*. Si se deja de ser un marco cuando se remueve un elemento de la familia, entonces recibe el nombre de *Marco Exacto*.

A continuación se muestra que si tenemos Marcos en espacio de Krein podemos tener Marcos en su espacio de Hilbert asociado y viceversa.

TEOREMA 3.3 (**Equivalencia de Marcos.**). *Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i). $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con cotas, $A, B > 0$.*
ii). $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con cotas, $A, B > 0$.*
iii). $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con cotas, $A, B > 0$.*
iv). $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con cotas, $A, B > 0$.*

Demostración. La prueba se basa en propiedades de la Simetría Fundamental J.
i) $\Rightarrow$ *ii)*

$$A\|k\|_J^2 = A\|Jk\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[Jk, k_n]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]|^2 \leq B\|Jk\|_J^2 = B\|k\|_J^2 \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

ii) $\Rightarrow$ *iii)*

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^2 \leq B\|k\|_J^2 \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

iii) $\Rightarrow$ *iv)*

$$A\|k\|_J^2 = A\|Jk\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[Jk, k_n]_J|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]_J|^2 \leq B\|Jk\|_J^2 = B\|k\|_J^2 \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

iv) $\Rightarrow$ *i)*

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, Jk_n]_J|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \leq B\|k\|_J^2 \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

❑

Proposición 3.4. *Todo Marco en un espacio de Krein $\mathfrak{K}$ es la suma J-ortogonal de un Marco para $\mathfrak{K}^+$ y un Marco para $\mathfrak{K}^-$ con las mismas cotas.*

Demostración. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para $\mathfrak{K}$ con cotas A, B, se tiene que $k_n = P^+k_n + P^-k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces basta probar que $\{P^\pm k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para $\mathfrak{K}^\pm$ con cotas A, B. En efecto, sea $k^\pm \in \mathfrak{K}^\pm$, luego se tiene $P^\pm k^\pm = k^\pm$ y por ende

$$A\|k^\pm\|_J^2 = A\|P^\pm k^\pm\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[P^\pm k^\pm, k_n]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k^\pm, P^\pm k_n]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k^\pm, k_n]|^2 \leq B\|P^\pm k^\pm\|_J^2 = B\|k^\pm\|_J^2.$$

$\square$

Proposición 3.5. *Sean $\mathfrak{K}$ y $\widetilde{\mathfrak{K}}$ espacios de Krein con simetría fundamental J y $\widetilde{J}$ respectivamente. Si $V : (\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J) \to \left(\widetilde{\mathfrak{K}}, (\cdot,\cdot)_{\widetilde{J}}\right)$ es un operador unitario, entonces $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $\mathfrak{K}$ con cotas A, B si y sólo si $\{Vk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $\widetilde{\mathfrak{K}}$ con cotas A, B.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $\mathfrak{K}$. Entonces para dado $k \in \widetilde{\mathfrak{K}}$ se tiene que

$$A\|k\|_{\widetilde{J}}^2 = A\|JV^{*\widetilde{J}}\widetilde{J}k\|_J^2 = A\|V^{[*]}k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left[V^{[*]}k, k_n\right]\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(k, Vk_n)|^2 \leq B\|V^{[*]}k\|_J^2 = B\|k\|_{\widetilde{J}}$$

[$\Leftarrow$ La prueba es igual al caso anterior con V reemplazado por $V^{[*]}$. $\square$

Definición 3.6. Sean $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Marcos para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$, tales que

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, f_n]\, k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, k_n]\, f_n \quad \forall k \in \mathfrak{K}. \tag{3.2}$$

Entonces se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *Marco Dual* de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.7. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son Marcos duales para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ y $U : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ es un operador unitario, entonces $\{Uf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Uk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son Marcos duales para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$.*

Demostración. Por hipótesis se tiene $\sum_{n\in\mathbb{N}}[k, f_n]k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n]f_n = k$. Entonces

$$\begin{aligned} k = UU^{[*]}k &= \sum_{n\in\mathbb{N}}[U^{[*]}k, f_n]Uk_n \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, Uf_n]Uk_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}[U^{[*]}k, k_n]Uf_n \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, Uk_n]Uf_n. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.8. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Consideremos el espacios de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$. Definimos el Operador Pre-Marco de manera análoga al caso de espacios de Hilbert. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El *Operador Pre-Marco* se define como

$$T : \ \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{K}, \quad x = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n k_n \tag{3.3}$$

Observación 3.9. (1). En la anterior definición el operador es bien definido y acotado por que

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_J &= \sup_{\|g\|_J=1} |[Tx, g]_J| = \sup_{\|g\|_J=1} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{c_n}[k_n, g]_J \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|_J=1} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{c_n}[k_n, g]_J| \leq \sup_{\|g\|_J=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k_n, g]_J|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|x\| \sup_{\|g\|_J=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |[k_n, g]_J|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \sqrt{B} \sup_{\|g\|_J=1} \|g\|_J \\
&= \|x\| \sqrt{B}
\end{aligned}$$

por lo cual $\|T\| \leq \sqrt{B}$ (como en la sección 2.1).
(2). Notemos que si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces

$$[k, Tx] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n}[k, k_n] = \langle \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} , x \rangle ,$$

i.e, $T^{[*]}k = \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}$. Con un calculo análogo tenemos

$$T^{*J}k = \{[k, k_n]_J\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}. \tag{3.4}$$

Equivalentemente, $T^{[*]} = T^{*J}J$. El operador T^{*J} es conocido el *Operador Análisis* en el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$.

Definición 3.10. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador lineal acotado $S : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dado por

$$S = TT^{[*]} \tag{3.5}$$

se llama el *Operador Marco*.

Proposición 3.11. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Marco en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ satisface las siguientes propiedades:*

i). $Sk = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, k_n]\, k_n \quad \forall k \in \mathfrak{K}$.
ii). S *es un operador autoadjunto.*

iii). *El operador S es invertible, y satisface*

$$B^{-1}J \leq S^{-1} \leq A^{-1}J. \tag{3.6}$$

iv). $\left\{S^{-1}k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco con cotas B^{-1} y A^{-1},y es un Marco Dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración.

i). $Sk = TT^{[*]}k = T\left(\{[k,k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k,k_n]\,k_n \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$

ii). $S^{[*]} = (TT^{[*]})^{[*]} = TT^{[*]} = S.$

iii). Notamos que

$$\begin{aligned}
[(BJ-S)k,k] &= B\,[Jk,k] - [Sk,k] = B\,[k,k]_J - \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k,k_n]|^2 \\
&\geq B\,[k,k]_J - B\|k\|_J^2 = 0 \\
[(S-AJ)k,k] &= [Sk,k] - A\,[Jk,k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k,k_n]|^2 - A\,[Jk,k] \\
&\geq A\,\|k\|_J^2 - A\,[k,k]_J = 0.
\end{aligned}$$

Esto es $AJ \leq S \leq BJ$. Implicando ello que el operador Marco $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ es un operador uniformemente positivo y por ende es completamente invertible. Además se tiene

$$B^{-1}J \leq S^{-1} \leq A^{-1}J.$$

iv). Sea $k \in \mathfrak{K}$. Entonces como S^{-1} es un operador autoadjunto se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[k, S^{-1}k_n\right] S^{-1}k_n &= S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[k, S^{-1}k_n\right] k_n\right) = S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[(S^{-1})^{[*]}k, k_n\right] k_n\right) \\
&= S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[(S^{[*]})^{-1}k, k_n\right] k_n\right) = S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[S^{-1}k, k_n\right] k_n\right) \\
&= S^{-1}S\left(S^{-1}k\right) = S^{-1}k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $k \in \mathfrak{K}$ por la desigualdad (3.6) se tiene

$$B^{-1}\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left[k, S^{-1}k_n\right]\right|^2 = \left[S^{-1}k, k\right] \leq A^{-1}\|k\|_J^2.$$

Por ello $\left\{S^{-1}k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. ❏

Teorema 3.12 (**Descomposición de Marcos**). *Sea* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco para el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$. *Entonces*

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[k, S^{-1}k_n\right] k_n, \quad \forall k \in \mathfrak{K}. \tag{3.7}$$

La descomposición de marcos también se puede usar de la siguiente manera:

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, k_n]\, S^{-1}k_n, \quad \forall k \in \mathfrak{K}. \tag{3.8}$$

Demostración. Como el Operador Marco es invertible y autoadjunto se tiene que:

$$k = SS^{-1}k = S\left(S^{-1}k\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[S^{-1}k, k_n\right] k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[k, S^{-1}k_n\right] k_n.$$

De manera análoga se procede $k = S^{-1}Sk$. ❑

El teorema de *Descomposición de Marcos* es el resultado más importante obtenido en la Teoría de Marcos. Se muestra que si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco en $\mathfrak{K}$, cada elemento en el espacio de Krein tiene una representación como una combinación lineal infinita de elementos del Marco y se da una fórmula explícita para calcular los coeficientes. Es natural ver un Marco como la búsqueda de una ”*Base Generalizada* ”.

Definición 3.13. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador lineal $M \,:\, \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{K}$ dado por

$$M\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n J k_n \tag{3.9}$$

es el operador Pre-Marco correspondiente a la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.14. *Sea* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un Marco para el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$. *El operador Pre-Marco* M *satisface las siguientes propiedades:*

i). *Está bién definido y* $M = JT$.
ii). $M^{[*]} = T^{*J}$; $M^{*J} = T^{[*]}$; $M^{[*]} = M^{*J}J$.

Demostración.

i). El operador M es bién definido debido al teorema 3.3 y la observación 3.9. Además

$$M\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n J k_n = J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n k_n\right) = JT\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

ii). Dado $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ se tiene que

$$[Mx, k] = [JTx, k] = [Tx, k]_J = \langle x, T^{*J}k\rangle \quad \forall k \in \mathfrak{K}$$

por ende $M^{[*]} = T^{*J}$. Por otro lado también tenemos

$$[Mx, k]_J = [JTx, k]_J = [Tx, k] = \langle x, T^{[*]}k\rangle \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

Esto es, $M^{*J} = T^{[*]}$. Y por último se tiene que por propiedad del operador Pre-Marco T y la observación 3.9 se satisface

$$M^{*J} = T^{[*]} = T^{*J}J = M^{[*]}J.$$

❏

Debido a que el operador M es el operador Pre-Marco correspondiente a la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos encontrar otro operador acotado $\widetilde{S} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dado por:

$$\widetilde{S} := MM^{[*]} \tag{3.10}$$

Proposición 3.15. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Marco $\widetilde{S}$ satisface:*

i). $\widetilde{S} = JSJ$.
ii). $\widetilde{S}^{[*]} = \widetilde{S}$.
iii). $\widetilde{S}k = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n]_J Jk_n$. *Y por lo tanto* $[\widetilde{S}k, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^2$.
iv). $\widetilde{S}$ *es un operador invertible y satisface*

$$B^{-1}J \leq \widetilde{S}^{-1} \leq A^{-1}J. \tag{3.11}$$

v). $\left\{\widetilde{S}^{-1}Jk_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con cotas B^{-1} y A^{-1}. Éste Marco es un Marco Dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración.

i). Debido a la proposición 3.14 se tiene que: $\widetilde{S} = MM^{[*]} = JTT^{[*]}J = JSJ$.

ii). Por la definición de $\widetilde{S}$ se obtiene: $\widetilde{S}^{[*]} = (MM^{[*]})^{[*]} = MM^{[*]} = \widetilde{S}$.

iii). Dado $k \in \mathfrak{K}$ se tiene por la proposición 3.14 y la observación 3.9 que

$$\widetilde{S}k = MM^{[*]}k = M\left(T^{*J}k\right) = M\left(\{[k, k_n]_J\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n]_J Jk_n$$

y así tenemos $[\widetilde{S}k, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]_J|^2$.

iv). El operador $\widetilde{S}$ es invertible por que el operador Marco S y la Simetría Fundamental J lo son. Y por lo tanto

$$\widetilde{S}^{-1} = (JSJ)^{-1} = JS^{-1}J$$

pero por la proposición 3.11 se tiene $B^{-1}J \leq S^{-1} \leq A^{-1}J$. Por el item *i*) se tiene

$$B^{-1}J = B^{-1}J^3 \leq JS^{-1}J = \widetilde{S}^{-1} \leq A^{-1}J^3 = A^{-1}J.$$

v). Análoga al item *iv*) de la proposición 3.11 y el teorema 3.12. ❏

Proposición 3.16. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. $\left\{S^{-1}k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco Dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\left\{JS^{-1}k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco Dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Como $J^{[*]} = J = J^{-1}$ entonces se sigue de la proposición 3.7. ❏

Observación 3.17. En espacios de Krein si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco tenemos dos Marcos duales, uno para la familia $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y otro para la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con cotas $A, B > 0$, debido al teorema 3.16 se tiene que

$$\left\{S^{-1}k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es un Marco Dual de } \{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ si y sólo si } \left\{\widetilde{S}^{-1}Jk_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es un Marco Dual de } \{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Teorema 3.18. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco ajustado para el espacio de Krein separable $\mathfrak{K}$ con cotas $A = B = 1$. Si $||k_n||_J = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son Bases Ortonormales para el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $||k_n||_J = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco Ajustado con cotas iguales a 1. Por lo tanto para dado $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$1 = ||k_m||_J^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k_m, k_n]_J|^2 = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq m}} |[k_m, k_n]_J|^2 + 1,$$

y por ende se concluye $[k_m, k_n]_J = \delta_{n,m}$. Por otro lado, un Marco siempre es completo ya que para dado $k \in \mathfrak{K}$ se satisface

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n k_n, \quad \text{donde } c_n = [k, S^{-1}k_n]_J.$$

❏

Observación 3.19. En el teorema 3.18 se observa que las familias $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son Bi-ortogonales con respecto a la forma sesquilineal $[\cdot,\cdot]$ en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Esto es, $[Jk_n, k_i] = \delta_{n,i}$.

Teorema 3.20. *Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein Separable, y sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco ajustado para $\mathfrak{K}$ con cotas $A = B = 1$. Si $|[k_n, k_n]| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Base J-ortonormalizada para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$.*

Demostración. Sean $P^{\pm}$ las Proyecciones Fundamentales. Notemos que

$$\|\cdot\|_J|_{\mathfrak{K}^+} = \sqrt{[\cdot,\cdot]} \quad y \quad \|\cdot\|_J|_{\mathfrak{K}^-} = \sqrt{-[\cdot,\cdot]}.$$

Sea $k_m = k_m^+ + k_m^- \in \{k_n \ : [k_n, k_n] = 1\} \subset \mathfrak{K}$. Como $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco ajustado para $\mathfrak{K}$ con cotas $A = B = 1$, entonces por la proposición 3.4 tendremos que $\{P^{\pm}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco ajustado para $\mathfrak{K}^{\pm}$ con cotas $A = B = 1$. Por ello

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\neq n}} \left|[k_m^+, k_n]\right|^2 + \left|[k_m^+, k_m^+]\right|^2 = [k_m^+, k_m^+]\,, \tag{3.12}$$

sin embargo recordemos que $1 = [k_m, k_m] = [k_m^+, k_m^+] + [k_m^-, k_m^-] \leq [k_m^+, k_m^+]$. Si $[k_m^+, k_m^+] > 1$, entonces en la ecuación (3.12) notamos que

$$[k_m^+, k_m^+] < \left|[k_m^+, k_m^+]\right|^2 \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\neq n}} \left|[k_m^+, k_n]\right|^2 + \left|[k_m^+, k_m^+]\right|^2 = [k_m^+, k_m^+]\,.$$

Lo cual nos lleva a una contradicción. Por ende solo nos queda que $[k_m^+, k_m^+] = 1$. Este nos indica entonces que $k_m^- = 0$ y en (3.12) se tiene que $[k_m^+, k_n] = [k_m, k_n] = 0 \quad \forall m \neq n$. Por lo tanto tendremos que

$$P^+\{k_n \ : [k_n, k_n] = 1,\, n \in \mathbb{N}\} = \{k_n \ : [k_n, k_n] = 1,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{K}^+.$$

Por otro lado, de manera análoga procedemos sobre los $k_m \in \{k_n \ : [k_n, k_n] = -1;\, n \in \mathbb{N}\}$ teniendo en cuenta que

- $1 = -[k_m, k_m] = -[k_m^+, k_m^+] + \left|[k_m^-, k_m^-]\right| \leq \left|[k_m^-, k_m^-]\right|.$
- $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\neq n}} \left|[k_m^-, k_n]\right|^2 + \left|[k_m^-, k_m^-]\right|^2 = \left|[k_m^-, k_m^-]\right|.$

Por lo cual si ocurre que $\left|[k_m^-, k_m^-]\right| > 1$, entonces llegamos a una contradicción. Por ello solo queda que $\left|[k_m^-, k_m^-]\right| = |[k_m, k_m]| = 1$, logrando así demostrar que $k_m^+ = 0$ y $[k_m, k_n] = 0$, $\forall m \neq n$. Entonces

$$P^-\{k_n \ : [k_n, k_n] = -1,\, n \in \mathbb{N}\} = \{k_n \ : [k_n, k_n] = -1,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{K}^-.$$

Y por el teorema 2.10 $\{k_n : [k_n, k_n] = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ y $\{k_n : [k_n, k_n] = -1,\ n \in \mathbb{N}\}$ es una Base ortonormal de $\mathfrak{K}^+$ y $\mathfrak{K}^-$ respectivamente. Observemos que

$$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{k_n : [k_n, k_n] = +1,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{k_n : [k_n, k_n] = -1,\ n \in \mathbb{N}\},$$

así la familia $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Base J-ortonormal de $\mathfrak{K}$. ❏

Proposición 3.21. *Supongamos que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia en el subespacio denso $V \subset \mathfrak{K}$ tal que existen constantes $A, B > 0$ para el cual se tiene*

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \leq B\|k\|_J^2, \quad \forall k \in V. \tag{3.13}$$

Entonces $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para $\mathfrak{K}$ con cotas A, B.

Demostración. Es importante tener en cuenta que V es denso en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ si lo es con respecto a $\|\cdot\|_J$. Equivalentemente, V es denso en el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. Por tanto esto nos dice que la desigualdad

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[Jk, k_n]_J|^2 \leq B\|k\|_J^2$$

esta es válida en V con las propiedades del $J-$producto interno. Luego por el lema 2.11 se tiene que la desigualdad 3.13 se satisface para todo k el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. Esto es, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. Sin embargo por el teorema 3.3 se concluye que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para espacio de Krein $\mathfrak{K}$. ❏

El siguiente resultado es válido también para los Marcos en espacios de Krein. Este aparece en [**7**].

Teorema 3.22. *Una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{K}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ si y sólo si el operador lineal*

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{K} \quad \textit{tal que} \quad \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n k_n$$

es bien definido y sobreyectivo.

Demostración.

$\Rightarrow$] El teorema 3.3 nos dice que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. Entonces por el teorema 2.12 se tiene lo asegurado.

[$\Leftarrow$ Si el operador lineal $T : \ell_2(\mathbb{N}) \to (\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ es bien definido y sobreyectivo, entonces el teorema 2.12 asegura que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. Pero el teorema 3.3 implica que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. ❏

Motivación: Si $\mathfrak{K} = \ell_2(\mathbb{N})$ entonces podemos considerar el operador pre-marco T como operador entre el mismo espacio. Ahora nos preguntamos que sucede con los resultados anteriores si $\ell_2(\mathbb{N})$ se considera un espacio de Krein.

Consideremos $\ell_2(\mathbb{N})$ con la forma sesquilineal no degenerada

$$(\cdot,\cdot) : \ell_2(\mathbb{N}) \times \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$$

Tal que $(\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot))$ es un espacio de Krein con Simetría Fundamental J_{ℓ_2}. Denotamos a este espacio de Krein como $\mathcal{H} := (\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot))$. El J_{ℓ_2}-Producto interno sobre este espacio de Krein $\mathcal{H}$ es tal que

$$(\cdot,\cdot)_{J_{\ell_2}} = \langle\cdot,\cdot\rangle$$

Esto es, el J_{ℓ_2}-producto interno es el producto escalar usual.

Ahora definimos el Operador Pre-Marco de manera análoga al caso de espacios de Hilbert.

Definición 3.23. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El *Operador Pre-Marco* se define como

$$\mathcal{T} : \mathcal{H} \to \mathfrak{K}; \quad T\left(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n k_n$$

Observación 3.24. $\mathcal{T} = T$ Id. Donde Id es el operador lineal Id : $\mathcal{H} := (\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot)) \to \left(\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot)_{J_{\ell_2}}\right)$ tal que Id$x = x$. Además

$$Id^{[*]} = J_{\ell_2} \tag{3.14}$$

En efecto,

$$(\mathrm{Id}x, y)_{J_{\ell_2}} = (x, y)_{J_{\ell_2}} = (x, J_{\ell_2} y)$$

Entonces se tiene lo dicho.

Proposición 3.25. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Pre-Marco $\mathcal{T}$ satisface las siguientes propiedades:*

i). Es bien definido y acotado.
ii). $\mathcal{T}^{[*]} = J_{\ell_2} T^{[*]}$, donde T es el operador Pre-Marco definido en 3.3 .
iii). $\mathcal{T}^{[*]}k = J_{\ell_2}\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}$. Y $\mathcal{T}^{*J} = T^{*J}$. Donde T es definido en 3.3. El operador $\mathcal{T}^{*J}$ es llamado el Operador Análisis en el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.

Demostración.

i). El operador lineal $\mathcal{T}$ es bien definido por que el operador T lo es. Y acotado por que

$$\|\mathcal{T}\| = \|T\ \mathrm{Id}\| \leq \|T\|\ \|\mathrm{Id}\| = \|T\| \leq \sqrt{B}.$$

ii). Por (3.14) se tiene que

$$\mathcal{T}^{[*]} = (T\ \mathrm{Id})^{[*]} = \mathrm{Id}^{[*]}\ T^{[*]} = J_{\ell_2}\ T^{[*]}.$$

Por lo tanto se tiene $(T\ \mathrm{Id})^{[*]} = J_{\ell_2} T^{[*]}$.

iii). En el item *ii*) por la observación 3.9nos damos cuenta de $\mathcal{T}^{[*]}k = J_{\ell_2}\ \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}$. Y por la observación 1.24 tendremos que

$$\mathcal{T}^{*J}k = J_{\ell_2}\mathcal{T}^{[*]}Jk = \{[k, k_n]_J\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

Equivalentemente, $\mathcal{T}^{*J} = T^{*J}$. ❑

Definamos el siguiente operador acotado $\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{T}^{[*]}$. Este satisface

$$[\mathcal{S}k, k] = \left(\mathcal{T}^{[*]}k, \mathcal{T}^{[*]}k\right) = \left(J_{\ell_2}\ \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\ , J_{\ell_2}\ \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\ , \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \tag{3.15}$$

Y es autoadjunto en el espacio de Krein. Esto es,

$$\mathcal{S}^{[*]} = \left(\mathcal{T}\mathcal{T}^{[*]}\right)^{[*]} = \mathcal{S}$$

Sin embargo este operador no es positivo.

Ejemplo 3.1. *Sea $(\cdot, \cdot) : \ell_2(\mathbb{N}) \times \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ un producto interno indefinido sobre $\ell_2(\mathbb{N})$ tal que:*

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} x_n \overline{y_n}$$

con $J_{\ell_2}x = \left\{(-1)^{n+1}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, este satisface $(J_{\ell_2}x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} = \langle x, y\rangle$, entonces tenemos

$$[\mathcal{S}k, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1}\ |[k, k_n]|^2$$

esto implica que $\mathcal{S}$ no es un operador positivo.

Observación 3.26. A partir de la definición del operador lineal $\mathcal{S}$ se observa que:

- Si $\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2^+(\mathbb{N})$ entonces el operador $\mathcal{S}$ es uniformemente positivo y por lo tanto invertible.
- Si $\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2^-(\mathbb{N})$ entonces el operador $-\mathcal{S}$ es uniformemente positivo y por lo tanto invertible.

Definición 3.27. Sean $\mathcal{H} := (\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot))$ y $\mathfrak{K}$ espacios de Krein con Simetrías Fundamentales J_{ℓ_2} y J respectivamente. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador lineal acotado $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dado por

$$\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} = \mathcal{T} J_{\ell_2} \mathcal{T}^{[*]}$$

Se llama el *Operador Marco*.

Proposición 3.28. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Marco en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ satisface las siguientes propiedades:*

i). $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} = S$*; donde S es el operador lineal dado en* (3.5).

ii). $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k,k_n]k_n$ *y por ende* $[\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} k, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k,k_n]|^2$ *para todo* $k \in \mathfrak{K}$.

iii). $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}$ *es un operador autoadjunto.*

iv). *El operador $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}$ es invertible, y satisface*

$$B^{-1}J \leq \mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} \leq A^{-1}J \tag{3.16}$$

v). $\left\{\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco con cotas B^{-1} y A^{-1}. Y es un Marco Dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración.

i). Por la definición del operador lineal $\mathcal{T}$ y el item *ii*) de la proposición 3.25 tenemos que

$$\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} k = \mathcal{T} J_{\ell_2} \mathcal{T}^{[*]} k = T \,\mathrm{Id}\, J_{\ell_2}\ J_{\ell_2}\ T^{[*]} k = TT^{[*]}k = Sk \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

Por lo tanto las pruebas de las afirmaciones de esta proposición son equivalentes a la prueba de la proposición 3.11 dada para caso del operador S . ❑

Proposición 3.29. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Entonces*

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[k, \mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n\right] k_n, \quad \forall k \in \mathfrak{K} \tag{3.17}$$

También la Descomposición de Marcos se puede usar

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k,k_n]\, \mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n, \quad \forall k \in \mathfrak{K} \tag{3.18}$$

Demostración. La prueba se sigue del hecho de que $\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} = S$. ❑

Como consecuencia de el teorema 3.3 podemos considerar el operador Pre-Marco correspondiente a la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 3.30. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador lineal $\mathcal{M}$: $(\ell_2(\mathbb{N}),\ (\cdot,\cdot)) \to \mathfrak{K}$ dado por

$$\mathcal{M}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n J k_n \tag{3.19}$$

Es el operador *Pre-Marco* correspondiente a la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.31. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Pre-Marco $\mathcal{M}$ satisface las siguientes propiedades:*

i). *Es bién definido y $\mathcal{M} = J\mathcal{T}$.*
ii). $\mathcal{M}^{[*]} = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{*J}$; $\mathcal{M}^{*J} = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]}$; $\mathcal{M}^{[*]} = J_{\ell_2}\,\mathcal{M}^{*J}\,J$

Demostración.

i). El operador $\mathcal{M}$ es bién definido debido al teorema 3.3 y la proposición 3.25. Además

$$\mathcal{M}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n J k_n = J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n k_n\right) = J\mathcal{T}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$$

ii). Por la definición del operador lineal $\mathcal{M}$ y la proposición 3.25 se tiene que

$$\mathcal{M}^{[*]} = (J\,\mathcal{T})^{[*]} = \mathcal{T}^{[*]}\,J = J_{\ell_2}^2\,\mathcal{T}^{[*]}\,J = J_{\ell_2}\,\left(J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]}\,J\right) = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{*J}.$$

por ende se tiene $\mathcal{M}^{[*]} = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{*J}$. Por otro lado también tenemos

$$\mathcal{M}^{*J} = (J\mathcal{T})^{*J} = \mathcal{T}^{*J}\,J = \left(J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]}\,J\right)\,J = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]}$$

Esto es, $\mathcal{M}^{*J} = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]}$. Y por último, con la ayuda de los item's anteriores se satisface

$$\mathcal{M}^{*J} = J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{[*]} = J_{\ell_2}\,\mathcal{M}^{[*]}J$$

Equivalentemente $\mathcal{M}^{[*]} = J_{\ell_2}\,\mathcal{M}^{*J}J$. ❑

Ahora podemos encontrar otro operador acotado $\widetilde{\mathcal{S}} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dado por:

$$\widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{M}\mathcal{M}^{[*]} = J\mathcal{T}\mathcal{T}^{[*]}J = J\mathcal{S}J \tag{3.20}$$

Este operador satisface:

1. $\widetilde{\mathcal{S}} = J\mathcal{S}J = J\mathcal{S}^{[*]}J = \mathcal{S}^{*J}$.
2. $\widetilde{\mathcal{S}}^{[*]} = J\widetilde{\mathcal{S}}^{*J}J = J\mathcal{S}\,J = \widetilde{\mathcal{S}}$
3. $[\widetilde{\mathcal{S}}k, k] = \left(\mathcal{M}^{[*]}k, \mathcal{M}^{[*]}k\right) = (\{[k.k_n]_J\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \{[k.k_n]_J\}_{n\in\mathbb{N}})$

Observación 3.32. En el ejemplo 3.1, notamos que $[\widetilde{\mathcal{S}}k,k] = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}\,|[k,k_n]_J|^2 \;\forall k \in \mathfrak{K}$, i.e, $\widetilde{\mathcal{S}}$ no es un operador positivo.

Definición 3.33. Dado un espacio de Krein $(\ell_2(\mathbb{N}),(\cdot,\cdot))$ con Simetría fundamental J_{ℓ_2} sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador lineal y acotado $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dado por

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}k = \mathcal{M}\, J_{\ell_2}\, \mathcal{M}^{[*]}. \tag{3.21}$$

Recibe el nombre de *Operador Marco* correspondiente al Marco $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$.

Proposición 3.34. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Marco correspondiente a $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Krein satisface las siguientes propiedades:*

i). $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}$ *es un operador autoadjunto,* $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} = J\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}J$. *Y*

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}k = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k,Jk_n]Jk_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k,k_n]_J Jk_n, \quad \forall k \in \mathfrak{K}.$$

ii). $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}$ *es un operador invertible y satisface*

$$B^{-1}J \le \widetilde{\mathcal{S}}^{-1}_{J_{\ell_2}} \le A^{-1}J \tag{3.22}$$

iii). $\left\{\widetilde{\mathcal{S}}^{-1}_{J_{\ell_2}}Jk_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$, con cotas B^{-1} y A^{-1}, este Marco es un Marco Dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

Demostración. Basta probar la igualdad

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} = J\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}J = JSJ.$$

Así la demostración es análoga a la proposición 3.11. Teniendo en cuenta la proposición 3.25 y la proposición 3.31 obtenemos

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} = \mathcal{M}\, J_{\ell_2}\, \mathcal{M}^{[*]} = J\mathcal{T}\, J_{\ell_2}\, \left(J_{\ell_2}\, \mathcal{T}^{*J}\right) = J\mathcal{T}\, J_{\ell_2}\, \left(\mathcal{T}^{[*]}J\right) = J\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}J$$

❏

En espacios de Krein si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco tenemos dos Marcos duales, uno para la familia $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y otro para la familia $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El siguiente resultado muestra que se tiene Marco dual para la familia $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si se tiene Marco dual para $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 3.35. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$, con cotas $A, B > 0$. Notamos que por el teorema 3.3 y las proposiciones 3.28 y 3.34 se satisface la siguiente equivalencia:

$$\left\{\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un } \textit{Marco Dual} \text{ de } \{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ si y sólo si } \left\{\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}^{-1} J k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un } \textit{Marco Dual} \text{ de } \{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Proposición 3.36. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$, con cotas $A, B > 0$, $\left\{\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco Dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\left\{J\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}^{-1} k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco Dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

Demostración. Como $J^{[*]} = J = J^{-1}$ entonces se sigue de la proposición 3.7. ❏

Proposición 3.37. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Entonces*

i). $\mathcal{T}^{[*]}k \in \ell_2^{\pm}(\mathbb{N}) \quad \forall k \in \mathfrak{K}$ *si y sólo si* $\mathcal{S} = \pm\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}$

ii). $\mathcal{T}^{*J}k \in \ell_2^{\pm}(\mathbb{N}) \quad \forall k \in \mathfrak{K}$ *si y sólo si* $\widetilde{\mathcal{S}} = \pm\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}}$

Demostración.

i). $\Rightarrow]$ Se nota que

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_{J_{\ell_2}} = \mathcal{T}\,(\mathrm{Id} - J_{\ell_2})\,\mathcal{T}^{[*]} = 2\mathcal{T}\,P^{-}_{\ell_2(\mathbb{N})}\mathcal{T}^{[*]}; \qquad \mathcal{S}_{J_{\ell_2}} + \mathcal{S} = \mathcal{T}\,(J_{\ell_2} + \mathrm{Id})\,\mathcal{T}^{[*]} = 2\mathcal{T}\,P^{+}_{\ell_2(\mathbb{N})}\mathcal{T}^{[*]}$$

Por lo tanto, si $\mathcal{T}^{[*]}k \in \ell_2^{\pm}(\mathbb{N}) \quad \forall k \in \mathfrak{K}$, entonces $\mathcal{S} = \pm\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}$.

$[\Leftarrow$ Para todo $k \in \mathfrak{K}$ se tiene

$$[\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}k, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 = \|\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})} = \left\|\{[k, k_n]\}^{+}_{n\in\mathbb{N}}\right\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})} + \left\|\{[k, k_n]\}^{-}_{n\in\mathbb{N}}\right\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})}$$

$$[\mathcal{S}k, k] = \left(\mathcal{T}^{[*]}k, \mathcal{T}^{[*]}k\right) = (\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}) = \left\|\{[k, k_n]\}^{+}_{n\in\mathbb{N}}\right\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})} - \left\|\{[k, k_n]\}^{-}_{n\in\mathbb{N}}\right\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})}$$

Por lo cual, si $\mathcal{S} = \pm\mathcal{S}_{J_{\ell_2}}$, entonces $\{[k, k_n]\}^{\mp}_{n\in\mathbb{N}} = P^{\mp}_{\ell_2(\mathbb{N})}\mathcal{T}^{[*]}k = 0 \quad \forall k \in \mathfrak{K}$. En efecto,

$$0 = \left(\mathcal{S}_{J_{\ell_2}} - \mathcal{S}\right)k = 2\left\|\{[k, k_n]\}^{-}_{n\in\mathbb{N}}\right\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})}\,.$$

Esto es, $\mathcal{T}^{[*]}k \in \ell_2^{\pm}(\mathbb{N})$ para todo $k \in \mathfrak{K}$.

ii). Se Razona análogamente al caso anterior teniendo en cuenta la proposición 3.31 y la relación:

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} - \widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{M}(J_{\ell_2} - \mathrm{Id})\,\mathcal{M}^{[*]} = \mathcal{M}(J_{\ell_2} - \mathrm{Id})\,J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{*J} = \mathcal{M}(\mathrm{Id} - J_{\ell_2})\mathcal{T}^{*J} = 2\mathcal{M}P^{-}_{\ell_2(\mathbb{N})}\mathcal{T}^{*J}.$$
$$\widetilde{\mathcal{S}}_{J_{\ell_2}} + \widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{M}(J_{\ell_2} + \mathrm{Id})\,\mathcal{M}^{[*]} = \mathcal{M}(J_{\ell_2} + \mathrm{Id})\,J_{\ell_2}\,\mathcal{T}^{*J} = \mathcal{M}(\mathrm{Id} + J_{\ell_2})\mathcal{T}^{*J} = 2\mathcal{M}P^{+}_{\ell_2(\mathbb{N})}\mathcal{T}^{*J}.$$

❏

Observación 3.38. En la proposición 3.37 nos damos cuenta que si se considera el espacio de Krein trivial $(\ell_2(\mathbb{N}) = \ell_2(\mathbb{N})[+]\{0\}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})})$ entonces tendremos que $\mathcal{T}^{[*]}k \in \mathfrak{K}^{+} = \ell_2(\mathbb{N})$. Implicando ello que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{J_{\ell_2}} = S$, donde S es el operado Marco dado en 3.5.

Teorema 3.39. *Una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{K}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ si y sólo si el operador lineal*

$$\mathcal{T} : \mathcal{H} \to \mathfrak{K} \quad \textit{tal que} \quad \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n k_n$$

Es bién definido y sobreyectivo.

Demostración.

$\Rightarrow]$ Si la sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. El operador Pre-Marco T dado en 3.3 es bién definido y sobreyectivo por el teorema 3.22. Por lo tanto el operador $\mathcal{T} := T\ \mathrm{Id}$ es bién definido y sobreyectivo.

$[\Leftarrow$ Si el operador $\mathcal{T} := T\ \mathrm{Id}$ es bién definido y sobreyectivo. Entonces se tiene que el operador T es bién definido y sobreyectivo. Por lo tanto el teorema 3.22 nos asegura que la sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K}$. ❏

2. Marcos en espacios de Hilbert con $W-$Métrica

En esta sección veremos que suceden con los Marcos en espacios de Krein regulares y singulares retomando la construcción dada en la sección 2 del capítulo 1. Primero estudiaremos Marcos en espacios de Krein regulares. Y seguidamente analizaremos si los resultados dados para este tipo de espacios de Krein se mantienen para el caso singular. Además también observaremos que sucede si la condición de que el operador de Gram sea acotado no se tiene en cuenta. Para ello tomaremos algunos hechos básicos dados en la teoría de operadores lineales no acotados.

2.1. Generalidades.

Recordemos que si $\mathfrak{H}$ es un espacio de Hilbert y $W^* = W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es el operador de Gram, entonces podemos considerar la descomposición polar de este. Sea $u : (\ker\ |W|)^{\perp} = \overline{\text{Rang}\ |W|} = \overline{\text{Rang}\ W} = \mathfrak{H} \to \overline{\text{Rang}\ W} = \mathfrak{H}$ la isometría parcial tal que se tiene que

$$W = u|W|. \tag{3.23}$$

Pero como $\ker\ u = \{0\}$, entonces el operador u es en realidad un operador unitario.

Proposición 3.40. *El operador unitario u que satisface* (3.23) *tiene las siguientes propiedades:*

i). $u|W| = |W|u$.
ii). $u^2 = \text{Id}$.
iii). $uW = Wu$.

Demostración.

i). Por el teorema espectral se tiene que existe una única medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$ tal que

$$W = \int_{[-\|W\|\ ,\ \|W\|]} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda. \tag{3.24}$$

Las propiedades de la medida espectral nos ayudan a mostrar que $W\,|W| = |W|\,W$. Por lo cual $u|W|\,|W| = W\,|W| = |W|\,W = |W|\,u\,|W|$. Implicando esto que $(u|W| - |W|u)\,|W| = 0$. Sin embargo como $\overline{\text{Rang}\ |W|} = (\ker\ |W|)^{\perp} = \mathfrak{H}$, entonces se tiene que

$$u|W| = |W|u.$$

ii). Como el operador de Gram es autoadjunto se tiene que $u|W| = W = W^* = |W|u^*$. Por lo tanto

$$|W|u = u|W| = |W|u^*.$$

Esto es, $|W|\,(u - u^*) = 0$, por ende $ux = u^*x = u^{-1}x$, para todo $x \in \mathfrak{H}$ ya que $\ker|W| = \{0\}$. Equivalentemente $u = u^* = u^{-1}$, y así

$$u^2 = \text{Id}.$$

iii). Por item *i*) se concluye que $uW = u\,(u|W|) = u\,(|W|u) = u|W|u = Wu$. ❑

Observación 3.41. La proposición anterior muestra que el operador u es una Simetría del espacio de Hilbert. Por lo tanto de ahora en adelante cuando consideremos la descomposición polar del operador de Gram W será de la siguiente manera:

$$W = J|W|, \quad J \text{ es una simetría del espacio de Hilbert } \mathfrak{H}. \tag{3.25}$$

Observación 3.42. Supongamos que $W = W^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y $0 \in \rho(W)$. Entonces se tiene que

$$\|W\| = r(W) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(W)\} = \|\,|W|\,\| \tag{3.26}$$

donde $r(W)$ es el radio espectral de W. Además notamos

$$\text{ínf}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(W)\}\,\mathrm{Id} \leq |W| \leq \|W\|\,\mathrm{Id}. \tag{3.27}$$

Pero

$$\text{ínf}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(W)\} = \sup\{|\lambda|^{-1} : \lambda \in \sigma(W)\}^{-1} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(W^{-1})\}^{-1} = \|W^{-1}\|^{-1}.$$

Por lo tanto

$$0 < \|W^{-1}\|^{-1}\mathrm{Id} \leq |W| \leq \|W\|\,\mathrm{Id}, \quad \text{y} \quad 0 < \|W\|^{-1}\mathrm{Id} \leq |W|^{-1} \leq \|W^{-1}\|\,\mathrm{Id}. \tag{3.28}$$

2.2. Marcos en espacios de Krein regulares.

Retornamos a la construcción de espacios de Krein mediante $W-$metrícas dado en la sección 2 del capítulo 1. Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, sobre $\mathfrak{H}$ consideramos el operador de Gram $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tal que la forma bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{H}\times\mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ dada en (1.3) hace a $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein regular. Teniendo en cuenta la descomposición Polar de W podemos definir el producto escalar

$$[x,y]_J = [Jx,y] = \langle WJx, y\rangle = \langle |W|x, y\rangle,\ \forall x,y \in \mathfrak{H}. \tag{3.29}$$

Luego como $0 \in \rho(W)$ se tiene que la norma usual de $\mathfrak{H}$ y la norma inducida por (3.29) denotada $\|\cdot\|_J^2 = [\cdot,\cdot]_J$ son equivalentes. En efecto, por la desigualdad (3.28) se tiene que

$$\|x\|_J^2 = \langle x, |W|x\rangle \leq \|W\|\;\|x\|^2,$$
$$\|x\|_J^2 = \langle x, |W|x\rangle \geq \|W^{-1}\|^{-1}\;\|x\|^2.$$

Esto es,

$$\|W^{-1}\|^{-1}\;\|x\|^2 \leq \|x\|_J^2 \leq \|W\|\;\|x\|^2 \tag{3.30}$$

por lo cual se tiene que

$$\mathfrak{H}_W := \overline{(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)}^{\|\cdot\|_J} = (\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)\,. \tag{3.31}$$

Observación 3.43. Notemos que se cumple la siguiente relación

$$[x,y] = \langle x, Wy\rangle = \langle x, J|W|y\rangle = [Jx,y]_J$$

y notamos que:

$$\|Jf\|_J^2 = \langle Jf, |W|Jf\rangle = \langle Jf, J|W|f\rangle = \langle f, |W|f\rangle = [f,f]_J = \|f\|_J^2.$$

Se observa inmediatamente que el teorema 3.3 en espacios de Krein singulares o regulares es también válido. Ahora vamos a ver que sucede entre los Marcos de espacios de Krein $\mathfrak{H}_W$ y Marcos de espacios de Hilbert $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Proposición 3.44. *Sea $\mathfrak{H}_W$ un espacio de Krein regular. $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ si y sólo si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $\mathfrak{H}_W$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ con cotas A, B. Notemos primero que por la desigualdad (3.28) se tiene

$$\begin{aligned}
\|Wk\|^2 &= \langle Wk, Wk\rangle = \left\langle \sqrt{|W|}k, |W|\sqrt{|W|}k\right\rangle \geq \|W^{-1}\|^{-1}\left\langle \sqrt{|W|}k, \sqrt{|W|}k\right\rangle \\
&= \|W^{-1}\|^{-1}\|k\|_J^2 \quad \forall k\in\mathfrak{H}. \\
\|Wk\|^2 &= \left\langle \sqrt{|W|}k, |W|\sqrt{|W|}k\right\rangle \leq \|W\| \left\langle \sqrt{|W|}k, \sqrt{|W|}k\right\rangle \\
&= \|W\|\ \|k\|_J^2,\ \forall k\in\mathfrak{H}.
\end{aligned}$$

Por estas desigualdades y la hipótesis obtenemos que

$$A\|W^{-1}\|^{-1}\|k\|_J^2 \leq A\|Wk\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Wk, k_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k,k_n]|^2 \leq B\|Wk\|^2 \leq B\|W\|\ \|k\|_J^2,\ \forall k\in\mathfrak{H}.$$

Luego se tiene $A' = A\|W^{-1}\|^{-1}$ y $B' = B\|W\|$ son cotas tal que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es marco para $\mathfrak{H}_W$.

[$\Leftarrow$ Supongamos que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Marco para $\mathfrak{H}_W$ con cotas A', B'. Teniendo en cuenta la desigualdad (3.28) nos damos cuenta que

$$\begin{aligned}
A'\|W\|^{-1}\|k\|^2 &\leq A'\langle |W|^{-1}k, k\rangle = A'\langle |W|\,|W|^{-1}k, |W|^{-1}k\rangle = A'\|\,|W|^{-1}k\|_J^2 = A'\|J\,|W|^{-1}k\|_J^2 = A'\|W^{-1}k\|_J^2 \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left[W^{-1}k, k_n\right]\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle k, k_n\rangle|^2 \leq B'\|W^{-1}k\|_J^2 = B'\|\,|W|^{-1}k\|_J^2 = B'\langle |W|^{-1}k, k\rangle \\
&\leq B'\|\ W^{-1}\|\ \|k\|^2,\ \forall k\in\mathfrak{H}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto considerando $A = A'\|W\|^{-1}$ y $B = B'\|W^{-1}\|$ se tiene que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es marco para $\mathfrak{H}$. ❑

2.3. Marcos en espacios de Krein singulares.

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Sobre $\mathfrak{H}$ consideramos el operador de Gram $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y la forma bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{H}\times\mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ dada en (1.3) tal que hace a $\mathfrak{H}_W$ un espacio de Krein singular. Por la proposición 1.27 tenemos que $\mathfrak{H}$ es denso en $\mathfrak{H}_W$ y las normas satisfacen la relación:

$$\|x\|_J \leq \sqrt{\|W\|}\,\|x\|, \tag{3.32}$$

donde $\|\cdot\|_J$ es la norma inducida por el $J-$producto escalar dado en (3.29). Por la proposición 1.27 podemos definir

$$\mathfrak{H}_W = \overline{\mathfrak{H}}^{\|\cdot\|_J}. \tag{3.33}$$

En este tipo de espacios de Krein obtenemos que la proposición anterior (proposición 3.44) no se satisface.

Proposición 3.45. *Sea $\mathfrak{H}_W$ un espacio de Krein singular, si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Marco para $(\mathfrak{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ con cotas $A, B > 0$ entonces $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es Marco para $\mathfrak{H}_W$.*

Demostración. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un Marco para $(\mathfrak{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ con cotas $A, B > 0$, esto es

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, k_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathfrak{H}. \tag{3.34}$$

Para dado $\delta > 0$ se tiene que

$$(0,\delta] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{\delta}{n},\delta\right].$$

Si $\mathbf{E}_\lambda$ es la medida espectral tal que se satisface (1.4) se tiene que $\mathbf{E}_\lambda([0,\delta))\,\mathfrak{H} \neq 0$ debido a $0 \in \sigma_c(W)$. Por ende existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)\mathfrak{H} \neq 0$$

además, $\mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)\mathfrak{H} \subset \mathcal{D}_{|W|^{-1}}$ y $\mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)\mathfrak{H} \subset \mathcal{D}_{\sqrt{|W|}^{-1}}$. Sea $g \in \mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)\mathfrak{H}$ tal que $\|g\| = 1$. Definimos $h := \sqrt{|W|}^{-1}g$, entonces

$$\|h\|_J^2 = \left\langle |W|\sqrt{|W|}^{-1}g,\ \sqrt{|W|}^{-1}g\right\rangle = \|g\|^2 = 1.$$

Por lo cual, teniendo en cuenta el teorema 3.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} |[h,k_n]_J|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle |W|h,k_n\rangle|^2 \leq B\|\,|W|h\|^2 = B\left\langle |W|\sqrt{|W|}^{-1}g, |W|\sqrt{|W|}^{-1}g\right\rangle = B\langle g,|W|g\rangle \\
&= B\left\langle g, \left(\int_{\sigma(W)} |\lambda| d\mathbf{E}_\lambda\right)\left(\int_{\sigma(W)} \chi_{\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)}(\lambda) d\mathbf{E}_\lambda\right) g\right\rangle = B\int_{\sigma(W)} \chi_{\left(\left[\frac{\delta}{n_0},\delta\right]\right)}(\lambda)|\lambda| d\left(\mathbf{E}_\lambda\right)_{g,g} \\
&\leq B\delta\|g\|^2 = B\delta \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

donde $(\mathbf{E}_\lambda)_{g,g} = \langle g, \mathbf{E}_\lambda g\rangle$ es una medida de Borel regular tal que $(\mathbf{E}_\lambda)_{g,g}(\sigma(W)) = \|g\|^2$. Por la desigualdad (3.35) se tiene

$$\inf_{\|h\|_J=1} \sum_{n\in\mathbb{N}} |[h,k_n]|^2 = 0 \qquad (3.36)$$

entonces se concluye que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es Marco para $\mathfrak{H}_W$, por que si lo es, entonces existe $A' > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |[h,k_n]|^2 \geq A'\,\|h\|_J^2, \quad \forall h\in\mathfrak{H}_W$$

pero tomando h como anteriormente se tiene que $A' = 0$ por (3.36), lo cual es una contradicción. ❑

Ahora queremos encontrar una manera de extender Marcos del espacio de Hilbert $(\mathfrak{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ a Marcos en el espacio de Krein singular $\mathfrak{H}_W$. A continuación se da una forma de hacerlo y lo que es más interesante manteniendo las cotas. Para ello procederemos por casos. Primero observaremos para el caso de que el operador de Gram sea positivo y después cuando su espectro contiene numeros reales positivos y negativos.

2.3.1. 1^{er} Caso: $W\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es un operador de Gram con $W>0$.

Supongamos primero que el operador de Gram $W\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es tal que $W>0$. Consideremos el operador autoadjunto $\sqrt{W} : \mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$, entonces se tiene que

$$\left\|\sqrt{W}k\right\|^2 = \langle\sqrt{W}k, \sqrt{W}k\rangle = \langle k, Wk,\rangle = \|k\|_J^2.$$

Implicando esto que $\sqrt{W}$ es una isometría. Por lo tanto tiene extensión $\widehat{\sqrt{W}} : \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$, la cual es una isometría. Por eso Rang $(\widehat{\sqrt{W}})\subset\mathfrak{H}$ es cerrado. Sin embargo

$$\text{Rang}\left(\widehat{\sqrt{W}}\Big|_{\mathfrak{H}}\right) = \text{Rang}\left(\sqrt{W}\right)\subset\mathfrak{H} \quad \text{y} \quad \overline{\text{Rang}\left(\sqrt{W}\right)} = \left(\ker\ \sqrt{W}\right)^{\perp} = \mathfrak{H}.$$

Esto es, Rang $\left(\widehat{\sqrt{W}}\right) = \mathfrak{H}$ por ser denso y cerrado. Como $\ker\left(\sqrt{W}\right) = \{0\}$ entonces $\widehat{\sqrt{W}}$ es una biyección de $\mathfrak{H}_W$ sobre $\mathfrak{H}$. Así el operador lineal $U \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_W)$ dado por

$$U = \left(\widehat{\sqrt{W}}\right)^{-1} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_W \tag{3.37}$$

es bien definido y unitario. Dicho esto se garantiza el siguiente resultado.

Teorema 3.46. *Sea W el operador de Gram acotado tal que $W > 0$. Si U es el operador lineal dado en* (3.37) *se concluye:*

i). *Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ es un Marco para $\mathfrak{H}$, entonces $\{Uk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{H}_W$*

ii). *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_W$ es Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{H}_W$, entonces $\left\{U^{-1}f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ es Marco para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$.*

Demostración. Como U y U^{-1} son operadores unitarios, la prueba de *i*) y *ii*) se sigue inmediatamente de la proposición 3.5 y el teorema 3.3. ❏

Observación 3.47. El teorema 3.46 nos dice que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, entonces podemos formar un Marco para el espacio de Hilbert con W-métrica $\mathfrak{H}_W$ y viceversa.

2.3.2. 2^{do} Caso: $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es un operador de Gram tal que $0 \in \sigma(W) \subset [-\|W\|, \|W\|]$.

Supongamos que el operador de Gram W es acotado y que contiene elementos negativos y positivos en su espectro. Esto es $0 \in \sigma(W) \subset [-\|W\|, \|W\|]$

Consideremos la descomposición Polar de W dada en (3.23). Como $|W| > 0$ entonces existe un operador autoadjunto $G : \mathcal{D}_G = \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$ tal que

$$G := \sqrt{|W|}. \tag{3.38}$$

Entonces

$$\| Gk\|^2 = \langle Gk, Gk\rangle = \langle k, G^2k\rangle = \langle k, |W|k\rangle = \|k\|_J^2, \tag{3.39}$$

por lo tanto, $G : \ \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_W \longrightarrow \mathfrak{H}$ es una isometría. De manera análoga al caso que el operador de Gram sea positivo se tiene que su extensión $\widehat{G} : \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$ es un operador unitario. Concluimos que el operador lineal $V \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_W)$ dado por

$$V = \widehat{G}^{-1} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_W \tag{3.40}$$

es bien definido y unitario. Y el siguiente resultado se tiene.

Teorema 3.48. *Sea* $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *el operador de Gram tal que* $0 \in \sigma_c(W)$. *Sea* V *el operador lineal dado en* (3.40). *Entonces:*

i). *Si* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ *es un Marco, entonces* $\{Vk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un Marco para el espacio de Krein singular* $\mathfrak{H}_W$.

ii). *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es Marco para el espacio de Krein singular* $\mathfrak{H}_W$, *entonces* $\left\{V^{-1}f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es Marco para el espacio de Hilbert* $\mathfrak{H}$.

Demostración. Como V y V^{-1} son operadores unitarios, la prueba de *i*) y *ii*) se sigue inmediatamente de la proposiciónes 3.5 y el teorema 3.3 . ❏

Proposición 3.49. *Sea* W *el operador de Gram. Entonces*

i). *Si* $0 \notin \sigma(W)$ *entonces* $(\mathfrak{H}_W, [\cdot,\cdot]_J) = (\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$.

ii). *Si* $0 \in \sigma(W)$ *se tiene* $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J) \subsetneq (\mathfrak{H}_W, [\cdot,\cdot]_J)$.

Demostración.

i). Se sigue directamente de la equivalencias de las normas (ver (3.30)).

ii). Por la proposición 1.27 se tiene que $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_W$. Supongamos que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_W$ entonces se tendría que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_J$ son equivalentes por que el operador lineal

$$\mathrm{Id} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_W$$

es continuo por la desigualdad (3.32) y

$$\mathrm{Id}^{-1} : \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$$

es continuo por el teorema del inverso continuo. Por otro lado, para dado $\delta > 0$ existe $g \in \mathbf{E}_\lambda([0,\delta])\,\mathfrak{H}$ tal que $\|g\| = 1$ y

$$\|g\|_J^2 = \langle Wg, g\rangle = \int_{[0,\delta]} \lambda \, d\,(\mathbf{E}_\lambda)_{g,g} \leq \delta,$$

lo cual es una contradicción a la equivalencia de las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_J$. ❏

2.4. El operador de Gram W es no Acotado.

Observando los resultados anteriores es natural cuestionar si estos siguen siendo válidos aun cuando el operador de Gram W es no acotado.

Sea $W = W^*$ el operador de Gram tal que es no acotado con dominio $\mathcal{D}_W$ y rango Rang W densos en $\mathfrak{H}$ y contiene elementos positivos y negativos en su espectro. Por el teorema espectral para operadores autoadjuntos no acotados tendremos que existe una única medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$ que satisface

$$W = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda. \tag{3.41}$$

Observemos que $W : \mathcal{D}_W \to \mathfrak{H}$. Entonces la $W-$métrica dada en (1.3) está bién definida para todo $x, y \in \mathcal{D}_W$. La descomposición polar del operador de Gram viene dada por

$$W = J|W|. \tag{3.42}$$

Así se tiene que

$$[x, y]_J := \langle |W|x, y\rangle$$

por lo cual con la ayuda de la proposición 1.27 definimos

$$\mathfrak{H}_W := \overline{\mathcal{D}_W}^{\|\cdot\|_J}, \tag{3.43}$$

y $[\cdot,\cdot]_J$ se extiende a todo $\mathfrak{H}_W$ por continuidad.

Un resultado análogo a la proposición 3.45 se cumple para operadores de Gram W no acotado independiente de que $0 \in \sigma(W)$ o $0 \notin \sigma(W)$.

Proposición 3.50. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_W$ un Marco para $\mathfrak{H}$. Entonces $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_W$ no es Marco para $\mathfrak{H}_W$.*

Demostración. Como W y $G := \sqrt{|W|}$ son no acotado, si la medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$ que satisface (3.41) es tal que para dado $m \in \mathbb{N}$ cumple $\mathbf{E}_\lambda (\mathbb{R} \setminus [-m, m]) \mathfrak{H} = \{0\}$, entonces se tiene que $\mathbf{E}_\lambda ([-m, m]) \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ y por ende el operador de Gram W es acotado. Lo cual es una contradicción. Ahora tenemos que el subespacio

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_\lambda (\{\lambda : |\lambda| \in [m, m+k]\}) \mathfrak{H}$$

es denso en $\mathbf{E}_\lambda (\mathbb{R} \setminus [-m, m]) \mathfrak{H} \neq \{0\}$, y además para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mathbf{E}_\lambda (\{\lambda : |\lambda| \in [m, m+k]\}) \mathfrak{H} \subset \mathcal{D}_W$$

así $\mathbf{E}_\lambda(\mathbb{R}\setminus[-m,m])\,\mathfrak{H}\cap\mathcal{D}_W\neq\{0\}$. Sea $y_m\in\mathbf{E}_\lambda(\mathbb{R}\setminus[-m,m])\,\mathfrak{H}\cap\mathcal{D}_W$ tal que $\|y_m\|=1$, $\forall m\in\mathbb{N}$. Definimos

$$x_m := \left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-m,m]}\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\,d\mathbf{E}_\lambda\right)y_m,\quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Por lo tanto $\|Gx_m\|=\|y_m\|=1$; $\forall m\in\mathbb{N}$ y

$$\|Wx_m\|^2=\int_{\mathbb{R}\setminus[-m,m]}|\lambda|\,d\,(\mathbf{E}_\lambda)_{y_m,y_m}\geq m,\quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Luego para cada $m\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|[x_m,k_n]|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle Wx_m,k_n\rangle|^2\geq A\|Wx_m\|^2\geq A\,m$$

por lo que se concluye

$$\sup_{\|x_m\|_J=1}\sum_{n\in\mathbb{N}}|[x_m,k_n]|^2=\infty.$$

Esto es, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es Marco para $\mathfrak{H}_W$. ❑

Corolario 3.51. *Sea W es el operador de Gram en $\mathfrak{H}$ tal que $0\notin\sigma(W)$. La proposición 3.44 es válida si y sólo si W es un operador acotado.*

Demostración.

[$\Leftarrow$ Si W es el operador de Gram el cual es acotado con $0\notin\sigma(W)$, entonces el espacio de Krein es regular y por ende la proposición 3.44 se satisface.

$\Rightarrow$] Supongamos que el operador de Gram W es no acotado. Entonces se tiene por la proposición 3.50 que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}_W$ no es un Marco para $\mathfrak{H}_W$. El cual es una contradicción. Implicando que lo supuesto no es valido y por ende W es un operador acotado. ❑

Comentario 3.52. Recordemos que si $\mathcal{K}_i$ son espacios Pre-Hilbert $i=0,1$, con $\mathcal{K}_0\subset\mathcal{K}_1$ denso, entonces las completaciones son isomorfas. Esto es

$$\overline{\mathcal{K}_0}\simeq\overline{\mathcal{K}_1}.$$

Proposición 3.53. *Consideremos el operador $G=\sqrt{|W|}$ dado en (3.38). Sobre el subespacio $\mathcal{D}_G$ definimos la norma*

$$\|x\|_W := \|Gx\| \tag{3.44}$$

entonces

$$\mathcal{D}_G\subset\mathfrak{H}_W. \tag{3.45}$$

Demostración. Consideremos sobre $\mathcal{D}_G$ la norma $\|\cdot\|_W = \sqrt{\langle G\cdot, G\cdot\rangle}$. Notemos que $\mathcal{D}_W \subset \mathcal{D}_G = \mathcal{D}_{\sqrt{|W|}}$ y para todo $x \in \mathcal{D}_W$ se tiene

$$\|x\|_W^2 = \langle \sqrt{|W|}x,\ \sqrt{|W|}x\rangle = \langle x, |W|x\rangle = \|x\|_J^2$$

por lo tanto $\|\cdot\|_W|_{\mathcal{D}_W} = \|\cdot\|_J$. Sea $x \in \mathcal{D}_G$, definimos

$$x_n = \mathbf{E}_\lambda\left([-n,n]\right)x,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $\mathbf{E}_\lambda$ es la medida espectral tal que satisface (3.41). Así obtenemos

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|_W^2 = \|G(x_n - x)\|^2 &= \left\|\sqrt{|W|}(1 - \mathbf{E}_\lambda([-n,n]))x\right\|^2 \\ &= \int_{\sigma(W)} |\lambda|\,\chi_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}(\lambda)\, d\left(\mathbf{E}_\lambda\right)_{x,x}\end{aligned}$$

donde $(\mathbf{E}_\lambda)_{x,x} = \langle x, \mathbf{E}_\lambda x\rangle$ es una medida de Borel regular. Como $x \in \mathcal{D}_G = \mathcal{D}_{\sqrt{|W|}}$ la función $\lambda \mapsto |\lambda|$ está en $L_1\left(\sigma(W), (\mathbf{E}_\lambda)_{x,x}\right)$. Además, $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|\chi_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}(\lambda) = 0$ puntualmente. Entonces el teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_W = 0.$$

Así se concluye que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_W$ es una sucesión de Cauchy y su límite en $\mathcal{D}_G$ es x. Por el comentario 3.52 se concluye

$$\mathfrak{H}_W = \overline{\mathcal{D}_G}^{\|\cdot\|_W}. \tag{3.46}$$

Y además notamos que las normas $\|\cdot\|_W$ y $\|\cdot\|_J$ coinciden en un conjunto denso. Entonces se tiene que

$$[x,x]_J = \|Gx\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}_G. \tag{3.47}$$

❏

Queremos ver si los resultados dados para el caso de que el operador de Gram sea acotado siguen siendo válidos aun cuando éste es no acotado. A continuación dividiremos la investigación en dos casos. El primero basado en el operador de Gram no acotado pero con $0 \notin \sigma(W)$. Y el segundo caso basado en el operador de Gram con $0 \in \sigma(W)$.

2.4.1. 1^{er} *Caso: El operador de Gram W es no acotado con* $0 \notin \sigma(W)$.

Proposición 3.54. *Si W es el operador de Gram tal que es no acotado y* $0 \notin \sigma(W)$ *y* $G = \sqrt{|W|}$, *entonces*

$$\mathfrak{H}_W = (\mathcal{D}_G, \|\cdot\|_W)\,. \tag{3.48}$$

Demostración. La proposición 3.53 nos dice que $\mathcal{D}_G \subset \mathfrak{H}_W := \overline{\mathcal{D}_W}^{\|\cdot\|_J}$. Basta entonces mostrar que $\mathcal{D}_G$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_W$. Como $0 \notin \sigma(W)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \leq |W|.$$

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_G$ una sucesión de Cauchy con respecto a la $\|\cdot\|_W$. Notemos que

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} 1\; d\,(\mathbf{E}_\lambda)_{(x_n-x_m),(x_n-x_m)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |\lambda|\; d\,(\mathbf{E}_\lambda)_{(x_n-x_m),(x_n-x_m)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\|G\,(x_n - x_m)\|^2 = \frac{1}{\varepsilon}\|x_n - x_m\|_W^2\,.\end{aligned}$$

Por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{H}$. Más aun $\{(x_n, Gx_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el Gráfico $\Gamma(G)$. Pero como el Gráfico $\Gamma(G)$ es cerrado entonces existe $x \in \mathcal{D}_G$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, Gx_n) = (x, Gx)\,.$$

En particular

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_W = \lim_{n\to\infty}\|G\,(x_n - x)\|^2 = 0,$$

entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_W$. Esto es, $\mathcal{D}_G$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_W$. ❐

Teorema 3.55. *Sea W el operador de Gram tal que es no acotado y* $0 \notin \sigma(W)$. *Entonces*

i). $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ *es Marco para* $\mathfrak{H}$ *si y sólo si* $\{G^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_W$ *es Marco para* $\mathfrak{H}_W$.

ii). $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_W$ *es Marco para* $\mathfrak{H}_W$ *si y sólo si* $\{Gk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ *es Marco para* $\mathfrak{H}$.

Demostración. El operador $G^{-1} : \mathfrak{H} \to \mathcal{D}_G$ es un operador unitario. En efecto,

$$\left\|G^{-1}x\right\|_W = \left\|G\,G^{-1}x\right\| = \|x\|$$

y es sobreyectivo por que $0 \notin \sigma(W)$. Por lo cual *i*) y *ii*) se siguen inmediatamente por la proposición 3.5 y el teorema 3.3. ❐

2.4.2. 2^{do} Caso: El operador de Gram W no acotado con $0 \in \sigma(W)$.

Recordemos que $G = \sqrt{|W|}$. En particular $\ker G = \ker W = \{0\}$.

PROPOSICIÓN 3.56. *Sea W el operador de Gram tal que es no acotado y* $0 \in \sigma(W)$. *Entonces el operador*

$$G: \ \mathcal{D}_G \subset \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$$

tiene una única extensión a un operador unitario

$$U = \widehat{G}: \ \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}. \tag{3.49}$$

Demostración. El operador $G : (\mathcal{D}_G, \|\cdot\|_W) \to \mathfrak{H}$ por definición satisface

$$\|Gx\| = \|x\|_W$$

es decir es una isometría. Además se tiene $\overline{\text{Rang } G} = (\ker G)^{\perp} = \mathfrak{H}$. Por lo cual su extensión $\widehat{G} : \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$ es un operador isométrico y satisface Rang $\widehat{G} = \mathfrak{H}$. Por lo tanto es unitario. ❑

PROPOSICIÓN 3.57. *Si W es el operador de Gram tal que es no acotado y* $0 \in \sigma(W)$. *Entonces se tiene*

$$\mathcal{D}_G \subsetneq \mathfrak{H}_W. \tag{3.50}$$

Demostración. Por la proposición 3.53 se satisface $\mathcal{D}_G \subset \mathfrak{H}_W$. Ahora si la igualdad se tiene, entonces en la proposición 3.56 se tendrá que el operador G satisface

$$\text{Rang } G = \text{Rang } \widehat{G} = \mathfrak{H},$$

luego por el teorema del Gráfico cerrado tendremos que $G^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Implicando esto que $0 \notin \sigma(W)$. Lo cual es una contradicción a la hipótesis. Entonces lo supuesto no es válido, es decir que $\mathcal{D}_G \subsetneq \mathfrak{H}_W$ ❑

TEOREMA 3.58. *Sea W el operador de Gram tal que es no acotado y* $0 \in \sigma(W)$. *Entonces*

i). $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ *es Marco si y sólo si* $\{U^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_W$ *es Marco.*
ii). $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_W$ *es Marco si y sólo si* $\{Uk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ *es Marco.*

Donde U es el operador unitario dado en la proposición 3.56.

Demostración. Como U y U^{-1} son operadores unitarios, la prueba de *i*) y *ii*) se sigue inmediatamente de la proposición 3.5 y el teorema 3.3. ❑

CAPíTULO 4

Ejemplos

En este capítulo daremos algunos ejemplos de Marcos en espacios de Krein teniendo en cuenta la proposición 3.3 y la construcción de espacios de Krein asignando una $W-$Métrica a un espacio de Hilbert.

1. Consideremos el espacio $L_2((-a,a))$ con $-\infty \leq a \leq \infty$ y consideremos el operador

$$W : L_2((-a,a)) \to L_2((-a,a)) \quad \text{dado por } (Wf)(x) = f(-x), \forall f \in L_2((-a,a)),\ x \in (-a,a) \tag{4.1}$$

este operador es isométrico y acotado con ker $W = \{0\}$, en particular es unitario con $W^2 = \mathrm{Id}$. El espectro es $\sigma(W) = \{-1, 1\}$, por lo cual la forma bilineal

$$[\cdot,\cdot] : L_2([-a,a]) \times L_2([-a,a]) \to \mathbb{R} \quad : \quad [f,g] = \langle f, Wg\rangle = \int_{-a}^{a} f(-x)\overline{g(x)}dx \tag{4.2}$$

es tal que $(L_2([-a,a]), [\cdot,\cdot])$ es un espacio Krein regular. Por lo tanto tenemos equivalencia de Marcos en el espacio de Krein y en el espacio de Hilbert asociado por proposición 3.3. Y además también se tiene que es válida la proposición 3.44.

2. Consideremos el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ separable. Sea $W = W^* \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ el operador de Gram, ker $W = \{0\}$. El teorema espectral para operadores normales compactos nos garantiza que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal de $\mathfrak{H}$ entonces

$$W = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$$

donde $\lambda_n \in \sigma(W)$ tal que $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots > 0$ y $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$.
Sobre $\mathfrak{H}$ consideremos la forma sesquilineal $[x,y] = \langle x, Wy\rangle$ y $J-$norma

$$\|x\|_J^2 = [x,x]_J = \langle x, |W|x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \, |\langle x, e_n\rangle|^2 .$$

Definimos

$$\ell_2(\mathbb{N})_W := \left\{ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \, |c_n|^2 < \infty \right\}. \tag{4.3}$$

Entonces $\ell_2(\mathbb{N})_W$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle\langle \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| c_n \overline{d_n}. \tag{4.4}$$

Para todo $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n \in \mathfrak{H}$ tenemos

$$\|x\|_J^2 = \langle x, |W| x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|\, |c_n|^2 = \|\, \{c_n\}\, \|^2_{\ell_2(\mathbb{N})_W},$$

entonces el operador lineal $U : (\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]) \to (\ell_2(\mathbb{N})_W, \langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle)$ tal que

$$U\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n\right) = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una isometría. Se observa fácilmente que $U(\mathfrak{H})$ es denso en $\ell_2(\mathbb{N})_W$, por lo cual su extensión $\widehat{U} : (\mathfrak{H}_W, [\cdot,\cdot]) \to (\ell_2(\mathbb{N})_W, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ es un operador unitario, es decir

$$\mathfrak{H}_W \simeq \ell_2(\mathbb{N})_W.$$

Ahora la isometría $\widehat{G} :\ \ell_2(\mathbb{N})_W \simeq \mathfrak{H}_W \to \mathfrak{H}$ de la sección 2 del capítulo 3 está dada por

$$\widehat{G}\left(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{|\lambda_n|}\, c_n e_n \tag{4.5}$$

con inverso

$$\widehat{G}^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n e_n\right) = \left\{\frac{\gamma_n}{\sqrt{|\lambda_n|}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{4.6}$$

El operador $\widehat{F} : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}_W$ dado por la cerradura de

$$F\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{e}^{i\varphi_n}}{\sqrt{|\lambda_n|}} \alpha_n e_n; \quad \forall \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \in \mathcal{D}_F \subset \mathfrak{H}, \quad \varphi_n \in [0, 2\pi)$$

es unitario. En efecto, notemos que $|\widehat{F}| = \widehat{U}^{-1}\,\widehat{G}^{-1}$, y $\widehat{F} = u\,|\widehat{F}|$, donde $u \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ dado por $ue_n = \mathrm{e}^{i\varphi_n}\, e_n$, es tal que $u\,u^* = u^*\,u = \mathrm{Id}$.

Como u, $\widehat{U}$, $\widehat{G}$ son operadores unitarios y $\widehat{F} = u\,\widehat{U}^{-1}\widehat{G}^{-1}$, se tiene que por el teorema 3.58 si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_F$ es un Marco para $\mathfrak{H}$ con cotas A, $B > 0$, entonces $\{\widehat{F}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un Marco para $\mathfrak{H}_W$ y viceversa: Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ es un Marco para $\mathfrak{H}_W$, entonces $\{\widehat{F}^{-1} f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{\widehat{F}}$ es Marco para $\mathfrak{H}$.

3. Consideremos $\mathfrak{H} = (L_2((\alpha,\beta),\mu)), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert, con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ y μ medida de Lebesgue. El operador de Gram es el operador lineal $W_\varphi : \mathcal{D}_{W_\varphi} \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ tal que

$$\left(W_\varphi f\right)(x) = \varphi(x) f(x)$$

donde $\varphi : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ es una función medible en (α,β) con $\mu\left\{\varphi^{-1}(\{0\})\right\} = 0$. El subespacio

$$\mathcal{D}_{W_\varphi} = \{f \in \mathfrak{H} : \varphi f \in \mathfrak{H}\} \subset \mathfrak{H}$$

es denso con respecto a la norma usual. Para ver esto recordemos que $|\varphi| : (\alpha,\beta) \to [0,\infty)$ es tal que

$$(\alpha,\beta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi|^{-1}([0,n]).$$

Por lo tanto, si $f \in \mathfrak{H}$ tendremos que la sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{W_\varphi}$, donde

$$f_n := \chi_{K_n} f \quad y \quad K_n = |\varphi|^{-1}([0,n])$$

satisface

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2_{\mathfrak{H}} &= \int_{(\alpha,\beta)} \left|1 - \chi_{K_n}(x)\right|^2 |f(x)|^2 d\mu \\ &= \int_{(\alpha,\beta)} \chi_{(\alpha,\beta)\setminus K_n}(x)\, |f(x)|^2 d\mu \end{aligned}$$

pero como $\left|\chi_{(\alpha,\beta)\setminus K_n} f\right| \leq |f| \in \mathfrak{H}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(\alpha,\beta)\setminus K_n} f = \chi_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}((\alpha,\beta)\setminus K_n)} f = 0 \quad c.t.p\, en\ \mathbb{R}$. Luego el teorema de Convergencia dominada de Lebesgue nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathfrak{H}} = 0$$

y esto no es mas que $\overline{\mathcal{D}_{W_\varphi}} = \mathfrak{H}$. Además el operador W_φ es tal que $\ker W_\varphi = \{0\}$. En efecto, si $\left(W_\varphi f\right)(x) = 0$ entonces se tiene

$$0 = \|W_\varphi f\|^2 = \int_{(\alpha,\beta)} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 d\mu = \int_{(\alpha,\beta)\setminus\varphi^{-1}(\{0\})} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 d\mu.$$

Sea $\varepsilon \in \mathbb{N}$, los conjuntos $M_\varepsilon = \{x \in (\alpha,\beta) : |f(x)| > \varepsilon\}$ son medibles y

$$M^+ = \{x \in (\alpha,\beta) : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{N}} M_\varepsilon.$$

Notemos que

$$0 = \int_{M_\varepsilon} |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 d\mu \geq \varepsilon^2 \int_{M_\varepsilon} |\varphi(x)|^2 d\mu$$

implicando ello que $\varphi \equiv 0$ en casi toda parte en M_ε para todo $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Como $\mu\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right) = 0$ tenemos

$$\mu(M_\varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \mu(M^+) = 0.$$

Concluyendo así que $|f| = 0$ en casi toda parte en (α,β). Esto es $f = 0$ en casi toda parte en (α,β) . Es decir que el operador W_φ tiene como kernel solamente al 0.

Observación 4.1. Recordemos que el operador lineal $T : f \mapsto \lambda f(\lambda)$ es un operador autoadjunto. Así el teorema espectral nos garantiza que existe una única medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$ tal que

$$T = \int_{(\alpha,\beta)} \lambda d\mathbf{E}_\lambda,$$

entonces si tomamos φ medible tendremos

$$\varphi(T) = \int_{(\alpha,\beta)} \varphi(\lambda) d\mathbf{E}_\lambda = W_\varphi.$$

Ahora notemos que

- $\lambda \in \sigma(W_\varphi)$ si y sólo si para toda vecindad U de λ se tiene que $\mu\left(\varphi^{-1}(U)\right) \neq 0$.

Esto se debe a que si para λ_0 existe una vecindad U tal que $\mu\left(\varphi^{-1}(U)\right) = 0$ vamos a tener que

$$W_\varphi - \lambda_0 1 = \int_{(\alpha,\beta)} (\varphi(\lambda) - \lambda_0)\, d\mathbf{E}_\lambda = \int_{(\alpha,\beta)\setminus\varphi^{-1}(U)} (\varphi(\lambda) - \lambda_0)\, d\mathbf{E}_\lambda$$

donde $\mathbf{E}_\lambda$ denota la media espectral del operador multiplicación $(Tf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ dada en la observación 4.1. Entonces como $(\varphi(\lambda) - \lambda_0)^{-1}$ existe y es acotado para todo $\lambda \in (\alpha,\beta) \setminus \varphi^{-1}(U)$, se tiene que el operador acotado autoadjunto dado por

$$R = \int_{(\alpha,\beta)} \chi_{(\alpha,\beta)\setminus\varphi^{-1}(U)} (\varphi(\lambda) - \lambda_0)^{-1}\, d\mathbf{E}_\lambda$$

satisface $R\left(W_\varphi - \lambda_0 1\right) = \left(W_\varphi - \lambda_0 1\right)R = 1$. Es decir que $\lambda_0 \in \rho(W_\varphi)$.

Observación 4.2. Nos damos cuenta que $0 \in \sigma(W)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\mu\left(\varphi^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)\right) \neq 0$.

Definimos

$$L_2((\alpha,\beta),\varphi d\mu) := \left\{ f : (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{medible} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

$L_2((\alpha,\beta),|\varphi| d\mu)$ es un espacio de Hilbert con respecto a la medida $|\varphi|\, d\mu$. $L_2((\alpha,\beta),\varphi\, d\mu)$ es un espacio de Krein singular con Simetría fundamental $(Jf) = \operatorname{sign}(\varphi)f$ (operador multiplicación) con respecto a la forma sesquilineal Hermitiana

$$[f,g] = \langle W_\varphi f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \varphi(x)\, d\mu$$

y el $J-$producto interno viene dado por

$$[f,g]_J = \langle |W_\varphi| f, g\rangle = \int_{(\alpha,\beta)} f(x)\overline{g(x)}\,|\varphi(x)|\,dx.$$

Esto es, el espacio de Hilbert asociado al espacio de Krein $L_2((\alpha,\beta),\varphi\,d\mu)$ es el espacio de Hilbert con peso $L_2((\alpha,\beta),|\varphi|\,d\mu)$.

Observamos que $\mathfrak{H}_{W_\varphi} := \overline{\mathcal{D}_{W_\varphi}}^{\|\cdot\|_J} \simeq L_2((\alpha,\beta),\varphi\,d\mu)$ por que $\left(\mathcal{D}_{W_\varphi},[\cdot,\cdot]\right) \subset L_2((\alpha,\beta),\varphi\,d\mu)$ es un subespacio denso.

Comentario 4.3. Nos damos cuenta que si la función $\varphi \in C^\infty((\alpha,\beta))$ a la hora de tomar en consideración el espacio de Hilbert con peso $L_2((\alpha,\beta),|\varphi|\,d\mu)$ se pierden muchas propiedades de diferenciabilidad de φ. Este es uno de los motivos por el cual se trabaja Marcos en espacios de Krein.

Sea $F : L_2\left((\alpha,\beta),d\mu\right) \longrightarrow L_2\left((\alpha,\beta),\,\varphi\,d\mu\right)$ un operador lineal tal que $(Fg)(x) = \dfrac{g(x)}{\psi(x)}$, donde la función $\psi(x)$ es una función tal que $|\psi|^2 = |\varphi|$ en casi toda parte en (α,β). Como $\mu\left(|\psi|^{-1}\{0\}\right) = \mu\left(|\varphi|^{-1}\{0\}\right) = 0$,

$$\|Ff\|_J^2 = \int_{(\alpha,\beta)} |f(x)|^2|\psi^{-1}|^2|\varphi|\,d\mu = \int_{(\alpha,\beta)} |f(x)|^2\,d\mu = \|f\|^2$$

y F tiene inverso $F^{-1} : L_2\left((\alpha,\beta),\,\varphi\,d\mu\right) \longrightarrow L_2\left((\alpha,\beta),\,d\mu\right)$ tal que

$$\left(F^{-1}f\right)(x) = \psi(x)f(x)$$

el cual está bién definido, entonces F es un operador unitario.

Análogo al caso de espacios de Hilbert se considera la siguiente definición.

Definición 4.4. Un Marco de Gabor es un Marco para el espacio de Krein $\mathfrak{K} := L_2\left((\alpha,\beta),\,\varphi\,d\mu\right)$ es una familia de la forma $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, donde $a,b>0$ y $g\in\mathfrak{K}$ es una función fija.

A la función g se le llama La Función Ventana (Window Function) o el generador. Explícitamente,

$$E_{mb}T_{na}g(x) = e^{2\pi imbx}g(x-na).$$

Por lo cual si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un Marco de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$ tendremos que si ψ es a-periódica ($\psi(x+a)=\psi(x)$; $\forall x\in(\alpha,\beta)$), entonces $FE_{mb}T_{na}g = E_{mb}T_{na}Fg$ y por ende $\{E_{mb}T_{na}Fg\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para el espacio de Krein $L_2\left((\alpha,\beta),\,\varphi\,d\mu\right)$ (Para ejemplos de Marcos de Gabor ver el capítulo 2).

Bibliografía

[1] Akhiezer, N., Glazman, I., S *Theory of linear operators in Hilbert space.* Transl. from the Russian. Dover Publications New York, 1993.

[2] Azizov T. Ya., Iokhvidov I.S., *Linear operators in Hilbert spaces with G-metric.* Russ. Math. Surv. 26 (1971), 45–97.

[3] Azizov T. Ya. and Iokhvidov I.S. *Linear operator in spaces with an indefinite metric.* Pure & Applied Mathematics, A Wiley-Intersciences, Chichester, 1989.

[4] Bognar, J., *Indefinite inner product spaces.* Springer, Berlin, 1974.

[5] Bruzual, R., *Espacios con métrica indefinida.* Laboratorio de Formas en Grupos, Centro de Análisis Escuela de Matemáticas, Universidad Central de Venezuela, Septiembre 2007.

[6] Casazza, P. G., Christensen O., *Weyl Heisenberg Frames for subspaces of $L_2(\mathbb{R})$*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 145-154

[7] Christensen O., *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[8] Christensen, O., Jensen T. K., *An introduction to the theory of bases, frames, and wavelets.* Technical University of Denmark, Department of Mathemtics, 1999.

[9] Daubechies, I., Grossmann, A., Meyer, Y., *Painless nonorthogonal expansions.* J. Math. Phys. 27 (1986), 1271–1283.

[10] Deguang Han, Kornelson Keri, Larson David, Weber Eric, *Frames for undergraduates*, Student Mathematical Library, A.M.S Providence, 2007.

[11] Duffin R.J. Schaeffer A. C. *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341–366.

[12] Christofer E. Heyl, David Walnut. *Continous and discrete wavelet transforms*, SIAM 31 (1989), 628-666.

[13] Rudin, W., *Functional analysis* . McGraw-Hill, New York, 1973.