



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

Instituto de Física y Matemáticas

---



## Modelo Interactuante entre Energía Oscura y Materia Oscura

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en el Área de Física**

por

Roberto Carlos De Arcia Solís

asesorado por

Dr. Ulises Nucamendi Gómez  
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México  
Enero de 2012



# Introducción

El modelo Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica o “Lambda Cold Dark Matter” ( $\Lambda$ CDM por sus siglas en inglés) es llamado el modelo estándar de la cosmología ya que describe de manera general como está formado el Universo, su dinámica a grandes escalas de distancia (del orden de cientos de Megaparsecs) y es capaz de explicar fenómenos que hasta hace algunos años eran un misterio. El modelo considera que del contenido total del Universo,  $\sim 5\%$  está compuesto por partículas del modelo estándar (bariones y fermiones), mientras que el  $95\%$  restante consiste en dos componentes hasta el momento desconocidos a los que llamamos *materia oscura*  $\sim 25\%$  y *energía oscura*  $\sim 70\%$ , los cuales ayudan a explicar algunas interrogantes tal como las curvas de rotación galácticas y la reciente expansión acelerada que presenta el Universo, de forma que sea consistente con las ecuaciones de la Teoría de la Relatividad General de Einstein. La existencia de la materia oscura y la energía oscura se basa en sus propiedades dinámicas gravitacionales que ajustan de manera precisa diversos datos observacionales cosmológicos y galácticos. Desafortunadamente, hasta el día de hoy no ha sido posible dar una explicación acerca del origen de estos componentes y se desconoce por completo su naturaleza.

De entre todos los candidatos para describir la energía oscura, la constante cosmológica es el líder en el sentido de que hace el mejor ajuste a los datos observacionales conocidos. Sin embargo, el modelo  $\Lambda$ CDM presenta fuertes problemas entre los que se encuentran: (i) el problema de la constante cosmológica en la gran discrepancia entre su valor predicho y observado [?, 3], así como (ii) el problema de la coincidencia cósmica, el cual no explica porque estamos viviendo en una época en que la densidad de materia oscura es del mismo orden que la densidad de energía oscura [?, 5, 6].

A fin de resolver este problema, desde hace algunos años diversos investigadores han propuesto la existencia de una interacción no gravitacional entre los componentes del sector oscuro (ver referencia 3 de [1]). La idea principal detrás de ésta hipótesis es que la interacción genera un mecanismo dinámico entre materia oscura y energía oscura, de tal manera que el cociente de las densidades evoluciona desde un valor inicial en tiempos tempranos hasta un valor de orden unidad en el presente. Sin embargo, uno de los problemas que presenta esta idea es que no se tiene un principio físico conocido (tal como un principio de norma) que nos guíe para hallar la forma del acoplamiento. Por esta razón es que se trabaja en base a algunas suposiciones sencillas, por ejemplo, su simplicidad matemática.

En este sentido, en la literatura sobre este tema se han estudiado acoplamientos proporcionales a la densidad de materia oscura (y energía oscura), así como al parámetro de Hubble con coeficientes constantes. La dinámica de dichos modelos ha sido analizada en ([2]) concluyendo que, para ser viables, son necesarias limitaciones muy restrictivas sobre los coeficientes de interacción.

Es por esto que en este trabajo vamos a estudiar un modelo en el que existe una nueva interacción  $Q$  entre la materia y energía oscura que, además de aminorar el problema de la coincidencia cósmica, tenga coeficientes de interacción dinámicos con el fin de explorar si podemos obtener condiciones menos restrictivas sobre los coeficientes de interacción. El análisis de nuestra propuesta se llevará a cabo con la teoría de sistemas dinámicos, ya que las ecuaciones de Friedmann pueden ser escritas como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Vamos a mostrar la existencia de puntos críticos del sistema y cómo a partir de ciertos objetos geométricos en el espacio-fase es posible determinar los estados tempranos y tardíos de este modelo cosmológico.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Variedades diferenciales</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades . . . . .	1
1.2. Cálculo sobre variedades . . . . .	1
1.2.1. Mapeos diferenciales . . . . .	2
1.2.2. Curvas y vectores . . . . .	2
1.2.3. Vectores . . . . .	2
1.2.4. 1-formas . . . . .	3
1.2.5. Tensores . . . . .	3
1.2.6. Mapeos inducidos . . . . .	3
1.2.7. Flujos y derivada de Lie . . . . .	4
1.2.8. Grupos de transformación uniparamétricos . . . . .	4
1.2.9. Derivada de Lie . . . . .	5
1.3. Variedades Riemannianas . . . . .	6
1.3.1. Tensor métrico . . . . .	6
1.3.2. Conexión afín . . . . .	7
1.3.3. Transporte paralelo y geodésicas . . . . .	7
1.3.4. Derivada covariante de campos tensoriales . . . . .	8
1.3.5. La conexión métrica . . . . .	9
1.4. Curvatura . . . . .	9
1.4.1. Torsión y tensor de Riemann . . . . .	9
1.4.2. Tensor de Ricci y escalar de curvatura . . . . .	10
1.4.3. Tensor de curvatura de Riemann con conexión de Levi-Civita . . . . .	10
1.4.4. Isometrías y transformaciones conformes . . . . .	11
1.4.5. Campos vectoriales de Killing . . . . .	12
<b>2. Cosmología</b>	<b>13</b>
2.1. Principio cosmológico. . . . .	13
2.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	14
2.2.1. Vectores de Killing para la métrica de FRW . . . . .	15
2.3. Las componentes del Universo . . . . .	16
2.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento . . . . .	16
2.4.1. Conservación local de la materia . . . . .	17
2.4.2. Ecuaciones de estado . . . . .	18

2.5.	Ecuaciones de Friedmann . . . . .	18
2.6.	Un Universo en expansión . . . . .	22
2.6.1.	Descubrimiento de la aceleración . . . . .	22
2.6.2.	El parámetro de desaceleración . . . . .	24
2.7.	Expansión acelerada del Universo . . . . .	24
2.7.1.	Transición desaceleración - aceleración en el pasado . . . . .	25
2.7.2.	El problema de la coincidencia cósmica . . . . .	26
<b>3.</b>	<b>Sistemas dinámicos</b>	<b>27</b>
3.1.	Sistemas lineales . . . . .	27
3.1.1.	Sistemas lineales desacoplados . . . . .	27
3.1.2.	Teorema fundamental de los sistemas lineales . . . . .	28
3.1.3.	Teoría de la estabilidad . . . . .	29
3.2.	Sistemas no lineales: Teoría local . . . . .	30
3.2.1.	Conceptos y definiciones . . . . .	30
3.2.2.	Teorema fundamental de existencia y unicidad . . . . .	31
3.2.3.	Dependencia de las condiciones iniciales . . . . .	31
3.2.4.	Intervalo máximo de existencia . . . . .	32
3.2.5.	Flujo definido por una ecuación diferencial . . . . .	32
3.2.6.	Linearización . . . . .	33
3.2.7.	Teorema de la variedad estable . . . . .	33
3.2.8.	El Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	34
3.2.9.	Estabilidad y funciones de Liapunov . . . . .	35
3.2.10.	Sistemas Hamiltonianos . . . . .	35
3.2.11.	Estabilidad estructural . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Sistemas dinámicos en cosmología</b>	<b>39</b>
4.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	39
4.2.	Modelo $\Lambda$ Cold Dark Matter . . . . .	40
4.3.	Modelo sector oscuro interactuante . . . . .	43
4.3.1.	Caso $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$ . . . . .	43
4.3.2.	$f(a) \neq 0$ , y $g(a) = 0$ . . . . .	44
4.4.	Análisis con sistemas Hamiltonianos . . . . .	45
4.4.1.	Resultados . . . . .	47
4.5.	Estudio dinámico del sector interactuante . . . . .	47
4.5.1.	Inestabilidad y puntos críticos . . . . .	58
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>A.</b>	<b>Ecuación de Killing</b>	<b>65</b>
<b>B.</b>	<b>Elementos de la métrica de FRW</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Variedades diferenciales

Vamos a comenzar con el concepto de variedad ya que se refiere a la generalización de nuestras ideas de curvas y superficies en espacios de dimensión arbitraria. Mientras que en  $\mathbb{R}^3$  una curva es parametrizada mediante un único número  $(x(t), y(t), z(t))$ , se tiene que en el caso de una superficie es necesario dar 2 valores  $u$  y  $v$  de forma  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  para describirla. Se dice entonces que la curva y la superficie son *localmente* homeomorfas a  $\mathbb{R}$  y a  $\mathbb{R}^2$  respectivamente. Para el caso de una variedad tenemos que es homeomorfa a  $\mathbb{R}^m$  de forma local aunque de forma global puede diferir completamente.

### 1.1. Variedades

Definimos una variedad diferencial  $M$  como aquel objeto que satisface

- $M$  es un espacio topológico.
- $M$  está dada con una familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  en donde  $\{U_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos que cubren a  $M \cup_i U_i = M$ , y  $\varphi_i$  es un homeomorfismo de  $U_i$  a un subespacio abierto  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^m$ .
- Dados  $U_i$  y  $U_j$  tal que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , el mapeo  $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$  que va de  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  a  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  es infinitamente diferenciable.

La pareja  $(U_i, \varphi_i)$  es llamada una **carta coordenada**, mientras que a la familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  se le conoce como **atlas**. El subconjunto  $U_i$  es llamado **vecindad coordenada**, y  $\varphi_i$  es llamada **función coordenada**, la cual está representada por  $m$  funciones  $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$ .

### 1.2. Cálculo sobre variedades

Trabajar con variedades diferenciables nos permite usar las ideas del cálculo definidas sobre espacios vectoriales. Por otro lado, el hecho que la transformación de coordenadas sea suave nos asegura que los cálculos son independientes de las coordenadas elegidas.

### 1.2.1. Mapeos diferenciales

Sea  $f$  un mapeo de una variedad  $m$ -dimensional  $M$  a otra  $n$ -dimensional  $N$ , de forma que envía al punto  $p \in M$  al punto  $f(p) \in N$ . Tomando una carta  $(U, \varphi)$  sobre  $M$  y otra carta  $(V, \psi)$  sobre  $N$  podemos representar al mapeo por medio de

$$\psi f \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Escribiendo  $\varphi(p) = x^\mu$  y  $\psi(f(p)) = y^\alpha$ , podemos tomar  $y = \psi f \varphi^{-1}$  y si  $y \in C^\infty$  se dice que  $f$  es diferenciable en  $p$  o en  $x = \varphi(p)$ . Ahora, si  $\psi f \varphi^{-1}$  es invertible y ambos son infinitamente diferenciables,  $f$  es llamado un **difeomorfismo** entre  $M$  y  $N$ .

### 1.2.2. Curvas y vectores

Vamos a analizar dos tipos especiales de mapeos llamados **curvas** y **funciones**. Una curva es un mapeo  $c : (a, b) \rightarrow M$ , en donde  $(a, b)$  es un intervalo abierto  $a < 0 < b$ . Para el caso de una curva cerrada podemos ver el mapeo de la forma  $c : S^1 \rightarrow M$ , y en ambos casos  $c$  va de un intervalo abierto a  $M$ . Utilizando la carta  $(U, \varphi)$  la curva  $c(t)$  tiene la representación  $x = \varphi c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Por otro lado, una función  $f$  sobre  $M$  es un mapeo suave de  $M$  a  $\mathbb{R}$ . Tomando la carta  $(U, \varphi)$  la representación de  $f$  está dada por  $f \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es una función de  $m$  variables que nos entrega un escalar. Denotamos al conjunto de funciones suaves sobre  $M$  por medio de  $\mathcal{F}(M)$ .

### 1.2.3. Vectores

Definimos un vector como el vector tangente a una curva sobre  $M$  y para esto empleamos las ideas de curva y función descritas arriba. El vector tangente en  $c(0)$  es la *derivada direccional* de la función  $f(c(t))$  a lo largo de la curva  $c(t)$  en  $t = 0$ , con razón de cambio en  $t = 0$

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.2)$$

En términos del sistema coordenado

$$(\partial f / \partial x^\mu) (dx^\mu(c(t))/dt)|_{t=0}, \quad (1.3)$$

en donde  $df(c(t))/dt$  en  $t = 0$  se obtiene al aplicar el operador diferencial  $X$  a  $f$

$$df(c(t))/dt|_{t=0} = X^\mu (\partial f / \partial x^\mu) \equiv X[f]. \quad (1.4)$$

De esta forma definimos a  $X = X^\mu (\partial f / \partial x^\mu)$  como el **vector tangente** a  $M$  en  $p = c(0)$  a lo largo de la curva  $c(t)$ . El conjunto de vectores tangentes en  $p$  forman un espacio vectorial llamado **espacio tangente** a  $M$  en  $p$  y lo denotamos por  $T_p M$ . Usando la teoría de espacios vectoriales podemos estudiar a  $T_p M$  y es posible mostrar que  $\dim T_p M = \dim M$ . Finalmente al escribir un vector cualquiera  $V \in T_p M$  de la forma  $V = V^\mu e_\mu$ , llamamos a  $V^\mu$  los componentes de  $V$  en la base  $e_\mu$ .



### 1.2.4. 1-formas

Dado que  $T_pM$  es un espacio vectorial, existe un espacio de vectores duales cuyos elementos son funciones lineales que mapean elementos de  $T_pM$  a  $\mathbb{R}$ . Llamamos a este espacio dual **espacio cotangente** y a los elementos **vectores duales, vectores cotangentes o 1-formas**. El ejemplo más sencillo de una 1-forma es el diferencial  $df$  de una función  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Si denotamos la acción de un vector  $V$  sobre  $f$  como  $V[f] = V^\mu(\partial f/\partial x^\mu) \in \mathbb{R}$ , entonces la acción de  $df \in T_p^*M$  sobre  $V$  está dada por

$$\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu(\partial f/\partial x^\mu) \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

siendo  $\langle df, V \rangle$   $\mathbb{R}$ -lineal en  $V$  y en  $f$ . Dado que  $df$  se expresa en términos de las coordenadas  $x = \varphi(p)$  como  $df = (\partial f/\partial x^\mu)dx^\mu$ , es natural considerar  $\{dx^\mu\}$  como la base de  $T_p^*M$  con la propiedad

$$\langle dx^\nu, \partial/\partial x^\mu \rangle = \partial x^\nu/\partial x^\mu = \delta_\mu^\nu. \quad (1.6)$$

Escribiendo a una 1-forma de manera general como  $w = w_\mu dx^\mu$ , y tomando un vector  $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu$  tenemos que el **producto interior**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \otimes T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  viene dado por

$$\langle w, V \rangle = w_\mu V^\nu \langle dx^\mu, \partial/\partial x^\nu \rangle = w_\mu V^\nu \delta_\mu^\nu = w_\mu V^\mu. \quad (1.7)$$

### 1.2.5. Tensores

Un tensor de tipo  $(q, r)$  es un mapeo multilinear que toma  $q$  elementos de  $T_p^*M$  y  $r$  elementos de  $T_pM$  y los envía a los reales. Denotamos a dicho conjunto de objetos en  $p$  por medio de  $\mathfrak{S}_{r,p}^q(M)$  y escribimos a un elemento de la forma

$$T = T^{\mu_1, \dots, \mu_q}{}_{\nu_1, \dots, \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \quad (1.8)$$

Sea ahora  $V_i = V_i^\mu \partial/\partial x^\mu$  ( $1 \leq i \leq r$ ) y  $w_i = w_{i\mu} dx^\mu$  ( $1 \leq i \leq q$ ) y la acción de  $T$  viene dada por

$$T(w_1, \dots, w_q; V_1, \dots, V_r) = T^{\mu_1, \dots, \mu_q}{}_{\nu_1, \dots, \nu_r} w_{1\mu_1} \dots w_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}. \quad (1.9)$$

### 1.2.6. Mapeos inducidos

Un mapeo suave  $f : M \rightarrow N$  induce de manera natural un mapeo  $f_*$  llamado **mapeo diferencial**  $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  cuya forma explícita se obtiene a partir de la definición de derivada direccional a lo largo de una curva. Si  $g \in \mathcal{F}(N)$ , entonces  $gf \in \mathcal{F}(M)$  y para todo vector  $V \in T_pM$  que actúa sobre  $gf$  nos entrega un escalar  $V[gf]$ . Definimos ahora  $f_*V \in T_{f(p)}N$  por medio de

$$(f_*V)[g] \equiv V[gf], \quad (1.10)$$

o en términos de las cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  sobre  $M$  y  $(V, \psi)$  sobre  $N$

$$(f_*V)[g\psi^{-1}(y)] \equiv V[gf\psi^{-1}(x)], \quad (1.11)$$

en donde  $x = \varphi(p)$  y  $y = \psi(f(p))$ . Sea ahora  $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu$  y  $f_*V = W^\alpha \partial/\partial y^\alpha$ , podemos reescribir la ecuación anterior de la forma

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g\psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gf\psi^{-1}(x)]. \quad (1.12)$$

**CAPÍTULO 1. VARIEDADES DIFERENCIALES**  
**1.2. CÁLCULO SOBRE VARIEDADES**

---

Por ejemplo, vamos a tomar  $g = y^\alpha$  de esta forma tenemos la relación entre  $W^\alpha$  y  $V^\mu$

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha, \quad (1.13)$$

siendo  $\partial y^\alpha / \partial x^\mu$  el Jacobiano de  $f$ . Es posible extender la idea al caso de tensores tipo  $(q, 0)$  en donde obtenemos  $f_* : \mathfrak{S}_{0, f(p)}^q(N)$ .

Otro mapeo inducido por  $f$  es  $f^* : T_{f(p)}^*(N) \rightarrow T_p^*(M)$  y como actúa en sentido contrario a  $f$  recibe el nombre de **pullback**. Si tomamos  $V \in T_p M$  y  $w \in T_{f(p)}^* N$ , el pullback de  $w$  dado por  $f^*$  está definido por

$$\langle f^* w, V \rangle \equiv \langle w, f_* V \rangle. \quad (1.14)$$

De igual forma, es posible extender la idea al caso de tensores tipo  $(0, r)$  de la forma  $f^* : \mathfrak{S}_{r, f(p)}^0(N) \rightarrow \mathfrak{S}_{r, p}^0(M)$ .

### 1.2.7. Flujos y derivada de Lie

Sea  $X$  un campo vectorial. Definimos una *curva integral*  $x(t)$  como aquella curva sobre  $M$  cuyo vector tangente en el punto  $x(t)$  es  $X|_x$ . Tomando la carta coordenada  $(U, \phi)$

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(X(t)), \quad (1.15)$$

en donde  $x^\mu$  es la componente  $\mu$  de  $\phi(x(t))$  y  $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ , es decir, hallar la curva integral de un campo vectorial  $X$  es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Damos una condición inicial para resolver el problema de forma completa, asumiendo  $x_0^\mu$  como la coordenada al tiempo  $t = 0$  y tomando  $\sigma(t, x_0)$  como una curva integral de  $X$  que pasa por el punto  $x_0$  en  $t = 0$ , denotamos su trayectoria por medio de  $\sigma^\mu(t, x_0)$

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)), \quad (1.16)$$

con la condición  $\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu$ . Llamamos a este mapeo  $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  **flujo** generado por  $X \in \chi(M)$  y las propiedades que satisface son

- $\sigma(0, x) = x$ .
- $t \rightarrow \sigma(t, x)$  es una solución de (1.16).
- $\sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t + s, x)$ ,

para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Es necesario que se cumpla la última propiedad para que la solución sea única una vez que damos la condición inicial.

### 1.2.8. Grupos de transformación uniparamétricos

Un flujo  $\sigma(t, x)$  es un difeomorfismo de  $M$  a  $M$ , dado por  $\sigma_t : M \rightarrow M$  que satisface

- $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$ , es decir,  $\sigma_t \cdot \sigma_s = \sigma_{t+s}$ .
- $\sigma_0 =$  mapeo identidad.

▪  $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$ .

Este grupo es llamado **grupo de transformación uniparamétrico** y de forma local es similar al grupo aditivo en  $\mathbb{R}$ , aunque de manera global puede no serlo. Bajo la acción de  $\sigma_\epsilon$ , tenemos a partir de (1.16)

$$\sigma_\epsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\epsilon, x) = x^\mu + \epsilon X^\mu(x). \quad (1.17)$$

El campo vectorial  $X$  es llamado el *generador infinitesimal* de la transformación  $\sigma_t$ .

### 1.2.9. Derivada de Lie

Sean  $\sigma(t, x)$  y  $\tau(t, x)$  dos flujos generados por los campos vectoriales  $X, Y$

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) \quad \frac{d\tau^\mu(t, x)}{ds} = Y^\mu(\sigma(s, x)). \quad (1.18)$$

Para evaluar el cambio del campo vectorial  $Y$  a lo largo de  $\sigma(s, x)$  debemos comparar al vector  $Y$  en el punto  $x$  con el vector en  $x' = \sigma_\epsilon(x)$ . No es posible tomar la diferencia entre los componentes de  $Y$  en ambos puntos ya que pertenecen a espacios diferentes  $T_p(M)$  y  $T_{\sigma_\epsilon(x)}(M)$  así que vamos a definir un operador derivada que posee la propiedad de mapear  $Y|_{\sigma_\epsilon(x)}$  a  $T_x(M)$  por medio de

$$(\sigma_{-\epsilon})_* : T_{\sigma_\epsilon(x)}(M) \rightarrow T_x(M), \quad (1.19)$$

para después tomar la diferencia entre los vectores  $(\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(x)}$  y  $Y|_x$ , ya que ambos pertenecen a  $T_x(M)$ . De esta forma definimos a la **derivada de Lie** de un campo vectorial  $Y$  a lo largo del flujo  $\sigma$  de  $X$  por medio de

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} [(\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(x)} - Y|_x]. \quad (1.20)$$

Tomando dos campos vectoriales sobre  $M$   $X = X^\mu \partial x / \partial x^\mu$  y  $Y = Y^\mu \partial x / \partial x^\mu$ , podemos definir al **corchete de Lie**  $[X, Y]$  por medio de

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]], \quad \forall f \in C^\infty. \quad (1.21)$$

Hay que notar que  $[X, Y]$  es un campo vectorial, mientras que  $XY$  y  $YX$  son únicamente términos de segundas derivadas. Se acostumbra escribir la derivada de Lie de  $Y$  a lo largo de  $X$  por medio de

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (1.22)$$

El corchete de Lie satisface las siguientes propiedades:

1. Es lineal en cada una de sus entradas

$$[aX_1 + X_2, bY_1 + Y_2] = ab[X_1, Y_1] + a[X_1, Y_2] + b[X_2, Y_1] + [X_2, Y_2]. \quad (1.23)$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Antisimetría

$$[X, Y] = -[Y, X]. \quad (1.24)$$

3. Identidad de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \quad (1.25)$$

De forma geométrica podemos ver al corchete de Lie como la prueba de la no conmutatividad de dos flujos sobre la variedad. Sean  $\sigma(s, x)$  y  $\tau(t, x)$  dos flujos generados por los campos vectoriales  $X, Y$ , tenemos que la diferencia entre las coordenadas de los puntos que se obtienen al elegir el orden para las trayectorias  $\epsilon$  a lo largo de  $\sigma$  y  $\delta$  a lo largo de  $\tau$  se puede expresar de forma

$$\epsilon\delta[X, Y]^\mu = \tau^\mu(\delta, \sigma(\epsilon, x)) - \sigma^\mu(\epsilon, \tau(\delta, x)), \quad (1.26)$$

es decir, el corchete de Lie para  $X$  y  $Y$  es una medida del error para la clausura de un paralelogramo generado por los flujos y puede verse que  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$ , solamente cuando

$$\sigma(s, \tau(t, x)) = \tau(t, \sigma(s, x)). \quad (1.27)$$

Vamos ahora a analizar la derivada de Lie de un mapeo  $f \in \mathcal{F}(M)$  a lo largo del flujo  $\sigma_s$  generado por el campo vectorial  $X$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \left[ f(\sigma_\epsilon(x)) - f(x) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \left[ f(x^\mu + \epsilon X^\mu(x)) - f(x^\mu) \right] \\ &= X^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f], \end{aligned} \quad (1.28)$$

la cual es la derivada direccional a lo largo de  $X$ . Finalmente, la derivada de Lie de un tensor satisface

$$\mathcal{L}_X(t_1 + t_2) = \mathcal{L}_X(t_1) + \mathcal{L}_X(t_2), \quad (1.29)$$

siendo  $t_1$  y  $t_2$  campos tensoriales del mismo tipo y

$$\mathcal{L}_X(t_1 \otimes t_2) = \mathcal{L}_X(t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes \mathcal{L}_X(t_2), \quad (1.30)$$

con  $t_1$  y  $t_2$  campos tensoriales arbitrarios. Para el caso de un tensor arbitrario se tiene que

$$\mathcal{L}_X t = X[t_\mu^\nu] dx^\mu \otimes e_\nu + t_\mu^\nu (\mathcal{L}_X dx^\mu) \otimes e_\nu + t_\mu^\nu dx^\mu \otimes (\mathcal{L}_X e_\nu). \quad (1.31)$$

## 1.3. Variedades Riemannianas

### 1.3.1. Tensor métrico

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p$  un punto en  $M$ . Decimos que una *métrica Riemanniana*  $g$  sobre  $M$  es un campo tensorial  $(0,2)$  que satisface

1.  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2.  $g_p(U, U) \geq 0, \forall U,$

**CAPÍTULO 1. VARIETADES DIFERENCIALES**  
**1.3. VARIETADES RIEMANNIANAS**

---

en donde  $U, V \in M$  y  $g_p = g|_p$ . Dado que  $g_p$  es un mapeo  $T_pM \otimes T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , es posible definir un mapeo lineal  $g_p(U, \cdot) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $V \rightarrow g_p(U, V)$  y decimos que  $g_p(U, \cdot)$  se trata de una 1-forma  $w_U \in T_p^*M$ . De manera similar,  $w \in T_p^*M$  produce  $V_w \in T_pM$  por medio de  $\langle w, U \rangle = g(V_w, U)$ , es decir, la métrica  $g_p$  da origen a un isomorfismo entre  $T_pM$  y  $T_p^*M$ . Tomando la carta  $(U, \varphi)$  y las coordenadas  $x^\mu$  en  $M$ , podemos escribir

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (1.32)$$

Si tomamos a  $g$  como el determinante de  $g^{\mu\nu}$  es posible demostrar que  $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda$ , así que existe un isomorfismo entre  $T_pM$  y  $T_p^*M$  que puede expresarse por medio de

$$w_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \quad U^\mu = g^{\mu\nu} w_\nu. \quad (1.33)$$

### 1.3.2. Conexión afín

Una conexión afín  $\nabla$  es un mapeo  $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ , o  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  que satisface

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y, Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ \nabla_{(fX)}(Y) &= f \nabla_X Y \\ \nabla_X(fY) &= X[f]Y + f \nabla_X Y, \end{aligned} \quad (1.34)$$

con  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $X, Y, Z \in \chi(M)$ . Tomando la carta coordenada  $(U, \varphi)$  podemos definir los **coeficientes de conexión**  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  por medio de

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (1.35)$$

Una vez que la acción de  $\nabla$  ha sido definida sobre los vectores base es posible calcular la acción sobre cualquier vector. Sea  $V = V^\mu e_\mu$  y  $W = W^\nu e_\nu$  elementos de  $\chi(M)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu e_\mu(W^\nu e_\nu) = V^\mu \left[ e_\mu[W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu \right] \\ &= V^\mu (\partial W^\lambda / \partial x^\mu + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) e_\lambda. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Por definición,  $\nabla$  mapea a los vectores  $V$  y  $W$  a un nuevo vector dado por (1.36) cuyo componente  $\lambda$  es  $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \partial W^\lambda / \partial x^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda W^\nu. \quad (1.37)$$

Debemos notar que  $\nabla_\mu W^\lambda$  es el coeficiente del vector  $\nabla_\mu W = \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$ , el cual no debe confundirse con la derivada covariante de  $W^\lambda$ .

### 1.3.3. Transporte paralelo y geodésicas

Sea  $c$  una curva sobre  $M$ ,  $(U, \varphi)$  una carta coordenada y  $X$  un campo vectorial definido a lo largo de  $c$

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t)) e_\mu|_{c(t)}. \quad (1.38)$$

Si  $X$  satisface la condición

$$\nabla_V X = 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b), \quad (1.39)$$

se dice que  $X$  ha sido transportado de forma paralela a lo largo de  $c$  en donde  $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt) e_\mu|_{c(t)}$  es el vector tangente de  $c(t)$ . Reescribiendo la ecuación anterior en componentes

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0. \quad (1.40)$$

Si el vector tangente  $V(t)$  es transportado de manera paralela a lo largo de  $c(t)$

$$\nabla_V V = 0, \quad (1.41)$$

y se dice que  $c(t)$  es llamada **geodésica**. Sobre una variedad estas son las curvas que describen las trayectorias más cortas entre dos puntos. Reescribimos la ecuación anterior de la forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0, \quad (1.42)$$

#### 1.3.4. Derivada covariante de campos tensoriales

Definimos la derivada covariante de  $f \in \mathcal{F}(M)$  con ayuda de la derivada direccional  $\nabla_X f = X[f]$ . Recordando las propiedades (1.34), podemos ver que satisface la regla de Leibnitz

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad (1.43)$$

con  $T_1$  y  $T_2$  campos tensoriales arbitrarios. Para el caso de una 1-forma  $w \in \Omega^1(M)$ , es necesario recordar que para  $\langle w, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$  con  $Y \in \chi(M)$ , debe cumplirse

$$X[\langle w, Y \rangle] = \nabla_X \langle w, Y \rangle = \langle \nabla_X w, Y \rangle + \langle w, \nabla_X Y \rangle. \quad (1.44)$$

Reescribiendo con componentes encontramos que

$$(\nabla_X w)_\nu = X^\mu \partial_\mu w_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda, \quad (1.45)$$

y para el caso de  $X = e_\mu$  se tiene que

$$(\nabla_\mu w)_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda, \quad (1.46)$$

mientras que para  $w = dx^\nu$

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda. \quad (1.47)$$

Finalmente, para el caso de un tensor arbitrario

$$\begin{aligned} \nabla_\nu t_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\lambda_1, \dots, \lambda_p} &= \partial_\nu t_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\lambda_1, \dots, \lambda_p} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_1} t_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\kappa, \dots, \lambda_p} + \dots \\ &+ \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_p} t_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \kappa} - \Gamma_{\nu\mu_1}^\kappa t_{\kappa, \mu_2, \dots, \mu_q}^{\lambda_1, \dots, \lambda_p} - \dots \\ &- \Gamma_{\nu\mu_p}^\kappa t_{\mu_1, \dots, \mu_{q-1}, \kappa}^{\lambda_1, \dots, \lambda_p}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

### 1.3.5. La conexión métrica

Vamos a comenzar exigiendo que la métrica  $g_{\mu\nu}$  sea covariantemente constante, es decir, si dos vectores  $X$  y  $Y$  son transportados de forma paralela a lo largo de una curva, su producto interno debe permanecer constante a lo largo de dicha curva. Sea ahora  $V$  un vector tangente a la curva sobre la cual son transportados  $X$  y  $Y$ , tenemos que

$$0 = \nabla_V [g(X, Y)] = V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] \quad (1.49)$$

$$= V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu}, \quad (1.50)$$

y como debe cumplirse para toda curva y cualesquiera vectores

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} = 0. \quad (1.51)$$

Tomando permutaciones de  $(\lambda, \mu, \nu)$  hallamos que

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} = 0, \quad (1.52)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0, \quad (1.53)$$

así que con la combinación (1.52) + (1.53) - (1.51)

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} + T_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} - 2\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0, \quad (1.54)$$

en donde  $T_{\lambda\mu}^\kappa \equiv 2\Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa \equiv \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$  y  $\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa \equiv 1/2 \{\Gamma_{\mu\nu}^\kappa + \Gamma_{\nu\mu}^\kappa\}$ . El tensor  $T_{\lambda\mu}^\kappa$  es antisimétrico con respecto a los índices inferiores  $T_{\lambda\mu}^\kappa = -T_{\mu\lambda}^\kappa$  y recibe el nombre de *tensor de torsión*.

Vamos ahora a definir los **símbolos de Christoffel**  $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$  por medio de

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (1.55)$$

con los coeficientes de conexión dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} &= \Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa + \Gamma_{[\mu\nu]}^\kappa \\ &= \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{2} (T_\nu^\kappa{}_\mu + T_\mu^\kappa{}_\nu + T_{\mu\nu}^\kappa), \end{aligned} \quad (1.56)$$

El segundo término de la última línea es llamado **contorsión** y lo denotamos por medio de  $K_{\mu\nu}^\kappa$ . Se tiene que cuando éste se anula sobre la variedad la conexión métrica  $\nabla$  es llamada **conexión de Levi-Civita**. Sobre una variedad Riemanniana  $(M, g)$ , sólo existe una conexión simétrica compatible con la métrica  $g$ , ésta es la conexión de Levi-Civita.

## 1.4. Curvatura

### 1.4.1. Torsión y tensor de Riemann

Vamos a definir al *tensor de torsión*  $T : \chi(M) \otimes \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  y al *tensor de Riemann*  $R : \chi(M) \otimes \chi(M) \otimes \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  por medio de

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.57)$$

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (1.58)$$

Los componentes de ambos tensores con respecto a la base coordenada  $\{e_\mu\}$  y la base dual  $\{dx^\mu\}$  están dados por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\eta e_\eta - \Gamma_{\nu\mu}^\eta e_\eta \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \end{aligned} \quad (1.59)$$

y

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^\kappa &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa, \end{aligned} \quad (1.60)$$

El tensor de Riemann satisface las identidades de Bianchi

1. *Primera identidad*

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0. \quad (1.61)$$

2. *Segunda identidad*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V = 0. \quad (1.62)$$

### 1.4.2. Tensor de Ricci y escalar de curvatura

A partir del tensor de Riemann es posible construir dos nuevos tensores contrayendo índices. Comencemos con el **tensor de Ricci**, el cual es un tensor rango (0,2) definido por

$$Ric(X, Y) \equiv \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle, \quad (1.63)$$

y en notación de componentes

$$Ric_{\mu\nu} = Ric(e_\mu, e_\nu) = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = R_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Si contraemos índices nuevamente llegamos al **escalar de curvatura**  $R$ , el cual está dado por

$$R \equiv g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.65)$$

### 1.4.3. Tensor de curvatura de Riemann con conexión de Levi-Civita

Usando la conexión de Levi-Civita podemos definir al tensor de Riemann de la forma

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\delta^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\delta^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\delta^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \right) \quad (1.66)$$

$$+ g_{\zeta\eta} (\Gamma_{\kappa\mu}^\zeta \Gamma_{\lambda\nu}^\eta - \Gamma_{\kappa\nu}^\zeta \Gamma_{\lambda\mu}^\eta), \quad (1.67)$$

en donde  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv g_{\kappa\zeta} R_{\lambda\mu\nu}^\zeta$  y satisface

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} \quad (1.68)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (1.69)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (1.70)$$

$$Ric_{\mu\nu} = -Ric_{\nu\mu}. \quad (1.71)$$



Por otro lado, reescribiendo las identidades de Bianchi en componentes

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} = 0, \quad (1.72)$$

$$(\nabla_{\kappa}R)^{\xi}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_{\mu}R)^{\xi}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_{\nu}R)^{\xi}_{\lambda\kappa\mu} = 0, \quad (1.73)$$

tenemos que contrayendo  $\xi$  y  $\mu$  en la última ecuación

$$(\nabla_{\kappa}Ric)_{\lambda\nu} + (\nabla_{\mu}R)^{\mu}_{\lambda\nu\kappa} - (\nabla_{\nu}Ric)_{\lambda\kappa} = 0. \quad (1.74)$$

Si además, contraemos los índices  $\lambda$  y  $\nu$ , tenemos que  $\nabla_{\mu} (R\delta - 2Ric)^{\mu}_{\kappa} = 0$ . Es decir

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.75)$$

en donde  $G^{\mu\nu}$  es el **Tensor de Einstein** definido por

$$G^{\mu\nu} \equiv Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \quad (1.76)$$

Usando las propiedades de simetría (1.68) - (1.71) podemos restringir el número de componentes independientes del tensor de Riemann. Sea  $m$  la dimensión de nuestra variedad  $(M, g)$ , la antisimetría (1.68) implica que hay  $\binom{N \equiv m}{2}$  elecciones independientes del par  $(\mu, \nu)$ . De igual forma, a partir de (1.69) encontramos que hay  $N$  pares independientes para  $(\kappa, \lambda)$ . Por otro lado, dado que  $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$  es simétrico bajo el intercambio de  $(\kappa, \lambda)$  y  $(\mu, \nu)$ , el número de elecciones se reduce de  $N^2$  a  $\binom{N+1}{2} = \frac{1}{2}N(N+1)$ .

#### 1.4.4. Isometrías y transformaciones conformes

Sea  $(M, g)$  una variedad (pseudo) Riemanniana y  $f$  un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Decimos que es una *isometría* si la métrica se preserva

$$f^*g_{f(p)} = g_p, \quad (1.77)$$

es decir, si  $g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = g_p(X, Y)$  para todo  $X, Y \in T_pM$ . Reescribiendo la ecuación en componentes tenemos

$$\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(f(p)) = g_{\mu\nu}(p), \quad (1.78)$$

donde  $x$  e  $y$  son las coordenadas de  $p$  y  $f(p)$  respectivamente. Es posible demostrar que el mapeo identidad, la inversa y la composición de isometrías es también una isometría y todos ellos forman un grupo. Dado que la isometría preserva la longitud de los vectores podemos relacionarla con las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, si tomamos sobre la variedad un difeomorfismo que preserve la métrica hasta un escalar de la forma

$$f^*g_{f(p)} = e^{2\sigma}g_p, \sigma \in \mathcal{F}(M), \quad (1.79)$$

en donde  $g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = e^{2\sigma}g_p(X, Y)$  para todo  $X, Y \in T_pM$ . Reescribiendo nuevamente en componentes tenemos

$$\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(f(p)) = e^{2\sigma(p)} g_{\mu\nu}(p). \quad (1.80)$$

El conjunto de todas las transformaciones conformes es un grupo y lo llamamos *grupo conforme* y se denota por  $\text{Conf}(M)$ . Si tomamos una transformación conforme  $f$ , el ángulo  $\theta'$  entre  $f_*X$  y  $f_*Y$  está dado por

$$\cos \theta' = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu / [e^{2\sigma} g_{\xi\eta} X^\xi Y^\eta \cdot e^{2\sigma} g_{\kappa\lambda} X^\kappa Y^\lambda]^{1/2} = \cos \theta, \quad (1.81)$$

es decir,  $f$  preserva el ángulo pero no preserva la magnitud. Finalmente vamos a mencionar un concepto relacionado con las transformaciones conformes, este es el reescalamiento de Weyl. Sean  $g$  y  $\bar{g}$  métricas sobre una variedad  $M$ . Se dice que  $\bar{g}$  está relacionada de manera conforme con  $g$  si

$$\bar{g}_p = e^{2\sigma(p)} g_p. \quad (1.82)$$

Podemos ver que existe una relación de equivalencia entre ambas métricas y le llamamos *estructura conforme*. La transformación  $g \rightarrow e^{2\sigma} g$  es llamada **reescalamiento de Weyl** y el conjunto de ellas forma un grupo llamado Weyl ( $M$ ).

### 1.4.5. Campos vectoriales de Killing

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana y  $X \in \chi(M)$ . Si un desplazamiento está dado por  $\epsilon X$ , con  $\epsilon$  de carácter infinitesimal y generador de una isometría, llamamos a  $X$  un **campo vectorial de Killing**. Se tiene que bajo dicha isometría se satisface

$$\frac{\partial(x^\kappa + \epsilon X^\kappa)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\lambda + \epsilon X^\lambda)}{\partial x^\nu} g_{\kappa\lambda}(x + \epsilon X) = g_{\mu\nu}(x). \quad (1.83)$$

Es posible demostrar que  $g_{\mu\nu}$  y  $X^\mu$  satisfacen la **ecuación de Killing** ya que

$$X^\xi \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\kappa g_{\kappa\nu} + \partial_\nu X^\lambda g_{\mu\lambda} = 0, \quad (1.84)$$

y de la definición de la derivada de Lie tenemos que

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 0. \quad (1.85)$$

Sea  $\varphi_t$  un grupo uniparamétrico de transformaciones que generan al campo vectorial de Killing. Usando la ecuación anterior podemos ver que localmente la geometría no se modifica a lo largo de  $\varphi$ , así que en pocas palabras, el campo vectorial de Killing representa la dirección de simetría de la variedad.

Un conjunto de campos vectoriales de Killing se llama dependiente si uno de ellos puede ser expresado como una combinación de los otros con la ayuda de coeficientes constantes. Por lo tanto pueden haber más vectores de Killing que dimensiones de la variedad. Llamamos a este el número máximo de vectores independientes, el cual no tiene relación directa con la dimensión de  $M$ . En un espacio-tiempo  $m$ -dimensional ( $m \geq 2$ ), hay  $m(m+1)$  vectores de Killing, de los cuales,  $m$  generan traslaciones,  $(m-1)$  generan los boost y  $(m-1)(m-2)/2$  rotaciones espaciales. Dichos espacios que admiten  $m(m+1)/2$  vectores de Killing son llamados **espacios maximalmente simétricos**.

## Capítulo 2

# Cosmología

La cosmología es la rama de la física que estudia el origen, la evolución y el destino del Universo utilizando la Teoría General de la Relatividad (TGR) y la ley de Hubble. La primera nos ayuda a entender como está formado el espacio-tiempo e introduce el principio cosmológico, en tanto que la ley de Hubble nos dice que vivimos en un Universo que no es estático sino que se las galaxias se alejan unas de otras con velocidad proporcional a la distancia que las separa. Cuando queremos estudiar al Universo a gran escala la gravedad es la interacción que gobierna la dinámica y es por ello que los modelos cosmológicos de hoy en día están cimentados sobre la (TGR).

### 2.1. Principio cosmológico.

Algo aceptado desde tiempos de Copérnico es que no ocupamos un lugar privilegiado en el Universo, si estuviéramos localizados en otra región observaríamos algo muy similar a lo que podemos ver en nuestra posición. Por lo tanto parece natural aceptar que **el Universo es homogéneo e isotrópico a escalas comológicas**, es decir la composición de éste es la misma en cualquier punto y no existe una dirección privilegiada al momento de realizar observaciones. Desde la perspectiva de la (TGR), el Universo es un *espacio-tiempo* representado por una variedad diferencial  $\mathcal{M}$  sobre la cual se define una métrica Lorentziana  $g$  y se denota de forma compacta como  $(\mathcal{M}, g)$ . Vamos a tomar una familia de hipersuperficies *tipo-espacio*  $\Sigma_\eta$  que folian todo el espacio-tiempo con la propiedad de ser etiquetados a través de un parámetro continuo  $\eta \in \mathbb{R}$ , de tal forma que para cada valor de  $\eta$  se está eligiendo una hipersuperficie  $\Sigma_\eta$  en particular (ver figura 2.1). Se dice entonces que un espacio-tiempo es *espacialmente homogéneo* si existe una familia de hipersuperficies *tipo-espacio*  $\Sigma_\eta$  que folian todo el espacio-tiempo de tal forma que para cada  $\eta$  y para cualesquiera dos puntos  $P, Q \in \Sigma_\eta$ , existe una isometría de la métrica.

Ahora, para definir lo que es un espacio-tiempo espacialmente isotrópico considere primero una *congruencia* de curvas tipo-tiempo en  $\mathcal{M}$ , es decir, una familia de curvas que llenan a toda la variedad  $\mathcal{M}$  tales que en cada punto  $P \in \mathcal{M}$  pasa una curva tipo tiempo y se puede definir un vector tangente  $U$ , así como un conjunto  $V_P(U)$  formado de vectores ortogonales a  $U$  en el punto  $P$ . Entonces, un espacio-tiempo es *espacialmente isotrópico* si es llenado por una *congruencia* de curvas que satisfacen la propiedad de que dado cualquier punto  $P$  y dados

cualesquiera dos vectores unitarios tangentes <sup>1</sup>  $s_1, s_2 \in V_P(U)$  existe una isometría de  $g$  la cual deja a  $P$  y al vector  $U$  (situado en  $P$ ) fijos, pero rota  $s_1$  hacia  $s_2$  (ver figura 2.1). La idea de

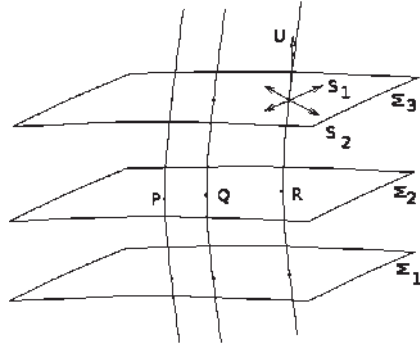


Figura 2.1: Hipersuperficies tipo espacio  $\Sigma_\eta$  y curvas tipo tiempo que llenan la variedad  $\mathcal{M}$

un Universo homogéneo e isotrópico proviene de los primeros trabajos de Einstein, quien hizo la suposición basándose en conjeturas teóricas a fin de simplificar las soluciones. Actualmente la mejor evidencia en favor de la isotropía viene dada por la uniformidad de la temperatura de la Radiación Cómica de Fondo (CMBR), la cual es un campo que permea todo el Universo con temperatura  $\sim 2.75 K$  con diferencias de apenas  $\delta t/t \approx 10^{-5} K$ . Vamos a mencionar que las densidades de inhomogeneidades primitivas son el resultado de las fluctuaciones de temperatura en el CMBR y esto ofrece una prueba para las teorías de formación de estructuras. La evidencia directa de la homogeneidad en la distribución de galaxias es más sutil, y aunque el conteo de galaxias ha aportado evidencias favorables su interpretación no es muy directa. En otras palabras, dado que la luz es sólo una pista para hallar objetos masivos, dichos conteos únicamente nos permiten determinar cómo está distribuida la luz (por ejemplo galaxias) y no la materia en general.

## 2.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La única métrica compatible con el principio cosmológico de isotropía y homogeneidad espacial a gran escala es la de *Friedmann-Robertson-Walker* (FRW). En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  el elemento de línea  $ds^2$  tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

en donde la función  $a(t)$  es llamada factor de escala y  $k$  es una constante que nos indica la curvatura espacial del Universo. Dependiendo del valor de  $k$  el Universo puede ser *cerrado*, *abierto* o *plano*, de acuerdo a si la curvatura espacial es *positiva*, *negativa* o *nula*, respectivamente.

La curvatura espacial queda determinada a través del contenido de materia-energía en el Universo, es decir, de la abundancia de cada una de sus componentes. Hasta ahora las observaciones cosmológicas realizadas por WMAP sugieren que el valor de  $k$  es prácticamente

<sup>1</sup>Por “*espaciales*” se refiere a que son ortogonales al vector  $U$ .

$k$	Densidad crítica	Curvatura espacial	Tipo Universo
$k > 0$	$\rho > \rho_{\text{crit}}$	positiva	cerrado
$k < 0$	$\rho < \rho_{\text{crit}}$	negativa	abierto
$k = 0$	$\rho = \rho_{\text{crit}}$	nula	plano

Cuadro 2.1: Distintas geometrías dependiendo del valor del factor de curvatura espacial  $k$  y de la densidad crítica  $\rho_c$ .

cero, ésto es, que el Universo es espacialmente plano [10]. Una de las predicciones que se pueden obtener de la métrica de FRW es la expansión del Universo cuantificada a través del factor de escala  $a(t)$ . Esta función representa la *distancia comóvil*, es decir, la distancia entre dos puntos arbitrarios que se van alejando entre sí conforme el Universo se expande. Se considera que ésta distancia es cero en  $t = 0$  y a partir de este momento aumenta debido a la expansión del Universo. Hoy en día se denota como “ $a_0$ ” y se normaliza al valor  $a_0 = 1$ .

### 2.2.1. Vectores de Killing para la métrica de FRW

Otra forma de considerar la isotropía espacial es a través de la condición de que las ecuaciones deben ser invariantes ante rotaciones espaciales, y de forma similar la homogeneidad se puede establecer como la invarianza ante translaciones espaciales. Se dice entonces que el espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  es invariante bajo un grupo uni-paramétrico si se satisface

$$\mathcal{L}_\varepsilon g = 0, \tag{2.2}$$

en donde el grupo uni-paramétrico es generado por el campo vectorial  $\varepsilon$  llamado *campo vectorial de Killing* de la métrica. La invarianza bajo un grupo tres-paramétrico de rotaciones espaciales (isotropía) implica la existencia de un espacio vectorial de Killing

$$\varepsilon_1 = \cos(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\phi)\partial_\phi, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_2 = \sin(\phi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\phi)\partial_\phi, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_3 = \partial_\phi. \tag{2.5}$$

Por otro lado, la invarianza bajo un grupo tres-paramétrico de translaciones espaciales (homogeneidad) implica la existencia de otro espacio-vectorial de vectores de Killing

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{f(r)} \left[ \sin(\theta)\cos(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r}\partial_\theta - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{f(r)} \left[ \sin(\theta)\sin(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r}\partial_\theta + \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{f(r)} \left[ \cos(\theta)\partial_r - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta \right], \tag{2.8}$$

donde la función  $f(r)$  es:  $f(r) = \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}$ .

### 2.3. Las componentes del Universo

La mayoría de los modelos cosmológicos considera la existencia de 4 tipos de materia:

**Materia bariónica.** Está constituida por los *bariones* y *fermiones* del *Modelo Estándar*.

Se encuentra principalmente en forma de estrellas, galaxias, polvo interestelara y se ha establecido a partir de proceso de nucleosíntesis que la proporción total en el Universo es  $\sim 4.5\%$  [10].

**Radiación.** Se trata de una radiación electromagnética (Radiación cósmica de fondo CMB por sus siglas en inglés) que permea todo el Universo de forma altamente isotrópica cuya distribución espectral corresponde a la de un cuerpo negro con una temperatura de 2.725 K [10]. Se estima que su abundancia hoy en día a la densidad de la materia-energía es de  $\sim 0.005\%$ .

**Materia oscura.** Se trata de aquel tipo de materia que no emite radiación electromagnética y ha sido detectada a través de sus efectos gravitacionales usando *curvas de rotación* en galaxias, aunque también se encuentra en los cúmulos de galaxias, así como en regiones "vacías". Se desconoce su naturaleza y por lo tanto las partículas que la componen no pertenecen al modelo estándar. Las estimaciones actuales sugieren que es  $\sim 23.3\%$  de la proporción total de materia-energía en el Universo actual [10].

**Energía oscura.** Es el nombre genérico que se utiliza para denominar al responsable de la presente expansión acelerada del Universo (según el modelo estándar). Fue descubierta inicialmente por Adam Riess et al. [11] en 1998 y confirmada meses más tarde por Perlmutter et al. [13]. Según el modelo  $\Lambda$ CDM, su abundancia se estima del orden de  $\sim 72\%$  de la densidad total de materia-energía presente en el Universo [10].

### 2.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento

En cosmología se considera a cada uno de los componentes del Universo como un *fluido* caracterizado por cantidades macroscópicas tales como densidad, presión, temperatura, entropía, viscosidad, etc. Por ejemplo, las galaxias, cúmulos de galaxias, etc., pueden considerarse como partículas de un fluido. A pesar de que cada partícula del fluido tiene su propia velocidad, el fluido como un todo (a nivel cosmológico) tiene su propio campo de velocidades *global*. Ahora, para caracterizar sus propiedades se define el *tensor de energía-momento*  $T^{\mu\nu}$ , el cual contiene toda la información relativa a la energía del fluido. Las componentes  $T^{00}$  y  $T^{ii}$  corresponden a la *densidad de energía*  $\rho$  y la componente de la presión  $p^k$ ,  $T^{0i}$  corresponde a la *densidad de momento* y los elementos  $T^{ij}$  corresponde al *flujo de momento*.

Un caso particular de fluidos muy útiles en cosmología son los llamados fluidos perfectos que permiten aproximar en buena medida el comportamiento de los fluidos cosmológicos, por ser homogéneos e isotrópicos. Un *fluido perfecto* se define como aquel en el cual un observador comóvil verá al fluido alrededor de él *isotrópico* y esto sólo es posible si el tiempo y camino libres medios entre colisiones son muy grandes comparados con las escalas usadas por el observador. Los fluidos perfectos se distinguen por ser caracterizados por dos componentes,

su densidad  $\rho$  y presión  $p$  medidos en el marco de referencia en reposo del fluido. Debido a la isotropía todos los términos fuera de la diagonal son cero, ya que no existe flujo neto de momento en dirección ortogonal. Además, los componentes de la diagonal deben ser iguales  $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ , así que los números independientes son por lo tanto la densidad de energía  $\rho = T^{00}$  y la presión  $T^{ii}$ . Escribimos entonces al tensor de energía-momento del fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (2.9)$$

en donde  $g_{\mu\nu}$  es el *tensor métrico* y  $U^\mu$  es la cuadrivelocidad de un observador comóvil

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.10)$$

siendo  $\tau$  el tiempo propio del observador. Normalizando las cuadrivelocidades comóviles, se tiene:  $U^\nu U_\nu = -1$ , así que

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad U_\nu = (-1, 0, 0, 0), \quad (2.11)$$

y la traza  $T$  de  $T^{\mu\nu}$  es

$$T = T^\mu_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 3p - \rho. \quad (2.12)$$

### 2.4.1. Conservación local de la materia

Partiendo del tensor de fluido perfecto y usando la identidad de Bianchi es posible tener una ecuación de conservación *local* de masa-energía

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad (2.13)$$

la cual es obedecida *individualmente* por cada una de las diferentes componentes de materia-energía presentes en el Universo. Tomando la componente temporal  $\nabla_\mu T^\mu_t = 0$

$$\partial_\mu T^\mu_t + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_t - \Gamma^\lambda_{\mu t} T^\mu_\lambda = 0, \quad (2.14)$$

y dado que el tensor  $T^\mu_\nu$  de un fluido perfecto es diagonal en el sistema de referencia comóvil podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\partial_t T^t_t + \Gamma^\mu_{\mu t} T^t_t - \Gamma^r_{rt} T^r_r - \Gamma^\theta_{\theta t} T^\theta_\theta - \Gamma^\phi_{\phi t} T^\phi_\phi = 0. \quad (2.15)$$

Para nuestro caso, los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\Gamma^r_{rt} = \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\phi_{\phi t} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{y} \quad \Gamma^t_{tt} = 0, \quad (2.16)$$

así que sustituyendo en (2.15) y tomando los elementos de  $T^\mu_\nu$  a partir de (B.4)

$$\begin{aligned} -\partial_t \rho + \Gamma^r_{rt} (3T^t_t - T^r_r - T^\theta_\theta - T^\phi_\phi) &= 0, \\ \Rightarrow -\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a} (-3\rho - 3p) &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De esta forma se llega a la *ecuación de conservación local de materia-energía*

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.18)$$

la cual debe ser cumplida por todos los fluidos presentes en el Universo. Como se mencionó al inicio de esta sección, esta expresión no es de forma estricta una “ecuación de conservación” dado que la densidad de materia-energía no se conserva en general en un espacio-tiempo curvo.

### 2.4.2. Ecuaciones de estado

El modelo más sencillo que se ha propuesto nos dice que los fluidos relevantes en cosmología presentan una *ecuación de estado* muy sencilla que relaciona la presión del fluido con su densidad de energía de forma lineal

$$p = w \rho, \quad (2.19)$$

donde  $w$  es una constante de proporcionalidad adimensional<sup>2</sup>. Se acostumbra llamar a esta expresión *ecuación de estado barotrópica* y cada fluido en el Universo tienen asociado su propia ecuación. Para modelarlas distintas componentes se tiene

<i>tipo de materia</i>	<i>w</i>
Materia bariónica y oscura	0
Radiación	1/3
Constante cosmológica	-1

Para el caso de las componentes de materia bariónica y oscura, se supone que su presión es tan pequeña comparada con su densidad de energía que puede considerarse cero (sin que esto implique que la densidad sea cero). Comúnmente los fluidos que tienen la característica de  $p = 0$  son llamados *polvo*. Para el caso de la energía oscura, si se asume que ésta es la constante cosmológica, entonces se tiene que su ecuación de estado es  $p = -\rho$  (es decir,  $w = -1$ ).

## 2.5. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann permiten estudiar de manera cuantitativa la evolución, composición, geometría y dinámica del Universo. Para deducirlas partimos de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.20)$$

en donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $G$  es la constante gravitacional de Newton,  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento total del Universo y  $T$  la traza de  $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^{mo} + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^\Lambda + \dots, \quad (2.21)$$

y los superíndices “b”, “mo”, “r”, “ $\Lambda$ ” denotan “materia bariónica”, “materia oscura”, “radiación” y “constante cosmológica” respectivamente. Los puntos suspensivos indican cualquier otro tipo de materia o energía adicional que otro modelo pudiera proponer. Vamos a comenzar calculando la componente temporal de (2.20) y para ello tomamos al tensor  $T_{\mu\nu}$  de la forma (B.4), los elementos de la matriz  $g_{\mu\nu}$  como (B.2) y para la traza de  $T$  (B.5) tenemos que sustituyendo en (2.20)

$$R_{tt} = 8\pi G \left[ \rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right] = \frac{8\pi G}{2}(3p + \rho), \quad (2.22)$$

en donde  $\rho$  y  $p$  denotan la densidad y presión *total* de los fluidos que conforman al Universo

$$\rho = \rho_b + \rho_{mo} + \rho_r + \rho_\Lambda + \dots \quad (2.23)$$

$$p = p_b + p_{mo} + p_r + p_\Lambda + \dots \quad (2.24)$$

---

<sup>2</sup>Tomando el valor de la velocidad de la luz  $c = 1$ . La expresión completa es  $p = c^2 w \rho$ .



Finalmente sustituimos (B.20) en (2.22)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho). \quad (2.25)$$

Esta ecuación es llamada *segunda ecuación de Friedmann*. La primera se deriva a partir de la segunda tomando las componentes radiales de la forma (B.2), así que

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[ p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right], \quad (2.26)$$

con  $k$  el factor de la curvatura espacial. Usando nuevamente (B.20) se encuentra que

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}. \quad (2.27)$$

Igualando estas dos expresiones

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p), \quad (2.28)$$

y sustituyendo (2.25) en esta última expresión

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) + \frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \\ &= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3p + \rho + 3p), \\ &= \frac{4\pi G}{3}4\rho, \\ \Rightarrow \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si defimos al **parámetro de Hubble** de la forma

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.30)$$

con  $t$  el tiempo cosmológico, la ecuación (2.29) se convierte en la primer ecuación de Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}. \quad (2.31)$$

Existen otras dos formas de expresar esta ecuación. Una de ellas es a través de los *parámetros de densidad*  $\Omega_i$  para cada una de las componentes de materia presentes en el Universo

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (2.32)$$

en donde  $\rho_i$  es la densidad de materia-energía de la  $i$ -ésima componente de materia del Universo y  $\rho_{\text{crit}}$  es la *densidad crítica* que a su vez se define como

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.33)$$

la cual proviene de asumir  $k = 0$  en (2.31). Cuando  $\rho = \rho_{crit}$  se dice que el Universo es espacialmente *plano*, si  $\rho > \rho_{crit}$  es cerrado, y si  $\rho < \rho_{crit}$  es abierto ( Cuadro 2.1). Vamos a distinguir el tiempo cósmico  $t$ , así como cualquier otra cantidad cosmológica evaluada en el presente con un subíndice o superíndice cero. Por tanto, el valor presente de la densidad crítica lo representamos como

$$\rho_{crit}^0 \equiv \rho_{crit}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \quad (2.34)$$

donde  $H_0 \equiv H(t_0)$  es la *constante de Hubble*. Usando ahora (2.32) y (2.33) podemos reescribir la ecuación de Friedmann de la siguiente forma. Primero vamos a dividir ambos lados por  $H^2$  e identificamos el factor que corresponde a la densidad crítica

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{crit}} - \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.35)$$

Si definimos al parámetro  $\Omega_k$  que corresponde a la curvatura espacial del Universo como

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.36)$$

y usando también (2.33), la ecuación (2.35) se convierte en

$$1 = \Omega_{total} + \Omega_k, \quad (2.37)$$

con

$$\Omega_{total} \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_b + \Omega_{mo} + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \dots \quad (2.38)$$

Otra forma de expresar la ecuación de Friedmann es uniendo las expresiones (2.31) y (2.37) con la ayuda de la ecuación de conservación de la materia. Primero hay que encontrar la dependencia de la densidad  $\rho_i$  con respecto al factor de escala para cada una de las componentes. Ya que la presión asociada al fluido de materia bariónica es cero, la ecuación de conservación de materia toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b &= 0, & (2.39) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} &= -3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_b}{dt} &= -3\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{b0}}^{\rho_b} d \ln \rho_b &= -3 \int_{a_0}^a d \ln a, \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\rho_b}{\rho_b^0} \right) &= \ln \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \\ \Rightarrow \rho_b(a) &= \frac{\rho_b^0}{a^3}, & (2.40) \end{aligned}$$

donde hemos normalizado al factor de escala de forma que en el presente  $a_0 = 1$ . Ya que para la materia oscura se tiene exactamente la misma expresión que para la bariónica tenemos

$$\rho_{mo}(a) = \frac{\rho_{mo}^0}{a^3}, \quad (2.41)$$


---

con  $\rho_{\text{mo}}^0$  el valor presente de la densidad de la materia oscura. En ocasiones se suele agrupar ambas componentes, materia bariónica y oscura, en una misma expresión, y se suele referir a ella simplemente como “materia” y la denotamos como  $\rho_{\text{M}}(a)$ . Esta se define de la siguiente forma

$$\rho_{\text{M}}(a) \equiv \rho_{\text{b}}(a) + \rho_{\text{mo}}(a), \quad \rho_{\text{M}}^0 \equiv \rho_{\text{b}}^0 + \rho_{\text{mo}}^0, \quad (2.42)$$

con lo que se llega a

$$\rho_{\text{M}}(a) = \frac{\rho_{\text{M}}^0}{a^3}. \quad (2.43)$$

Para la componente de radiación, la ecuación de estado puede calcularse a partir del tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.44)$$

en donde  $F_{\mu\nu}$  es el *tensor de Faraday*<sup>3</sup> cuya traza es

$$T^{\mu}_{\mu} = F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad \Rightarrow \quad T^{\mu}_{\mu} = 0, \quad (2.45)$$

Considerando las ecuaciones (B.5) y (2.45), obtenemos que  $T^{\mu}_{\mu} = 0 = 3p_{\text{r}} - \rho_{\text{r}}$ , así que

$$p_{\text{r}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{r}}. \quad (2.46)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\text{r}}}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{r}} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho_{\text{r}}}\frac{d\rho_{\text{r}}}{dt} &= -4\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_{\text{r}}}{dt} &= -4\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{\text{r}0}}^{\rho_{\text{r}}} d \ln \rho_{\text{r}} &= -4 \int_1^a d \ln a, \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\rho_{\text{r}}}{\rho_{\text{r}}^0} \right) &= \ln \left( \frac{1}{a} \right)^4, \\ \Rightarrow \rho_{\text{r}}(a) &= \frac{\rho_{\text{r}}^0}{a^4}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para el caso de la constante cosmológica se tiene puede relacionarse con la energía de vacío; una especie de densidad de energía característica del espacio libre. Una característica que se debe satisfacer es que debe ser isotrópica, así que su tensor de energía-momento debe comportarse como un invariante de Lorentz bajo transformación de coordenadas. Para el caso local se debe satisfacer que el tensor es proporcional a la métrica  $T_{\mu\nu}^{(\text{vac})} = -\rho_{\text{vac}}\eta_{\mu\nu}$ , ya

---

<sup>3</sup>El tensor de intensidad del campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  se define en términos del cuadripotencial  $A$  como  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  donde  $A_{\mu} = (-\phi, \mathbf{A})$ ,  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente.

que  $\eta$  es el único tensor invariante de tipo (0,2). Cuando generalizamos al caso de cualesquiera sistemas de coordenadas se tiene

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}, \quad (2.48)$$

y comparando con el tensor del fluido perfecto llegamos a una ecuación de estado de la forma  $p_{vac} = -\rho_{(vac)}$ . Sustituyendo esta expresión en (2.18) y substituyendo la etiqueta de vacío por la de una constante cosmológica se obtiene

$$\frac{d\rho_\Lambda}{dt} = 0, \quad (2.49)$$

lo cual implica que la densidad de la constante cosmológica siempre es una constante

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 = \text{cte.} \quad (2.50)$$

Sustituyendo ahora las expresiones (2.40, 2.41, 2.47, 2.50) en la ecuación de Friedmann tenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_b^0}{a^3} + \frac{\rho_{mo}^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \rho_\Lambda^0 \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.51)$$

y dividiendo por  $H_0^2$  e identificando la expresión de la densidad crítica

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left( \frac{\rho_b^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{mo}^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_{crit}^0} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (2.52)$$

Tomando las definiciones del parámetro de densidad y de la curvatura espacial  $\Omega_k^0 \equiv -k/H_0^2$  llegamos a

$$H(a) = H_0 \left( \frac{\Omega_b^0}{a^3} + \frac{\Omega_{mo}^0}{a^3} + \frac{\Omega_r^0}{a^4} + \Omega_\Lambda^0 + \frac{\Omega_k^0}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Para determinar el valor de  $k$  a partir del parámetro de curvatura  $\Omega_k^0$  en el modelo  $\Lambda$ CDM se tiene

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 > 0.$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 = 0.$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_b^0 + \Omega_{mo}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 < 0.$$

Es decir, hallando los valores de  $\Omega_{mo}^0$  y  $\Omega_\Lambda^0$  queda determinada la geometría del Universo.

## 2.6. Un Universo en expansión

### 2.6.1. Descubrimiento de la aceleración

En 1998 un grupo de astrónomos encabezados por Adam G. Riess publicaron un artículo titulado “*Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant*” [11] en el que indicaban la posible expansión acelerada del Universo hoy en día. Este grupo realizó un estudio sobre 50 supernovas tipo Ia que se encontraban a diversas

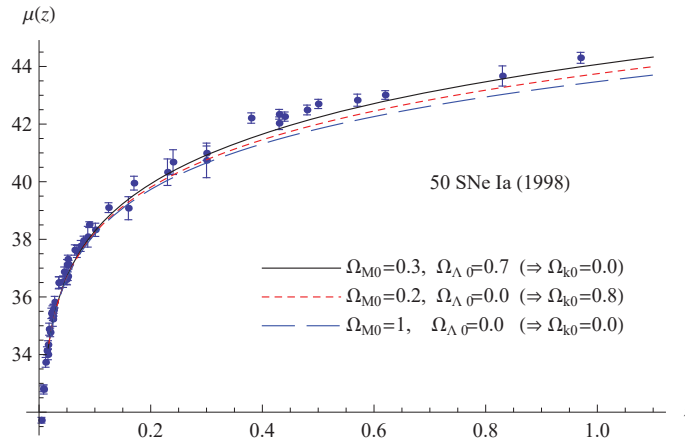


Figura 2.2: Gráfica de los 50 datos de supernovas tipo Ia utilizados por Riess et al. [11], con los que llegaron a la conclusión de la existencia de una aceleración presente del Universo y la posible existencia de una constante cosmológica no nula.

distancias cosmológicas y descubrieron que éstas parecían tener una luminosidad aparente menor de la que predecía el modelo cosmológico más aceptado en aquel entonces:  $\Omega_{M0} = 1$  (con  $\Omega_{r0} = 0.00005$  y  $\Omega_{\Lambda 0} = \Omega_{k0} = 0$ ). Revisaron las posibles razones que atenuaban su luminosidad tales como errores sistemáticos en las mediciones, polvo interestelar, evolución de la metalicidad, lentes gravitacionales, etc. y a pesar de tomar en cuenta estos fenómenos, la luminosidad era de cualquier forma notablemente menor a lo esperado (ver figura 2.2). De aquí se concluyó que el atenuamiento era en realidad debido a que las supernovas se encontraban a una distancia mayor de la esperada, es decir, estaban en promedio 10%–15% más distantes que lo que predecía el modelo. Al realizar un análisis estadístico para determinar y acotar los valores de  $\Omega_{M0}$  y  $\Omega_{\Lambda 0}$  encontraron que el modelo favorecido (i.e., que mejor ajustaba los datos) era el de una constante cosmológica positiva  $\Omega_{\Lambda 0} > 0$ , con un 99.9% de nivel de confianza ( $4.0 \sigma$ ) y un Universo en expansión **acelerada**, con también un 99.9% de confianza; asumiendo solamente que  $\Omega_{M0}$  fuera positiva. Con esto concluyeron que el aparente atenuamiento de las supernovas podría explicarse con la presencia de una constante cosmológica positiva ( $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$ , asumiendo  $\Omega_k = 0$ ) y con un Universo en una etapa de expansión acelerada [11]. Esto despertó gran interés entre la comunidad y generó que diversos grupos se pusieran a trabajar en el tema. Ese mismo año un grupo liderado por Saul Perlmutter realizó un estudio semejante al de Riess y, usando una forma distinta de manejo de datos llega a la misma conclusión: un Universo en expansión acelerada y la presencia de una constante cosmológica con contribución del orden de  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$  [12, 13].

Por la parte teórica se han propuesto una gran cantidad de modelos para explicar las observaciones de manera satisfactoria y hasta el momento todos lo hacen de manera parcial (mostrando aspectos incomprendidos de la teoría), o abriendo nuevos problemas. Entre todos los modelos destaca “ $\Lambda$ CDM” (*Lambda Cold Dark Matter*), el cual como vimos antes, propone un universo constituido principalmente por materia oscura fría y *constante cosmológica* a manera de energía oscura.

### 2.6.2. El parámetro de desaceleración

En el estudio de la supernovas tipo Ia se ha encontrado que el Universo no sólo se está expandiendo, sino que la rapidez a la cual lo hace está cambiando con el tiempo. El parámetro de desaceleración es una manera de cuantificar esto. Si se considera una expansión de Taylor del factor de escala alrededor de la época actual

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.54)$$

Dividiendo por  $a(t_0)$  y tomando coeficiente de  $(t - t_0)$  como el parámetro de Hubble actual, podemos reescribir

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.55)$$

siendo  $q(t)$  el parámetro de desaceleración

$$q_0(t) = -\frac{a(t_0)a''(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (2.56)$$

En términos de  $q(t)$  se tiene

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) < 0 \quad \text{Expansión } \textit{acelerada} \text{ del Universo.}$$

$$\ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{Expansión } \textit{desacelerada} \text{ del Universo.}$$

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble

$$H(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Expansión} \text{ del Universo.}$$

$$H(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Contracción} \text{ del Universo.}$$

## 2.7. Expansión acelerada del Universo

Se acostumbra escribir al corriente al rojo gravitacional como

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (2.57)$$

y con la ayuda del parámetro de desaceleración (2.56) reescribimos al factor de Hubble como

$$H(z) = H_0 \exp\left(\int_0^z [1 + q(z')] d \ln(1 + z')\right). \quad (2.58)$$

Definimos la distancia de luminosidad

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (2.59)$$

con  $L$  la luminosidad absoluta de la fuente y  $F$  el flujo de fotones medido por un observador, como una medición de distancias en astronomía la cual se basa en la diferencia entre la magnitud absoluta y aparente de un objeto astronómico, ya que la magnitud aparente se ve

afectado por la curvatura del espacio-tiempo, el correimiento al rojo de fotones y la dilatación del tiempo. Empleando (2.58), se tiene que

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \exp\left(-\int_0^{z'} [1+q(z')] d\ln(1+z')\right) dz', \quad (2.60)$$

en donde hemos asumido un Universo plano. Haciendo una expansión de  $q(z)$  alrededor de  $z = 0$  a primer orden

$$q(z) = q_0 + z \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0}, \quad (2.61)$$

podemos calcular el valor que el parámetro de desaceleración tiene hoy en día,  $q_0 \equiv q(z=0)$ , y por otro lado  $(dq/dz)|_{z=0}$  indicará la evolución de  $q(z)$ . Con esto se podrá investigar el signo de  $q_0$  y si ha habido transiciones en el pasado a partir del signo de  $(dq/dz)|_{z=0}$ . Tomando en cuenta la expansión (2.61), la expresión (2.60) resulta

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{1+q_0-q'_0} e^{z'q'_0}}, \quad (2.62)$$

donde  $q'_0 \equiv (dq/dz)|_{z=0}$ . Del análisis estadístico usando los datos de supernova Ia se encuentra que las mejores estimaciones son:

$$q_0 = -0.7432, \quad \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0} = 1.6344. \quad (2.63)$$

Observe cómo  $q_0 < 0$ , lo cual significa que el Universo tiene una expansión *acelerada* hoy en día. Además,  $dq/dz|_{z=0} > 0$  lo cual sugiere un periodo de desaceleración en el pasado del Universo, debido a que la función  $q(z)$  es una recta bajo la aproximación lineal  $q(z) = q_0 + z(dq/dz)|_{z=0}$ , y si  $dq/dz|_{z=0} > 0$  (con  $q_0 < 0$ ) implica entonces que  $q(z)$  fue positiva para algún  $z > 0$  (en algún momento en el pasado) en particular.

### 2.7.1. Transición desaceleración - aceleración en el pasado

Los datos de SNe Ia dan evidencia que el Universo se expande aceleradamente hoy en día y sugieren que hubo un periodo de desaceleración previo al de aceleración presente. La transición entre un periodo previo de desaceleración seguido de un periodo acelerado sucedería cuando  $q(z_t) = 0$ , donde  $z_t$  indica el valor de redshift cuando la transición sucede. Usando nuevamente la aproximación lineal de  $q(z)$  en (2.61) se tiene

$$\begin{aligned} q(z_t) &= 0 = q_0 + q'_0 z_t, \\ \Rightarrow z_t &= -\frac{q_0}{q'_0}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

en donde  $q'_0 \equiv (dq/dz)|_{z=0}$ . Al evaluar  $q(z_t)$  en los valores de las mejores estimaciones para  $(q_0, q'_0)$  se obtiene  $z_t = 0.442$ , lo cual indica que hubo una transición entre desaceleración - aceleración y que ésta sucedió muy probablemente a un redshift de  $z_t = 0.442$ .

### 2.7.2. El problema de la coincidencia cósmica

Este es uno de los problemas que tiene el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM que más ha despertado interés entre la comunidad. De acuerdo a las predicciones de  $\Lambda$ CDM, la densidad de energía oscura hoy en día es del mismo orden que el de la densidad de materia (oscura + bariónica). Es decir, de todos los posibles valores que estas densidades podría valer hoy en día, resulta que estamos viviendo justamente en una época en la cual ambas parecen tener casi el mismo valor. Como se mencionó anteriormente, usando datos observacionales en combinación con  $\Lambda$ CDM se encuentra que los parámetros de densidad de constante cosmológica y de materia oscura + bariónica, hoy en día son  $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0.73$  y  $\Omega_{M0} \simeq 0.27$ . La figura 2.3 muestra la evolución de los parámetros de densidad, en función del factor de escala, donde las relaciones son  $\Omega_M(a) \equiv \rho_M(a)/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{M0}/a^3$  y  $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{\Lambda 0} = \text{constante}$ . Observe cómo cuando  $a = 1$ , los valores de  $\Omega_\Lambda$  y  $\Omega_M$  son muy cercanos en comparación a la diferencia de valores en tiempos pasados del Universo.

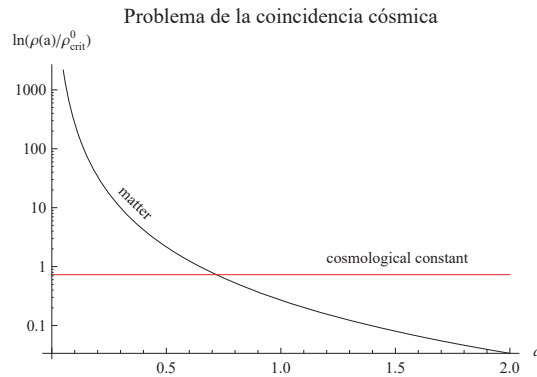


Figura 2.3: Gráficas del logaritmo para materia (oscura + bariónica) y energía oscura como constante cosmológica.



# Capítulo 3

## Sistemas dinámicos

El objetivo de la teoría de sistemas dinámicos es estudiar los modelos de evolución de fenómenos naturales y así representar su evolución en el espacio fase, en donde el conocimiento de ciertos objetos geométricos resulta clave para la comprensión del problema. Esto da lugar a modelos matemáticos que se escriben en términos de ecuaciones diferenciales, así que en sentido amplio, lo que hacemos es determinar la estructura del conjunto de soluciones que representan al sistema. Se dará una descripción de los teoremas más importantes de la teoría, así como de la formulación Hamiltoniana de sistemas dinámicos, la cual es pieza clave para el seguimiento de esta tesis.

### 3.1. Sistemas lineales

Comenzamos con una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad (3.1)$$

en donde  $A$  una matriz  $n \times n$ ,  $\vec{x}$  un vector de  $\mathbb{R}^n$ , y

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Puede hallarse que la solución de este sistema junto con una condición inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  está dada por

$$\vec{x}(t) = x_0 e^{At}, \quad (3.3)$$

con  $e^{At}$  una matriz  $n \times n$ . A partir de este momento y hasta el final del capítulo, vamos a escribir los vectores sin flecha  $x$  y como vectores columna.

#### 3.1.1. Sistemas lineales desacoplados

Consideremos un sistema de ecuaciones desacoplado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

el cual puede ser escrito de forma matricial como

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

De manera general, si la matriz es diagonal el sistema se reducirá a un sistema lineal desacoplado cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= C_2 e^{-2t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definimos ahora el *retrato de fase* como una representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico en donde cada curva representa una condición inicial diferente, en donde la configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores, repulsores, puntos silla, etc. Un gráfico de un retrato de fases de un sistema dinámico representa las trayectorias del sistema con flechas y sus estados de equilibrio estable e inestable con puntos. Vamos a mencionar que un sistema dinámico definido por sistema de ecuaciones tipo (3.1) puede ser visto como un mapeo  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por la solución  $x(t, c)$  dado por

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} c, \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Teorema fundamental de los sistemas lineales

Para poder demostrar este teorema es necesario calcular la derivada de la función exponencial  $e^{At}$  usando la noción de convergencia uniforme.

**Teorema.** Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}. \quad (3.8)$$

**Demostración:** Sea  $A$  es una matriz  $n \times n$ , se tiene que para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{A(t)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{A(t)} \frac{[e^{A(h)} - I]}{h} \\ &= e^{A(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A + \frac{A^2 h}{2} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= A e^{At}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.10)

La última igualdad se obtiene gracias a que  $e^{Ah}$  converge uniformemente para  $|x| \leq 1$  y es posible intercambiar el orden de los límites.

**Teorema fundamental de los sistemas lineales.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Se tiene que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.11}$$

tiene una única solución dada por

$$x(t) = e^{A(t)} x_0.\tag{3.12}$$

**Demostración:** Para la existencia de la solución usamos el teorema anterior

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} e^{At} x_0 = A e^{At} x_0 = Ax(t),\tag{3.13}$$

para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Además,  $x(0) = I x_0 = x_0$ , así que  $x(t) = e^{A(t)} x_0$  es solución del sistema. Para la unicidad vamos a tomar  $y(t) = e^{-At} x(t)$  como solución de (3.11), así que

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -A e^{-At} x(t) + A e^{-At} \dot{x}(t) \\ &= -A e^{-At} x(t) + A e^{-At} Ax(t) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{3.14}$$

para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , por lo que  $y(t)$  debe ser una constante. Si tomamos ahora  $t = 0$ , puede verse que  $y(t) = x_0$  y por lo tanto toda solución de (3.11) está dada por  $x(t) = A e^{At}$ ,  $y(t) = e^{At} x_0$ .

### 3.1.3. Teoría de la estabilidad

Vamos a definir 3 subespacios importantes en el estudio de los sistemas lineales: el subespacio estable, el inestable y el centro. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con  $k$  eigenvalores negativos  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ , y  $(n - k)$  eigenvalores negativos diferentes  $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ . Sea ahora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto de eigenvectores, se dice que los subespacios *estable*  $E^s$  e *inestable*  $E^u$  se generan a partir de  $\{v_1, \dots, v_k\}$  y  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  respectivamente. Si la matriz  $A$  tiene sólo eigenvalores imaginarios, entonces también existe el subespacio *centro*  $E^c$ .

Vamos a tomar un sistema del tipo (3.1) y con  $w_j = u_j + iv_j$  un eigenvector general de  $A$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda_j = a_j + ib_j$ . Notemos que si  $b = 0$ , entonces  $v_j = 0$ . Tomando  $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  (con  $n = 2m - k$ ).

**Definición:** Sea  $\lambda_j = a_j + ib_j$ ,  $w_j = u_j + iv_j$  y  $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  (con  $n = 2m - k$ ). Se tiene que

$$\begin{aligned}E^s &= \text{generado por } \{u_j, v_j | a_j < 0\} \\ E^u &= \text{generado por } \{u_j, v_j | a_j > 0\}\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$E^c = \text{generado por } \{u_j, v_j | a_j = 0\},\tag{3.16}$$

es decir,  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$  generados por las partes real e imaginaria de los eigenvectores generalizados  $w_j$  correspondientes a los eigenvalores  $\lambda_j$  con la parte real negativa, positiva e igual a cero respectivamente.

## 3.2. Sistemas no lineales: Teoría local

Vamos a comenzar con una ecuación diferencial del tipo

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.17}$$

en donde  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Se mostrará más adelante que bajo ciertas condiciones el sistema (3.17) tiene una única solución para cada  $x_0 \in E$  definido sobre un intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ . En general no es posible resolver un sistema de ecuaciones de este tipo, sin embargo, una gran cantidad de información cualitativa del comportamiento local puede ser obtenida con las herramientas que estudiaremos en este apartado. En particular, vamos a revisar el teorema de Hartman-Grobman el cual afirma que es posible tener un homeomorfismo alrededor del equilibrio entre las trayectorias del sistema no lineal y las trayectorias del sistema linealizado.

### 3.2.1. Conceptos y definiciones

Considerando un sistema de ecuaciones diferenciales *autónomo*

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.18}$$

como el opuesto a un *no autónomo*

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{3.19}$$

en donde la función  $f$  puede o no depender de la variable independiente  $t$ . Sin embargo, todo sistema no autónomo con  $x \in \mathbb{R}^n$  puede ser escrito como un sistema autónomo tomando  $x_{n+1} = t$  y  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . Vamos a comenzar calculando la solución de (3.18) por medio de

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) ds, \tag{3.20}$$

en donde  $f$  es una una función diferenciable.

**Definición:** La función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , si existe una transformación  $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$  que satisface

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h}{|h|} = 0, \tag{3.21}$$

en donde  $Df(x_0)$  es llamada la *derivada direccional* de  $f$  a lo largo de  $x_0$ .

**Teorema.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , las derivadas parciales  $\partial f_i / \partial x_j$ , con  $i, j = 1 \dots n$  existen en  $x_0$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j. \tag{3.22}$$

En otras palabras, si  $f$  es diferenciable, la derivada  $Df$  está dada por la matriz Jacobiana.

**Demostración.**

Principios de Análisis Matemático, Walter Rudin, páginas 215-217.

**Definición:** Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable sobre  $E$ . Entonces,  $f \in C^1(E)$  si la derivada  $Df : E \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$  es continua sobre  $E$ . Es decir, las derivadas parciales  $\partial f_i / \partial x_j$ , con  $i, j = 1 \dots n$  existen y son continuas sobre  $E$ .

### 3.2.2. Teorema fundamental de existencia y unicidad

En esta sección vamos a establecer el TFEU para un sistema autónomo bajo la suposición que  $f \in C^1(E)$ . Asimismo probaremos el teorema de Hartman-Grobman y el teorema de la variedad estable.

**Definición.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface la *condición de Lipschitz* sobre  $E$ , si existe una constante positiva  $K$ , tal que para todo  $x, y \in E$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \quad (3.23)$$

La función  $f$  se dice que es *localmente Lipschitz* sobre  $E$  si para todo  $x_0 \in E$  existe una  $\epsilon$ -vecindad de  $x_0$ ,  $N_\epsilon(x_0) \subset E$  y una constante  $K_0$  tal que para todo  $x, y \in N_\epsilon(x_0)$

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|. \quad (3.24)$$

**Lema.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces, si  $f \in C^1(E)$ ,  $f$  es localmente Lipschitz sobre  $E$ .

**Demostración:** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 71 y 72.

**Teorema fundamental de existencia y unicidad.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y  $f$  una función diferenciable. Entonces, existe un número  $a > 0$  tal que el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

tiene una solución única  $x(t)$  en el intervalo  $[-a, a]$ .

**Demostración:** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 73 - 75.

### 3.2.3. Dependencia de las condiciones iniciales

Vamos a investigar la dependencia de la solución para el problema con valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= y, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si la ecuación diferencial depende del parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , es decir, si la función  $f(x)$  es reemplazada por  $f(x, \mu)$ , se tiene que la solución  $u(t, y, \mu)$  también depende del parámetro  $\mu$ .

Hablando de forma aproximada, la dependencia de la solución  $u(t, y, \mu)$  sobre la condición  $y$  así como del parámetro  $\mu$  es continua.

**Teorema. Dependencia de la condición inicial** Sea  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y se asume que  $f \in C^1(E)$ . Entonces existe un número  $a > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in N_\epsilon(x_0)$  el problema con valor inicial (3.26) tiene una única solución  $u(t, y)$  con  $u \in C^1(G)$  y  $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Además, para todo  $y \in N_\delta(x_0)$  se tiene que  $u(t, y)$  es al menos dos veces diferenciable para todo  $t \in [-a, a]$ .

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 80 -82.

**Teorema. Dependencia de los parámetros.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  con  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  y  $f \in C^1(E)$ . Se tiene entonces que existe un  $a > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in N_\delta(x_0)$  y  $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ , el problema con valor inicial (3.26) tiene una única solución  $u(t, y, \mu)$ , con  $u \in C^1(G)$ .

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, página 83.

### 3.2.4. Intervalo máximo de existencia

Hemos visto en la sección anterior que la solución para una ecuación del tipo (3.25) si existe es única en un intervalo  $(-a, a)$ . En esta sección vamos a ver que el sistema tiene una solución  $x(t)$  definida en un intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta)$ . Además, si  $\beta$  es finito y existe el límite

$$x_1 = \lim_{\beta \rightarrow \beta^-} x(t),$$

entonces  $x_1 \in \dot{E}$ , siendo  $\dot{E}$  la frontera de  $E$ . Cabe mencionar que la frontera de un conjunto abierto  $E$  viene dada por  $\dot{E} = \tilde{E} \sim E$ , en donde  $\tilde{E}$  denota la clausura de  $E$ .

**Teorema.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f \in C^1(E)$ . Entonces, para todo  $x_0 \in E$  existe un intervalo máximo  $(\alpha, \beta)$  sobre el cual (3.25) tiene una solución única  $x(t)$ .

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 89, 90.

**Definición.** El intervalo  $(\alpha, \beta)$  es llamado *intervalo máximo de existencia* de la solución  $x(t)$  para el sistema (3.25).

### 3.2.5. Flujo definido por una ecuación diferencial

En la sección 3.1 definimos el flujo de un sistema de ecuaciones por medio del mapeo  $\phi_t = e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de un sistema lineal  $\dot{x} = Ax$ . Se tiene que satisface las propiedades

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= x_0, \\ \phi_s(\phi_t(x)) &= \phi_{s+t}(x), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_t(\phi_{-t}(x)) = x, \tag{3.28}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Vamos ahora a definir el flujo para un sistema no lineal, el cual también satisface las propiedades anteriores. Comenzamos definiendo al intervalo máximo de existencia

$(\alpha, \beta)$  de la solución  $\phi(t, x_0)$  por  $I(x_0)$ .

**Definición.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f \in C^1(E)$ . Sea  $\phi(t, x_0)$  solución de (3.18) definida en su intervalo máximo de existencia  $I(x_0)$ . Entonces, para todo  $t \in I(x_0)$ , el mapeo  $\phi_t : E \rightarrow E$  está dado por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

es llamado *flujo de la ecuación diferencial*; mientras que  $\phi_t$  es llamado el *flujo del campo vectorial*  $f(x)$ .

### 3.2.6. Linearización

Una forma de comenzar nuestro análisis para un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.29}$$

es determinar sus puntos de equilibrio y cómo describir su comportamiento alrededor de los mismos. A continuación vamos a mostrar que el comportamiento del sistema no lineal en la vecindad de los puntos críticos es determinado por el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.30}$$

en donde  $A = Df(x_0)$ . La función lineal  $Ax = Df(x_0)x$  es llamada la parte lineal de (3.29).

**Definición.** Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de (3.29) si  $f(x_0) = 0$ . Un punto de equilibrio es llamado hiperbólico si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $A = Df(x_0)$  tiene parte real cero, decimos entonces que el sistema (3.30) es la linearización de (3.29) en  $x_0$ . Tomando un desarrollo en serie de Taylor para un punto de equilibrio  $x_0 = 0$

$$f(x) = 0 + Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)x^2 + \dots \tag{3.31}$$

se tiene que  $Df(0)x$  es una buena aproximación para el sistema no lineal  $f(x)$  cerca de  $x = 0$ .

**Definición.** Un punto de equilibrio  $x_0$  del sistema no lineal (3.29) es llamado **sumidero** si todos los eigenvalores de la matriz  $Df(x_0)$  tienen parte real negativa, **fuelle** si los eigenvalores tiene parte real positiva y **silla** si tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y un eigenvalor con parte real negativa.

### 3.2.7. Teorema de la variedad estable

Se trata de uno de los resultados más importantes en la teoría local de sistemas dinámicos, ya que muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico el sistema (3.29) posee una variedad estable ( $S$ ) e inestable ( $U$ ) tangentes a  $E^s$  y a  $E^u$  en  $x_0$ . Ahora, si (3.29) es el flujo del sistema no lineal se tiene que  $S$  y  $U$  son invariantes bajo  $\phi_t$  y se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \forall c \in S \qquad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \forall c \in U.$$

**Definición.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $A, B$  son subconjuntos de  $X$ . Un homeomorfismo  $h$  de  $A$  sobre  $B$  es un mapeo uno a uno y continuo entre  $A$  y  $B$ , tal que  $h : A \rightarrow B$  y  $h^{-1} : B \rightarrow A$  es continua, y se dice que  $A$  y  $B$  son homeomórficas o topológicamente equivalentes.

**Teorema de la variedad estable.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $f \in C^1(E)$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (3.29). Suponga que  $f(0) = 0$  y que  $Df(0)$  tiene  $k$  eigenvalores con parte real negativa y  $n - k$  eigenvalores con parte real positiva. Entonces, existe una variedad diferenciable  $k$ -dimensional  $S$  tangente al subespacio estable  $E^s$  del sistema lineal (3.30) en el origen tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(S) \subset S$  y para todo  $x_0 \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

De igual forma una variedad diferenciable  $(n - k)$ -dimensional  $U$  tangente al subespacio inestable  $E^u$  de (3.30) también en el origen, tal que para todo  $t \leq 0$ ,  $\phi_t(U) \subset U$  para todo  $x_0 \in U$ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 108-111.

**Definición.** Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (3.29). Las variedades estable e inestable se definen por medio de

$$W^s(0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S), \quad W^u(0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U), \quad (3.32)$$

y puede demostrarse que dichas variedades son únicas e invariantes bajo el flujo  $\phi_t$ .

**Teorema de la variedad centro.** Sea  $f \in C^r(E)$ , donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen y  $r \geq 1$ . Suponiendo que  $f(0) = 0$  y que  $Df(0)$  posee  $k$  eigenvalores con parte real negativa,  $j$  eigenvalores con parte real positiva, y  $m = (n - k - j)$  eigenvalores con parte real cero. Entonces, existe una variedad centro  $W^c(0)$  de clase  $C^r$  tangente al subespacio  $E^c$  e invariante bajo  $\phi_t$ .

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 115, 116.

### 3.2.8. El Teorema de Hartman-Grobman

Se trata de otro de los resultados importantes en la teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual nos dice que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$ , el sistema no lineal (3.29) posee la misma estructura que el sistema lineal (3.30) con  $A = Df(x_0)$ .

**Definición.** Dos sistemas autónomos (3.29) y (3.30) son *equivalentes topológicos* en la vecindad del origen si existe un homeomorfismo  $H$  que mapea un subconjunto abierto  $U$  que contiene al origen a un subconjunto abierto  $V$ , y mapea trayectorias de  $U$  a  $V$  preservando la orientación. Si el mapeo preserva también la parametrización del tiempo, entonces los sistemas (3.29) y (3.30) son *conjugados topológicos* en la vecindad del origen.



**Teorema de Hartman-Grobman.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  el cual contiene al origen, sea  $f \in C^1(E)$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema lineal (3.29). Suponiendo que  $f(x) = 0$ , y  $A = Df(0)$  una matriz cuyos eigenvalores no son imaginarios puros, existe un homeomorfismo  $H$  de un subconjunto abierto  $U$  el cual contiene al origen a un subconjunto  $V$  que también contiene al origen, tal que para todo  $x_0 \in U$  y  $t \in I_0 \subset \mathbb{R}$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0). \quad (3.33)$$

Es decir,  $H$  mapea trayectorias de (3.29) en trayectorias en (3.30) en la vecindad del origen y preserva la parametrización.

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 119 - 123.

### 3.2.9. Estabilidad y funciones de Liapunov

Como hemos visto en secciones anteriores, la estabilidad de cualquier punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  de (3.29) está determinada por los eigenvalores  $\lambda_i$  de la matriz  $Df(x)$ . Un punto de equilibrio hiperbólico es asintóticamente estable si y sólo si  $Re(\lambda_i) < 0 \forall i$ , y asintóticamente inestable si se trata de una fuente o un punto silla.

**Definición.** Sea  $\phi_t$  el flujo de la ecuación diferencial (3.29) definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Un punto de equilibrio  $x_0$  es estable si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  y  $t \geq 0$

$$\phi_t(x) \in N_\epsilon(x_0). \quad (3.34)$$

El punto de equilibrio  $x_0$  es asintóticamente estable si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in N_\delta(x_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) \equiv x_0. \quad (3.35)$$

**Teorema.** Si  $x_0$  es un punto de equilibrio estable de (3.29), ningún eigenvalor de  $Df(x_0)$  tiene parte real positiva.

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, página 122.

**Teorema.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$ . Suponga que  $f \in C^1(E)$ ,  $f(x) = 0$  y que existe una función  $V \in C^1(E)$  que satisface  $V(x_0) = 0$  y  $\dot{V}(x) > 0$ , si  $x \neq x_0$ . Entonces,

- Si  $\dot{V}(x) \leq 0$ , para todo  $x \in E$ ,  $x_0$  es un punto de equilibrio estable.
- Si  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in E \sim x_0$ ,  $x_0$  es asintóticamente estable.
- Si  $\dot{V}(x) > 0$ , para todo  $x \in E \sim x_0$ ,  $x_0$  es asintóticamente estable.

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 130,131.

### 3.2.10. Sistemas Hamiltonianos

En esta sección vamos a estudiar sistemas que aparecen en problemas físicos cuando utilizamos una formulación Hamiltoniana.

**Definición.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{2n}$  y sea  $H \in C^2(E)$ , con  $H = H(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Un sistema de la forma

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (3.36)$$

es llamado sistema Hamiltoniano con  $n$  grados de libertad sobre  $E$ . Una característica importante de estos sistemas es que la energía se conserva a lo largo de las trayectorias.

**Teorema de la conservación de la energía.** La energía total de un sistema Hamiltoniano  $H(x, y)$  es una constante.

**Demostración.** La derivada total del Hamiltoniano a lo largo de una trayectoria  $x(t), y(t)$  se escribe

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \qquad (3.37)$$

Por lo tanto,  $H(x, y)$  es constante a lo largo de cualquier curva que sea solución de (3.29).

**Lema.** Si el origen es un foco para el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = \partial_y H(x, y) \qquad \dot{y} = -\partial_x H(x, y), \qquad (3.38)$$

se tiene que el origen no es estrictamente un máximo o mínimo del Hamiltoniano  $H(x, y)$ . Un foco es un punto asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él. Para que esto suceda los eigenvalores del sistema son complejos conjugados con parte real negativa.

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 154,155.

**Definición.** Un punto crítico del sistema (3.29) en donde  $Df(x_0)$  no posee eigenvalores nulos es llamado *punto crítico no degenerado*, y en caso contrario se denomina *punto crítico degenerado*.

**Teorema.** Todo punto crítico no degenerado del sistema Hamiltoniano (3.38) es un punto silla o un centro; además,  $(x_0, y_0)$  es un punto silla de (3.30) si y sólo si es un punto silla del Hamiltoniano  $H(x, y)$ . En caso de ser un máximo o mínimo local de  $H(x, y)$ , decimos que se trata de un centro.

**Demostración.** Differential Equations and Dynamical Systems, L. Perko, páginas 154,155.

**Definición.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $V \in C^2(E)$ . Un sistema de la forma

$$\dot{x} = -\text{grad } V(x), \qquad (3.39)$$

es llamado sistema gradiente de  $E$ . Nótese que los puntos críticos del sistema gradiente corresponden a punto críticos de la función  $V(x)$ , con  $\text{grad } V(x) = 0$ , mientras que los puntos en donde  $V(x) \neq 0$  son llamados puntos regulares.

**Definición.** Sea  $x_0$  un punto crítico de  $V(x)$ , el cual es un mínimo estricto. La función  $V(x) - V(x_0)$  es llamada *función de Liapunov* del sistema en la vecindad de  $x_0$ .

**Teorema.** En los puntos regulares de  $V(x)$  las trayectorias del sistema gradiente (3.39) cruzan las superficies de nivel de  $V(x) = cte$ . Los puntos críticos estrictos de la función  $V(x)$  son puntos de equilibrio asintóticamente estables.

**Definición.** Todo punto crítico no degenerado del sistema gradiente (3.39) sobre  $\mathbb{R}^2$  es un punto silla o un nodo, además, si  $(x_0, y_0)$  es un punto silla de la función  $V(x, y)$ , es un punto silla de (3.39). Por otro lado, si  $(x_0, y_0)$  es un máximo o mínimo estricto de  $V(x, y)$ , decimos que es un punto inestable o estable de (3.39) respectivamente.

### 3.2.11. Estabilidad estructural

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$x' = f(x), \tag{3.40}$$

con  $x \in E \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f$  una función clase  $C^1$  con norma

$$\|f\|_1 = \sup\|f(x)\| + \sup\|Df(x)\|, \tag{3.41}$$

mientras que para el caso que  $K \subset E$  sea un subconjunto compacto, la norma sobre  $K$  será

$$\|f\|_1 = \sup\|f(x)\| + \sup\|Df(x)\|. \tag{3.42}$$

**Definición:** Un campo vectorial  $f$  se dice *estructuralmente estable* si existe un  $\epsilon > 0$  tal que para toda  $g \in C^1(E)$  con  $\|f - g\|_1 < \epsilon$ . Se dice entonces que existe un homeomorfismo  $H : E \rightarrow E$  tal que preserva la orientación y mapea trayectorias de  $x' = f(x)$  a  $x' = g(x)$ . A manera de resumen podemos decir:

- Los puntos de equilibrio hiperbólicos se preservan bajo pequeñas perturbaciones; además, el número de eigenvalores con parte real negativa permanece inalterado.
- Las órbitas hiperbólicas también se conservan, además de que la dimensión de las variedades estables e inestables es invariante. [16]

**Teorema de Peixoto** Sea  $f \in C^1(M)$ , con  $M$  una variedad diferenciable dos dimensional. Entonces,  $f$  es estructuralmente estable sobre  $M$  si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades.

1. El número de puntos críticos y de órbitas cerradas es finito.
2. Todos los puntos críticos son hiperbólicos.
3. No existen órbitas heteroclineas que conecten puntos silla.
4. El conjunto de vectores estructuralmente estables es abierto y denso en  $C^1(M)$ .

**Demostración:** Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra by S.W.Hirsch and S.Smale, páginas 298-301.

**Definición.** Suponga que se tiene una familia de ecuaciones diferenciales del tipo

$$x' = f(x, \lambda_0), \tag{3.43}$$

con  $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  abierto,  $f \in C^1(E)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, si  $x' = f(x, \lambda_0)$  es estructuralmente estable,  $\lambda_0$  es llamado valor de bifurcación.

## Capítulo 4

# Sistemas dinámicos en cosmología

La teoría de sistemas dinámicos es adecuada para determinar los posibles estados (tempranos y tardíos) de los modelos cosmológicos, ya que las ecuaciones que gobiernan al Universo forman un sistema finito de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para nuestro caso, vamos a trabajar el modelo para un sistema compuesto por materia bariónica (B), materia oscura (DM) y energía oscura (DE), en el cual, además de existir la atracción gravitacional usual, se tiene que el sector oscuro presenta una interacción  $Q$  que puede relacionarse con el decaimiento de materia oscura a energía oscura. La idea central es aliviar el problema de la coincidencia cósmica, ya que como vimos en el capítulo 2, es una de las interrogantes que tiene el modelo estándar de la cosmología.

### 4.1. Ecuaciones de movimiento

Partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein vamos a hallar las ecuaciones de movimiento para un modelo de energía oscura interactuante

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^B + T_{\mu\nu}^{DM} + T_{\mu\nu}^{DE}], \quad (4.1)$$

con  $T_{\mu\nu}^i$  el tensor de energía-momento del fluido perfecto. Tomando la identidad de Bianchi

$$\begin{aligned} \nabla^\nu G_{\mu\nu} = \nabla^\nu T_{\mu\nu}^i = 0, \Rightarrow &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{B,R} = 0, \\ &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = F_\mu, \\ &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = -F_\mu, \end{aligned} \quad (4.2)$$

siendo  $F_\mu = F_\mu(\rho_{DM}, \rho_{DE}, U^\alpha, \nabla_\alpha U^\alpha, \nabla_\alpha \rho_{DM})$  el cuadrivector de interacción. Ahora, proyectando sobre un vector  $U^\mu$  perpendicular a nuestra hipersuperficie podemos definir al término de interacción  $Q$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{B,R} = 0, \quad (4.3)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = U^\mu F_\mu \equiv Q, \quad (4.4)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = -U^\mu F_\mu \equiv -Q.$$

Tomando al tensor de fluido perfecto de la forma (2.9) y después de algo de álgebra

$$\begin{aligned} U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}{}^i &= U^\mu \nabla^\nu [T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu} p] \\ &= U^\nu \nabla_\nu \rho_i - (\rho_i + p_i) \nabla_\nu U^\nu, \end{aligned} \quad (4.5)$$

así que para cada componente

$$\begin{aligned} U^\nu \nabla_\nu \rho_{b,r} - (\rho_{b,r} + p_{b,r}) \nabla_\nu U^\nu &= 0 \\ U^\nu \nabla_\nu \rho_i - (\rho_i + p_i) \nabla_\nu U^\nu &= U^\nu F_\nu \equiv Q, \\ U^\nu \nabla_\nu \rho_i - (\rho_i + p_i) \nabla_\nu U^\nu &= -U^\nu F_\nu \equiv -Q. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para el caso de la métrica de FRW (2.18) y usando los valores para  $w$  vistos en la sección 3.2

$$\dot{\rho}_B + 3H\rho_B = 0, \quad (4.7)$$

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = 0, \quad (4.8)$$

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = Q, \quad (4.9)$$

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(1+w)\rho_{DE} = -Q. \quad (4.10)$$

## 4.2. Modelo $\Lambda$ Cold Dark Matter

Como vimos en el capítulo 2,  $\Lambda$ CDM es el modelo estándar de la cosmología gracias al ajuste que presentan sus predicciones con las observaciones. Vamos a comenzar por analizar este modelo con la ayuda de sistemas dinámicos y esto nos servirá a manera de ejemplo para después pasar al caso en donde la interacción  $Q$  es distinta de cero. Reescribiendo las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_B + 3H\rho_B &= 0, \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R &= 0, \\ \dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} &= 0, \\ \dot{\rho}_{DE} &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

puede hallarse de forma sencilla que las soluciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{DM}(a) &= \rho_{DM}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, & \rho_{DM}(a) &= \rho_{DM}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \\ \rho_R(a) &= \rho_R^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4, & \rho_\Lambda(a) &= \rho_\Lambda^0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sustituyendo en la ecuación de Friedmann usando  $3H_0^2/8\pi G \equiv \rho_{crit}^0$  y multiplicando ambos lados de la igualdad por el término  $(a^2/a_0^2 H_0^2)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho_B \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_R \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{DM} \left(\frac{a_0}{a^3}\right)^3 + \rho_\Lambda \right] - \frac{k}{a^2}, & \cdot \left(\frac{a}{H_0 a_0}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho_{crit}^0} \frac{a^2}{a_0^2} \left[ \frac{\rho_B}{a^3} + \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{\rho_{DM}}{a^3} + \rho_\Lambda \right] + \Omega_c^0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
4.2. MODELO  $\Lambda$ COLD DARK MATTER

---

Tomando el cambio de variable  $x \equiv a/a_0$  y  $\tau = H_0 t$ , podemos definir la función  $y = dx/d\tau$

$$y^2 = x^2 \left[ \frac{\Omega_B^0}{x^3} + \frac{\Omega_R^0}{x^4} + \frac{\Omega_{DM}^0}{x^3} + \Omega_\Lambda^0 + \frac{\Omega_C^0}{x^2} \right], \quad (4.14)$$

y de igual forma

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{1}{2}x \left[ \frac{\Omega_B^0}{x^3} + 2\frac{\Omega_R^0}{x^4} + \frac{\Omega_{DM}^0}{x^3} - 2\Omega_\Lambda^0 \right]. \quad (4.15)$$

En este momento tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 \left[ \frac{\Omega_B^0}{x^3} + \frac{\Omega_R^0}{x^4} + \frac{\Omega_{DM}^0}{x^3} + \Omega_\Lambda^0 + \frac{\Omega_C^0}{x^2} \right], \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{1}{2}x \left[ \frac{\Omega_B^0}{x^3} + 2\frac{\Omega_R^0}{x^4} + \frac{\Omega_{DM}^0}{x^3} - 2\Omega_\Lambda^0 \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

así que para hallar los puntos críticos vamos a tomar  $y = dy/d\tau = 0$

$$\Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + 2\frac{\Omega_R^0}{x} - 2\Omega_\Lambda^0 x^3 = 0, \quad (4.17)$$

$$\Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0 + \frac{\Omega_R^0}{x} + \Omega_\Lambda^0 x^3 + \Omega_C^0 = 0. \quad (4.18)$$

Definimos ahora una nueva variable  $\Omega_M^0 \equiv \Omega_B^0 + \Omega_{DM}^0$ , y usando el hecho que  $\Omega_R^0 \sim 0.005$ , podemos despreciar éste término y escribir al sistema como

$$\Omega_m^0 - 2\Omega_\Lambda^0 x^3 = 0, \quad \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 x^3 + \Omega_C^0 x^2 = 0. \quad (4.19)$$

(i) Para el caso de un universo plano  $\Omega_C = 0$  tenemos

$$2\Omega_M^0 - \Omega_\Lambda^0 x^3 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \left( \frac{\Omega_m^0}{2\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3}. \quad (4.20)$$

(ii) Para el caso con curvatura

$$\begin{aligned} \Omega_M^0 = 2\Omega_\Lambda^0 &\quad \Rightarrow \quad 3\Omega_\Lambda^0 x^3 + \Omega_C^0 x = 0, \\ x [3\Omega_\Lambda^0 x^2 + \Omega_C^0] = 0 &\quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{-\Omega_C^0}{3\Omega_\Lambda^0}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

lo cual sólo es válido para  $\Omega_C^0 < 0$ . Vamos a establecer algunas relaciones entre la forma del potencial  $V$  y la localización de puntos críticos con los sistemas dinámicos de tipo Newtoniano  $\ddot{a} = -\frac{\partial V}{\partial a}$

- Si los puntos críticos  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -\partial V/\partial x$  se encuentran sobre el eje  $x$ , se trata de un universo estático  $y_0 = 0$ ,  $x = x_0$ .
- $(x_0, 0)$  es un punto crítico si y sólo si es un punto de retorno para el potencial  $V(x) = 0$ .
- Si el punto  $(x_0, 0)$  es un máximo local de  $V(x)$ , se trata de un punto silla.

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.2. MODELO  $\Lambda$ CDM DARK MATTER**

---

- Si el punto  $(x_0, 0)$  es un mínimo local de  $V(x)$ , se trata de un punto centro.
- Si el punto  $(x_0, 0)$  es un punto de inflexión  $V(x)$ , se trata de un punto singular.
- El espacio-fase del potencial es simétrico respecto a  $x$  y es antisimétrico respecto a  $y$ .

Todas estas propiedades son consecuencia del teorema de Hartman-Grobman, así que para caracterizar a los puntos críticos necesitamos determinar los eigenvalores de la matriz del sistema. Tomando la ecuación  $\lambda^2 + \det A = 0$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix}_{(x_0,0)}$$

la matriz de linearización. Por lo tanto, en caso de tener un máximo encontraremos que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  serán reales y de signo contrario, pero en caso de tener un mínimo para el potencial  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  serán imaginarios puros. Para  $\Lambda$ CDM se tiene  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\Omega_{m0}^0}{x_0^3} + \Omega_{\Lambda}^0}$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{\Omega_{m0}^0}{x_0^3} + \Omega_{\Lambda}^0}$ , y las gráficas del potencial y el espacio-fase se muestran en la figura 4.1

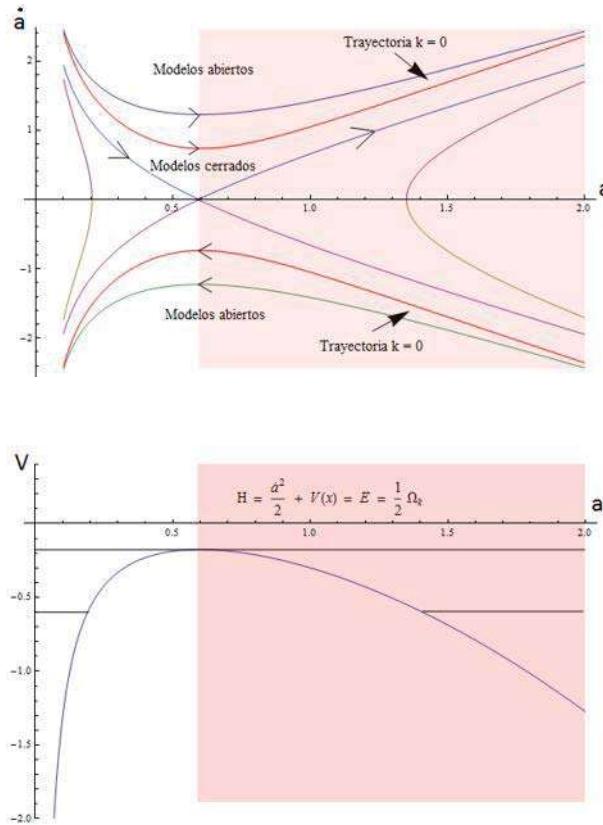


Figura 4.1: Espacio-fase y potencial para el caso  $\Lambda$ CDM en donde se muestra un universo acelerante en términos del potencial. La parte sombreada del gráfico está relacionada con la región acelerante.



### 4.3. Modelo sector oscuro interactuante

Las observaciones recientes nos dicen que las componentes principales del Universo 95 – 96 % son dos entidades a las que llamamos energía y materia oscura, de las cuales se conoce muy poco y son esenciales para tener una teoría consistente con las ecuaciones de campo de Einstein. En el caso de materia oscura se sabe que se trata de materia no luminosa que forma estructuras e interacciona gravitacionalmente con la materia bariónica. Por otro lado, la energía oscura se trata de un objeto que presenta repulsión gravitacional y se dice que es la responsable de la expansión acelerada.

Ahora bien, ya que no entendemos cómo actúan estas componentes nada nos impide creer que existe alguna interacción no gavitacional entre ellas la cual pueda jugar un papel muy importante al momento de resolver (o aliviar) algunos problemas teóricos. Por ejemplo, puede ser usada para entender el problema de coincidencia cósmica [19], ya que de esta forma tenemos que la densidad de energía oscura ya no es una constante, sino es una función cambiante en el tiempo. Tomando la interacción del sector oscuro de la forma

$$Q = 3H [f(a)\rho_{DE} + g(a)\rho_{DM}], \quad (4.22)$$

podemos separar en dos casos dependiendo si las funciones  $f(a)$  o  $g(a)$  son cero.

#### 4.3.1. Caso $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$ .

Definimos la función  $g(a)$  por medio de

$$g(a) = \frac{Aa + B(1-a)}{Ca + D(1-a)}, \quad (4.23)$$

con  $A, B, C$  y  $D$  constantes a determinar. Tomando los límites especiales

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(a) = \frac{B}{D} \equiv \alpha_{DM}^e \Rightarrow B = \alpha_{DM}^e D, \quad (4.24)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} g(a) = \frac{A}{C} \equiv \alpha_{DM}^0 \Rightarrow A = \alpha_{DM}^0 C, \quad (4.25)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} g(a) = \frac{A-B}{C-D} \equiv \alpha_{DM}^f, \quad (4.26)$$

y con  $E \equiv D/C$  la función está dada por

$$g(a) = \frac{\alpha_{DM}^0 a + E\alpha_{DM}^e(1-a)}{a + E(1-a)}. \quad (4.27)$$

De la relación

$$\lim_{a \rightarrow \infty} g(a) = \frac{\alpha_{DM}^0 a + E\alpha_{DM}^e(1-a)}{a + E(1-a)} = \frac{\alpha_{DM}^0 - E\alpha_{DM}^e}{1-E} \equiv \alpha_{DM}^f, \quad (4.28)$$

tenemos que

$$E = \frac{\alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f}{\alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f}, \quad (4.29)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.3. MODELO SECTOR OSCURO INTERACTUANTE**

---

podemos graficar el denominador como función de  $a$ . Para que este término nunca se anule se exige que  $0 < E < 1$ , así que se tienen dos combinaciones de las  $\alpha$ 's que se estudiarán como subcasos especiales. Estas combinaciones son

$$\alpha_{DM}^e > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^f \quad \text{y} \quad \alpha_{DM}^f > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^e. \quad (4.30)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de conservación para los fluidos, tenemos que para materia y energía oscura

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = 3Hg(a)\rho_{DM}, \quad (4.31)$$

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(1+w)\rho_{DE} = -3Hg(a)\rho_{DM}. \quad (4.32)$$

Vamos a comenzar resolviendo (4.31)

$$\dot{\rho}_{DM} = 3H[g(a) - 1]\rho_{DM} = 3[g(a) - 1]\rho_{DM}\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \quad (4.33)$$

$$\rho_{DM} = A \exp \left[ \int_{a_0}^a \frac{3}{\tilde{a}} [g(\tilde{a}) - 1] d\tilde{a} \right]. \quad (4.34)$$

Usando (4.27) y después de un poco de álgebra

$$\rho_{DM}(a) = \rho_{DM}^0 \cdot e^{3(\alpha_{DM}^e - 1)} \cdot [(1 - E) + E]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e)}. \quad (4.35)$$

Sustituyendo este resultado en (4.32) y con ayuda de fracciones parciales llegamos a una solución del tipo

$$\rho_{DE}(a) = \frac{\rho_{DE}^0}{h(a)} + \frac{1}{h(a)} \int_{a_0}^a h(\tilde{a})f(\tilde{a})d\tilde{a}, \quad (4.36)$$

con  $h(a) = a^{3(1+w)}$  el factor integrante. Finalmente

$$\begin{aligned} \rho_{DE}(a) &= a^{-3(1+w)} \cdot \left[ \rho_{DE}^0 - 3\rho_{DM}^0 \cdot \int_1^a \tilde{a}^{3(\alpha_{DM}^e + w) - 1} \cdot [\alpha_{DM}^f(1 - E)\tilde{a} + E\alpha_{DM}^e] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [(1 - E)\tilde{a} + E]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e) - 1} d\tilde{a} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

**4.3.2.  $f(a) \neq 0$ , y  $g(a) = 0$ .**

Para este caso tenemos que el término de acoplamiento está dado por

$$Q = 3Hf(a)\rho_{DE}, \quad (4.38)$$

en donde  $f(a)$  se define como

$$f(a) = \frac{Ra + S(1 - a)}{Ta + U(1 - a)}. \quad (4.39)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.4. ANÁLISIS CON SISTEMAS HAMILTONIANOS**

---

Tomando los límites como en el caso anterior llegamos a

$$f(a) = \frac{\alpha_{DE}^0 a + F \alpha_{DE}^e (1-a)}{1 + F(1-a)}, \quad (4.40)$$

con  $F = U/T$ . Sustituyendo en (4.32) y siguiendo el procedimiento del caso anterior

$$\rho_{DE}(a) = \rho_{DM}^0 \cdot \exp \left[ -3 \int_{a_0}^a \frac{f(\tilde{a}) + (1+w)}{\tilde{a}} d\tilde{a} \right], \quad (4.41)$$

cuya solución está dada por

$$\rho_{DE}(a) = \rho_{DM}^0 \cdot a^{-3[\alpha_{DE}^e + (1+w)]} \cdot [a(1-F) + F]^{3[\alpha_{DE}^e - \alpha_{DE}^f]}. \quad (4.42)$$

Usando este resultado en (4.31) podemos hallar la densidad de materia oscura

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = 3Hf(a)\rho_{DE}, \quad (4.43)$$

y usando nuevamente factor integrante tenemos que la solución está dada por

$$\begin{aligned} \rho_{DM}(a) &= a^{-3} \left[ \rho_{DM}^0 + 3\rho_{DE}^0 \int_1^a \left[ \tilde{a} \alpha_{DE}^f (1-F) + F \alpha_{DE}^e \right] \cdot a^{-3(\alpha_{DE}^e + w) - 1} \right. \\ &\quad \left. [\tilde{a}(1-F) + F]^{3(\alpha_{DE}^e - \alpha_{DE}^f) - 1} d\tilde{a} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Es importante mencionar que al momento de hacer los cálculos con la ayuda de la computadora (mathematica), es necesario utilizar valores para las  $\alpha$ 's a fin de obtener soluciones manejables. Se llevó a cabo el estudio de 5 casos para cada combinación (4.30), así que se analizaron 20 casos distintos los cuales se presentan a partir de lo obtenido por la computadora.

#### 4.4. Análisis con sistemas Hamiltonianos

Tomando  $\tau \equiv H_0 \cdot t$  y  $x \equiv a/a_0$  podemos reescribir la primer ecuación de Friedmann de la forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \left( \frac{8\pi G}{3} \right) [\rho_B + \rho_R + \rho_{DM} + \rho_{DE}] - \frac{K}{a^2} \Rightarrow \\ &= \frac{\dot{a}^2}{H_0^2} = \left( \frac{8\pi G}{3H_0^2} \right) \cdot a^2 \cdot [\rho_B + \rho_R + \rho_{DM} + \rho_{DE}] - \frac{K}{H_0^2}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

y recordando que  $y = \dot{a}/H_0$  llegamos finalmente a

$$y = x^2 \cdot \left[ \Omega_B^0 \left( \frac{1}{x^3} \right) + \Omega_R^0 \left( \frac{1}{x^4} \right) + \Omega_C^0 \left( \frac{1}{x^2} \right) + \frac{\rho_{DM}(x)}{\rho_{crit}^0} + \frac{\rho_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right]. \quad (4.46)$$

Usando la formulación Hamiltoniana tenemos que el sistema puede ser visto como  $y^2/2 + V(x) = 0$ , así que el potencial viene dado por

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot \left[ \Omega_B^0 \left( \frac{1}{x^3} \right) + \Omega_R^0 \left( \frac{1}{x^4} \right) + \Omega_C^0 \left( \frac{1}{x^2} \right) + \frac{\rho_{DM}(x)}{\rho_{crit}^0} + \frac{\rho_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right], \quad (4.47)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.4. ANÁLISIS CON SISTEMAS HAMILTONIANOS**

---

con las soluciones para la densidad de materia y energía oscura

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho_{DM}(x)}{\rho_{crit}^0} \right] &= \Omega_{DM}^0 \cdot x^{3(\alpha_{DM}^e - 1)} \cdot [(1 - E) \cdot x + E]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e)}, \\ \left[ \frac{\rho_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right] &= x^{-3(1+w)} \left[ \Omega_{DE}^0 - 3 \cdot \int_1^x \tilde{x}^{3(w + \alpha_{DM}^e) - 1} \cdot [\alpha_{DM}^f (1 - E) \tilde{x} + E \cdot \alpha_{DM}^e] [(1 - E) \cdot \tilde{x} + E]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e) - 1} d\tilde{x} \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Escribimos las ecuaciones de movimiento para los fluidos

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\rho_{DM}}{da} \right) + \left( \frac{3}{a} \right) \cdot \rho_{DM} &= \left( \frac{3}{a} \right) \cdot g(a) \cdot \rho_{DM} \\ \Rightarrow \left( \frac{d\rho_{DM}}{dx} \right) &= \left( \frac{3}{x} \right) \cdot [g(x) - 1] \cdot \rho_{DM} \\ \left( \frac{d\rho_{DE}}{da} \right) + \left( \frac{3}{a} \right) \cdot (1 + w) \cdot \rho_{DE} &= - \left( \frac{3}{a} \right) \cdot g(a) \cdot \rho_{DM} \\ \Rightarrow \left[ \frac{d\rho_{DE}}{dx} \right] &= \left( \frac{-3}{x} \right) \cdot [g(x) \cdot \rho_{DM} + (1 + w) \cdot \rho_{DE}], \end{aligned} \quad (4.49)$$

y tomando la adición de ambos términos llegamos a

$$\left( \frac{d\rho_{DM}}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_{DE}}{dx} \right) = - \left( \frac{3}{x} \right) \cdot [\rho_{DM} + (1 + w) \cdot \rho_{DE}]. \quad (4.50)$$

De esta forma, tenemos que la segunda ecuación de Friedmann se escribe

$$\begin{aligned} \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) &= - \left( \frac{4\pi G}{3} \right) \cdot [\rho_B + \rho_R + \rho_{DM} + \rho_{DE} + 3\{P_R + P_{DE}\}] \\ &= - \left( \frac{4\pi G}{3} \right) \cdot [\rho_B + 2\rho_R + \rho_{DM} + (1 + 3w) \cdot \rho_{DE}], \\ \left( \frac{d^2x}{d\tau^2} \right) &= -\frac{1}{2}x \cdot \left[ \Omega_B^0 \left( \frac{1}{x^3} \right) + 2\Omega_R^0 \left( \frac{1}{x^4} \right) + \frac{\rho_{DM}(x)}{\rho_{crit}^0} + (1 + 3w) \cdot \frac{\rho_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Derivando el potencial

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dV(x)}{dx} \right] &= - \left( \frac{2x}{2} \right) \cdot \left[ \Omega_B + \Omega_R + \Omega_C + \frac{\rho_{DM}(x)}{\rho_{crit}^0} + \frac{\rho_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right] - \\ &\quad - \left( \frac{x^2}{2} \right) \cdot \left[ -\frac{3\Omega_B^0}{x^4} - \frac{4\Omega_R^0}{x^5} - \frac{2\Omega_C^0}{x^3} + \frac{\rho'_{DM}(x) + \rho'_{DE}(x)}{\rho_{crit}^0} \right], \\ &= \left( \frac{x}{2} \right) \cdot \left[ \Omega_B + 2 \cdot \Omega_R - \frac{2\rho_{DM} + 2\rho_{DE}}{\rho_{crit}^0} - \frac{x\rho'_{DE} + x\rho'_{DM}}{\rho_{crit}^0} \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

y después de un poco de álgebra

$$\left[ \frac{dV(x)}{dx} \right] = \left( \frac{x}{2} \right) \cdot \left[ \Omega_B + 2\Omega_R + \frac{\rho_{DM}}{\rho_{crit}^0} + (1 + 3w) \frac{\rho_{DE}}{\rho_{crit}^0} \right]. \quad (4.53)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.5. ESTUDIO DINÁMICO DEL SECTOR INTERACTUANTE**

---

**4.4.1. Resultados**

Como se mencionó arriba, para obtener la densidad de materia y energía oscura en cada uno de los casos es necesario sustituir valores específicos para las el conjunto de  $\alpha_{DM}^e$ ,  $\alpha_{DM}^0$  y  $\alpha_{DM}^f$  de forma que sea consistente con la restricción  $0 < E < 1$ . En la tabla 1 se muestran las distintas combinaciones que usamos para el análisis de esta tesis

Caso	$\alpha_{DM}^e$	$\alpha_{DM}^0$	$\alpha_{DM}^f$	Caso	$\alpha_{DE}^e$	$\alpha_{DE}^0$	$\alpha_{DE}^f$
1	0.1	0.06	0.04	11	0.11	0.09	0.08
2	0.13	0.09	0.02	12	0.13	0.06	0.01
3	0.11	0.08	0.04	13	0.1	0.05	0.04
4	0.12	0.03	0.01	14	0.12	0.03	0.01
5	0.11	0.1	0.09	15	0.11	0.1	0.09
6	0.06	0.07	0.1	16	0.08	0.09	0.11
7	0.02	0.09	0.13	17	0.01	0.06	0.13
8	0.02	0.08	0.11	18	0.04	0.05	0.1
9	0.02	0.09	0.13	19	0.01	0.03	0.12
10	0.08	0.09	0.1	20	0.09	0.1	0.11

Tabla 1. *Distintas combinaciones para los parámetros  $\alpha_{DM}$  y  $\alpha_{DE}$ .*

Ahora bien, no escribimos la forma explícita de las soluciones por cuestión de espacio, pero se muestran las gráficas tanto del potencial como el diagrama de espacio-fase para algunos casos de cada modelo. Al igual que en el caso  $\Lambda$ CDM, se elimina la componente de radiación al parámetro de densidad crítica actual es muy pequeña. Para el caso de la curvatura, vamos a usar el valor  $k = 0$  ya que según las estimaciones recientes el Universo es prácticamente plano ([7]).

**4.5. Estudio dinámico del sector interactuante**

Vamos a comenzar analizando el caso en donde la función  $f$  se anula, así que

$$g(a) = \frac{a\alpha_{DM}^0 + E\alpha_{DM}^0(1-a)}{a + E(1-a)}, \quad \text{en donde } E = \frac{\alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f}{\alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f}, \quad (4.54)$$

así que las ecuaciones de conservación se escriben de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_B + 3H\rho_B &= 0, \\ \dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} &= Q = 3g(a)H\rho_{DM}, \\ \dot{\rho}_{DE} + 3(1+w)H\rho_{DE} &= -Q = -3g(a)H\rho_{DM}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

en donde  $Q > 0$  representa la transferencia de energía oscura a materia oscura y  $Q < 0$  representa el proceso inverso. A partir de las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\right) [\rho_B + \rho_{DM} + (1+w)\rho_{DE}], \quad (4.56)$$

$$\dot{H} = -4\pi G [\rho_B + \rho_{DM} + \rho_{DE}], \quad (4.57)$$

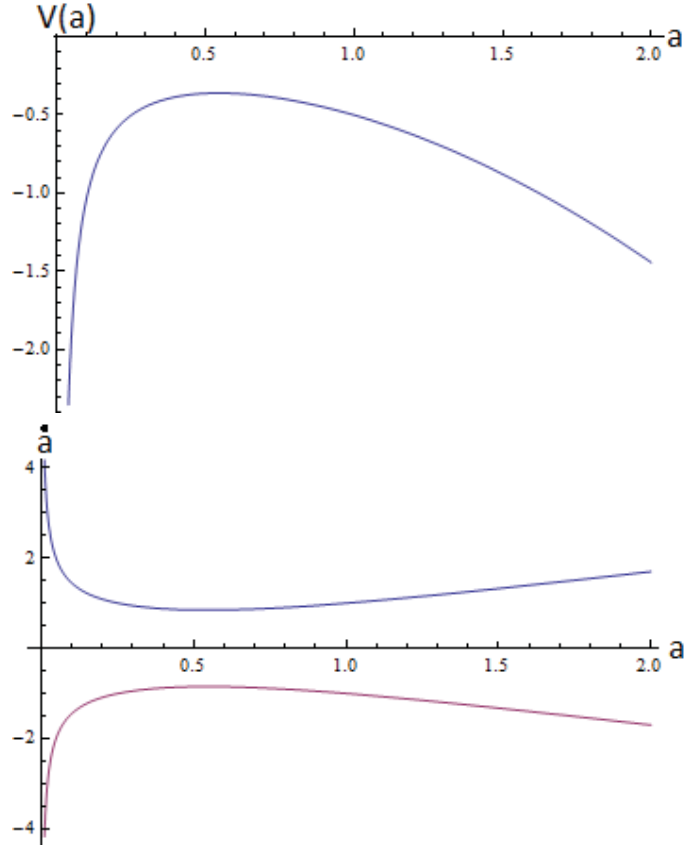


Figura 4.2: Espacio-fase y potencial para el caso 1

y usando regla de la cadena tenemos que para  $i = B, DM$  y  $DE$

$$\dot{\rho}_i = \left( \frac{d\rho_i}{dt} \right) = \left( \frac{d\rho_i}{da} \right) \cdot \left( \frac{da}{dt} \right) = \dot{a} \cdot \left( \frac{d\rho_i}{da} \right) = a \cdot H \cdot \left( \frac{d\rho_i}{da} \right). \quad (4.58)$$

De esta forma es posible reescribir (4.55) como

$$\begin{aligned} aH \left( \frac{d\rho_{DM}}{da} \right) + 3H\rho_{DM} &= 3g(a)H\rho_{DM} \quad \Rightarrow \\ a \left( \frac{d\rho_{DM}}{da} \right) + 3\rho_{DM} &= 3Hg(a)\rho_{DM} \end{aligned} \quad (4.59)$$

y

$$\begin{aligned} aH \left( \frac{d\rho_{DE}}{da} \right) + 3H(1+w)\rho_{DE} &= -3g(a)H\rho_{DM} \quad \Rightarrow \\ a \left( \frac{d\rho_{DE}}{da} \right) + 3(1+w)\rho_{DE} &= -3g(a)\rho_{DM}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Definimos

$$\Omega_{DE} = \left( \frac{8\pi G}{3H^2} \right) \rho_{DE}, \quad \Omega_M = \left( \frac{8\pi G}{3H^2} \right) \rho_M, \quad \tilde{Q} \equiv \left( \frac{8\pi G}{3H^3} \right) Q = 3g(a)\Omega_{DM}, \quad (4.61)$$

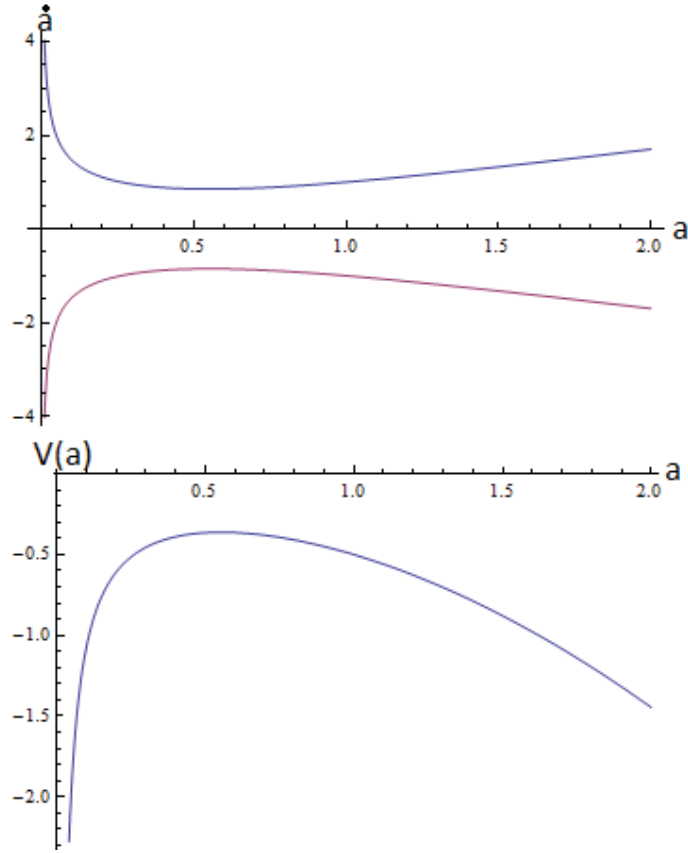


Figura 4.3: Espacio-fase y potencial para el caso 3

en donde ' denota la derivada con respecto a  $N = (-w \ln a)$ . Tomando  $\tilde{Q} = 3g(a)\Omega_{DM}$  y  $\tilde{g} = -g/w$

$$\Omega'_{DM} = -3\Omega_{DM}\Omega_{DE} - \frac{3g(a)}{w}\Omega_{DM} \Rightarrow \Omega'_{DM} = -3\Omega_{DM}\Omega_{DE} - 3\tilde{g}\Omega_{DM}, \quad (4.62)$$

$$\Omega'_{DE} = 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) + \frac{3g(a)}{w}\Omega_{DM} \Rightarrow \Omega'_{DE} = 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) + 3\tilde{g}\Omega_{DM}. \quad (4.63)$$

A partir de la ecuación de Friedmann  $\Omega_B = 1 - \Omega_{DE} - \Omega_{DM}$ , y usando (4.54) para la forma de  $g(a)$  las ecuaciones finalmente se escriben como

$$\begin{aligned} \Omega'_{DM} &= -3\Omega_{DM}\Omega_{DE} + 3\tilde{g}\Omega_{DM}, \\ \Omega'_{DE} &= 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{g}\Omega_{DM}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Este sistema tiene puntos críticos asintóticamente cuando  $a \rightarrow 0$  o cuando  $a \rightarrow \infty$ , y como vimos anteriormente

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{g}(a) = \tilde{g}_{DM}^e, \quad (4.65)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{g}(a) = \tilde{g}_{DM}^f. \quad (4.66)$$

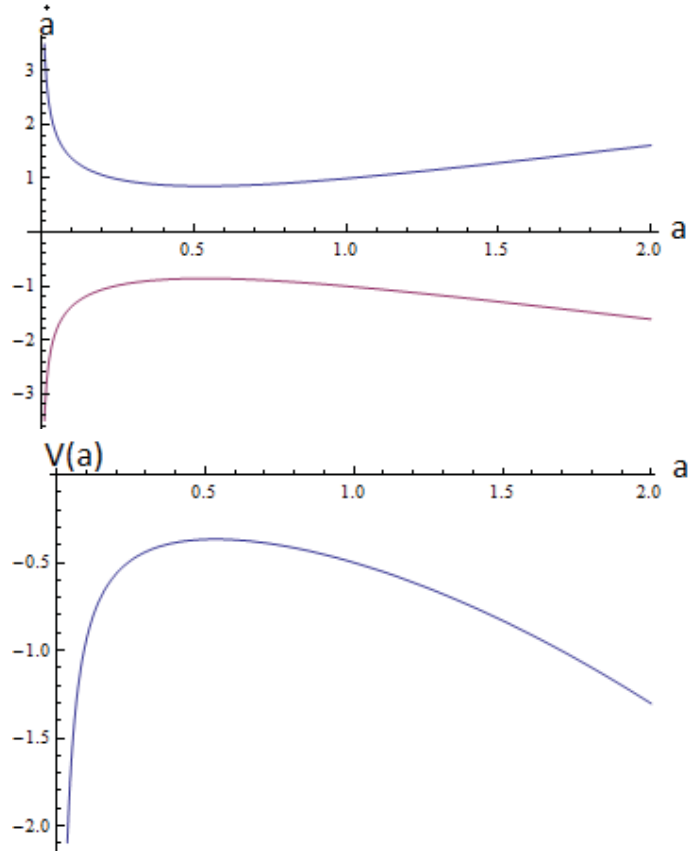


Figura 4.4: Espacio-fase y potencial para el caso 5

Los puntos críticos  $(\Omega_{DM}^*, \Omega_{DE}^*)$  son

$$\begin{aligned} 3\Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - 3\tilde{g}^*\Omega_{DM}^* &= 0, & \Rightarrow & \Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - \tilde{g}^*\Omega_{DM}^* = 0, \\ -3\Omega_{DE}^*\Omega_{DM}^* + 3\tilde{g}\Omega_{DM}^* &= 0 & \Rightarrow & \Omega_{DM}^*[\tilde{g} - 3\Omega_{DE}^*] = 0, \end{aligned} \quad (4.67)$$

es decir,

$$\Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - \Omega_{DE}^*\Omega_{DM}^* = 0, \text{ y } \Omega_{DE}^*[(1 - \Omega_{DE}^*) - \Omega_{DM}^*] = 0. \quad (4.68)$$

El primer punto crítico es  $\Omega_{DE}^* = 0$ , por lo que  $\Omega_{DM}^* = 0$  y  $\Omega_B^* = 1$ . Este es un universo dominado por materia bariónica.

El segundo punto crítico es  $(1 - \Omega_{DE}^* - \Omega_{DM}^*) = 0$ , así que  $\Omega_{DM}^* + \Omega_{DE}^* = 1$ . Este es un modelo compatible con un término de interacción no nulo y satisface  $\Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - \tilde{g}(1 - \Omega_{DE}^*) = 0$ , así que  $\Omega_{DE}^* = \tilde{g}$  (punto A), o  $\Omega_{DE}^* = 1$  (punto B). Para cada caso se tiene que

$$\begin{aligned} \Omega_{DM}^* = 1 - \Omega_{DE}^* = 1 - \tilde{g} &\Rightarrow \Omega_{DM}^* = 1 - \tilde{g} \quad \text{punto A} \\ \Omega_{DM}^* = 1 - \Omega_{DE}^* = 1 - 1 = 0 &\Rightarrow \Omega_{DM}^* = 1 - \tilde{g} \quad \text{punto B} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Para ver la estabilidad de los puntos críticos vamos a tomar la matriz Jacobiana del sistema

$$\begin{pmatrix} \Omega_{DE}' \\ \Omega_{DM}' \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{g}\Omega_{DM} \\ -3\Omega_{DE}\Omega_{DM} + 3\tilde{g}\Omega_{DM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Omega_{DE}, \Omega_{DM}) \\ f_2(\Omega_{DE}, \Omega_{DM}) \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$



**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.5. ESTUDIO DINÁMICO DEL SECTOR INTERACTUANTE**

---

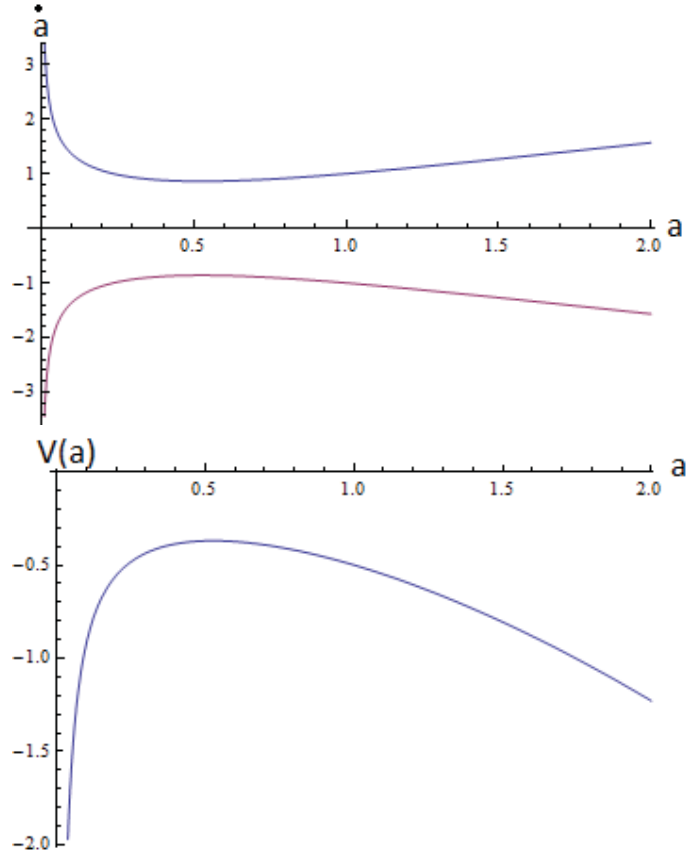


Figura 4.5: Espacio-fase y potencial para el caso 6

es decir

$$\begin{aligned}
 D\vec{f}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Omega_{DE}} & \frac{\partial f_1}{\partial \Omega_{DM}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Omega_{DE}} & \frac{\partial f_2}{\partial \Omega_{DM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1 - \Omega_{DE}) - 3\Omega_{DE} & -3\tilde{g} \\ -3\Omega_{DM} & -3\Omega_{DE} + 3\tilde{g} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (3 - 6\Omega_{DE}) & -6\tilde{g} \\ -3\Omega_{DM} & -3(\tilde{g} - \Omega_{DE}) \end{bmatrix}. \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Tenemos dos puntos críticos (A)  $\Omega_{DE}^* = \tilde{g}$ ,  $\Omega_{DM}^* = (1 - \tilde{g})$  y (B)  $\Omega_{DE}^* = 1$ ,  $\Omega_{DM}^* = 0$ . Sustituyendo en la matriz anterior, tenemos que para (A)

$$D\vec{f}(A) = \begin{bmatrix} 3(1 - 2\tilde{g}) & -3\tilde{g} \\ -3(1 - \tilde{g}) & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.72}$$

y para el punto (B)

$$D\vec{f}(B) = \begin{bmatrix} -3 & -3\tilde{g} \\ 0 & 3(\tilde{g} - 1) \end{bmatrix}. \tag{4.73}$$

Ahora, para hallar los eigenvalores tenemos  $\det [D\vec{f}(A) - \lambda I] = 0$

$$\begin{vmatrix} 3(1 - 2\tilde{g}) - \lambda & -3\tilde{g} \\ -3(1 - \tilde{g}) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3(1 - 2\tilde{g})\lambda - 9\tilde{g}(1 - \tilde{g}) = 0. \tag{4.74}$$

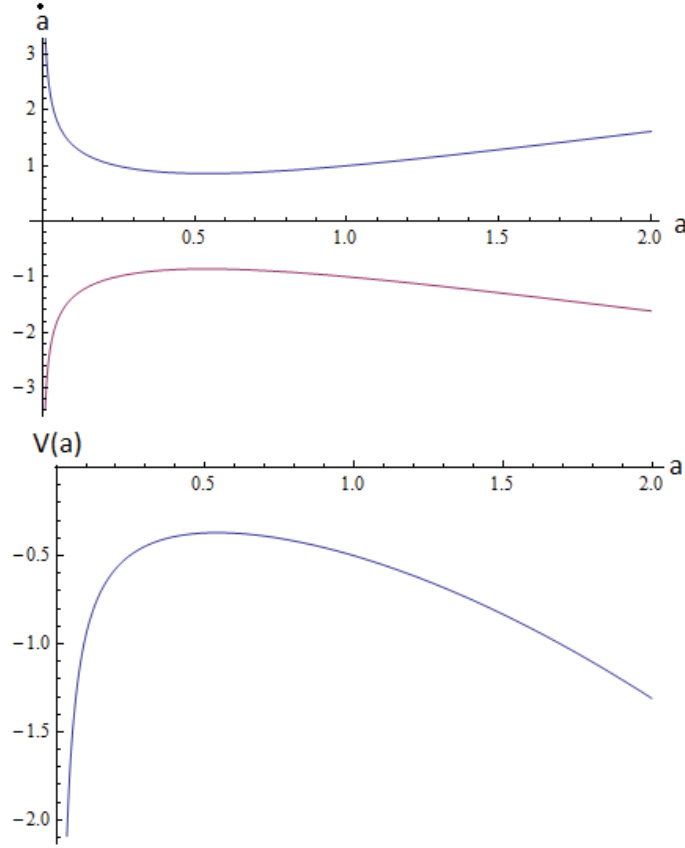


Figura 4.6: Espacio-fase y potencial para el caso 8

Esta es una ecuación de segundo orden cuyas raíces están dadas por

$$\lambda_1^A = 3(1 - \tilde{g}), \quad \lambda_2^A = -3\tilde{g}. \quad (4.75)$$

Si llamamos  $\Omega_{DE}^A = \tilde{g}$  y  $\Omega_{DM}^A = (1 - \tilde{g})$  podemos hacer la clasificación de los puntos críticos en (A) de la forma

$$(i) \quad \text{Inestable si} \quad \begin{aligned} \lambda_1^A = 3(1 - \tilde{g}) > 0 &\Rightarrow \tilde{g} < 1 \Rightarrow \Omega_{DM}^A > 0 \\ \lambda_2^A = -3\tilde{g} > 0 &\Rightarrow \tilde{g} < 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^A = \tilde{g} < 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$(ii) \quad \text{Estable si} \quad \begin{aligned} \lambda_1^A = 3(1 - \tilde{g}) < 0 &\Rightarrow \tilde{g} > 1 \Rightarrow \Omega_{DM}^A = (1 - \tilde{g}) < 0 \\ \lambda_2^A = -3\tilde{g} < 0 &\Rightarrow \tilde{g} > 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^A = \tilde{g} > 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Para el caso de (iii) tenemos que es un punto silla y aparecen dos subcasos:

$$(iii-a) \quad \begin{aligned} \lambda_1^A = 3(1 - \tilde{g}) > 0 &\Rightarrow \tilde{g} < 1 \Rightarrow \Omega_{DM}^A = (1 - \tilde{g}) > 0 \\ \lambda_2^A = -3\tilde{g} < 0 &\Rightarrow \tilde{g} > 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^A = \tilde{g} > 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

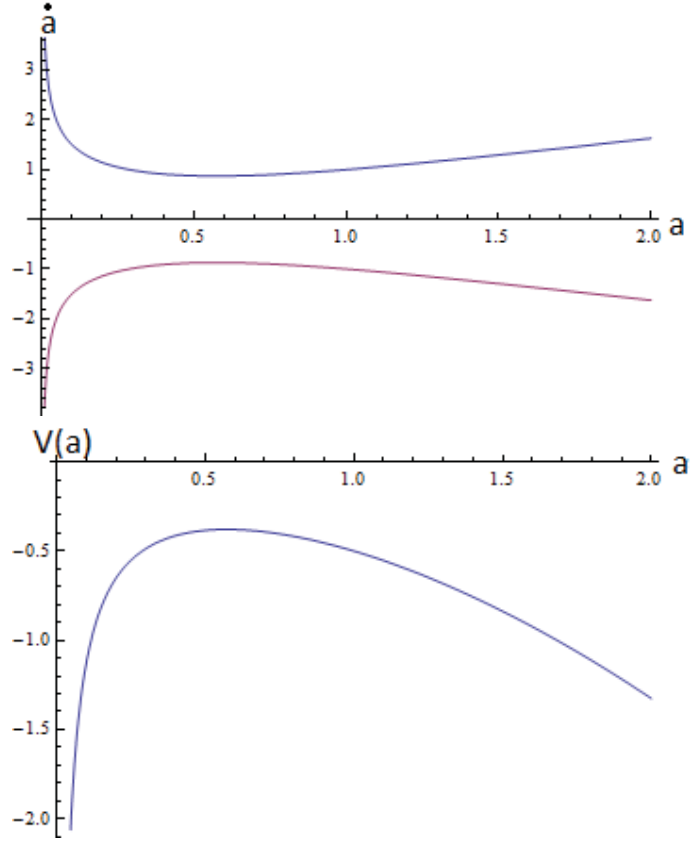


Figura 4.7: Espacio-fase y potencial para el caso 10

el cual es un punto que representa al estado físico del universo en el pasado. Por otro lado

$$\begin{aligned}
 (iii - b) \quad \lambda_1^A &= 3(1 - \tilde{g}) < 0 \Rightarrow \tilde{g} < 1 \Rightarrow \Omega_{DM}^A = (1 - \tilde{g}) < 0 \\
 \lambda_2^A &= -3\tilde{g} > 0 \Rightarrow \tilde{g} < 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^A = \tilde{g} < 0,
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

lo cual no tiene validez ya que ambas densidades son negativas. Para el punto (B) tenemos que siguiendo el mismo procedimiento que para (A), las raíces vienen dadas por

$$\lambda_1^B = -3, \quad \lambda_2^B = 3(\tilde{g} - 1), \tag{4.80}$$

y las densidades de materia y energía oscura

$$\Omega_{DM}^B = 1 \quad \Omega_{DE}^B = 0. \tag{4.81}$$

Clasificando ahora los puntos críticos

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{Punto silla si} \quad \lambda_1^B &= -3 < 0 \\
 \lambda_2^B &= 3(\tilde{g} - 1) > 0 \Rightarrow (\tilde{g} - 1) > 0 \Rightarrow \tilde{g} > 1
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{Estable si} \quad \lambda_1^B &= -3 < 0 \\
 \lambda_2^B &= 3(\tilde{g} - 1) < 0 \Rightarrow (\tilde{g} - 1) < 0 \Rightarrow \tilde{g} < 1,
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

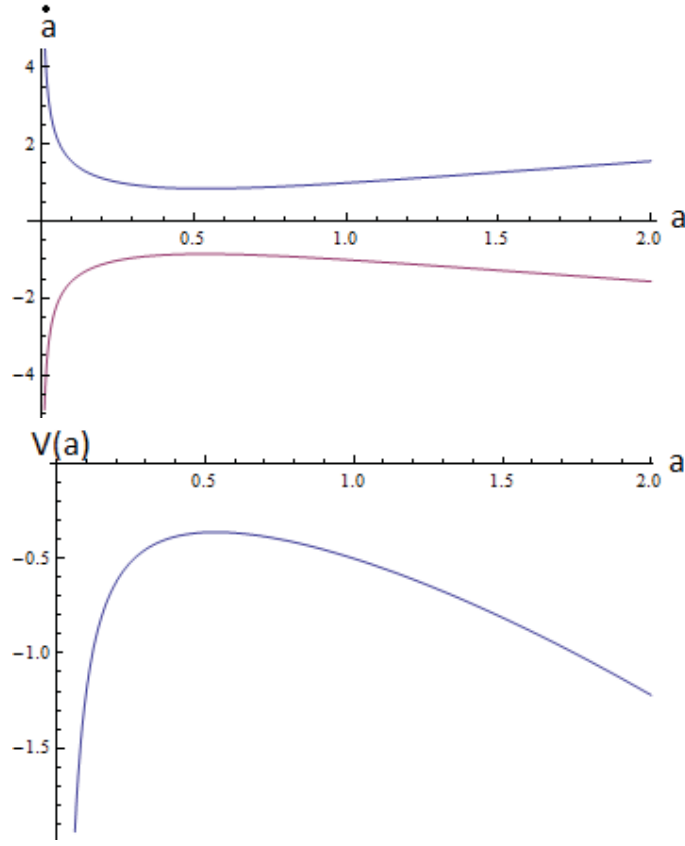


Figura 4.8: Espacio-fase y potencial para el caso 11

el cual es un punto físico hacia el futuro. Cabe mencionar que para que un modelo físico sea viable, uno de los puntos críticos debe corresponder a un universo dominado por materia, es decir  $\Omega_{DE} \rightarrow 0$   $\Omega_{DM} \rightarrow 1$  para tiempos suficientemente cercanos y corresponder a un punto silla. El único candidato es (A) con el subcaso (iii - a), por lo que

$$\tilde{g} = \tilde{\alpha}_{DE}^e \Rightarrow 0 < -\frac{\alpha_{DE}^e}{w} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha_{DE}^e < -w, \quad (4.84)$$

y como  $w < -1/3$  para que pueda ser energía oscura se debe cumplir  $0 < \alpha_{DM}^e < 1/3$ .

Para dominación de materia oscura necesitamos  $|\Omega_{DM}^A| \ll 1$ , así que

$$\begin{aligned} \Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) &= \tilde{g}(1 - \Omega_{DE}^*) \Rightarrow \Omega_{DE}^A - [\Omega_{DE}^*]^2 - \tilde{g} + \tilde{g}\Omega_{DE}^A = 0 \\ \Rightarrow (1 + \tilde{g})\Omega_{DE}^A - [\Omega_{DE}^*]^2 &= \tilde{g}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

ya que para tiempos tempranos

$$\Omega_{DE}^A = \tilde{g} = \alpha_{DM}^e \ll 1, \quad (4.86)$$

y la densidad de materia oscura viene dada por

$$\Omega_{DM}^A = 1 - \Omega_{DE}^A \approx 1 - \tilde{g}. \quad (4.87)$$

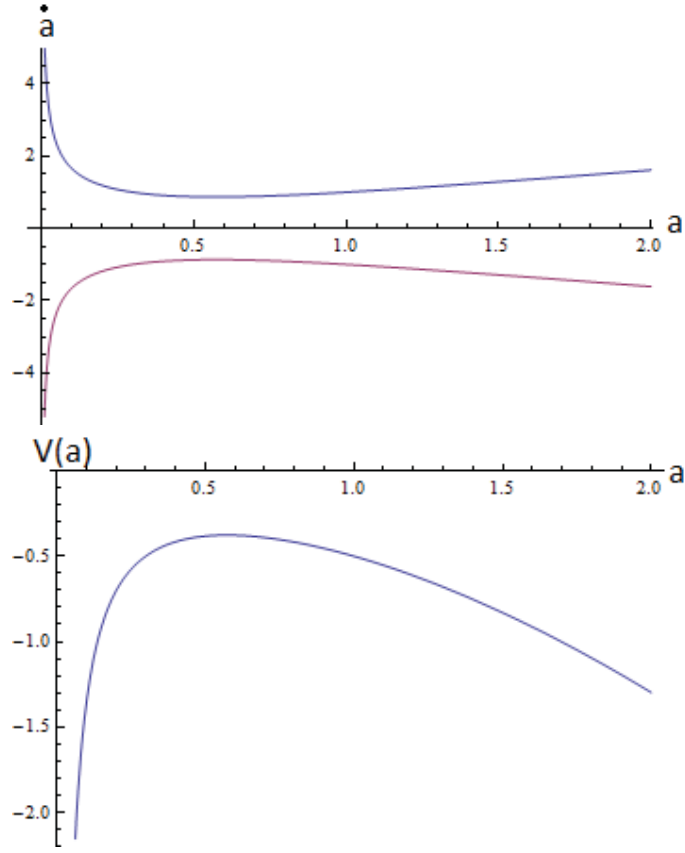


Figura 4.9: Espacio-fase y potencial para el caso 13

En tiempos tardíos debemos obtener un universo dominado por energía oscura, el cual debe corresponder al punto estable ( $B$ )

$$\Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) = \tilde{g}(1 - \Omega_{DE}^*), \quad (4.88)$$

y tomando en cuenta que para  $a \rightarrow \infty$ ,  $\Omega_{DE} \rightarrow 1$ ,  $\Omega_{DM} \rightarrow 0$  y tener estabilidad

$$\Omega_{DE}^B(1 - \Omega_{DE}^B) = \alpha_{DM}^f(1 - \Omega_{DE}^B), \quad \alpha_{DM}^f < 1. \quad (4.89)$$

Recordando la forma de  $\alpha_{DM}^f$  y el hecho que  $0 < E < 1$

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{\alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f}{\alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f} < 1, & \Rightarrow \\
 (i) \quad \alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f > 0, & \Rightarrow 0 < \alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f < \alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f \\
 \Rightarrow \alpha_{DM}^f < \alpha_{DM}^0 < \alpha_{DM}^e, & \text{ con } 0 < \alpha_{DM}^e < -w. \\
 (ii) \quad \alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f < 0, & \Rightarrow 0 > \alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f > \alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f \\
 \Rightarrow \alpha_{DM}^f > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^e, & \text{ con } 0 < \alpha_{DM}^e \ll -w.
 \end{aligned} \quad (4.90)$$

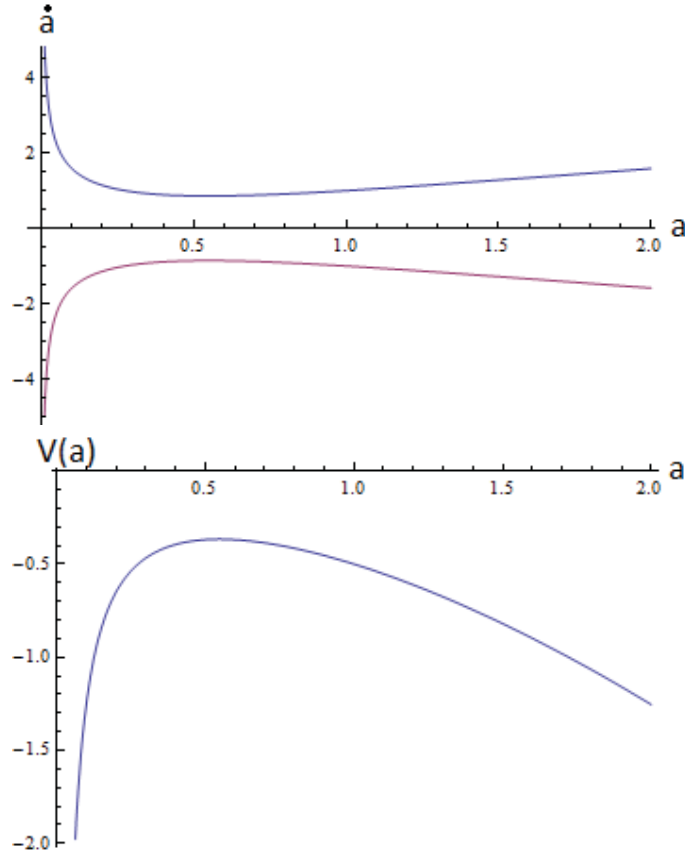


Figura 4.10: Espacio-fase y potencial para el caso 15

Para el caso en que el término de acoplamiento está dado por  $Q = 3Hf(a)\rho_{DE}$  tenemos

$$E = \frac{\alpha_{DE}^0 - \alpha_{DE}^f}{\alpha_{DE}^e - \alpha_{DE}^f}, \quad \text{con } 0 < E < 1. \quad (4.91)$$

Las ecuaciones de conservación pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \Omega'_{DE} &= 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) + \frac{3f(a)}{w}\Omega_{DE} \Rightarrow \Omega'_{DE} = 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{f}\Omega_{DE}, \\ \Omega'_{DM} &= -3\Omega_{DE}\Omega_{DM} - \frac{3f(a)}{w}\Omega_{DE} \Rightarrow \Omega'_{DM} = -3\Omega_{DE}\Omega_{DM} + 3\tilde{f}\Omega_{DE}, \end{aligned} \quad (4.92)$$

siendo la forma de  $f(a) = \frac{a\alpha_{DE}^0 + E\alpha_{DE}^e(1-a)}{a + E(1-a)}$  y para los casos límites

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{f}(a) &= \tilde{\alpha}_{DE}^e, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{f}(a) &= \tilde{\alpha}_{DE}^f. \end{aligned} \quad (4.93)$$

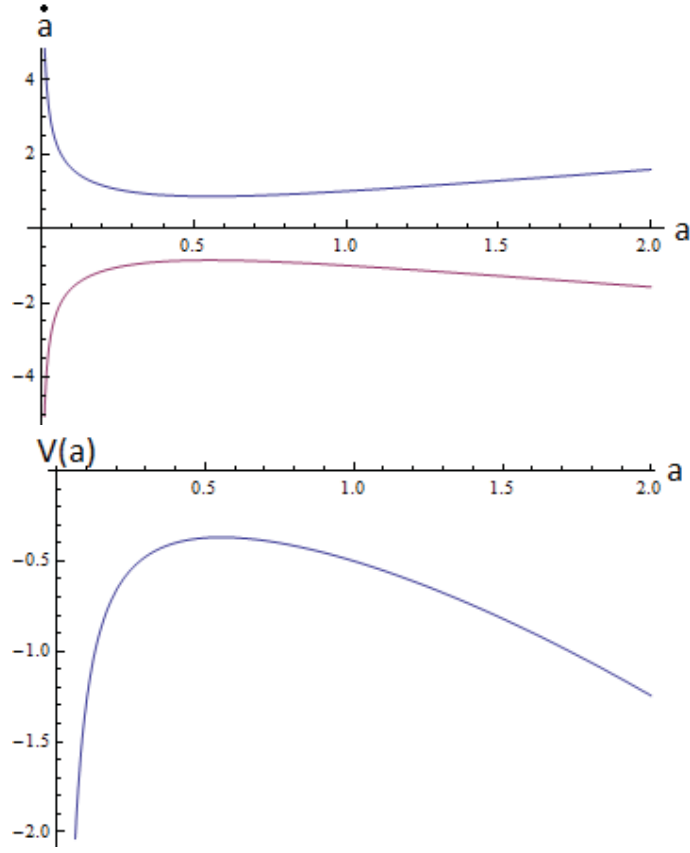


Figura 4.11: Espacio-fase y potencial para el caso 16

En ambos casos tenemos el sistema con puntos críticos

$$\begin{aligned}
 3\Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{f}\Omega_{DE}^* &= 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - \tilde{f}\Omega_{DE}^* = 0, \\
 -3\Omega_{DE}^*\Omega_{DM}^* + 3\tilde{f}\Omega_{DE}^* &= 0, \Rightarrow -\Omega_{DE}^*\Omega_{DM}^* + \tilde{f}\Omega_{DE}^* = 0, \\
 \Rightarrow \Omega_{DE}^*(1 - \Omega_{DE}^*) - \Omega_{DE}^*\Omega_{DM}^* &= 0, \Rightarrow \Omega_{DE}^*[(1 - \Omega_{DE}^*) - \Omega_{DM}^*] = 0. \quad (4.94)
 \end{aligned}$$

El primer punto crítico es

$$\Omega_{DE}^* = 0 \Rightarrow \Omega_{DE}^* + \Omega_{DM}^* = 1, \quad (4.95)$$

mientras que el segundo punto crítico está dado por

$$1 - \Omega_{DE}^* - \Omega_{DM}^* = 0, \Rightarrow \Omega_{DE}^* + \Omega_{DM}^* = 1, \text{ con } \Omega_B^* = 0. \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{DE}^*[1 - \Omega_{DE}^* - \tilde{f}] = 0, \Rightarrow \quad (a) \quad \Omega_{DE}^* = 0 &\Rightarrow \Omega_{DM}^* = 1, \\
 \quad (b) \quad \Omega_{DE}^* = (1 - \tilde{f}) &\Rightarrow \Omega_{DM}^* = \tilde{f}, \quad (4.97)
 \end{aligned}$$

y los llamamos puntos  $C$  y  $D$  respectivamente.

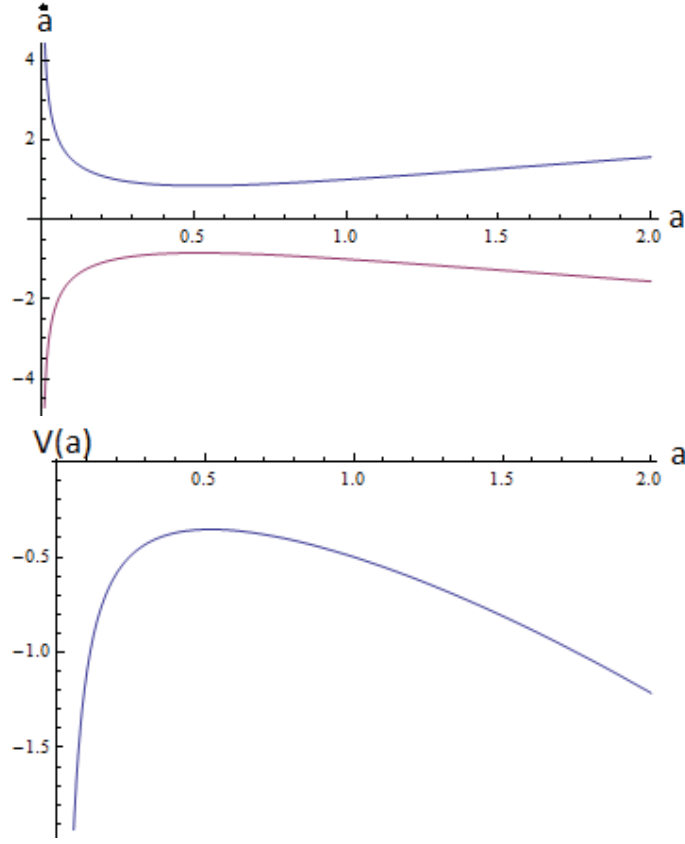


Figura 4.12: Espacio-fase y potencial para el caso 18

#### 4.5.1. Inestabilidad y puntos críticos

Al igual que en el caso anterior, vamos a analizar la matriz derivada del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Omega'_{DE} \\ \Omega'_{DM} \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3\Omega_{DE}(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{f}\Omega_{DE} \\ -3\Omega_{DE}\Omega_{DM} + 3\tilde{f}\Omega_{DE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Omega_{DE}, \Omega_{DM}) \\ f_2(\Omega_{DE}, \Omega_{DM}) \end{pmatrix}, \quad (4.98)$$

es decir

$$\begin{aligned} D\vec{f}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Omega_{DE}} & \frac{\partial f_1}{\partial \Omega_{DM}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Omega_{DE}} & \frac{\partial f_2}{\partial \Omega_{DM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1 - \Omega_{DE}) - 3\tilde{f} & 0 \\ -3\Omega_{DM} + 3\tilde{f} & -3\Omega_{DE} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (3 - 6\Omega_{DE}) - 3\tilde{f} & 0 \\ 3(\tilde{f} - \Omega_{DM}) & -3\Omega_{DE} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Tenemos nuevamente dos puntos críticos (C)  $\Omega_{DE}^* = 0$ ,  $\Omega_{DM}^* = 1$  y (D)  $\Omega_{DE}^* = (1 - \tilde{f})$ ,  $\Omega_{DM}^* = \tilde{f}$ . Sustituyendo en la matriz anterior, tenemos que para (C)

$$D\vec{f}(C) = \begin{bmatrix} 3(1 - \tilde{f}) & -0 \\ -3(\tilde{f} - 1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$



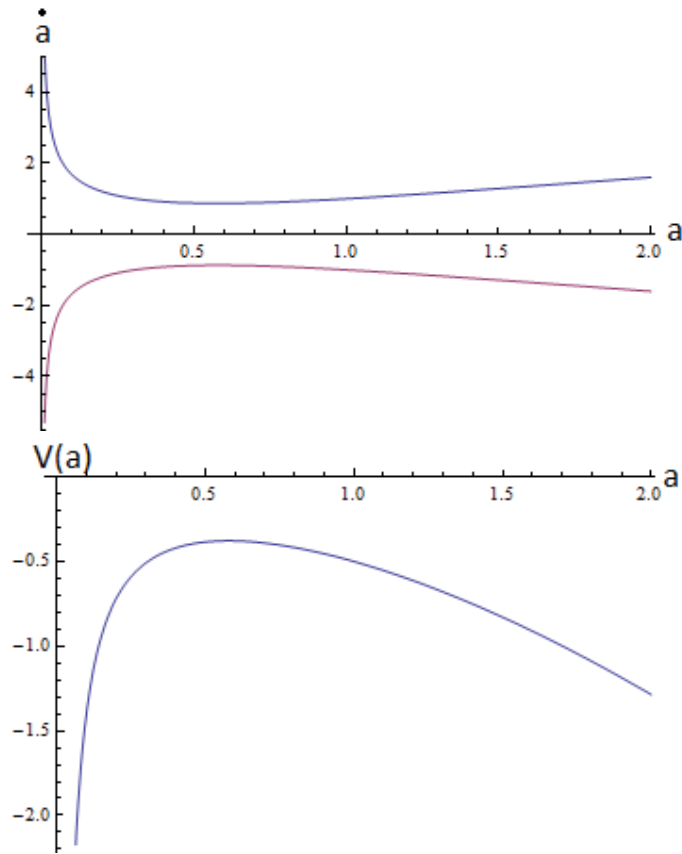


Figura 4.13: Espacio-fase y potencial para el caso 20

y para el punto ( $D$ )

$$D\vec{f}(D) = \begin{bmatrix} 3 - 6(1 - \tilde{f}) - 3\tilde{f} & 0 \\ 0 & 3(\tilde{f} - 1) \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Ahora, para hallar los eigenvalores tenemos  $\det [D\vec{f}(C) - \lambda I] = 0$

$$\begin{vmatrix} 3(1 - \tilde{f}) - \lambda & 0 \\ -3(1 - \tilde{g}) & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda[3(1 - \tilde{f}) - \lambda] = 0. \quad (4.102)$$

Puede verse facilmente que las raíces vienen dadas por

$$\lambda_1^C = 0, \quad \lambda_2^C = 3(1 - \tilde{f}), \quad \text{punto C} \quad \Omega_{DE}^* = 0, \quad \Omega_{DM}^* = 1. \quad (4.103)$$

Para el punto ( $D$ )

$$\det [D\vec{f}(D) - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3(1 - \tilde{f}) - \lambda & 0 \\ 0 & -3(1 - \tilde{f}) - \lambda \end{bmatrix} = [-3(1 - \tilde{f}) - \lambda]^2 = 0, \\ \lambda_1^D = 3(\tilde{f} - 1) \quad \text{punto D} \quad \Omega_{DE}^* = 1 - \tilde{f}, \quad \Omega_{DM}^* = \tilde{f}. \quad (4.104)$$

**CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS EN COSMOLOGÍA**  
**4.5. ESTUDIO DINÁMICO DEL SECTOR INTERACTUANTE**

---

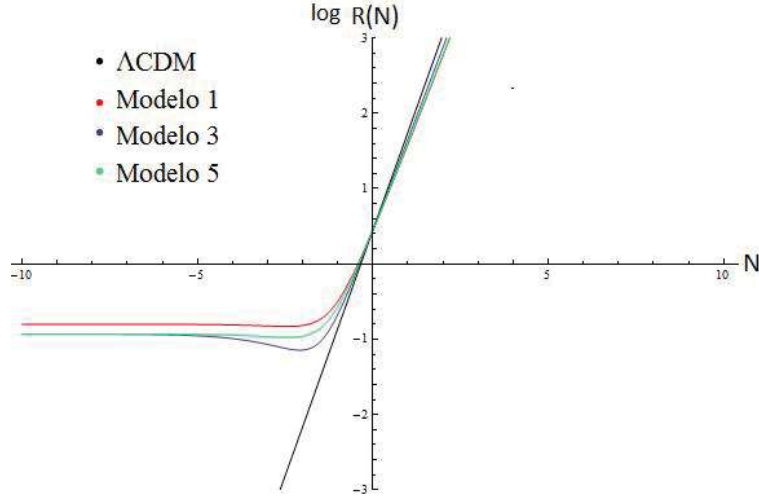


Figura 4.14: Evolución del cociente energía/materia oscura  $R(a)$  para los casos 1, 3 y 5 así como para el modelo  $\Lambda$ CDM. Se tiene que el valor de  $R_0$  es 0.25 para los tres casos,  $R_{-\infty}$  es  $-\infty$  y  $R_{\infty}$  vale -1 para el caso 1 y 3, y -0.75 para el caso 2.

Para la clasificación del punto ( $D$ )

$$(i) \quad \text{Inestable si } \lambda_1^D = 3(\tilde{f} - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} > 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{DE}^* = (1 - \tilde{f}) < 0 \quad \Omega_{DM}^* = \tilde{f} > 1. \quad (4.105)$$

Podemos ver que para este punto la densidad de energía oscura es negativa y por lo tanto no es aceptable.

$$(ii) \quad \text{Estable si } \lambda_1^D = 3(\tilde{f} - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} < 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{DE}^* = (1 - \tilde{f}) > 0 \quad \Omega_{DM}^* = \tilde{f} < 1. \quad (4.106)$$

Este es un caso aceptable hacia el futuro en donde el término de energía oscura es dominante y  $\tilde{f}$  cuando  $a \rightarrow \infty$  es  $\alpha_{DE}^f$ . A continuación vamos a mostrar las gráficas en donde se muestra la evolución del cociente de energía y materia oscura  $R$  con respecto al tiempo cósmico, y para cada gráfica se muestran 3 modelos interactuantes así como el modelo  $\Lambda$ CDM.

Como un resumen de resultados podemos mencionar que aunque las funciones  $f(a)$  y  $g(a)$  son definidas de manera similar a partir de los parámetros  $\alpha^e$ ,  $\alpha^0$  y  $\alpha^f$ , tenemos que para ambos casos se obtienen soluciones muy diferentes para tiempos tempranos y futuros en cuanto al cociente de densidades de energía y materia oscura. Para el caso en el que  $Q \propto \rho_{DM}$  se tiene que sin importar la relación entre los parámetros de acoplamiento siempre es posible hallar un valor finito para  $R$  en el pasado ( $a \rightarrow 0$ ), mientras que para tiempos tardíos ( $a \rightarrow \infty$ ), el valor de  $R$  diverge. Este caso es contrario al modelo  $\Lambda$ CDM así que debe ser desechado. En el caso en que  $Q \propto \rho_{DE}$  se tiene que sin importar la relación entre  $\alpha_{DE}^e$ ,  $\alpha_{DE}^0$  y  $\alpha_{DE}^f$  siempre es posible hallar un valor finito hacia el futuro para  $R$ , mientras que en hacia el pasado el valor diverge y si es compatible con  $\Lambda$ CDM.

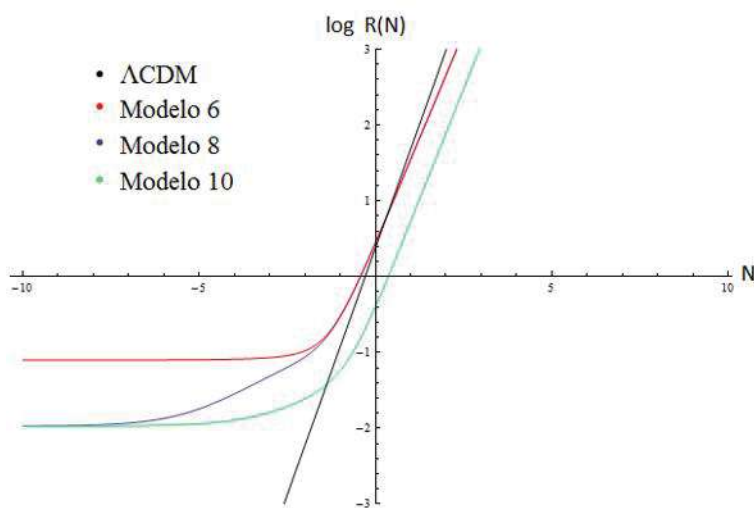


Figura 4.15: Evolución del cociente energía/materia oscura  $R(a)$  para los casos 6, 8 y 10 así como para el modelo  $\Lambda$ CDM. Se tiene que los valores de  $R_0$  son  $(0.4, -0.33, 0.4)$ ,  $R_{-\infty}$  es  $(-1.92, -1.96, -0.98)$  y para  $R_{\infty}$  tenemos que es  $\infty$  para los tres.

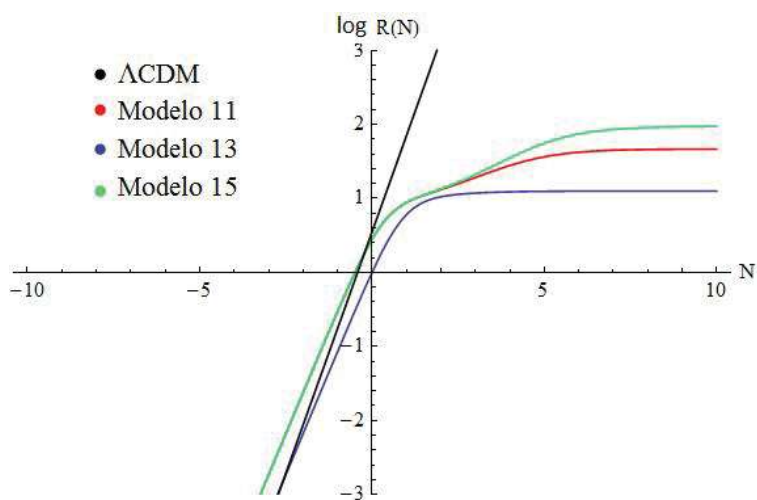


Figura 4.16: Evolución del cociente energía/materia oscura  $R(a)$  para los casos 11, 13 y 15 así como para el modelo  $\Lambda$ CDM. Se tiene que los valores de  $R_0$  son  $(0, 0.25, 0.25)$ ,  $R_{-\infty}$  es  $-\infty$  en los tres casos y  $R_{\infty}$  es  $(0.5, 1.96, 1.54)$ .

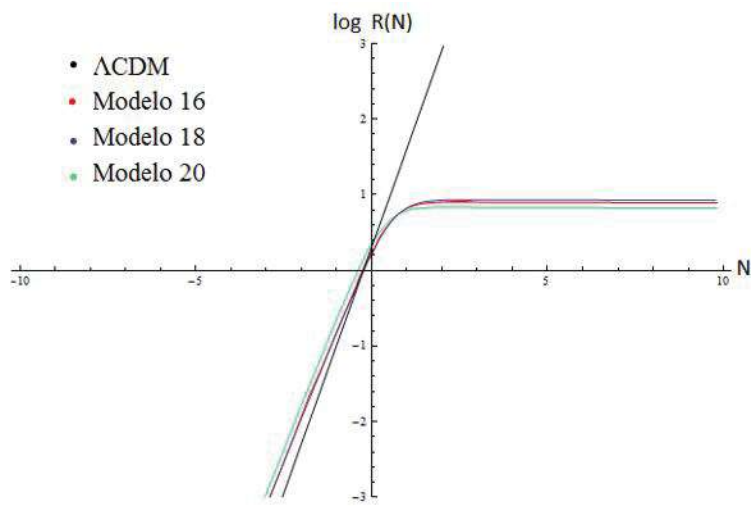


Figura 4.17: Evolución del cociente energía/materia oscura  $R(a)$  para los casos 16, 18 y 20 así como para el modelo  $\Lambda$ CDM. Se tiene que el valor de  $R_0$  es  $(0.25, 0, -0.25)$ ,  $R_{-\infty}$  es  $-\infty$  y  $R_{\infty}$  es 1 para los tres casos.

## Capítulo 5

# Conclusiones

Según el modelo estándar de la cosmología el 95 % de la materia/energía presente en el Universo es hasta el momento desconocida y sólo se tienen algunos indicios de su naturaleza, así como de su interacción con la materia ordinaria. En este trabajo se presentó un modelo de interacción entre materia y energía oscura en el cual existe un término de interacción  $Q$  proporcional de forma no lineal a los parámetros de densidad con coeficientes dinámicos. Este acoplamiento es nuevo en la literatura y proporciona un intercambio de energía en el sector oscuro, el cual ayuda a aliviar el problema de la coincidencia cósmica.

Definimos la función de interacción de la forma

$$Q = 3H[f(a)\rho_{DE} + g(a)\rho_{DM}], \quad (5.1)$$

con  $f(a)$  y  $g(a)$  funciones de acoplamiento dadas por

$$f(a) = \frac{a\alpha_{DE}^0 + E\alpha_{DE}^e(1-a)}{a + E(1-a)} \quad g(a) = \frac{a\alpha_{DM}^0 + F\alpha_{DM}^e(1-a)}{a + F(1-a)}, \quad (5.2)$$

de acuerdo a ciertos casos límite en el tiempo. Se procedió a trabajar dos casos por separado ya que la función general no es integrable de forma general y para cada caso se tienen dos subcasos dependiendo de la relación entre los diferentes valores de los parámetros de acoplamiento. Como ejemplo se analiza el caso  $\Lambda$ CDM con ayuda de la teoría de sistemas Hamiltonianos, el cual nos permite estudiar el modelo de forma sencilla a partir de la función potencial y así graficar el espacio-fase de soluciones. En la figura (4.1) se muestra su evolución dinámica así como la región acelerante para los casos en que la curvatura es positiva, negativa o nula.

Para el caso de nuestro modelo se trabaja con curvatura nula y se muestra que, sin importar de que manera están relacionados los parámetros de acoplamiento el sistema posee al menos un punto crítico inestable (punto silla) en el pasado, el cual puede ser relacionado con la etapa de dominación de materia oscura. Las soluciones se muestran en las figuras (4.2 – 4.13). Finalmente tomando un cambio de variable para  $N = -w \ln a$  se tiene que las ecuaciones cosmológicas pueden ser vistas como un sistema dinámico dos dimensional, y con la ayuda del teorema de Poincaré-Bendixon se procede a analizar el modelo como un sistema con estabilidad estructural. Primero hallamos los puntos críticos para cada caso y se estudia para cada

subcaso si se trata de un sistema estable o inestable con la ayuda de la matriz linearizada. Se muestra que los casos con relevancia física son aquellos en los que el acoplamiento es proporcional al parámetro de energía oscura, ya que permite soluciones cosmológicas que se comportan de manera similar a  $\Lambda$ CDM en el pasado y proporcionan en el futuro un valor finito (de orden unidad) para el cociente entre la densidad de energía y materia oscura  $R = \Omega_{DE}/\Omega_{DM}$ . Es en este sentido que nuestro modelo aminora el problema de la coincidencia cósmica. Esto último se representa en las figuras (4.16, 4.17)

# Apéndice A

## Ecuación de Killing

Vamos a ver algunos ejemplos sencillos para comprender el funcionamiento de la ecuación de Killing.

**Ejemplo 1.** Sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita. Demuestra que la ecuación de Killing puede escribirse de la forma

$$(\nabla_\mu X)_\nu + (\nabla_\nu X)_\mu = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda = 0. \quad (\text{A.1})$$

Sea  $(M, g)$  una variedad pseudo-Riemanniana, usando la definición de derivada de Lie de un tensor general y  $\nabla g = 0$

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X), \text{ para todo } X, Y, Z \in \chi(M). \quad (\text{A.2})$$

Usando la identidad de Ricci

$$Z[g(X, Y)] = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad (\text{A.3})$$

podemos reescribir

$$g(X, \nabla_Z Y) = Y[g(X, Z)] - g(X, \nabla_Y Z) = Y[X(Z)] - X[\nabla_Y Z] = (\nabla_Y X)(Z). \quad (\text{A.4})$$

De esta forma (A.2) viene dada por

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = (\nabla X)(Y, Z) + (\nabla X)(Z, Y), \quad (\text{A.5})$$

y como debe cumplirse para todo  $Y, Z \in \chi(M)$ , tenemos que en coordenadas locales

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, usando (1.46) y  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$

$$(\nabla_\mu X)_\nu + (\nabla_\nu X)_\mu = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda = 0. \quad (\text{A.7})$$

**Ejemplo 2.** Sea el espacio de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  en donde que todos los coeficientes de conexión de Levi-Civita sea anulados. Las ecuaciones de Killing vienen dadas por

$$\partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu = 0, \quad (\text{A.8})$$

cuyas soluciones

$$X_{(i)}^\mu = \delta_i^\mu \quad (0 \leq i \leq 3) \quad (\text{A.9})$$

corresponden a translaciones espaciales. Ahora, tomando  $X_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu$ , con  $a_{\mu\nu}$  constante, tenemos que a partir de (A.8)  $a_{\mu\nu}$  debe ser antisimétrico respecto a  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Usando las propiedades de simetría (1.68) - (1.71)  $\binom{4}{2=6}$  existen 6 soluciones independientes, de las cuales 3 corresponden a rotaciones alrededor del eje  $x$

$$X_{(j)0} = 0, \quad X_{(j)m} = \epsilon_{jmn}x^m, \quad (1 \leq j, m, n \leq 3), \quad (\text{A.10})$$

mientras que las otras 3 corresponden a los boost de Lorentz a lo largo de  $x^k$

$$X_{(k)0} = x^k, \quad X_{(k)m} = \delta_{km}x^0, \quad (1 \leq k, m \leq 3). \quad (\text{A.11})$$

En un espacio-tiempo  $m$ -dimensional ( $m \geq 2$ ), hay  $m(m+1)$  vectores de Killing de los cuales,  $m$  generan translaciones,  $(m-1)$  generan los boost y  $(m-1)(m-2)/2$  rotaciones espaciales. Dichos espacios que admiten  $m(m+1)/2$  vectores de Killing son llamados *espacios maximalmente simétricos*.

**Ejemplo 3.** Sea  $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$  la métrica estándar de  $S^2$ . Las ecuaciones de Killing (A.1) son

$$\partial_\theta X_\theta + \partial_\theta X_\theta = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\partial_\phi X_\phi + \partial_\phi X_\phi + 2 \sin \theta \cos \theta X_\theta = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\partial_\theta X_\theta + \partial_\theta X_\theta - 2 \cot \theta X_\phi = 0. \quad (\text{A.14})$$

A partir de (A.12) se ve que  $X$  es independiente de  $\theta$ , así que  $X(\theta, \phi) = f(\phi)$  y sustituyendo en (A.13) tenemos

$$X_\phi = -F(\theta) \sin \theta \cos \theta + g(\theta), \quad (\text{A.15})$$

en donde  $F(\theta) = \int f(\phi) d\phi$ . Sustituyendo ahora la ecuación anterior en (A.14) y haciendo un poco de álgebra

$$\frac{dg}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta) = -\frac{df}{d\phi} - F(\phi). \quad (\text{A.16})$$

Igualando ambos términos a una constante arbitraria y multiplicando el lado izquierdo por  $e^{\int 2 \cot \theta d\theta} = \sin^{-2} \theta$ , tenemos una derivada total

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \sin^{-2} \theta g(\theta) \right] = C \sin^{-2} \theta, \quad (\text{A.17})$$

así que

$$g(\theta) = (C_1 - C \cot \theta) \sin^2 \theta. \quad (\text{A.18})$$



Tomando ahora la derivada del lado derecho de (A.16)

$$\begin{aligned} X_\theta(\phi) &= f(\phi) = A \sin \theta + B \cos \phi \\ F(\phi) &= -A \cos \phi + B \sin \phi - C, \end{aligned} \tag{A.19}$$

así que sustituyendo en (A.15)

$$\begin{aligned} X_\phi(\theta, \phi) &= [A \cos \phi - B \sin \phi + C] \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta [C_1 - C \cot \theta] \\ &= [A \cos \phi - B \sin \phi] \sin \theta \cos \theta + C_1 \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{A.20}$$

De esta forma tenemos que el vector de Killing viene dado por

$$\begin{aligned} X &= X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= A \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &+ B \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + C_1 \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned} \tag{A.21}$$

y los vectores base

$$\begin{aligned} L_x &= -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ L_y &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ L_z &= \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \tag{A.22}$$

generadores de rotación al rededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.



## Apéndice B

# Elementos de la métrica de FRW

El elemento de línea  $ds^2$  en coordenadas esféricas viene dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{B.1})$$

así que la métrica en forma matricial se escribe como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

y su determinante  $g_{\mu\nu}$  toma la forma

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (\text{B.3})$$

En el sistema comóvil las componentes del tensor  $T_{\mu\nu}$  son

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

cuya traza  $T$  es

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (\text{B.5})$$

Usando (1.55) los símbolos de Christoffel no nulos para FRW son

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (\text{B.11})$$

---

## APÉNDICE B. ELEMENTOS DE LA MÉTRICA DE FRW

---

El tensor de Riemann  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  se define como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (\text{B.12})$$

y en este caso los términos distintos de cero para la métrica de FRW, son

$$R^t{}_{rtr} = \frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (\text{B.13})$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = a\ddot{a}r^2 \quad (\text{B.14})$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{B.15})$$

$$R^r{}_{ttr} = R^\theta{}_{t t\theta} = R^\phi{}_{t t\phi} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{B.16})$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = -R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \quad (\text{B.17})$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \sin^2(\theta) \quad (\text{B.18})$$

$$R^\theta{}_{rr\theta} = R^\phi{}_{rr\phi} = -\frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}. \quad (\text{B.19})$$

Los términos distintos de cero del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$  son los elementos de la diagonal

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

así que la contracción del tensor de Ricci consigo mismo viene dada por

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 12 \left[ \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a^3} (\dot{a}^2 + k) + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^4 + 2k \left( \frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 + \left( \frac{k}{a^2} \right)^2 \right], \quad (\text{B.21})$$

y el escalar de curvatura  $R \equiv R^\alpha{}_\alpha = R_{\beta\alpha} g^{\beta\alpha}$  se escribe como

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (\text{B.22})$$

Del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , se tiene que los únicos términos distintos de cero son los de la diagonal

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + k) G_{rr} \\ &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \sin^2\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$


---

# Bibliografía

- [1] L. Arturo Ureña *et al*, *Dynamics of interacting dark energy*, Physical Review D., **79**, 063518 (2009).
- [2] Sergio del Campo *et al*, *Interacting models may be key to solve the cosmica coincidence problem*, Journal of Cosmology and Astrophysical Particle, 2009 (020)
- [3] T. Padmanabham, *The cosmological constant; the weight of vacuum*, Phys. Rept. **380**, (2003) 385
- [4] I. Zlatev, L-M Wang and P.J. Steinhardt *Quintessence, cosmic coincidence and the cosmological constant*, Phys. Rev. Letter, **82** (1999) 896
- [5] P. J. Steinhardt *Cosmological challenges for the 21<sup>st</sup> century*, in *Critical problems in physics*, V. L. Fitch and D. R. Marlow eds., Princeton University Press, Princeton U.S.A. (1997), pg. 123
- [6] P.J. Steinhardt, I. Zlatev and L-M Wang *Cosmological tracking solutions*, Physical Review D. **59**, 123504 (1999).
- [7] WMAP Collaboration, G. Hinshaw *et al*., *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: data processing, sky maps and basic results*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009)
- [8] Robert M. Wald, “*General Relativity*”, The University of Chicago Press, 1984, ISBN 0-226-87033-2.
- [9] Sean Carroll, “*Space and Geometry. An introduction to General Relativity*”, Addison Wesley, 2004, ISBN 0-8053-8732-3.
- [10] WMAP Collaboration, N. Jarosik *et al*., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*. Submitted to *Astrophysical Journal Supplement Series* (2010). [[arXiv:1001.4744v1](#)].
- [11] Supernova Search Team collaboration, A. G. Riess *et al*., 1998, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116**, 1009. [[astro-ph/9805201](#)].
- [12] S. Perlmutter *et al*., 1998, *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications*, *Nature (London)* **391**, 51.

- [13] S. Perlmutter et al., 1999, *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.*, **517**, 565.
- [14] James B. Hartle, “*Gravity, An introduction to Einstein’s General Relativity*”, Addison Wesley, 2003, ISBN 0-8053-8662-9.
- [15] Lawrence Perko, “*Differential Equations and Dynamical Systems*”, Springer-Verlag, 1991, ISBN 0-387-97443-1.
- [16] M. W. Hirsh and M. Smale, “*Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*”, Academic Press, New York, 1974
- [17] Riess A G *et al*, 2007, *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z \geq 1$ : Narrowing constraints on the early behavior of dark energy*, *Astrophys. J.*, **659**: 98–121
- [18] Turner M. & Riess A. G., 2002, *Astrophys. J.* **569**, 18
- [19] Yun-He, Li and Xin Zhang, *Running coupling: Does the coupling dark energy and dark matter change sing during the cosmological evolution?* (2011)
- [20] Roy Maartens *et al*, *Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter*, *Physical Review D.*, **78**, 023505 (2008).
- [21] Roy Maartens *et al*, *Quintessence with cuadratic coupling to dark matter*, *Physical Review D.*, **81**, 083003 (2010).
- [22] Marek Szydtowski, *Coosmological zoo - accelerating models with dark energy*, *J. C. P. A.*, **391**, 51 (2011).