

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo  
Instituto de Física y Matemáticas



## **Evolución de Estrellas TOV en Relatividad General**

Un estudio basado en el método de High Resolution Shock-Capturing

Tesis presentada en cumplimiento parcial de  
los requisitos para obtener el título de

**Maestro en Ciencias en el área de Física**

presenta

*Manuel D. Morales Altamirano*

asesorado por

Dr. Francisco S. Guzmán Murillo  
(IFM – UMSNH)

*Morelia Mich. México*  
*Enero de 2012*



## Resumen

En este trabajo de tesis presentaré un estudio numérico de algunas estrellas, esféricamente simétricas, bajo el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. En particular, estudiaré su evolución temporal a partir de la condición inicial de equilibrio gravitacional, dentro del contexto de la ecuación de estado de un gas ideal, para el caso politrópico. Dado que en el sistema existen diferentes parámetros libres, me enfocaré en algunas configuraciones que permiten modelar, en una primera aproximación, escenarios de interés astrofísico. Inicialmente, y basándome en el problema de los valores iniciales, identificaré las ramas estables e inestables de los diferentes sistemas. Posteriormente, verificaré que los resultados del problema de evolución son consistentes con dichas ramas para algunas densidades centrales dadas. Con esto, finalmente mostraré que en la rama estable las estrellas presentan oscilaciones, a lo más con un efecto de acreción de materia producto debido a la atmósfera; y que en la rama inestable, se vuelven agujeros negros de manera inevitable.

*“No le temo a las computadoras,  
lo que temo es a la falta de ellas.”*

– Isaac Asimov.

## Agradecimientos

Quisiera expresar mis más sinceros agradecimientos a todos quienes en mayor o menor medida, han contribuído en la elaboración de este trabajo. En primer lugar a Dios, por sostenerme cada día y otorgarme el enorme privilegio de apreciar su sabiduría, reflejada en las leyes y mecanismos físicos que rigen el mundo natural. A mi prometida Esmeralda, en quien siempre he encontrado amor, alegría y apoyo en todo momento. A mis padres Manuel y Erika, junto con mis hermanos Jonathan y Julio, por su apoyo incondicional tanto en los tiempos buenos, como en los malos. A mi asesor, Dr. Francisco S. Guzmán, quien con mucha experiencia y paciencia me ha guiado no solo en la estructuración de este trabajo de tesis, sino también el proceso de desarrollar mis propias capacidades en el fascinante mundo de la programación y la astrofísica relativista. Finalmente quisiera agradecer a México, y en particular el Instituto de Física y Matemáticas de la U.M.S.N.H., por darme esta valiosa oportunidad de realizar mis estudios de maestría en condiciones excelentes, las cuales muy difícilmente hubiese encontrado en el sistema universitario de mi país natal.

Morelia, México. 20 de Enero de 2012.

*“Los cielos cuentan la gloria de Dios,  
y el firmamento anuncia la obra de sus manos.”*

– Salmo 19:1

# Contenidos

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Panorámica general . . . . .	1
1.2. Método de diferencias finitas . . . . .	3
1.3. Método de líneas . . . . .	6
1.4. Método de volúmenes finitos . . . . .	8
<b>2. Configuración y datos iniciales</b>	<b>13</b>
2.1. Consideraciones previas . . . . .	13
2.2. Problema de los valores iniciales . . . . .	15
2.3. Estabilidad e inestabilidad . . . . .	21
<b>3. Evolución del sistema</b>	<b>25</b>
3.1. Consideraciones previas . . . . .	25
3.2. Ecuaciones para la geometría . . . . .	26
3.3. Ecuaciones para la hidrodinámica . . . . .	27
3.4. Reconstrucción de variables primitivas . . . . .	32

---

3.5. Evolución con resolvidor HLL . . . . .	34
3.6. Metodología e Implementación . . . . .	36
3.6.1. Resolución del sistema . . . . .	36
3.6.2. Discretización de las ecuaciones . . . . .	39
3.6.3. Condiciones de frontera . . . . .	42
3.7. Resultados obtenidos . . . . .	44
3.7.1. Caso $\Gamma = \frac{5}{3}$ con $K = 1$ . . . . .	44
3.7.2. Caso $\Gamma = 2$ con $K = 100$ . . . . .	50
<b>4. Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>A. Pruebas de Convergencia</b>	<b>59</b>
<b>B. Scripts de Maple</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Panorámica general

El objetivo central de este trabajo de tesis, es el estudio numérico de algunas estrellas, esféricamente simétricas, bajo el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff<sup>1</sup>.

Para cumplirlo, necesitaremos recurrir a tres herramientas fundamentales:

- **Relatividad General**, ya que nos interesa estudiar su comportamiento bajo la influencia de campos gravitacionales fuertes.
- **Hidrodinámica**, que es la formulación física básica para estos casos, en donde tenemos hay flúidos involucrados de por medio.
- **Métodos Numéricos**, debido a que en la práctica, hasta ahora no se ha encontrado solución exacta para este problema.

---

<sup>1</sup>A partir de ahora las etiquetaremos simplemente como *estrellas TOV*.

Si bien el estudio de las estrellas TOV no es algo realmente nuevo dentro del campo de la astrofísica relativista, y en especial en lo que respecta a las simulaciones computacionales, comprender su comportamiento es parte importante del proceso formativo. Esto obedece al hecho de que un análisis detallado de las mismas, permite adquirir elementos variados que potencialmente son aplicables a muchos otros problemas, algunos bastante más complejos y realistas.

En este caso en particular, se fueron adquiriendo toda una serie de herramientas teóricas y numéricas, que por un lado me permitieron ir dando forma, de manera gradual, al código final a explotar, y por otro, ir aprendiendo a manipular diversos aspectos propios del lenguaje computacional, muy relevantes para este tipo de problemas astrofísicos. Por mencionar algunas de las más importantes:

- *Método de diferencias finitas,*
- *Método de líneas,*
- *Regularización de ecuaciones singulares en el origen,*
- *Resolvedor numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas,*
- *Método de volúmenes finitos,*
- *Algoritmo de Newton-Raphson, etc.*

Una vez adquiridas estas herramientas, e implementado el código final, el objetivo específico está dividido en dos etapas. En primer lugar, resolver el problema de los valores iniciales e identificar las condiciones numéricas que determinan la estabilidad e inestabilidad de la evolución de nuestros sistemas. Y segundo lugar, analizar la evolución de dichos sistemas, tanto en la rama estable como la inestable,

para diferentes configuraciones de interés astrofísico. Esto último es de mucha importancia, ya que me permitirá modelar, en una primera aproximación, escenarios físicos realistas. Finalmente señalar, que todos nuestros resultados serán verificados a través de pruebas de convergencia, para así garantizar su confiabilidad.

## 1.2. Método de diferencias finitas

Adentrándonos ya al problema numérico, una de nuestras herramientas fundamentales es la aproximación en diferencias finitas. Dada una ecuación diferencial parcial (EDP) para una función  $f$ , tal que no sea elemental determinar una solución analítica, este método consiste esencialmente en definir una versión discreta de dicha ecuación que nos permita resolverla bajo un dominio discreto, que por supuesto, esté contenido en el dominio continuo original. En general, es posible aplicar este método tanto a ecuaciones parabólicas (como la de difusión), ecuaciones elípticas (como la de Poisson) y a ecuaciones hiperbólicas (como la de onda). Nuestro análisis lo reduciremos exclusivamente al tercer caso, particularizando que nuestro objetivo es el estudio de un problema de evolución con coordenada temporal  $t$  y coordenada espacial  $x$ .

En primer lugar, comenzaremos definiendo nuestro dominio discreto, el cual consiste esencialmente en una malla de puntos  $x_j = j\Delta x$  y  $t^n = n\Delta t$ , para el espacio y tiempo respectivamente. Aquí  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, N_t$ . La función  $f$ , que es la involucrada en la ecuación diferencial, y luego de considerar nuestra discretización, estará definida exclusivamente en los puntos  $(t^n, x_j)$  de la malla, por lo que la denotaremos por  $f(t^n, x_j)$ . Si bien es posible considerar mallas en que la distancia entre los puntos varía, en nuestro caso estamos interesados en una malla

homogénea, es decir, una en que los puntos están igualmente espaciados, por lo que las distancias entre puntos se definirán como  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  y  $\Delta t = t^{n-1} - t^n$ .

Una vez definida nuestra malla, el paso siguiente es proceder a redefinir nuestra EDP de tal forma que se pueda utilizar dentro de nuestro dominio discreto. ¿Cómo hacer esto? Recurriendo a desarrollos en series de Taylor truncadas, en torno a  $f(t^n, x_j)$ . Consideremos un ejemplo simple. Supongamos que nos interesa discretizar la ecuación de onda, a través de una aproximación centrada a segundo orden. En el continuo tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (1.1)$$

Para aproximar la segunda derivada parcial con respecto a  $x$ , considerando la variable temporal  $t$  como una constante, necesitamos recurrir a los siguientes desarrollos en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ f(x_j) &= f(x_j), \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} + \mathcal{O}(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Con estas tres expresiones, el paso siguiente simplemente es determinar una combinación lineal tal que elimine las derivadas de orden distinto de 2 y nos permita despejar  $f''(x_j)$ :

$$\left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (1.3)$$

De manera similar, para la variable  $t$ , dejando  $x$  constante:

$$\left. \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right|_{t=t^n} = \frac{f(t^{n+1}) - 2f(t^n) + f(t^{n-1}))}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (1.4)$$

Usando las dos aproximaciones anteriores, nuestra ecuación de onda discretizada ahora queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2) = \frac{f(t^{n+1}, x_j) - 2f(t^n, x_j) + f(t^{n-1}, x_j)}{\Delta t^2} - \frac{f(t^n, x_{j+1}) - 2f(t^n, x_j) + f(t^n, x_{j-1}))}{\Delta x^2}. \quad (1.5)$$

La ecuación anterior involucra segundas derivadas. No obstante, el procedimiento para aproximar primeras derivadas es análogo. Si por ejemplo quisiéramos determinar la aproximación de  $f'(x_j)$ , solo bastaría con encontrar una combinación lineal del sistema (1.2), tal que elimine las derivadas de orden diferente de 1. Esto es:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (1.6)$$

Tres comentarios breves. Primero: como estamos resolviendo el problema a través de una vía numérica, aproximada, siempre es importante tener en cuenta que el factor  $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$  nunca será cero.

Segundo: aun cuando nuestra aproximación es centrada, para nada constituye la regla, ya que por ejemplo, cuando se requiere tratar el problema de las fronteras, solo se tiene a disposición los puntos ubicados a un extremo del dominio espacial. En particular, si quisiéramos aproximar a segundo orden, en un punto perteneciente a la frontera *izquierda*, se necesitaría expansiones en serie de Taylor para la función evaluada  $x_j$  y los respectivos puntos a la *derecha*, esto es:  $f(x_{j+2})$ ,  $f(x_{j+1})$  y  $f(x_j)$ .

Y tercero: se debe considerar que el orden de nuestra aproximación está determinado exclusivamente por el orden de nuestras aproximaciones en serie de Taylor. En los casos de orden mayor, la única dificultad que aparecerá, es que no será tan inmediato determinar las combinaciones lineales necesarias para las aproximaciones de las derivadas, debido a que será necesario cerrar el sistema, agregando más ecua-

ciones. Es decir, y pensando en el caso desarrollado anteriormente, si quisiéramos por ejemplo aproximar a orden cuarto, aparte de considerar series de Taylor truncadas hasta la cuarta derivada  $f''''(x)|_{x=x_j, t=cte}$ , se necesitarán respectivas expansiones para  $f(x_{j-2})$ ,  $f(x_{j-1})$ ,  $f(x_j)$ ,  $f(x_{j+1})$  y  $f(x_{j+2})$ .

### 1.3. Método de líneas

Una vez detallado el método de diferencias finitas, el paso siguiente es comprender la forma en que se procederá para evolucionar nuestras ecuaciones<sup>2</sup>. Para esto, recurriremos al *método de líneas*, y que exploraremos muy brevemente a continuación. Consideremos la ecuación de advección 1-D en el continuo, que dicho sea de paso, guarda mucha relación con las ecuaciones que aspiramos a resolver en el estudio central de este trabajo de tesis:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (1.7)$$

y ahora reescribamos su versión “semi-discretizada”, haciendo uso del método de diferencias finitas:

$$(\partial_t f)_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.8)$$

en donde  $j = 1, \dots, N - 1$ . Una particularidad de esta expresión, es que a diferencia de la ecuación (1.5), solo hemos discretizado la parte espacial en  $x$ , ubicada a la derecha, y que se le suele etiquetar por  $rhs(f)$ . Y esto, precisamente es lo que buscamos, ya que para evolucionar una función al tiempo  $t^{n+1}$ , lo único que tenemos

---

<sup>2</sup>Como veremos más adelante, en el capítulo 3, solo algunas de las ecuaciones dinámicas para nuestras estrellas TOV se resolverá a través de este método.

a nuestra disposición son valores de  $x$  a tiempos previos. Ahora bien, es importante tener en mente que (1.8) representa  $N - 1$  ecuaciones diferenciales ordinarias en  $t$  de  $f$ . Con esto, y para determinar el valor de  $f$  al tiempo  $t^{n+1}$  en cada valor de  $x_j$ , solo basta con implementar un resolvidor de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $f$  en la variable  $t$ . En el presente estudio, se recurrió a un algoritmo de Runge-Kutta de tercer orden, según cual, si la función  $f$  satisface una ecuación del tipo  $\partial_t f = rhs(f) = R$ , donde  $R$  es la parte *derecha* de la ecuación de evolución para  $f$ , y que puede incluir funciones y derivadas de funciones conocidas en su versión discreta, el procedimiento para calcular  $f^{n+1}$  consiste en:

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \Delta t R^n, \\ f^{**} &= \frac{3}{4}f^n + \frac{1}{4}f^* + \frac{\Delta t}{4}R^*, \\ f^{n+1} &= \frac{1}{3}f^n + \frac{2}{3}f^{**} + \frac{2}{3}\Delta t R^{**}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

¿Por qué elegir este algoritmo y no otro? La respuesta es mas bien práctica, y radica en el hecho de que se sabe que esta formulación es precisa y estable para valores suficientemente pequeños de  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Sin embargo, si se desea conocer un poco más acerca de algoritmos de evolución, existen algunas referencias muy recomendables<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics. Springer, 1995 y B. Gustafsson, H-O Kreiss, J. Olinger. *Time Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley-Interscience, 1996.

## 1.4. Método de volúmenes finitos

No cabe duda que el método de diferencias finitas posee una utilidad enorme a la hora de resolver problemas. De hecho, antes de estudiar el trabajo central de esta tesis, consideré previamente tres problemas básicos que resolví de manera satisfactoria a través de este método, a saber: la ecuación de onda clásica, la ecuación de Klein-Gordon, y la evolución de un campo escalar en Relatividad General. Sin embargo, cuando nos enfrentamos a un sistema consistente en un fluido, descrito por las ecuaciones de Euler, existe una característica fundamental que nos pone en apuros: el hecho de que tales ecuaciones son no lineales y desarrollan discontinuidades en las funciones involucradas. Y en el caso de nuestro sistema en particular, precisamente se dará en la superficie de la estrella de inicio. Desde el punto de vista numérico, el problema capital es que el método de diferencias finitas asume ingenuamente que nuestras funciones a evolucionar son diferenciables, cuando en realidad es algo que no está para nada garantizado. Este panorama es el que nos motiva a introducir una nueva herramienta numérica que nos ayude a superar esta dificultad: el Método de Volúmenes Finitos.

El principio matemático de este método es realmente sencillo, y lo explicaremos a continuación. Consideremos la siguiente ley de conservación (balance de flujos) que como veremos mas adelante, será la forma de ecuación que necesitaremos resolver para nuestro particular sistema hidrodinámico-relativista:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x^i} = \psi, \quad (1.10)$$

en donde  $\mathbf{q}$  representa un vector formado por algunas de las variables que describen el sistema, llamadas *variables conservativas*,  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  el vector de flujos dependientes de esas variables y  $\psi$  el vector que da cuenta de las fuentes. En la práctica,

ecuaciones diferenciales de esta forma dan lugar a choques o discontinuidades en las variables que describen el fluido, por lo que nuestro método alternativo consistirá en construir una formulación integral<sup>4</sup> tal que nos permita evitar dichas discontinuidades. En particular, consideramos que los puntos de nuestra malla definen una estructura de celdas en el espacio-tiempo. Cada celda, que etiquetaremos por  $C_i^{n+1/2}$  estará centrada justo en el punto  $(t^{n+1/2}, x_i)$  y definida en los intervalos  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ . Con esto en mente, tomaremos el promedio de la ecuación (1.10) sobre el volumen de una celda de espacio-tiempo:

$$\frac{1}{V_{C_i^{n+1/2}}} \int_{C_i^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{V_{C_i^{n+1/2}}} \int_{C_i^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{1}{V_{C_i^{n+1/2}}} \int_{C_i^{n+1/2}} \psi. \quad (1.11)$$

Como el volumen de la celda está definido por  $V_{C_i^{n+1/2}} = \Delta t \Delta x$ , podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dt dx + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dt dx \\ = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi dt dx. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Usando el teorema de Gauss, podemos integrar la ecuación anterior:

$$\frac{\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{q}}_i^n}{\Delta t} + \frac{\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} = \hat{\psi}_i^{n+1/2}, \quad (1.13)$$

en donde los promedios espaciales para las variables conservativas, los promedios temporales para los flujos y los promedios totales para las fuentes se han definido

---

<sup>4</sup>Una formulación integral, en realidad debería considerarse como la principal forma matemática para una ley de conservación, debido a que no depende de la suposición de diferenciabilidad.

respectivamente por:

$$\bar{\mathbf{q}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(t^n, x) dx, \quad (1.14)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(t, x_{i+1/2})) dt, \quad (1.15)$$

$$\hat{\psi}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi(t, x) dx dt. \quad (1.16)$$

Así, la idea general consiste en utilizar la ecuación (1.13), con sus expresiones integrales correspondientes, para determinar numéricamente la cantidad  $\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1}$ .

A primera vista pareciera que nuestro método alternativo, en vez de ayudarnos con el problema, lo complica, debido a que la integral del flujo (1.15) por lo general no es resoluble. ¿Cómo solucionar esto? Una opción interesante, es la que desarrollara Godunov<sup>5</sup>, la cual consiste en aproximar  $\mathbf{q}(t^n, x)$  por una función constante a trozos  $\tilde{\mathbf{q}}(t^n, x)$ . Con eso, nuestro problema podrá ser tratado para cada celda por separado, como si estas describieran una secuencia de choques. Y debido a que  $\tilde{\mathbf{q}}(t^n, x)$  es constante en cada celda, la evaluación de la integral (1.15), y por ende, la determinación de la cantidad  $\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1}$  a través de la ecuación (1.13), se vuelve trivial.

En términos numéricos, este método hace uso de lo que se denomina *reconstrucción de variables en las celdas*, la cual se expresa explícitamente de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{q}}_i, \quad \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \bar{\mathbf{q}}_{i+1} \quad (1.17)$$

en donde las variables  $\tilde{\mathbf{q}}_{i=1/2}^L$  y  $\tilde{\mathbf{q}}_{i=1/2}^R$  representan el estado del fluido inmediatamente a la izquierda y derecha de la interfase  $x_{i+1}$  entre celdas, respectivamente.

Aun cuando el método de Godunov, en la práctica, nos ayuda a superar la mayoría de nuestras dificultades numéricas, existe una segunda alternativa muy intere-

---

<sup>5</sup>Godunov S K 1959 *Mat Sb* 47 271.

sante, la cual nos permite mejorar la convergencia de nuestra simulación haciendo uso de reconstrucciones de mayor orden. A todos estos métodos se les denomina por el nombre de *high resolution shock-capturing*. Un caso particular, es el que propusiera van Leer<sup>6</sup>, en donde la función  $\tilde{\mathbf{q}}$  se fuerza a ser monótona cerca de las discontinuidades, con el fin de que la aproximación no introduzca falsas oscilaciones alrededor de dichos puntos. A este método se le denomina *total variation diminishing (TVD) minmod limiter*, y su algoritmo consiste esencialmente en lo siguiente. Primero, se calcula la pendiente (derivada de las variables dinámicas) centrada en las fronteras de la celda:

$$\mathbf{s}_{i+1/2} = \frac{\bar{\mathbf{q}}_{i+1} - \bar{\mathbf{q}}_i}{r_{i+1} - r_i}. \quad (1.18)$$

Segundo, se define “la pendiente límite”

$$\sigma_i = \text{minmod}(\mathbf{s}_{i-1/2}, \mathbf{s}_{i+1/2}), \quad (1.19)$$

donde la función (limitador) se define como:

$$\text{mindmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Y finalmente, se reconstruyen las variables a izquierda (L) y derecha (R):

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{q}}_i + \sigma_i(r_{i+1/2} - r_i), \quad (1.21)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \bar{\mathbf{q}}_{i+1} + \sigma_{i+1}(r_{i+1/2} - r_{i+1}). \quad (1.22)$$

En resumen, el método de volúmenes finitos, junto con el de Godunov o al de van Leer (TVD), nos proporciona una formulación muy elegante y poderosa para

---

<sup>6</sup>van Leer B 1979 *J. Comp. Physics* **32** 101.

resolver nuestro problema de evolución de las ecuaciones de Euler relativistas, en presencia de discontinuidades o choques, propias de la naturaleza de nuestro sistema físico. En el capítulo 3 veremos cómo implementar estos métodos en la evolución de nuestro sistema, por medio del resolutor de Harten, Lax y van Leer (HLL).

# Capítulo 2

## Configuración y datos iniciales

### 2.1. Consideraciones previas

Tal como lo adelantamos en la sección (1.1), el objetivo central de este trabajo es el estudio de la evolución temporal de algunas estrellas TOV. Dicha evolución, se desarrollará a partir de una condición inicial de equilibrio hidrostático para un fluido con simetría esférica y que obedece a una ecuación de estado politrópica. Todo esto dentro del contexto de la relatividad general, ya que por supuesto, queremos estudiar su comportamiento bajo la influencia de campos gravitacionales.

Debido a que nos interesa trabajar en coordenadas normales, partimos de una métrica en coordenadas de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\alpha^2(t,r)dt^2 + a^2(t,r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.1)$$

Si bien es cierto que existe libertad para renombrar los coeficientes a conveniencia, nuestro objetivo es visualizar de manera clara su interpretación física. En primer lugar, hemos considerado cantidades al cuadrado, para garantizar de antemano que el primer factor que acompaña a  $dt^2$  sea negativo, y el segundo que acompaña a  $dr^2$

sea positivo. En segundo lugar, hemos escogido puntualmente  $\alpha$  y  $a$  pensando en la conocida formulación 3+1, en la cual el elemento de línea más general es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.2)$$

donde  $\alpha$  representa el lapso entre hipersuperficies a  $t$  constante que folian el espacio-tiempo,  $\beta$  el shift o el vector desplazamiento entre un observador euleriano y uno que sigue líneas de coordenadas constante, y finalmente  $\gamma_{ij}$  que representa la 3-métrica espacial asociada a las hipersuperficies.

Como en nuestro caso no estamos interesados en el shift, hacemos  $\beta = 0$ . Entonces, ahora podemos identificar nuestro  $\alpha$  de la ecuación (2.1) precisamente con el lapso, así como también las componentes de la 3-métrica que son distintas de cero:  $\gamma_{rr} = \alpha^2$ ,  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$ ,  $\gamma_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ .

Otro elemento que necesitamos en nuestro sistema, y que es parte importantísima en las ecuaciones de Einstein, es el tensor de energía momento. En nuestro caso, el fluido que compone la estrella se modela con un fluido perfecto, por lo que el tensor queda determinado de la siguiente manera:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo del fluido,  $p$  la presión y  $h$  la entalpía específica, tal que  $h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0}$  con  $\epsilon$  describiendo la energía interna del fluido. También debemos tener presente que la cantidad  $u^\nu$  representa la 4-velocidad *local* (euleriana) del fluido, esto es  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ .

Finalmente señalar que en estos casos, la presión está relacionada con la densidad de energía total (incluyendo la masa) a través de una ecuación de estado, que

por lo general se escribe como  $p = p(\epsilon)$  o bien  $\epsilon = \epsilon(p)$ . Es importante tener en mente que tanto  $p$  como  $\epsilon$  están medidas en el sistema de referencia *local* y *en reposo* del fluido en cuestión.

## 2.2. Problema de los valores iniciales

A pesar de que la evolución de nuestro sistema constituye el objetivo fundamental de este trabajo, el estudio de los valores iniciales requieren su propio análisis y metodología. A continuación se explicará en detalle. De partida, necesitamos particularizar el elemento de línea, identificando la función métrica  $a^2(r)$  en términos de la masa “encerrada” por una esfera de radio  $r$ . Escrito de manera explícita es:

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.4)$$

en donde hemos asumido que  $t = 0$  (constante), y que las función métrica  $a$  y el lapso  $\alpha$  dependen solamente de la coordenada espacial  $r$ .

En términos generales, nuestro sistema obedece a la ecuación tensorial de Einstein  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$  para la geometría, así como a la ley de conservación de la masa  $\nabla_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0$  y la identidad de Bianchi para el tensor de Einstein, que puede expresarse en términos de una ley de conservación para el tensor de energía-momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  del fluido<sup>1</sup>. No obstante, cómo trabajar con estas ecuaciones no es para nada trivial, se recurrió a un práctico script de *Maple* que hace uso de la biblioteca GRTensor II<sup>2</sup>, y que lo adjunto en el apéndice B bajo el nombre de archivo

<sup>1</sup>En el capítulo 3 se profundizará un poco más acerca de las ecuaciones que rigen la dinámica de nuestro fluido, ya generalizando para tiempos  $t > 0$ .

<sup>2</sup>GRTensor II está disponible en la web de forma totalmente gratuita: <http://grtensor.org>.

PerfectFluidSpherical.mw. Específicamente, si ingresamos en dicho script la forma del tensor de energía-momento, utilizamos la condición inicial de equilibrio de que la velocidad lagrangiana del fluido  $v^r(t=0) = 0$  y hacemos un poco de álgebra con los resultados entregados por el script, es posible llegar a lo siguiente:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.5)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \alpha \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}. \quad (2.7)$$

Éstas son las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para una estrella esféricamente simétrica en equilibrio. Tal como ya se mencionó,  $m(r)$  se interpreta como la masa interior al radio  $r$ , por lo que la masa total de la estrella, se obtiene simplemente integrando la ecuación (2.5):

$$M_t = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr. \quad (2.8)$$

De manera similar, la masa total en reposo  $M_0$  se determina así:

$$M_0 = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0 (1 - 2M/r)^{-1/2} dr, \quad (2.9)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo.

Por otro lado, las cantidades  $\rho$  y  $\rho_0$  están relacionadas por:

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon), \quad (2.10)$$

así con esto, la entalpía específica queda definida de la siguiente manera:

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}(\rho + p). \quad (2.11)$$

Es interesante notar que hasta ahora, nuestro sistema está subdeterminado, ya que consta de tres ecuaciones diferenciales acopladas y cuatro incógnitas:  $m$ ,  $p$ ,  $\alpha$  y

$\rho$ . Aquí es cuando se hace necesario introducir una ecuación de estado, la cual no solo nos permitirá cerrar matemáticamente nuestro sistema de ecuaciones, sino también especificar información física relevante sobre la naturaleza de nuestra estrella. Aquí nos interesa estudiar un gas politrópico, por lo que usaremos la ecuación:

$$p = K\rho_0^\Gamma, \quad (2.12)$$

en donde  $K$  es la constante politrópica y  $\Gamma = 1 + 1/n$ , con  $n$  el índice politrópico. Por otro lado, como para un gas ideal se cumple que:

$$p = (\Gamma - 1)\rho_0\epsilon \Rightarrow \rho_0\epsilon = p/(\Gamma - 1), \quad (2.13)$$

la ecuación (2.10) queda de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon) = \rho_0 + \rho_0\epsilon = (p/K)^{1/\Gamma} + p/(\Gamma - 1). \quad (2.14)$$

Con esto, hemos encontrado una expresión para  $\rho$  en términos de la presión  $p$ , la cual se necesitará usar en nuestras ecuaciones TOV para los valores iniciales.

Notar que tanto la ecuación (2.6) como la (2.7) divergen en el punto origen, por lo que se necesitará recurrir a una expansión en serie de Taylor de  $m$  en torno a  $r = 0$  que detallamos a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{m + 4\pi r^3 p}{r^2 - 2mr} &\sim \frac{m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + O(r^4) + 4\pi r^3 p}{r^2 - 2r(m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + O(r^4))} \\ &\sim \frac{4\pi r p / 3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi r^2 / 3}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

en donde hemos evaluado las derivadas:

$$\begin{aligned} dm/dr|_{r=0} &= 4\pi r^2 \rho|_{r=0} = 0, \\ d^2m/dr^2|_{r=0} &= 4\pi(2r\rho + r^2\rho')|_{r=0} = 0, \\ d^3m/dr^3|_{r=0} &= 4\pi(2\rho + 2r\rho' + r^2\rho'')|_{r=0} = 8\pi\rho. \end{aligned}$$

Con esto, finalmente podemos reescribir las ecuaciones (2.6) y (2.7), ya regularizadas con respecto a la singularidad en el origen:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi\rho r^2/3}, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi\rho r^2/3}. \quad (2.17)$$

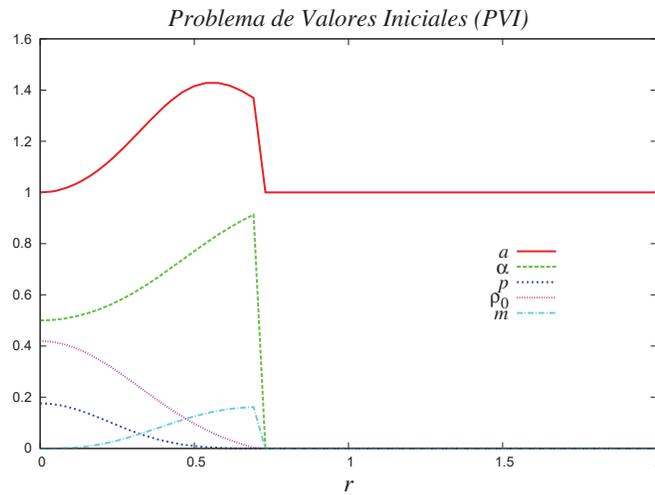
Aquí es importante señalar, que el valor del radio  $r$  nos indicará cuales ecuaciones debemos ocupar en la implementación del código. Específicamente, si  $r \leq dr$ , utilizaremos las últimas ecuaciones ya regularizadas. De lo contrario, si  $r > dr$ , procedemos a integrar con las ecuaciones diferenciales exactas (2.6) y (2.7)<sup>3</sup>.

Ya tenemos las ecuaciones TOV. El paso siguiente es proceder con la integración, utilizando las siguientes condiciones iniciales en  $r = 0$ :

- $m(0) = 0$  ya que en el origen el campo gravitacional debe ser cero ( $a(r) = 1$ ), es decir, el espacio-tiempo debe corresponder al de Minkowsky.
- $p(0) = K\rho_c^\Gamma$ , donde  $\rho_c$  es la densidad central de la estrella. Más adelante veremos que este valor dado es el que determinará la naturaleza de la evolución del sistema, ya sea estable o inestable.
- $\alpha(0) = \alpha_i$  que corresponde a un valor inicial dado para el lapso. Al final, la solución se podrá reescalar multiplicando por una constante, tal que fuera de nuestra estrella, la solución corresponda a la de Schwarzschild. Esto es válido porque la ecuación (2.5) permite que  $\alpha$  se multiplique por cualquier constante y siga siendo solución.

---

<sup>3</sup>Siempre se debe considerar que en términos de aproximación computacional, el código divergerá no solo cuando  $r = 0$ , sino también cuando  $r$  posee un valor muy cercano a 0.



**Figura 2.1:** Perfiles iniciales para una estrella TOV. Aquí se han utilizado los parámetros de entrada  $\Gamma = 2$  ( $n = 1$ ),  $K = 1$ ,  $\rho_c = 0,42$ ,  $\alpha_i = 0,5$ . Los resultados fueron: masa total  $M_t = 0,1616$ , masa en reposo  $M_0 = 0,1771$  y el radio de la estrella  $R = 0,7077$ .

Como podemos apreciar en la figura 2.1, los perfiles iniciales de algunas variables presentan una discontinuidad abrupta. La explicación de esto, es que en el código se implementó la integración de las ecuaciones solo hasta un valor de  $r$  tal que  $\rho_0 < floor$ , donde  $floor$  es una densidad atmosférica. ¿Por qué implementar esto? La respuesta es doble: primero, porque nos permite fijar la ubicación de la superficie de la estrella, y segundo, porque así evitamos que la entalpía, descrita en la ecuación (2.11), diverga para valores pequeños de la densidad de masa en reposo. Es importante mencionar, que para el caso de la figura, en concreto se utilizó un valor de  $floor = 1 \times 10^{-8}$ .

Considerando esto, es claro que nuestra solución queda incompleta, por lo que se necesita implementar algunos elementos adicionales, y que se explican a continuación. Como recordaremos de mecánica newtoniana, cuando tenemos una dis-

tribución de materia esféricamente simétrica, el campo gravitacional en cualquier punto exterior a dicha distribución dependerá solamente de la masa interior a dicho punto. Esto es válido incluso si la distribución presenta un movimiento esféricamente simétrico. Lo interesante, es que este resultado tiene su análogo en Relatividad General, y se conoce con el nombre de *Teorema de Birkhoff*, el cual establece que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo en el vacío, debe ser estática y asintóticamente plana. Esto significa, que la solución exterior estará dada por la métrica de Schwarzschild:

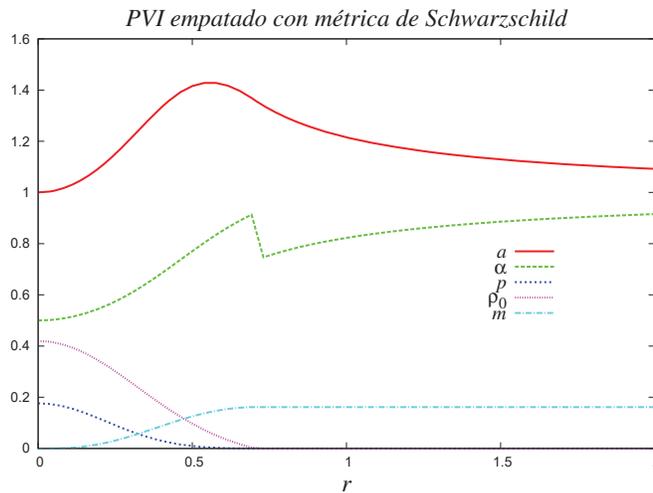
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.18)$$

Entonces ahora, ya con este teorema, el procedimiento simplemente será empatar nuestra solución con la solución de Schwarzschild. Explícitamente, si comparamos la métrica (2.4) con la Schwarzschild, solo bastará con hacer  $\alpha = \left(1 - \frac{2M_t}{R}\right)^{1/2}$  justo a partir de la superficie, y donde  $M_t$  es la masa total de la estrella. Los resultados pueden apreciarse en la figura 2.2.

Ahora bien, notemos que persiste una discontinuidad en la función lapso  $\alpha$ , la cual se comprende si recordamos que cuando especificamos la condición inicial para dicha variable, señalamos que se podía reescalar la solución final multiplicando por una constante. Sea  $\tilde{\alpha} = \gamma\alpha$  donde  $\gamma$  es una constante tal que cumple con  $\tilde{\alpha}(R) = \gamma\alpha(R)$  y  $\tilde{\alpha}(R) = 1/a(R)$ , y donde  $R$  denota la ubicación espacial de la superficie de la estrella. De estas condiciones se tiene que  $\gamma = \tilde{\alpha}(R)/\alpha(R) = 1/(a(R)\alpha(R))$ , por lo que finalmente obtenemos un factor de reescalamiento para el lapso  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha} = \alpha / (a(R)\alpha(R)). \quad (2.19)$$

El resultado final para el problema de los valores iniciales, ya con todas las consideraciones anteriores, puede verse en la gráfica (2.3).

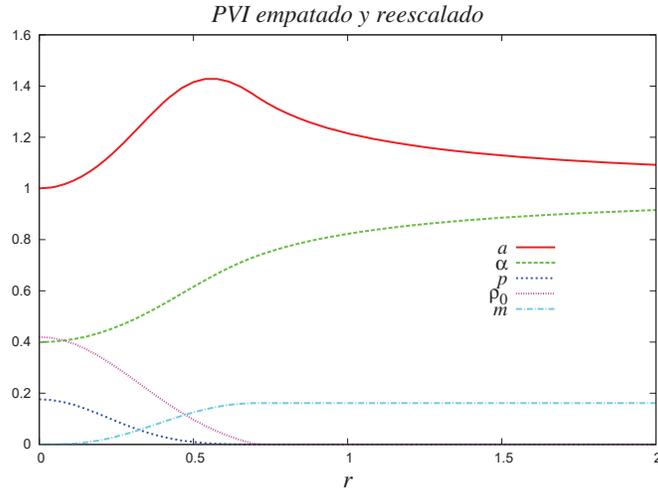


**Figura 2.2:** Perfiles iniciales de la estrella TOV, usando funciones métricas empatadas con la solución de Schwarzschild justo a partir de la discontinuidad que define la superficie.

## 2.3. Estabilidad e inestabilidad

En la práctica, la gran ventaja de resolver el problema de los valores iniciales, es que nos permite visualizar información física relevante de nuestra estrella, esto con el fin de estudiar modelos algo más realistas desde el punto de vista astrofísico. El procedimiento generalmente es realizar gráficas de la masa de la estrella en función de la densidad central, con el objeto de determinar *a priori* los rangos para los cuales nuestra evolución se encontrará en la rama estable o inestable. En otras palabras, y tal como veremos en el siguiente capítulo, las dos regiones que definen la naturaleza de la evolución del sistema, ya sea en forma de oscilaciones (estable) o de colapso a un agujero negro (inestable).

Es muy importante tener en mente, que la configuración de nuestro sistema, y por ende, la forma de los perfiles para la masa en función de la densidad central, dependerá principalmente de los parámetros asociados a la naturaleza de nuestra



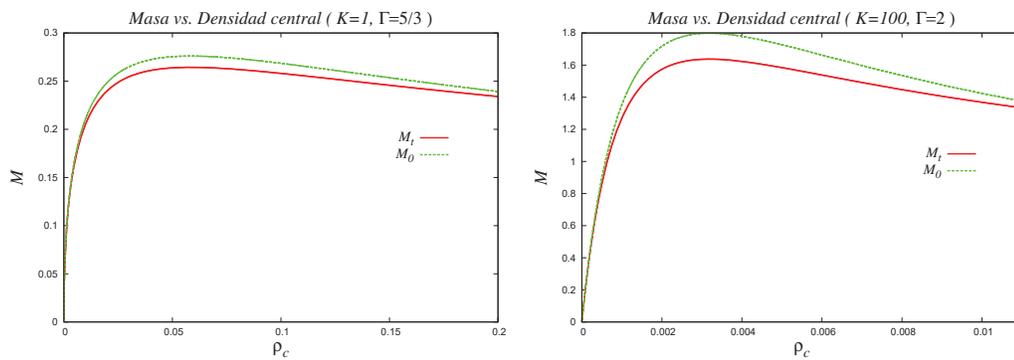
**Figura 2.3:** Problema de los valores iniciales para la estrella TOV, con las funciones métricas ya empatadas y reescaladas.

estrella<sup>4</sup> que se ingresan en el “input” de nuestro código, a saber: la densidad central de la estrella  $\rho_c$ , la constante politrópica  $K$  y el factor  $\Gamma$  asociado al índice politrópico  $n$ . Sin embargo, haciendo la salvedad de que estos parámetros son *potencialmente físicos*, ya que claramente solo algunos de sus posibles valores dan cuenta de escenarios realistas desde el punto de vista astrofísico. En este trabajo me enfocaré a estudiar básicamente dos configuraciones, tal que permiten modelar estrellas físicamente interesantes.

Un caso de mucha relevancia es el asociado a un gas de fermiones degenerados no interactuantes, ya que como se conoce de Mecánica Estadística, siempre es

<sup>4</sup>Como toda simulación computacional, los resultados obtenidos también estarán condicionados por factores propios de la aproximación numérica tales como su naturaleza y orden, la resolución, los métodos diferenciales e integrales asociados a la evolución, las dimensiones de nuestro dominio espacio-temporal, entre otros.

posible expresar su ecuación de estado como la de un gas ideal, politrópico. En particular, estudiaré la configuración con  $\Gamma = \frac{5}{3}$ , asociada a un gas fermiónico en el límite no relativista, cuya importancia observacional radica en el hecho de que permite modelar objetos compactos como enanas blancas, las cuales están formadas por electrones degenerados. Una segunda configuración de interés físico que también analizaré, es la asociada a  $\Gamma = 2$ , ya que en la práctica corresponde a un modelo de estrella TOV que incluye, en una primera aproximación, interacciones de tipo nuclear. Para cambiar un poco las magnitudes, en este caso utilizaremos  $K = 100$ .



**Figura 2.4:** Perfiles resultantes para la masa total y en reposo, en función de la densidad central correspondiente a: una estrella de electrones degenerados en el límite no relativista (izquierda) y un modelo de estrella que incluye en una primera aproximación interacciones de tipo nucleares (derecha).

Como podemos ver de la gráfica 2.4, si bien la forma de los perfiles es muy similar, las escalas difieren en un orden de magnitud. De todas formas esto no debería extrañarnos, ya que al modificar nuestro modelo de  $K = 1$  a  $K = 100$ , en la práctica se interpreta como cambiar la naturaleza y constitución misma de la estrella. Notar además que en ambos casos existe una evidente distinción entre las ramas estable,

con pendiente  $dM/d\rho_c > 0$ , e inestable, con  $dM/d\rho_c < 0$ <sup>5</sup>. Los puntos críticos están ubicados en el máximo de las gráficas. Estos valores extremos se obtuvieron a través del código, y los resultados fueron los siguientes:

- Caso  $\Gamma = \frac{5}{3}$ ,  $K = 1$

$$\rho_c^{(crit)} = 5,840 \times 10^{-2}, M_t^{(crit)} = 0,264, M_0^{(crit)} = 0,276.$$

- Caso  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$

$$\rho_c^{(crit)} = 3,168 \times 10^{-3}, M_t^{(crit)} = 1,637, M_0^{(crit)} = 1,798.$$

Dos comentarios finales. Primero, que todas las configuraciones anteriores se ejecutaron en el código utilizando un valor inicial para el lapso  $\alpha_i = 0,5$ . Y segundo, que la densidad central crítica calculada y detallada en los cuatro diferentes casos, está asociada a la gráfica de masa total  $M_t$  en función de la densidad central  $\rho_c$ , ya que esta masa es la que se encuentra involucrada en las ecuaciones de evolución, y que detallaremos en el siguiente capítulo.

---

<sup>5</sup>Para un análisis exhaustivo acerca de la estabilidad e inestabilidad de diversos objetos compactos, recomiendo: Stuart L. Shapiro, Saul A. Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VHC, 1983.

# Capítulo 3

## Evolución del sistema

### 3.1. Consideraciones previas

Una vez visualizado el panorama general de este trabajo, resuelto el problema de los valores iniciales y ya seleccionadas las configuraciones de interés físico con sus ramas estables e inestables, el siguiente paso es evolucionar algunas estrellas TOV particulares. Para esto, resulta imprescindible plantear nuestro sistema de ecuaciones de evolución, el cual estará compuesto por tres ecuaciones de Einstein para la evolución de la geometría y tres ecuaciones de Euler para la evolución de la Hidrodinámica. Por otro lado, y como estas ecuaciones involucran cinco variables primitivas a determinar:  $a(t, r)$ ,  $\alpha(t, r)$  para la geometría y  $\rho_0(y, r)$ ,  $v^r(t, r)$ ,  $p(t, r)$  para el fluido, la ecuación diferencial restante, que define una restricción hamiltoniana, se utilizará para monitorear la convergencia de nuestras soluciones y así verificar que se satisfacen las ecuaciones de Einstein. Esto último constituirá el criterio numérico definitivo para determinar la validez de las soluciones encontradas.

## 3.2. Ecuaciones para la geometría

Tal como lo adelantamos en el capítulo anterior, las ecuaciones que describen la dinámica de nuestro sistema, pero ahora para la métrica (2.1) con  $\alpha$  y  $a$  dependientes de  $t$  y  $r$ , son las ecuaciones de Einstein, que se expresan en su forma tensorial así:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

en donde hemos recurrido a unidades geométricas con  $G = c = 1$ , y el tensor de energía-momento descrito por la ecuación (2.3).

Ahora bien, explotando las simetrías de nuestro sistema, es posible reducir esta complicada ecuación tensorial a tres ecuaciones escalares bastante más simples. Sin embargo, como el procedimiento no es para nada trivial, nuevamente volvemos a recurrir al script de *Maple* basado en GRTensor II<sup>1</sup>. Con esto, y luego de realizar un poco de álgebra con las expresiones entregadas por dicho script, fue posible reescribir las ecuaciones de Einstein de la siguiente manera:

$$\partial_t a = -4\pi r \alpha a S_r, \quad (3.2)$$

$$\partial_r a = a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) - \frac{m}{r^2} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{m}{r^2} \right], \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>El script `PerfectFluidSpherical.mw` se adjunta completamente en el apéndice B

Aquí hemos introducido las siguientes variables conservativas<sup>2</sup>:

$$D = \rho_0 W, \quad (3.5)$$

$$S_r = \rho_0 h W^2 v_r, \quad (3.6)$$

$$\tau = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W. \quad (3.7)$$

con  $W = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_{ij}v^i v^j}}$  el factor de Lorentz, las cuales, como veremos en la siguiente sección, son cantidades que además de optimizar la implementación de nuestro código, permitirán expresar las ecuaciones para la hidrodinámica en forma de balance de flujos. También es importante señalar que la función métrica  $a$  está relacionada con la masa a través de la ecuación  $a^2 = \frac{1}{1-2m(r)/r}$ .

Dos comentarios breves. Primero, que es muy importante tener presente que las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4), tal como se muestra en el script del apéndice B, corresponden precisamente a las componentes  $G_{tr}$ ,  $G_{tt}$  y  $G_{rr}$  de las ecuaciones de Einstein, respectivamente. Y segundo, que aun cuando estas ecuaciones involucran variables asociadas al fluido, esencialmente describen la evolución de la *geometría* del espacio-tiempo, la cual está descrita por el lapso  $\alpha(r, t)$  y la función métrica  $a(r, t)$ .

### 3.3. Ecuaciones para la hidrodinámica

El hecho de que el sistema evolucione de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, en general implica que tanto la curvatura del espacio-tiempo como la materia, descritas por el lado derecho e izquierdo de la ecuación (3.1) respectivamente, se al-

---

<sup>2</sup>Hemos seguido la notación desarrollada en: S. T. Millmore y I. Hawke, *Class. Quantum Grav.* 27 (2010) 015007.

imentan mutuamente. Sin embargo, es muy interesante notar que este proceso de acoplamiento necesita de relaciones adicionales para poder cerrar el sistema de ecuaciones. En cierto sentido esto no debiera resultarnos tan extraño, ya que en física por lo general nos encontramos con sistemas, que aparte de dejarse modelar a través de ecuaciones de evolución, se hace necesario integrar constricciones y leyes de conservación adicionales que no solo cierran nuestro sistema de ecuaciones, sino que también describen aspectos físicos esenciales no considerados en la ecuaciones de evolución principales. Es dentro de este marco, que en nuestro caso se necesitará incluir ecuaciones adicionales, que partiendo de determinadas leyes de conservación, nos permitirá resolver el problema de la evolución del sistema.

Ahora bien, las ecuaciones de Euler relativistas para la hidrodinámica estarán dadas por la conservación de la masa, ley básica que debe cumplir nuestro sistema; y la identidad de Bianchi para el tensor de Einstein, que físicamente se puede interpretar como una ley de conservación de la energía local, debido a que puede expresarse en términos de una divergencia covariante del tensor de energía-momento. Específicamente:

$$\nabla_{\mu}(\rho_0 u^{\mu}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

Al igual que en el caso para la geometría, estas ecuaciones tensoriales se pueden traducir a tres ecuaciones escalares en derivadas parciales para la métrica (2.1). Haciendo un poco de álgebra, la primera de ellas se pueden derivar fácilmente a partir de (3.8). Haciendo uso de  $\nabla_{\mu} \zeta^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu}(\sqrt{-g} \zeta^{\mu})$ , se tiene lo siguiente:

$$\nabla_{\mu}(\rho_0 u^{\mu}) = \partial_{\mu}(\sqrt{-g} \rho_0 u^{\mu}) = 0. \quad (3.10)$$

Pero como el tensor métrico está dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

el valor de su determinante es  $g = -\alpha^2 a^2 r^4 \sin^2 \theta$ . Con esto, nos queda:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\sqrt{-g}\rho_0 u^\mu) &= \partial_\mu(\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 u^\mu) \\ &= \partial_0(\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 u^0) + \partial_i(\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 u^i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como trabajamos en coordenadas esféricas, es muy útil introducir las siguientes relaciones, provenientes de la relatividad especial:

$$u^0 = u^t = \frac{W}{\alpha}, \quad (3.13)$$

$$u^i = W v^i = u^r = W v^r, \quad (3.14)$$

con  $v^r$  la 4-velocidad lagrangiana del fluido y  $W = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_{ij}v^i v^j}}$  el factor de Lorentz.

Ahora nuestra ecuación de conservación nos queda así:

$$\begin{aligned} \partial_t(a r^2 \sin \theta \rho_0 W) + \partial_r(\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 W v^r) &= 0, \\ \Rightarrow \partial_t(a \rho_0 W) + \frac{1}{r^2} \partial_r(\alpha a r^2 \rho_0 W v^r) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tal como ya lo adelantamos en la sección anterior, nos interesa realizar un cambio de variable tal que permita reescribir nuestras expresiones como ecuaciones de balance de flujos. Por lo tanto, al introducir la variable conservativa  $D = \rho_0 W$ , obtenemos la primera ecuación de evolución para la hidrodinámica:

$$\partial_t(a D) + \frac{1}{r^2} \partial_r(\alpha r^2 a D v^r) = 0. \quad (3.16)$$

Derivar las otras ecuaciones a partir de (3.9) es algo más complicado, por lo que se recurre nuevamente al script de GRTensor II<sup>3</sup>. Luego de realizar un poco de algebra con los resultados, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\partial_t(aS_r) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2[S_r v^r + p]) = -\alpha \frac{a^3 m}{r^2}(S_r v^r + \tau + p + D) + \alpha a \frac{2p}{r}, \quad (3.17)$$

$$\partial_t(a\tau) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2(\tau + p)v^r) = -\alpha \frac{am}{r^2}S_r, \quad (3.18)$$

en donde hemos introducido las otras dos variables conservativas restantes, a saber:

$$S_r = \rho_0 h W^2 v_r \text{ y } \tau = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W.$$

Existe una forma compacta de escribir las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18), tal que refleje una ley de conservación general<sup>4</sup>:

$$\partial_t(a\mathbf{q}) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2\mathbf{f}(\mathbf{q})) = \mathbf{s}(\mathbf{q}), \quad (3.19)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de estado de las variables conservativas,  $\mathbf{f}$  el vector de flujos y  $\mathbf{s}$  el vector de fuentes, los cuales estan dados explícitamente por:

$$\mathbf{q} = [D, S_r, \tau], \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = [Dv^r, S_r v^r + p, (\tau + p)v^r], \quad (3.21)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}) = \alpha a \left[ 0, -\frac{a^2 m}{r^2}(S_r v^r + \tau + p + D) + \frac{2p}{r}, -\frac{m}{r^2}S_r \right]. \quad (3.22)$$

Desafortunadamente, la ecuación (3.19) presenta dos singularidades en el origen: una debida al factor  $\frac{1}{r^2}$  que acompaña a la derivada espacial y otra debida al término  $\frac{2p}{r}$  presente en la segunda componente del vector de fuentes  $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ . Para el primer

<sup>3</sup>El script PerfectFluidSpherical.mw se adjunta completamente en el apéndice B

<sup>4</sup>Hemos seguido la notación desarrollada en: S. T. Millmore y I. Hawke, Class. Quantum Grav. 27

caso, regularizaremos haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r^3} \frac{\partial r^3}{\partial r} = 3 \frac{\partial f}{\partial r^3}, \quad (3.23)$$

en donde hemos eliminado el factor divergente. Con esto, ahora podemos reescribir la ecuación (3.19) de la siguiente manera:

$$\partial_t(a\mathbf{q}) + 3\partial_{r^3}(\alpha ar^2 \mathbf{f}(\mathbf{q})) = \mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (3.24)$$

Ahora bien, para el tratamiento del segundo factor divergente, conviene desarrollar la segunda componente de la ecuación (3.24):

$$\partial_t(aS_r) + 3\partial_{r^3}(\alpha ar^2 [S_r v^r + p]) = \alpha a \left[ -\frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D) + \frac{2p}{r} \right].$$

De aquí, consideraremos el segundo sumando del segundo término a la izquierda de la igualdad, junto con el término  $\frac{2p}{r}$  presente en la fuente a la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3\partial_{r^3}(\alpha ar^2 p) - \alpha a \frac{2p}{r} &= \frac{1}{r^2} \partial_r(\alpha ar^2 p) - \alpha a \frac{2p}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} [2r\alpha ap + r^2 \partial_r(\alpha ap)] - \alpha a \frac{2p}{r} \\ &= \alpha a \frac{2p}{r} + \partial_r(\alpha ap) - \alpha a \frac{2p}{r} \\ &= \partial_r(\alpha ap), \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la ecuación (3.23) para convertir la derivada  $\partial_r^3$  en una de  $\partial_r$ . Aquí lo interesante, es que el término resultante  $\partial_r(\alpha ap)$  puede utilizarse para redefinir nuestra ecuación (3.24):

$$\partial_t(a\mathbf{q}) + 3\partial_{r^3}(\alpha ar^2 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{q})) + \partial_r(\alpha a \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{q})) = \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) \quad (3.25)$$

introduciendo los nuevos vectores de flujos y fuentes<sup>5</sup>:

$$\mathbf{f}^{(1)} = [ Dv^r, S_r v^r, (\tau + p)v^r ], \quad (3.26)$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = [ 0, p, 0 ], \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \alpha a \left[ 0, -\frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D), -\frac{m}{r^2} S_r \right]. \quad (3.28)$$

Así entonces, hemos construido finalmente una ecuación para el fluido, que no es sensible a ningún tipo de singularidad en el origen<sup>6</sup>.

Un comentario final. Como las ecuaciones de evolución para la hidrodinámica no involucran directamente las derivadas temporales de las variables conservativas  $\mathbf{q}$ , sino más bien de variables del tipo  $a\mathbf{q}$ , en nuestro código, más que definir arreglos para  $D$ ,  $S_r$  y  $\tau$ , se hizo necesario definirlos para  $aD$ ,  $aS_r$  y  $a\tau$ .

### 3.4. Reconstrucción de variables primitivas

Obtenidas las ecuaciones para el fluido, es interesante notar que todos los flujos y fuentes involucran tanto las variables conservativas, así como las variables primitivas. Es por esta razón que se torna esencial reconstruir las variables primitivas a cada paso de tiempo. Para esta labor, recurriremos a las definiciones de las variables conservativas, y así resolver para  $\rho_0$ ,  $v^r$  y  $p$  en función de las nuevas variables. En

<sup>5</sup>Hemos seguido la notación desarrollada en: S. T. Millmore y I. Hawke, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 015007.

<sup>6</sup>A primera vista, podría pensarse que el factor  $\frac{1}{r^2}$  presente en la segunda y tercera componente del vector  $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{q})$  produce una singularidad en el origen. Sin embargo, aquello no es correcto, ya que en ambas componentes, dicha cantidad va multiplicada por la masa  $m$ , cantidad que al tender también a cero en el origen, permite obtener en definitiva un resultado finito.

primer lugar partimos de la ecuación (3.3) para  $D$ :

$$\begin{aligned} D &= \rho_0 W, \\ \Rightarrow \rho_0 &= \frac{D}{W} = \frac{aD}{a} \sqrt{1 - a^2(v^r)^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ahora de la ecuación (3.6) para  $S_r$  tenemos:

$$\begin{aligned} S_r &= \rho_0 h W^2 v_r, \\ \Rightarrow v^r &= \frac{S_r}{\rho_0 h W^2} = \frac{S_r}{a^2(\tau + p + D)} = \frac{aS_r}{a^2(a\tau + ap + aD)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para la presión, recurriremos a las ecuaciones (2.13), (2.11) y utilizaremos las expresiones anteriores para las variables conservativas:

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 \epsilon(\Gamma - 1) \\ &= (\rho_0 h - \rho_0 - p)(\Gamma - 1) \\ &= (\Gamma - 1) \left[ \frac{S_r}{W^2 v_r} - \frac{D}{W} - p \right] \\ &= (\Gamma - 1) \frac{D}{W} \left[ \frac{S_r / v_r - DW - pW^2}{DW} \right] \\ &= \rho_0 (\Gamma - 1) \left[ \frac{\tau + D(1 - W) + p(1 - W^2)}{DW} \right] \\ &= \rho_0 (\Gamma - 1) \left[ \frac{a\tau + aS_r(1 - W) + ap(1 - W^2)}{aDW} \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

No olvidando que el factor de Lorentz se define como  $W = W(v^r(p))$ , podemos ver que obtener la presión en realidad no es trivial, ya que involucra una ecuación trascendente. Para resolver esto, en primer lugar se recurrió a un script de Maple<sup>7</sup> que desarrolla la ecuación (3.31), para posteriormente ser implementada en el código a través del tradicional algoritmo de Newton-Raphson que permite resolver dicha ecuación trascendente.

<sup>7</sup>El script `PressureTOVnoshift.mw` también se adjunta totalmente en el apéndice B

Finalmente mencionar que tal como en la evolución es necesario implementar esta reconstrucción, en nuestro problema de valores iniciales, una vez obtenidos los perfiles para  $m(t, r)$ ,  $p(t, r)$ ,  $\alpha(t, r)$ , también se hizo necesario implementar transformaciones tal que permitieran definir nuestras variables conservativas, en función de las primitivas, al tiempo  $t = 0$ . La razón de que no se haya mencionado esto explícitamente en el capítulo 2, se debe a que la necesidad de introducir nuevas variables conservativas aparece básicamente como consecuencia de escribir nuestras ecuaciones de evolución de la hidrodinámica, en forma de balance de flujos.

### 3.5. Evolución con resolvidor HLL

Tal como lo adelantamos al comienzo del capítulo, el objetivo principal es evolucionar nuestro sistema por medio del método de volúmenes finitos utilizando el resolvidor de Harten, Lax y van Leer (HLL) para los flujos numéricos. Pero ¿en qué consiste dicho resolvidor? Como por ahora no estamos interesados en estudiar su formalismo matemático, simplemente señalaremos que constituye una forma de redefinir nuestros flujos involucrados en la ecuación (3.25), haciendo uso de las nuevas variables, que construyéramos a la derecha e izquierda de las interfases entre celdas por medio del método de volúmenes finitos, ya sea con la formulación de Godunov o la de van Leer (TVD)<sup>8</sup>. Haciendo uso de la formulación de Font, Miller,

---

<sup>8</sup>Es posible encontrar mayor información acerca del formalismo matemático detrás del resolvidor HLL en: Toro E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practica Introduction*. Germany, Springer, 1999

Suen y Tobias<sup>9</sup>, y una vez reconstruídas las nuevas variables, necesitamos considerar la descomposición espectral de la siguiente matriz Jacobiana<sup>10</sup>:

$$[\mathbf{A}] = \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\mathcal{U}}} \quad (3.32)$$

y en particular, tres de sus velocidades características (autovalores), que en la práctica describen tres ondas físicas que aparecen en este tipo de problemas con discontinuidades: onda de contacto, onda de choque y onda de rarefacción:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha v^r - \beta^r, \\ \lambda_{\pm} &= \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left[ v^r (1 - c_s^2) \pm \sqrt{c_s^2 (1 - v^2) [\gamma^{rr} (1 - v^2 c_s^2) - v^r v^r (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^r, \end{aligned}$$

donde  $v^2 = \gamma_{rr} v^r v^r$  y la variable  $c_s$  describiendo la velocidad del sonido. Como en nuestro caso nos interesa estudiar un gas ideal, se tiene que

$$p = \rho \epsilon (\gamma - 1), \quad (3.33)$$

$$\chi = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\epsilon} = \frac{p}{\rho}, \quad (3.34)$$

$$\kappa = \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} = \rho (\gamma - 1), \quad (3.35)$$

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0}, \quad (3.36)$$

y por ende, la velocidad del sonido queda expresada de la siguiente manera<sup>11</sup>:

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_{\mathcal{S}} = \frac{\chi}{h} + \frac{p\kappa}{\rho^2 h} = \frac{p\gamma(\gamma - 1)}{p\gamma + \rho(\gamma - 1)}. \quad (3.37)$$

<sup>9</sup>J. A. Font, M. Miller, W-M. Suen, M. Tobias, Phys. Rev. D 61, 044011 (2000)

<sup>10</sup>Cabe mencionar que dicha matriz Jacobiana proviene de reescribir nuestra tradicional ecuación de balance de flujos  $\partial_i \vec{\mathcal{U}} + \partial_r \vec{f}^i(\vec{\mathcal{U}}) = \vec{s}^i(\vec{\mathcal{U}})$  en la forma  $\partial_i \vec{\mathcal{U}} + \partial_{ij} \vec{f}^i \partial_r \vec{\mathcal{U}} = \partial_i \vec{\mathcal{U}} + [\mathbf{A}] \partial_r \vec{\mathcal{U}} = \vec{s}^i(\vec{\mathcal{U}})$ .

<sup>11</sup>Se ha seguido la notación de L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987).

Con esto, finalmente reescribimos nuestros flujos así:

$$\mathbf{f}^{HLL} = \frac{\lambda^+ \mathbf{f}(\mathbf{q}^L) - \lambda^- \mathbf{f}(\mathbf{q}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\mathbf{q}^R - \mathbf{q}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (3.38)$$

donde  $\lambda^{\pm}$  está definido por:

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \text{máx}(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L), \\ \lambda^- &= \text{mín}(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Aquí  $\mathbf{q}^L$  y  $\mathbf{q}^R$  son los valores de las variables conservativas reconstruidas a la izquierda y derecha de la interfase entre celdas, respectivamente. Finalmente, es importante señalar que en el código también se calcularon a izquierda y derecha las variables primitivas  $p$ ,  $v_r$ ,  $a$  y  $\alpha$ , aún cuando en la ecuación (3.38) no aparece explícitamente.

## 3.6. Metodología e Implementación

### 3.6.1. Resolución del sistema

Ya con todos los ingredientes necesarios a nuestra disposición y que fueron explicados en las secciones y capítulos anteriores, estamos en plenas condiciones de detallar la metodología e implementación que utilizaremos para evolucionar nuestro sistema. En primer lugar, es necesario enfatizar que tenemos un total de seis ecuaciones en derivadas parciales acopladas a resolver: (3.2)-(3.3) describiendo la evolución de la geometría y (3.25) definiendo tres ecuaciones para las variables conservativas que dan cuenta de la evolución del fluido. Se hace necesario escribirlas

nuevamente en detalle, a continuación:

$$\partial_t a = -4\pi r \alpha a S_r, \quad (3.40)$$

$$\partial_r a = a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) - \frac{m}{r^2} \right], \quad (3.41)$$

$$\partial_r \alpha = \alpha a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{m}{r^2} \right], \quad (3.42)$$

$$\partial_t(a\mathbf{q}) = -3\partial_{r,3}(\alpha a r^2 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{q})) - \partial_r(\alpha a \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{q})) + \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{q}). \quad (3.43)$$

donde  $p = (\Gamma - 1)\rho$  (ecuación de estado),  $m = m(r) = \frac{r}{2}(1 - 1/a^2)$  es la masa “encerrada” por una esfera de radio  $r$ ,  $\rho = \rho_0(1 + \epsilon)$  con  $\rho_0$  la densidad de masa en reposo del fluido,  $\epsilon$  la densidad de energía total del sistema y los vectores  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{f}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)}$  y  $\bar{\mathbf{s}}$  dados por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{q} = [D, S_r, \tau], \quad (3.44)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = [Dv^r, S_r v^r, (\tau + p)v^r], \quad (3.45)$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = [0, p, 0], \quad (3.46)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \alpha a \left[ 0, -\frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D), -\frac{m}{r^2} S_r \right]. \quad (3.47)$$

Por otro lado, es importante tener en mente que nuestras incógnitas son cinco: el lapso  $\alpha(t, r)$ , la función métrica  $a(t, r)$  y las variables conservativas asociadas al fluido  $D(t, r)$ ,  $S_r(t, r)$  y  $\tau(t, r)$ . Estas últimas, por supuesto, se construyeron a partir de las variables primitivas. Explícitamente:  $D = \rho_0 W$ ,  $S_r = \rho_0 h W^2 v_r$  y  $\tau = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W$ , donde  $W = W(v^r(p)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 v^r v_r}}$  es el factor de Lorentz.

El procedimiento que se implementó en el código para resolver este sistema de ecuaciones, se detalla a continuación. Una vez resuelto el problema de los valores iniciales al tiempo  $t = t^{(n=0)}$ <sup>12</sup>, para el tiempo  $t = t^{(n=1)}$  se tiene lo siguiente:

<sup>12</sup>El problema de los valores iniciales se estudió y explicó muy detalladamente en el capítulo 2.

1. Se integra en el espacio la ecuación (3.42) para la función lapso  $\alpha(t^n, r)$ , a través de un resolvidor de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que hace uso de un algoritmo de Runge-Kutta de orden 4.
2. Se integran en el tiempo las ecuaciones (3.43), para las variables conservativas  $aD(t^n, r)$ ,  $aS_r(t^n, r)$  y  $a\tau(t^n, r)$ , a través del método de líneas + método de volúmenes finitos + resolvidor HLL (*high resolution shock-capturing*).
3. Se integra en el tiempo la ecuación (3.40) para la función métrica  $a(t^n, r)$ , a través del método de líneas, el cual hace uso de un algoritmo de Runge-Kutta, pero esta vez de orden 3.
4. Se reconstruyen las variables primitivas  $\rho_0(t^n, r)$ ,  $v^r(t^n, r)$  y  $p(t^n, r)$  a partir de los resultados obtenidos para las variables conservativas.
5. Finalmente, se repite el procedimiento para cada paso  $n$  en el tiempo.

Algo que debemos tener muy presente es que nuestro sistema a resolver se encuentra sobredeterminado (6 ecuaciones, 5 incógnitas), por lo que en la implementación del código, la ecuación (3.41) se utilizó como una restricción hamiltoniana para diagnosticar la convergencia de nuestras soluciones y verificar que se satisfacen las ecuaciones de Einstein. Escrito de manera explícita:

$$-\partial_r a + a^3 \left[ 4\pi r(\tau + D) - \frac{m}{r^2} \right] = \mathcal{O} = Ham(t, r). \quad (3.48)$$

Con la ecuación (3.48), y tal como se expone en el apéndice A, se verificará de que al aumentar la resolución en un factor  $k$ , la gráfica de dicha restricción precisamente variará en un factor de  $k^n$ , donde  $n$  es número de orden de la aproximación.

### 3.6.2. Discretización de las ecuaciones

Una vez expuesta la metodología a seguir para la resolución de nuestro sistema de ecuaciones, la pregunta natural que surge es cómo implementarlas de manera concreta en el código computacional? Porque claro, es evidente que no es posible ingresar nuestras ecuaciones al computador, tal como aparecen en 3.40-3.43, debido a que se requieren discretizar de acuerdo a nuestras aproximaciones numéricas. A continuación se detallará la forma en que dichas ecuaciones se implementaron en el código, siguiendo los métodos señalados anteriormente.

Consideremos en primer lugar las ecuaciones que dan cuenta de la evolución de la geometría, esto es, las ecuaciones de Einstein. Partiendo de la ecuación 3.42 para el lapso  $\alpha(t, r)$ , utilizando el hecho de que  $m = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$  y haciendo un poco de álgebra es posible obtener lo siguiente:

$$\partial_r \alpha = \frac{\alpha a^2}{r^2} \left[ 4\pi r^3 \left( \frac{(aS_r)v^r}{a} + p \right) + \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{1}{a^2} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Ahora, teniendo en mente que  $a^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$ , podemos escribir la ecuación para el lapso ya en su versión discretizada:

$$\partial_r \alpha \equiv rhs(\alpha) = \frac{\alpha \left[ 4\pi r_i^3 \left( \frac{\mathbf{aS}_{r_i} \mathbf{v}_i^r}{\mathbf{a}_i} + \mathbf{p}_i \right) + \frac{r_i}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mathbf{a}_i^2} \right) \right]}{r_i^2 - 2 \left[ \frac{r_i}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mathbf{a}_i^2} \right) \right] r_i}, \quad (3.50)$$

en donde se han definido los arreglos  $\mathbf{r}_i$  para la coordenada radial,  $\mathbf{p}_i$  para la presión,  $\mathbf{a}_i$  para la función métrica,  $\mathbf{v}_i^r$  para la velocidad y  $\mathbf{aS}_{r_i}$  para una de las variables conservativas, con el índice  $i$  tomando valores enteros como máximo entre 0 y  $N_x$ , dependiendo de las condiciones de frontera utilizadas para cada variable. La notación  $rhs(\alpha)$ , tal como se explicó en la sección 1.3, representa la parte derecha de la ecuación semi-discretizada, haciendo la salvedad que en este caso da cuenta de una

derivada espacial y no temporal, a resolver por medio de un algoritmo de Runge-Kutta de orden 4. Ahora bien, se requiere adicionar una última consideración. Cómo en el código, dicha expresión diverge para valores pequeños de  $\mathbf{r}_i$ , recurrimos a la misma expansión en serie de Taylor utilizada en el problema de los valores iniciales, ecuación (2.15), pero haciendo el cambio de variable  $p \rightarrow \bar{p} = \frac{aS_r v^r}{a} + p$ :

$$\frac{4\pi r^3 \bar{p} + m}{r^2 - 2mr} = \frac{4\pi r^3 \bar{p} + \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}{r^2 - 2 \left[ \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \right] r} \sim \frac{4\pi \rho r / 3 + 4\pi r \bar{p}}{1 - 8\pi \rho r^2 / 3}. \quad (3.51)$$

Con esta aproximación, finalmente podemos escribir la expresión correspondiente al *right-hand-side* del lapso, para valores de  $\mathbf{r}_i$  menores que  $dr$ :

$$\partial_r \alpha \equiv rhs(\alpha) = \alpha \frac{\frac{4\pi \rho_i r_i}{3} + 4\pi \mathbf{r}_i \left[ \frac{\mathbf{a} \mathbf{S}_{\mathbf{r}_i} \mathbf{v}_i^r}{\mathbf{a}_i} + \mathbf{p}_i \right]}{1 - \frac{8\pi \rho_i r_i^2}{3}}, \quad (3.52)$$

en donde se ha introducido el arreglo  $\mathbf{a}_i$ , para la densidad total del fluido.

Para la ecuación de Einstein (3.40) que describe la evolución de la función métrica  $a(r, t)$ , se tiene una expresión discretizada bastante simple:

$$\mathbf{rhs\_a}_i = -4\pi \mathbf{r}_i \mathbf{a}_i \mathbf{a} \mathbf{S}_{\mathbf{r}_i}, \quad (3.53)$$

en donde se ha introducido arreglos para el *right-hand-side* de la función métrica  $a$  (correspondiente a una derivada temporal), para la coordenada radial  $r$ , para el lapso  $\alpha$  y la variable conservativa  $aS_r$ .

Pasando ahora a la ecuación (3.43), la cual describe la dinámica del fluido, se hace importante señalar que en el código se implementó para el *right-hand-side* de

cada variable conservativa por separado. Específicamente:

$$\begin{aligned} \text{rhs\_aD}_i &= -\frac{3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \left[ \alpha_i \mathbf{a}_i r_i^2 \text{flux1}_i - \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} r_{i-1}^2 \text{flux1}_{i-1} \right] \\ &\quad + \text{source1}_i, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \text{rhs\_aS}_{ri} &= -\frac{3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \left[ \alpha_i \mathbf{a}_i r_i^2 \text{flux2}_i - \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} r_{i-1}^2 \text{flux2}_{i-1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{dx} \left[ \alpha_i \mathbf{a}_i \text{flux4}_i - \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} \text{flux4}_{i-1} \right] + \text{source2}_i, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \text{rhs\_a}\tau_i &= -\frac{3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \left[ \alpha_i \mathbf{a}_i r_i^2 \text{flux3}_i - \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} r_{i-1}^2 \text{flux3}_{i-1} \right] \\ &\quad + \text{source3}_i. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aquí es importante hacer algunas observaciones. Primero, que se han definido los arreglos  $\text{flux1}_i$ ,  $\text{flux2}_i$  y  $\text{flux3}_i$ ; tal que corresponden respectivamente a la primera, segunda y tercera componente del vector  $\mathbf{f}^{(1)}$  definido en (3.45); y el arreglo  $\text{flux4}_i$  a la segunda componente del vector  $\mathbf{f}^{(2)}$  definido en (3.46). De manera similar  $\text{source1}_i$ ,  $\text{source2}_i$  y  $\text{source3}_i$  corresponden a las respectivas componentes del vector de vector de fuentes  $\bar{\mathbf{s}}$  especificado en (3.47). Estas son las definiciones básicas. Sin embargo, como en nuestro trabajo al final nos interesa utilizar el método de *high resolution shock-capturing*, es muy importante tener en mente que los flujos al final se redefinieron utilizando el resolutor HLL, que fue implementado en el código tal como se definió en la ecuación (3.38).

Segundo, que en estas aproximaciones se utilizó un esquema “*upwind*” a primer orden, ya solamente estamos haciendo uso de valores de las variables conservativas a la izquierda del punto en cuestión. La razón de esto, simplemente es para garantizar la estabilidad del algoritmo y simular de mejor manera la dirección de propagación de información en el fluido.

Y tercero, que estos *right-hand-sides* al tiempo  $t^n$ , se implementaron tal que en

conjunto con los valores de las variables conservativas al tiempo anteriores  $t^{n-1}$ , permiten configurar un algoritmo de Runge-Kutta de orden 3 para determinar los valores de dichas variables al tiempo siguiente  $t^{n+1}$ .

La última ecuación que nos queda es (3.42), la cual como lo adelantamos, describe nuestra constricción hamiltoniana definida en (3.48). Así entonces, y ya considerando que  $m = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$ , su versión discretizada queda expresada así:

$$\mathbf{Ham}_i = \frac{1}{2dx} [\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_{i-1}] - \mathbf{a}_i^3 \left[ \frac{4\pi\mathbf{r}_i}{\mathbf{a}_i} [\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{a}\mathbf{D}_i] - \frac{1}{2\mathbf{r}_i} \left(1 - \frac{1}{\mathbf{a}_i^2}\right) \right], \quad (3.57)$$

en donde el arreglo  $\mathbf{Ham}_i$  define en concreto nuestra función a monitorear, la cual será evaluada para diferentes resoluciones.

### 3.6.3. Condiciones de frontera

Otro aspecto muy importante y que hasta ahora no se ha especificado, es la serie de condiciones de frontera que se utilizaron en la implementación del código. Para la evolución de las variables conservativas  $a\mathbf{q}$ , donde  $\mathbf{q}$  es el vector de flujos, a cada paso de tiempo se utilizó una condición de la forma:

$$\partial_t[a\mathbf{q}(t^n, x_{N_x})] = \partial_t[a\mathbf{q}(t^n, x_{N_x-1})] \quad (3.58)$$

la cual define una extrapolación simple de primer orden, y que en la práctica simula una condición de flujo saliente (o copia) en el punto  $x_{N_x}$ .

Para los flujos redefinidos a través del resolutor HLL con el método de Go-

dunov, se utilizaron las siguientes condiciones de frontera:

$$f^{(i)}(t^n, x_{N_x-1}) = 3f^{(i)}(t^n, x_{N_x-2}) - 3f^{(i)}(t^n, x_{N_x-3}) + f^{(i)}(t^n, x_{N_x-4}), \quad (3.59)$$

$$f^{(i)}(t^n, x_{N_x}) = 3f^{(i)}(t^n, x_{N_x-1}) - 3f^{(i)}(t^n, x_{N_x-2}) + f^{(i)}(t^n, x_{N_x-3}). \quad (3.60)$$

donde  $f^{(i)}$  denota la  $i$ -ésima componente del vector flujo, redefinida de acuerdo al método HLL por la ecuación (3.38). Aquí estamos extrapolando a tercer orden, pero a diferencia del caso anterior, solamente se trata de una mera extrapolación numérica sin ningún tipo de significado físico.

Para la reconstrucción de las variables primitivas  $p(t, r)$  y  $\rho_0(t, r)$ , en la subrutina del código que contenía el algoritmo de Newton-Raphson, nuevamente se utiliza una extrapolación numérica de tercer orden, sin interpretación física:

$$p(t^n, x_0) = 3p(t^n, x_1) - 3p(t^n, x_2) + p(t^n, x_3), \quad (3.61)$$

$$p(t^n, x_{N_x}) = 3p(t^n, x_{N_x-1}) - 3p(t^n, x_{N_x-2}) + p(t^n, x_{N_x-3}), \quad (3.62)$$

$$\rho_0(t^n, x_0) = 3\rho_0(t^n, x_1) - 3\rho_0(t^n, x_2) + \rho_0(t^n, x_3), \quad (3.63)$$

$$\rho_0(t^n, x_{N_x}) = 3\rho_0(t^n, x_{N_x-1}) - 3\rho_0(t^n, x_{N_x-2}) + \rho_0(t^n, x_{N_x-3}). \quad (3.64)$$

Para el diagnóstico de la constricción hamiltoniana, se utilizó la misma extrapolación de orden tres en las fronteras:

$$Ham(t^n, x_0) = 3Ham(t^n, x_1) - 3Ham(t^n, x_2) + Ham(t^n, x_3), \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} Ham(t^n, x_{N_x}) &= 3Ham(t^n, x_{N_x-1}) - 3Ham(t^n, x_{N_x-2}) \\ &\quad + Ham(t^n, x_{N_x-3}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

El lapso  $\alpha(t, r)$ , y de manera similar a como fue implementado en el problema de los valores iniciales, simplemente se rescaló en la frontera externa  $x = x_{N_x}$ :

$$\alpha(t^n, x_{N_x}) = \frac{\alpha}{a(x_{N_x})\alpha(x_{N_x})}. \quad (3.67)$$

Finalmente es importante señalar que para la función métrica  $a(r, t)$ , curiosamente no se utilizó ninguna condición de frontera. Esto se debe esencialmente a que fue integrada a través del algoritmo de Runge-Kutta, de orden 4, a lo largo de todo el dominio espacial, esto es:  $0 < r < x_{N_x}$ .

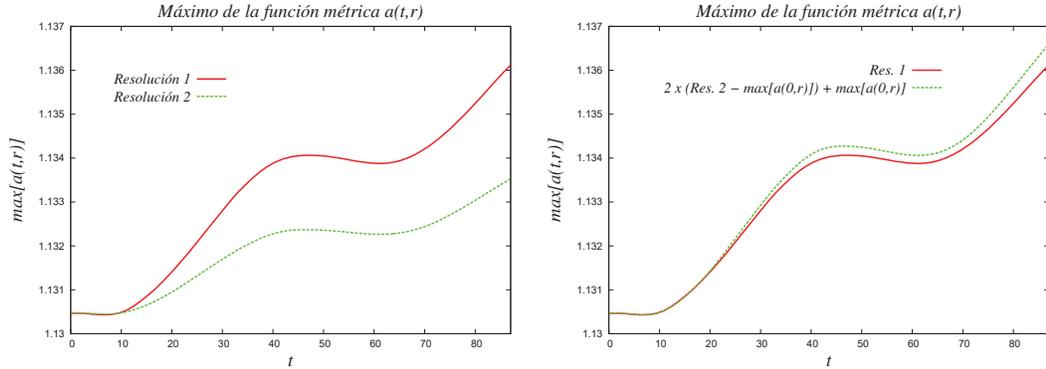
### 3.7. Resultados obtenidos

Tal como lo adelantamos en el capítulo 2, estamos particularmente interesados en dos configuraciones:  $\Gamma = \frac{5}{3}$  con  $K = 1$  y  $\Gamma = 2$  con  $K = 100$ . Visualizaremos cada caso en detalle, distinguiendo los resultados para su rama estable e inestable. También veremos el comportamiento de la constricción hamiltoniana para determinar el patrón de convergencia de nuestras soluciones, tal que nos permita garantizar la confiabilidad de nuestros resultados.

#### 3.7.1. Caso $\Gamma = \frac{5}{3}$ con $K = 1$

Siguiendo el esquema numérico de la figura 2.4, comenzamos utilizando una densidad central de  $\rho_c = 0,02$ , correspondiente a la rama estable, y un lapso inicial de  $\alpha_i = 0,5$ . Se utilizó el resolvidor HLL junto con el método de Godunov para la reconstrucción de variables. La densidad atmosférica en la superficie de la estrella se fijó en  $1 \times 10^{-12}$ . El dominio espacial se fijó en  $0 < r < 10$  con un número de 2000 puntos y el dominio temporal con 70000 puntos, utilizando un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

De la figura 3.1, es posible apreciar tres cuestiones muy interesantes. En primer lugar, que efectivamente la estrella en su rama estable presenta oscilaciones de tipo radial, ya que aparecen máximos y mínimos en los perfiles graficados. Segundo, que



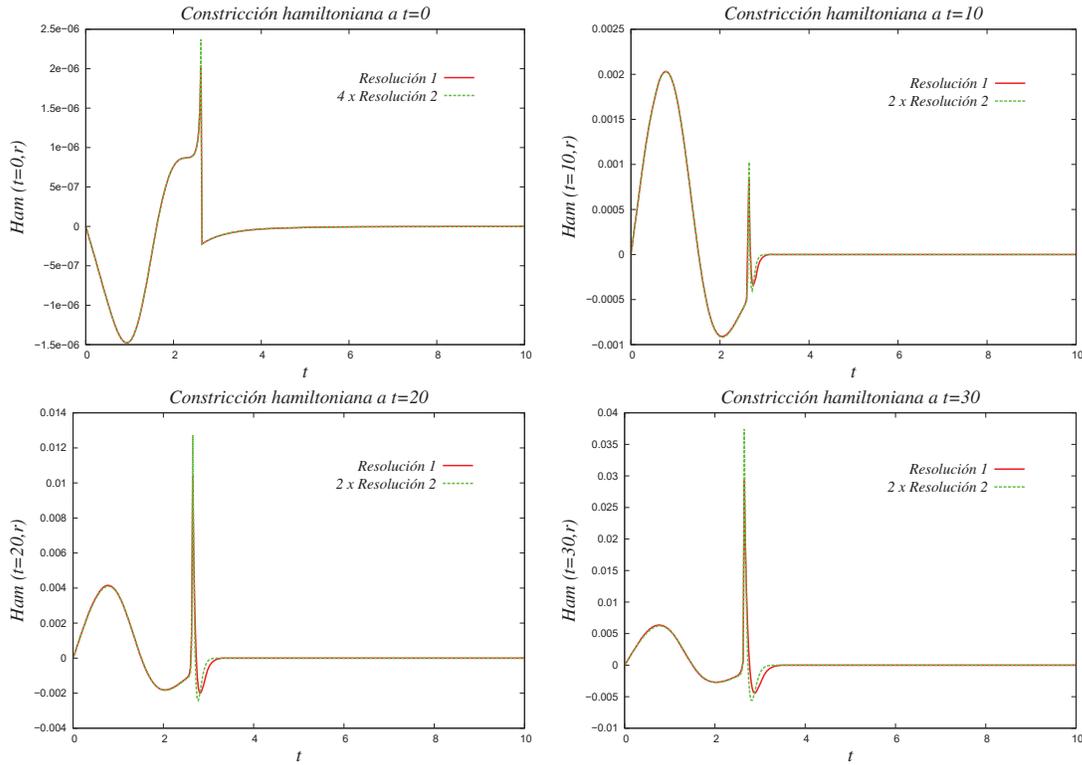
**Figura 3.1:** A la izquierda, el máximo de  $a(t, r)$  en función del tiempo en dos resoluciones diferentes para una estrella TOV con  $\Gamma = \frac{5}{3}$ ,  $K = 1$  y  $\rho_c = 0,02$  (rama estable). A la derecha, se muestra cómo dicho máximo converge al valor inicial de la función métrica a primer orden. Todo lo anterior ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 10$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

dichas oscilaciones no se desarrollan en torno a un punto fijo en particular, sino más bien en torno a una pendiente definida. La interpretación física de esto último, es que las oscilaciones actuarían acompañadas de un fenómeno de acreción de materia, el cual se debe a la presencia de atmósfera en nuestro sistema estelar. Y tercero, que el máximo de  $a(r, t)$  converge a su valor inicial, a primer orden. Esto es muy interesante, ya que significa que si tomáramos el límite continuo de la función métrica, ya no variaría en el tiempo. Esto lo mostramos claramente en la figura de la derecha, graficando la resolución 1 junto con una función de la resolución 2, lo cual constituye un procedimiento análogo a monitorizar la constricción hamiltoniana.

Es importante tener en mente que cuando trabajamos con el método de Godunov, nuestras soluciones convergen a primer orden<sup>13</sup>. Para verificar esto, ejecu-

<sup>13</sup>D. W. Neilsen, and M. W. Choptuik. *Class. Quant. Grav.* **17**, 733 (2000).

tamos el código con una resolución igual a 1, luego con una igual a 2. Finalmente se grafican las constricciones hamiltonianas para ambas resoluciones, comprobando que efectivamente difieren en un factor de  $k^n \equiv 2^1 = 2^{14}$ . Los resultados obtenidos, para ambas resoluciones, se presentan en la serie de instantáneas de la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Capturas instantáneas de la constricción hamiltoniana a dos resoluciones, para una estrella TOV con  $\Gamma = \frac{5}{3}$ ,  $K = 1$  y  $\rho_c = 0,02$  (rama estable). Código ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 10$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

Considerando las gráficas, aquí podemos hacer un par de observaciones importantes. En primer lugar, que nuestra solución aproximada converge bastante bien a

<sup>14</sup>En el apéndice A se incluye más información acerca de las pruebas de convergencia.

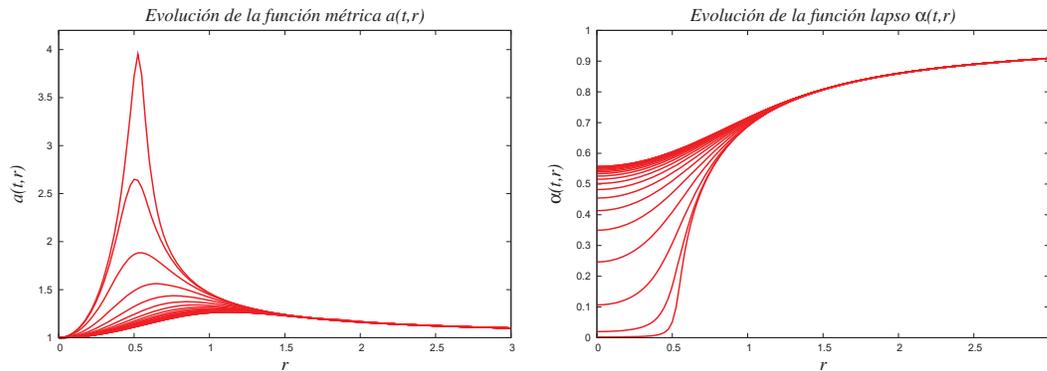
primer orden, para tiempos  $t > 0$ . Ahora bien, en la primera instantánea a  $t = 0$  se muestra una convergencia de segundo orden, y la razón de esto es que cuando calculamos la constricción hamiltoniana (3.41) al tiempo inicial, la derivada parcial de la función métrica  $a(t, r)$  se aproximó a segundo orden. Y nótese que este resultado se mantiene, aun cuando se utilizó un integrador Runge-Kutta de orden 4, ya que en estos casos, predomina el error asociado a la aproximación de menor orden.

Una segunda observación muy importante, es que si bien en términos generales nuestro método garantiza una muy buena convergencia, existe una zona de discontinuidad, en donde dicha convergencia se rompe. Esta zona está asociada a la superficie de la estrella, es decir, el punto en donde definimos la densidad de atmósfera, en la cual hay un cambio abrupto en la distribución de materia. Esto es algo que lamentablemente nuestro método no es capaz de resolver, y que como veremos más adelante, se sigue manteniendo en prácticamente todas nuestras configuraciones.

Pasando al caso de la rama inestable, mostraremos los resultados para una simulación con una densidad central de  $\rho_c = 0,09$ . Los valores para el lapso inicial, la presión de atmósfera, el método limitador y el dominio espacio-temporal son exactamente los mismos que para el caso anterior.

De la figura 3.3 podemos ver claramente como nuestro sistema colapsa rápidamente a un agujero negro. En particular, el máximo de la función métrica, que define la superficie de la estrella, se va a infinito a medida que avanza el tiempo. Y el lapso, se va a cero en la zona donde físicamente está ubicada la estrella.

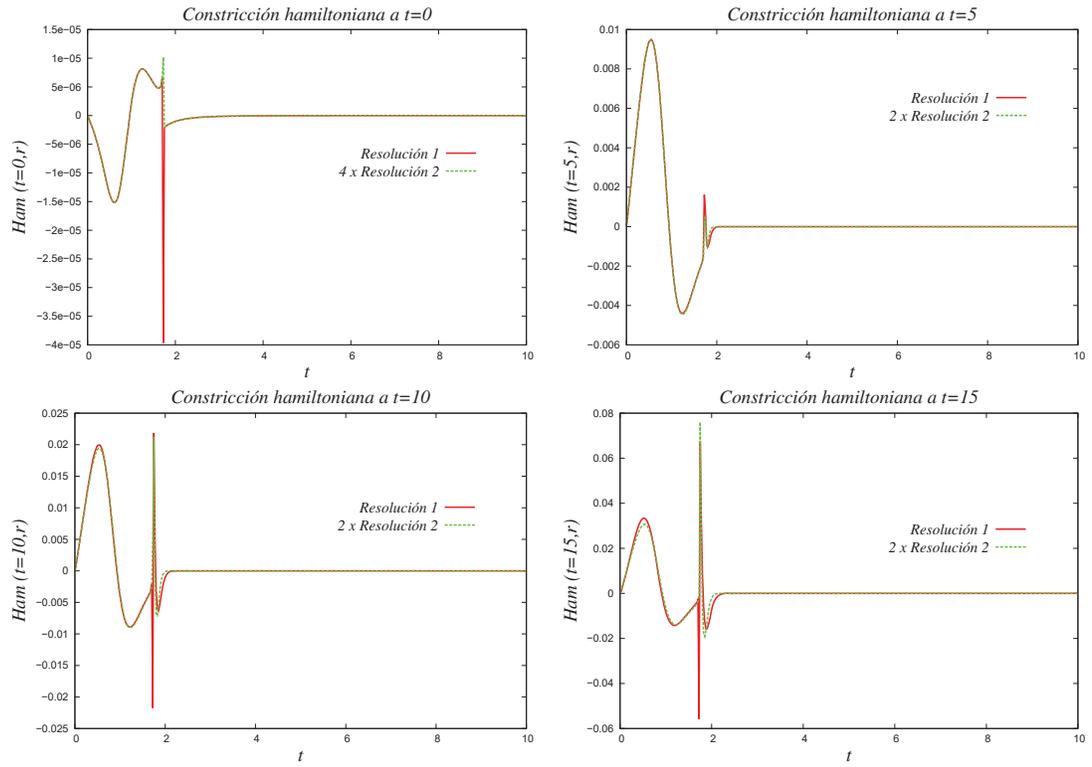
Ahora bien, la pregunta natural que surge cuando nos enfrentamos a este tipo de configuraciones es ¿a qué se debe el colapso de la estrella? Porque si lo pen-



**Figura 3.3:** Evolución de la función métrica  $a(t,r)$  (izquierda) y del lapso  $\alpha(t,r)$  (derecha) para una estrella TOV con  $\Gamma = \frac{5}{3}$ ,  $K = 1$  y  $\rho_c = 0,09$  (rama inestable). Todo lo anterior ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 10$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

samos bien, para que un sistema sea inestable, se debió haber aplicado algún tipo de perturbación. La respuesta es: debido a un error de discretización. El sistema que modelamos, en realidad no es solo sensible a perturbaciones físicas que apliquemos al fluido, sino también a los errores propios de los métodos numéricos. Esto es muy interesante, ya que a fin de cuentas nos está diciendo, que debemos ser muy cuidadosos a la hora de interpretar los resultados e identificar muy bien las causas reales de los fenómenos que observemos en la pantalla.

Ahora bien, si observamos la constricción hamiltoniana para dos resoluciones en esta configuración, y que se detalla en la figura 3.4, nuevamente encontramos convergencia a segundo orden al tiempo inicial, y a primer orden para tiempos  $t > 0$ . Notar, sin embargo, que en este caso no solo tenemos el quiebre de la convergencia en la superficie de la estrella, sino también en un máximo al interior de la estrella (que se puede ver en la cuarta instantánea al tiempo  $t = 15$ ). La explicación para esto, es que nuestra estrella, después de todo, se está colapsando a un agujero negro. Es decir, como las coordenadas que estamos utilizando ( $\beta = 0$ ) son singulares en el



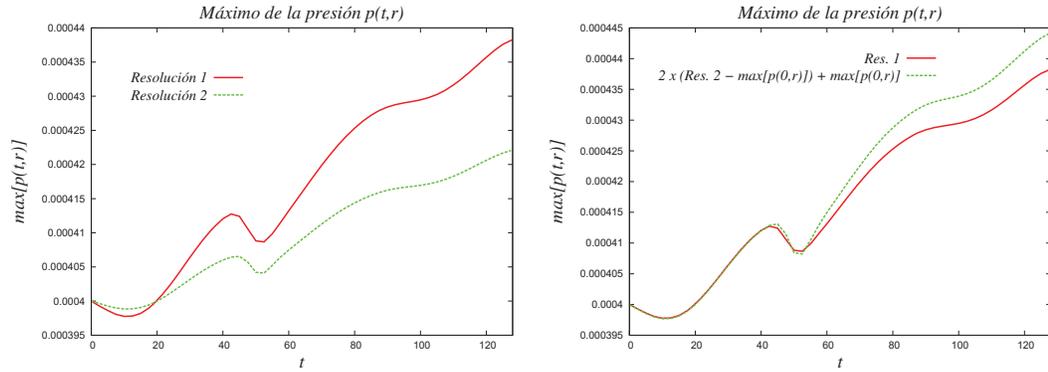
**Figura 3.4:** Capturas instantáneas de la constricción hamiltoniana a dos resoluciones, para una estrella TOV con  $\Gamma = \frac{5}{3}$ ,  $K = 1$  y  $\rho_c = 0,09$  (rama inestable). Código ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 10$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

origen, los errores asociados al cálculo de las derivadas son muy grandes, por lo que se traduce en una divergencia en aquella zona. En otras palabras, el quiebre de la convergencia no es más que un indicador de que nuestra aproximación numérica ya es muy mala, por lo que a partir de ese instante, no podremos seguir evolucionando el espacio-tiempo con precisión.

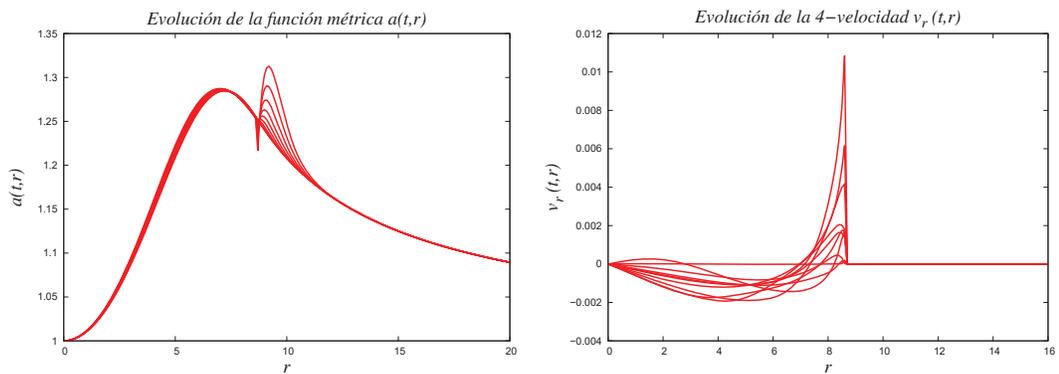
### 3.7.2. Caso $\Gamma = 2$ con $K = 100$

Siguiendo lo programado para nuestro estudio, corresponde el turno de nuestra segunda configuración. Si nos vamos nuevamente a la figura 2.4, podremos visualizar las ramas estables e inestables de esta configuración. Para el caso estable, hemos seleccionado una densidad central de  $\rho_c = 0,002$  y un lapso inicial de  $\alpha_i = 0,5$ . Nuevamente utilizamos el resolvidor HLL con el método de Godunov. La densidad atmosférica se fijó en  $1 \times 10^{-12}$ . El dominio espacial se fijó en  $0 < r < 20$  con un número de 1000 puntos y el dominio temporal con 50000 puntos, utilizando un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

En la figura 3.5 se presenta el comportamiento del máximo de la presión en función del tiempo para dos resoluciones. Lo interesante, es que a pesar de haber cambiado la naturaleza física de nuestro sistema a través de los parámetros de entrada  $\Gamma$  y  $K$ , seguimos observando el mismo efecto físico de oscilación y acreción, así como la convergencia al valor inicial de la variable a primer orden de precisión. Es interesante notar que esta última convergencia, y tal como se aprecia en la figura de la izquierda, se rompe para tiempos posteriores a  $t = 50$ . La razón de este problema, sencillamente es el error numérico que se está propagando desde la superficie de la estrella hacia dentro, y que explicaré a continuación.



**Figura 3.5:** A la izquierda, el máximo de la presión  $p(t,r)$  en función del tiempo de una estrella TOV con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,002$  (rama estable), para dos resoluciones diferentes. A la derecha, cómo dicho máximo converge al valor inicial de la presión, a primer orden de precisión. Código ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 20$  con  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .



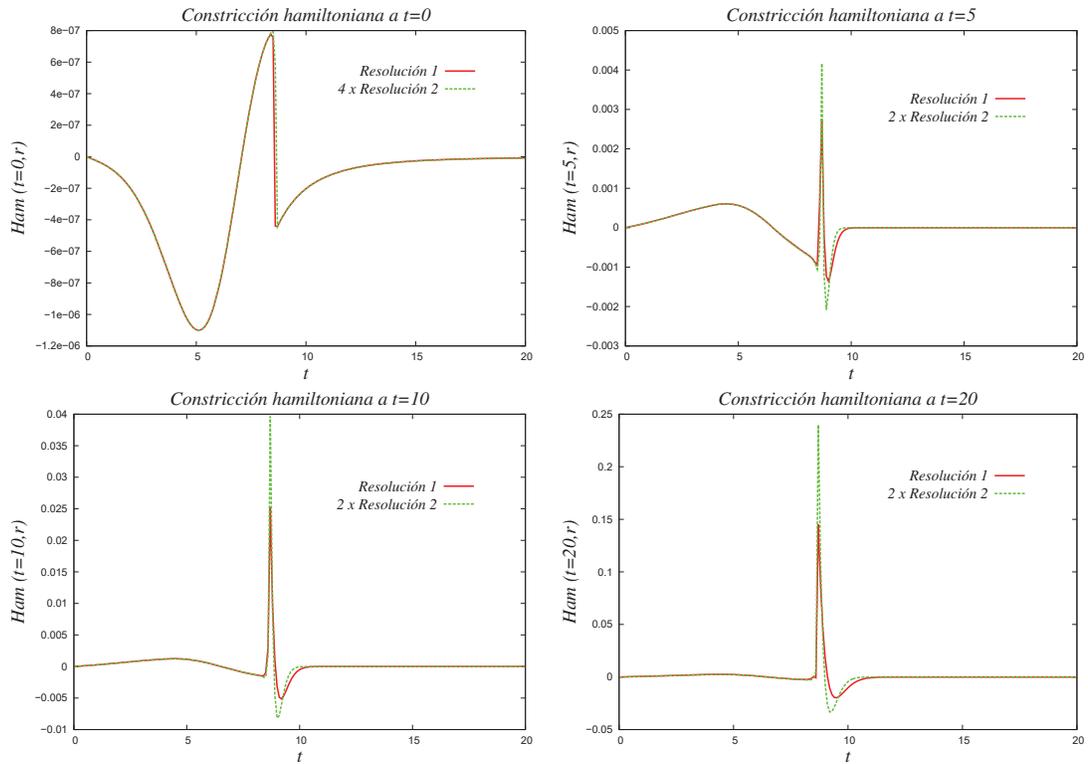
**Figura 3.6:** Evolución de la función métrica  $a(t,r)$  (izquierda) y la 4-velocidad  $v_r(t,r)$  (derecha) para una estrella TOV con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,002$  (rama estable).

Si observamos la figura 3.6 (izquierda), podremos apreciar de manera muy clara como la función métrica  $a(t, r)$  se mantiene estable durante la evolución, en la zona al interior de la estrella. Sin embargo, en esta gráfica se hace muy evidente el problema que veníamos adelantando, y que se da en la superficie de la estrella. Aún cuando este no es un resultado elegante, es científico, y se desprende directamente de nuestro método. Es más, si miramos con detenimiento la figura 3.6 (derecha), en la cual se presenta la evolución de la 4-velocidad, podemos adelantar que el problema podría originarse en la evidente discontinuidad de dicha variable, al tomar valores muy grandes al interior de la estrella, pero permaneciendo en cero en el exterior.

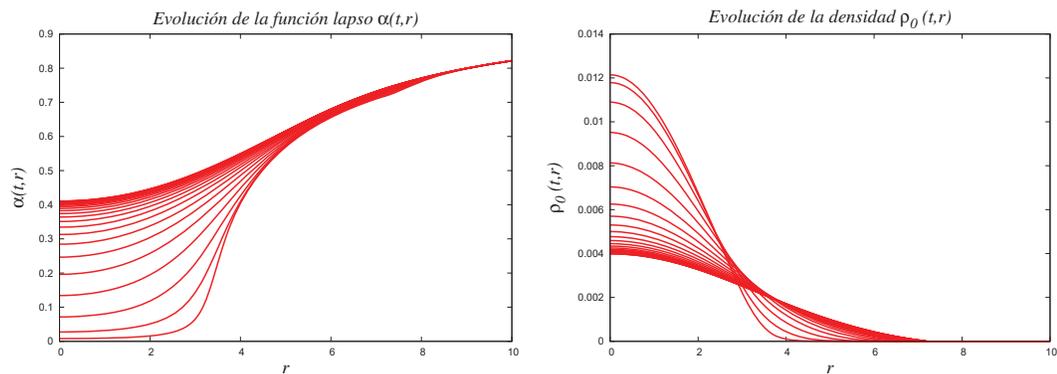
La figura 3.9 para la constricción hamiltoniana a dos resoluciones, nos muestra nuevamente una muy buena convergencia de los resultados obtenidos. Tanto dentro como fuera de la estrella, exceptuando la superficie, la curva para la resolución 1 resulta ser muy similar al doble de la curva para la resolución 2. En términos físicos, podemos decir que en dichas zonas, el sistema es bien comportado, ya que aun existiendo una discontinuidad muy grande en la interfase estrella-atmósfera, en las cercanías de dicha interfase no se presentan mayores problemas de convergencia.

Finalmente, estudiamos la rama inestable. Aquí detallaremos los resultados para una simulación con densidad central de  $\rho_c = 0,004$ . Los valores para el lapso inicial, la atmósfera, el método limitador y el dominio espacio-temporal son los mismos que para el caso estable.

En la figura 3.8 podemos visualizar como en esta configuración inestable, nuevamente nuestra estrella se colapsa a agujero negro, muy rápidamente. Aquí se muestran los perfiles para el lapso, que gradualmente se va a cero, y el máximo de a

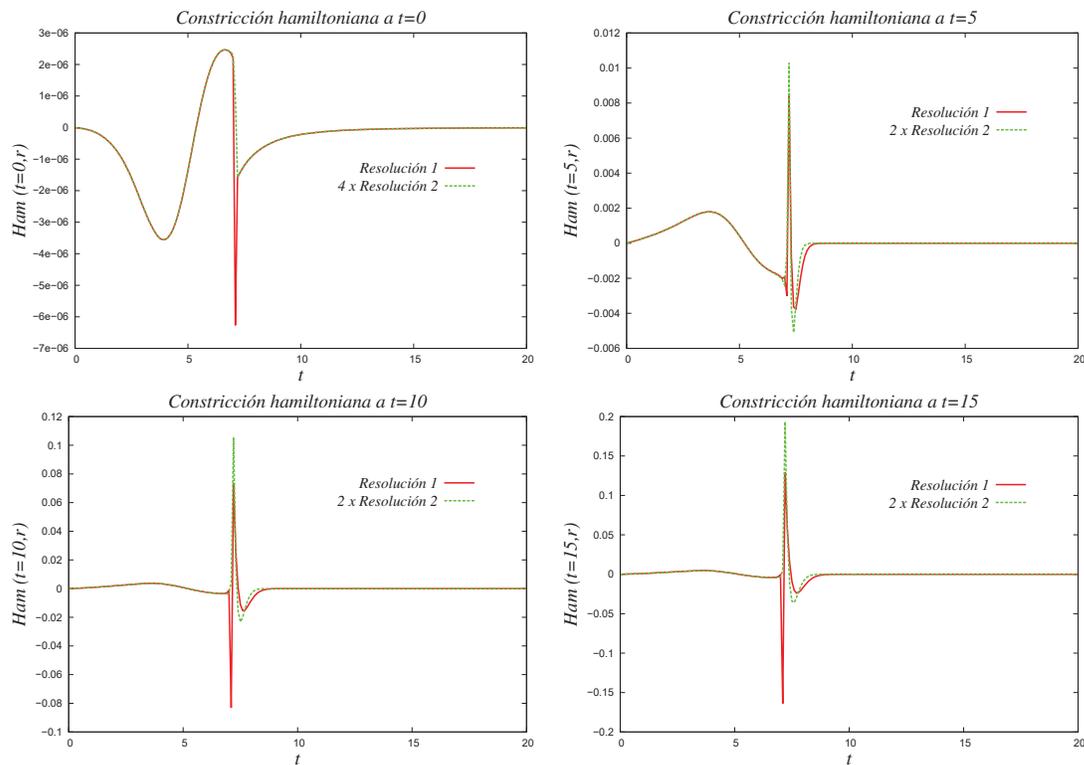


**Figura 3.7:** Capturas instantáneas de la constricción hamiltoniana a dos resoluciones, para una estrella TOV con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,002$  (rama estable). Código ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 20$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .



**Figura 3.8:** Evolución del lapso  $\alpha(t, r)$  (izquierda) y de la densidad  $\rho_0(t, r)$  (derecha) para una estrella TOV con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,004$  (rama inestable). Todo lo anterior ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 20$  con  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

densidad que crece a infinito. Quizás de manera apresurada se podría afirmar que cuando se forma el agujero negro, el perfil de la densidad se transforma en una delta de Dirac, sin embargo, algo que debemos tener presente, es que a esas alturas es prácticamente imposible que nuestra simulación converga. De hecho, y como se puede ver en las gráficas para la constricción hamiltoniana, ni siquiera fue capaz de seguir iterando más allá de  $t = 20$ .



**Figura 3.9:** Capturas instantáneas de la constricción hamiltoniana a dos resoluciones, para una estrella TOV con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,004$  (rama inestable). Código ejecutado en un dominio espacial de  $0 < r < 20$  con un factor  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,25$ .

En la figura 3.9 podemos apreciar la evolución de la constricción hamiltoniana a dos resoluciones. Como era de esperar, el problema en la superficie de la estrella

sigue vigente. No obstante, al interior y exterior de la estrella hay una convergencia muy buena. En la práctica, el único detalle que pudimos apreciar, es que no se alcanzó a visualizar el quiebre de la convergencia al interior de la estrella. Esto se debió a que al tiempo  $t = 79,5$  la subrutina con el algoritmo de Newton-Raphson para reconstruir la presión  $p(t, r)$ , después de las 10.000 iteraciones, ya no convergía.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Finalizo este trabajo de tesis. Haciendo un diagnóstico general, he logrado estudiar, satisfactoriamente, la evolución de algunas estrellas TOV, esféricamente simétricas, y que obedecen a la ecuación de estado de un gas ideal. Particularizando al caso de gases politrópicos, analicé diferentes configuraciones que me permitieron extraer información física relevante en cuanto a la naturaleza de su evolución.

Un aspecto que considero digno de resaltar, es que este estudio deja entrever la enorme potencia de las simulaciones computacionales para enfrentar este tipo de problemas astrofísicos. Más considerando que hasta ahora, solo dos configuraciones de este tipo, bastante simples por lo demás, se han podido resolver exitosamente de manera analítica<sup>1</sup>.

Inicialmente, a modo de introducción, expuse los métodos numéricos básicos que se utilizaron en la implementación del código final. Algoritmos tan sencillos en

---

<sup>1</sup>La solución de Schwarzschild para el vacío y el campo gravitacional producido por una estrella TOV, esféricamente simétrica, con densidad  $\rho = \text{constante}$

la práctica como el método de líneas o la aproximación de volúmenes finitos, posteriormente tomarían un papel relevante en el código. Estos métodos constituyen la base matemática de mi trabajo.

Posteriormente, detallé de manera clara y concreta, los ingredientes físicos necesarios para la configuración física del sistema. Resolví el problema de los valores iniciales, en donde definiendo una densidad atmosférica de corte, acoté el valor de la entalpía y empaté la solución, con la métrica de Schwarzschild. También determiné las tradicionales curvas de masa vs. densidad central, que en definitiva constituyeron la hipótesis a verificar a través de la evolución.

Finalmente, implementé la evolución el sistema. Para esto, recurrí a los métodos anteriormente explicados, y que me auxiliaron en las diferentes fases de la metodología a implementar en el código. Todo esto lo detallé en la sección 3.6. Aquí lo remarcable, es que la mayoría de las herramientas adquiridas, resultan ser muy útiles para futuros problemas, más realistas y originales.

A través de la evolución, pude verificar de manera satisfactoria, con muy buenos resultados en las pruebas de convergencia, que efectivamente los modelos de estrellas TOV escogidos, evolucionan de acuerdo a lo establecido en las gráficas de masa vs. densidad, en las que identifiqué *a priori* las ramas estable e inestable.

A pesar de lo exitoso que resultó ser la implementación del código, la metodología, como toda propuesta científica, posee sus dificultades. En particular, me referí a la discontinuidad que se forma en la superficie de la estrella, la cual termina por violar la constricción hamiltoniana. En este sentido, el problema pareciera sugerir que no basta modelar el sistema con solo una ecuación de estado, sino que se requieren implementar más, dependiendo de la cantidad de atmósferas con que cuente nuestra

estrella. Otra alternativa a modo de mejora que también podría implementarse, es darle mayor libertad a la atmósfera, permitiéndole tener velocidades mayores que cero. Esto por supuesto no dejaría de ser realista, ya que existen muchos fenómenos físicos con este tipo de comportamiento (como por ejemplo, el viento solar).

En general, más que constituir una referencia exhaustiva de contenidos teóricos, la objetivo práctico de este trabajo ha sido presentar un esquema ilustrativo y balanceado, que permita al lector conocer los fundamentos básicos del modelamiento de estrellas TOV en relatividad general. Es de esperar que este estudio sirva de motivación para todos aquellos quienes deseen iniciarse en el fascinante mundo de las simulaciones computacionales aplicadas a la astrofísica relativista.

*FIN ... al menos por ahora.*

# Apéndice A

## Pruebas de Convergencia

Cuando resolvemos la versión discreta de una EDP a través de métodos numéricos, en realidad no resolvemos la ecuación original en el continuo, sino más bien una aproximación. Es por esto, que en la práctica se hace muy necesario considerar algún tipo de prueba que nos permita determinar que efectivamente nuestra solución aproximada converge a la solución original, o en otras palabras, que nuestra solución aproximada en el límite continuo corresponde a la solución original.

Consideremos por ejemplo la ecuación de onda ya discretizada. Etiquetemos el error del lado derecho como  $Error_1 = O(\Delta x^2, \Delta t^2) = E\Delta x^2$ , donde  $E$  es simplemente un coeficiente de error asociado a la aproximación con respecto a la ecuación en el continuo. Eligiendo una resolución  $\Delta x_k = \frac{\Delta x}{k}$  con  $k > 1$ , se tiene  $Error_k = E\frac{\Delta x^2}{k^2}$ . Entonces, ahora podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{Error_1}{Error_k} = k^2 \tag{A.1}$$

Lo que nos dice que si aumentamos la resolución un factor  $k$ , nuestra aproximación se refinará en un factor de  $k^2$ . Notar en general, que si hubiésemos utilizado aproximaciones de orden  $n$  en el métodos de diferencias finitas, nuestro factor de refi-

namiento sería  $k^n$ . Un aspecto muy importante de considerar, es que en la práctica podemos encontrarnos con dos escenarios posibles, lo que definirá que tipo de prueba de convergencia será la mas adecuada. El primero es el caso en que conocemos la solución exacta de la ecuación,  $f_0$ , por lo que el procedimiento solamente será compararla con nuestras soluciones aproximadas  $f_1$  y  $f_k$ , con resoluciones  $\Delta x$  y  $\frac{\Delta x}{k}$  respectivamente. Considerando que en general nuestras soluciones aproximadas pueden escribirse de la forma  $f(x) = f_0 + E(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$ , nuestra prueba de convergencia quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{f_1 - f_0}{f_k - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{(\frac{\Delta x}{k})^2 + O(\Delta x^3)} = k^2 + O(\Delta x) \quad (\text{A.2})$$

Así, nuestro *factor de convergencia* estará dado por el número  $k$ , y deberá ser evaluado en cada punto de nuestra red. Notar nuevamente, que si nuestra aproximación hubiese sido de orden  $n \neq 2$ , el factor de convergencia sería  $k^2$

El segundo escenario corresponde a al caso en que no conocemos la solución exacta, por lo que se hace necesario una prueba de *autoconvergencia*, que básicamente consiste en una comparación numérica entre soluciones aproximadas con tres diferentes resoluciones. Específicamente, si consideramos soluciones aproximadas  $f_1$ ,  $f_k$  y  $f_p$ , con resoluciones  $\Delta x$ ,  $\frac{\Delta x}{k}$ ,  $\frac{\Delta x}{p}$  respectivamente y  $k \neq p$ , el factor de convergencia se determina así:

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_k}{f_k - f_p} &= \frac{\Delta x^2 - (\frac{\Delta x}{k})^2 + O(\Delta x^3)}{(\frac{\Delta x}{k})^2 - (\frac{\Delta x}{p})^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{(\frac{\Delta x}{k})^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= k^2 + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Considerando todo lo anterior anterior, es muy importante tener en mente que la implementación de pruebas de convergencia es algo **imprescindible** en todo código

go de este tipo a desarrollar, ya que es la única herramienta que en la práctica nos garantiza la confiabilidad de los resultados obtenidos. En otras palabras, si una determinada simulación no converge al orden  $k$  deseado, se deben rechazar los resultados obtenidos. Esto, por supuesto, no significa que debamos rechazar de plano todo el código sin más, sino mas bien tener presente que este problema por lo general puede deberse a dos posibles causas:

- Que haya algún error en la implementación del código, por lo que se necesitará un exhaustivo proceso de “debugging” -depuración-.
- Que la naturaleza del algoritmo no permita una convergencia en el rango  $\Delta x$  elegido, por lo que se necesitará hacer pruebas con otros valores.

# Apéndice B

## Scripts de Maple

En el presente apéndice, detallamos el script de Maple `PerfecFluidSpherical.mw`, basado en la biblioteca *GRTensor II*, que generó las ecuaciones de Einstein-Euler para las variables primitivas.

```
>restart;
>grtw();
>qload(perfect_fluid);
># Defining the Stress-Energy tensor....
>grdef('u^i:=[W/alpha,W*vr,0,0]'); #grdef('u^i:=[ut,alpha*vr*ut,0,0]');
>grdef('Tmunu^i ^j:=rho0*h*u^i*u^j+p*g^i ^j');
>grcalc(Tmunu(up,dn));grdisplay(_);
># Defining Einstein's equations...
>grdefine('EEi j',,'Gi j-kappa*Tmunui j');
>grcalc(EE(up,dn)):
>ett:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[t,t]),symbolic);
```

---

```

>err:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[r,r]),symbolic);
>ethth:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[theta,theta]),symbolic);
>ert:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[r,t]),symbolic);
>etr:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[t,r]),symbolic);
>#Vamos con las de Euler.....
>grdefine('DivT^i',,'Tmunu^i ^j ;j');
>grcalc(DivT(up)):grdisplay(-);
>#The next is the conservation of mass law....
>grdef('Current^i:=rho0*u^i');
>grdef('DivJ:=Current^i ;i');
>grcalc(DivJ):grdisplay(-);
>#
># Now the IVP
>#
>restart;
>grtw();
>qload(perfect_fluid_static);
>vr:=0;W:=1;
>grdef('u^i:=[W/alpha,W*vr,0,0]');
>grdef('Tmunu^i ^j:=rho0*h*u^i*u^j+p*g^i ^j');
>grcalc(Tmunu(up, dn)); grdisplay(-);
>grdefine('EEi j', , 'Gi j-kappa*Tmunui j');
>grcalc(EE(up, dn));
>ett:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[t,t]),symbolic);

```

```

>err:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[r,r]),symbolic);
>ethth:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[theta,theta]),symbolic);
>ert:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[r,t]),symbolic);
>etr:=simplify(grcomponent(EE(up,dn),[t,r]),symbolic);
>#
># The hydro
>#
>grdefine('DivT^i',, 'Tmunu^i ^j ;j');
>grcalc(DivT(up)):grdisplay(_);

```

Este script hace uso de dos archivos de configuración: `perfect_fluid_static.mpl` para generar las ecuaciones estáticas (2.5)-(2.7) asociadas al problema de los valores iniciales, así como `perfect_fluid.mpl` para generar las ecuaciones de evolución (3.2)-(3.4) de la geometría y (3.25) del fluido. A continuación se presenta el detalle.

**Archivo:** `perfect_fluid_static.mpl`

```

alias(alpha=alpha(r),m=m(r),p=p(r),h=h(r),epsilon=epsilon(r),
W=W(r),vr=vr(r),rho0=rho0(r)):
Ndim := 4:
x1 := t:
x2 := r:
x3 := theta:
x4 := phi:
g11 := -alpha^2:

```

---

```
g12 := 0:
g13 := 0:
g14 := 0:
g22 := 1/(1-2*m/r):
g23 := 0:
g24 := 0:
g33 := r^2:
g34 := 0:
g44 := r^2*sin(theta)^2:
```

**Archivo:** perfect\_fluid.mpl

```
alias(alpha=alpha(r,t),a=a(r,t),rho0=rho0(r,t),p=p(r,t),
h=h(r,t),epsilon=epsilon(r,t),W=W(r,t),vr=vr(r,t)):
Ndim := 4:
x1 := t:
x2 := r:
x3 := theta:
x4 := phi:
g11 := -alpha^2:
g12 := 0:
g13 := 0:
g14 := 0:
g22 := a^2:
g23 := 0:
```

```

g24 := 0:
g33 := r^2:
g34 := 0:
g44 := r^2*sin(theta)^2:

```

También se utilizó un script, `Pressure_TOV_noshift.mw`, para desarrollar la ecuación trascendente 3.31 de la presión, en términos de las variables conservativas. Se ingresó en el "input" la expresión (3.30) para  $v'$  en términos de las variables conservativas, y el script generó el código Fortran de la ecuación trascendente, en términos de las variables  $a$ ,  $p$ ,  $aD$ ,  $aS_r$  y  $a\tau$ .

```

>restart;
>W := 1/sqrt(1-omega2^2/(omega3+a*p+omega1)^2/a^2);
>ff := p-rho0*(Gamma-1)*(omega3+omega1*(1-W)+a*p*(1-W^2))/(omega1*W);
>with(codegen, fortran); fortran(ff);
>gg:=diff(ff, p);
>with(codegen, fortran); fortran(gg);

```