Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Rigidez de superficies y problema de Weyl.

TESINA

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Manuel Sedano Mendoza

Director: Dr. Pierre Bayard

Morelia, Michoacán - Agosto de 2012.

Índice general

Introducción

En 1916 H. Weyl planteó el siguiente problema: *Si g es una métrica Riemanniana en la 2-esfera S^2 con curvatura positiva,* ***¿existirá*** *$X : (S^2, g) \to \mathbb{R}^3$* ***encaje isométrico de clase*** *C^2****?*** *más aún,* ***¿será este encaje único salvo movimientos rígidos en*** *$\mathbb{R}^3$****?***

Weyl estudió este problema mediante un método de continuidad, obteniendo importantes estimaciones para encajes de la esfera (5.1), sin poderlo resolver completamente. En 1938 H. Lewy resolvió el problema agregando la hipótesis de que la métrica fuera analítica. Después de esto, L. Nirenberg y A. V. Pogorelov resolvieron independientemente el problema usando métodos distintos con la leve hipótesis de que la métrica fuera de clase C^4 (referencias a los resultados de Pogorelov y Lewy se pueden encontrar en [1]). En esta tesina, estudiamos la solución de L. Nirenberg [1] junto con el estudio de las deformaciones infinitesimales de superficies en $\mathbb{R}^3$, explicando de manera intrínseca los pasos seguidos por Nirenberg.

En el capítulo uno, introducimos la noción de deformación infinitesimal y de rigidez infinitesimal de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y usando la fórmula integral de Blaschke, ecuación (1.9), demostramos la rigidez infinitesimal de las superficies convexas. Este resultado es indispensable para estudiar el problema de Weyl pues permite resolver el problema de Weyl linealizado (ecuación (4.2) que aparece en el método de continuidad).

En el capítulo dos, presentamos la prueba del Teorema de Cohn-Vossen (Teorema 2.3), el cual habla de la unicidad de los encajes isométricos en el problema de Weyl. La demostración del Teorema de Cohn-Vossen que presentamos aquí es la dada por Herglotz como consecuencia de su fórmula integral.

En el capítulo tres explicamos el método usado por Nirenberg para la solución del problema de Weyl, el cual es un método de continuidad parecido al que usó Weyl. En este método se reformula el problema a una igualdad entre espacios de Banach (igualdad (3.1)). Presentamos aquí la prueba de la primera parte del método de continuidad, la cual se debe a Weyl, donde se usa fuertemente el Teorema de Uniformización del análisis complejo.

En el capítulo cuatro presentamos la segunda parte del método de continuidad que se traduce a un teorema de existencia (Teorema 4.2) para una ecuación diferencial lineal (ecuación (4.2)) que es precisamente el caso no homogéneo de las ecuaciones estudiadas en las deformaciones infinitesimales de superficies y damos la prueba dada por Nirenberg usando teoría de operadores elípticos sobre la esfera S^2.

En el capítulo cinco, usando la estimación a priori C^2 de Weyl (ecuación (5.1)) y la estimación a priori $C^{2+\alpha}$ de Nirenberg (ecuación (5.2)) de un encaje, damos la conclusión del método de continuidad y se completa la prueba de la existencia del encaje isométrico.

En el último capítulo presentamos el problema abierto de la definición de masa quasilocal en relatividad general: una solución satisfactoria a ese problema necesitará probablemente encontrar una extensión del teorema de Weyl a codimensión 2.

Un apéndice sobre la ecuación de Darboux, ecuación (A.3), y su aplicación a la regularidad de los encajes isométricos termina la tesina.

Capítulo 1

Deformaciones de superficies en $\mathbb{R}^3$

1.1. Deformaciones infinitesimales.

Existen distintas maneras como una superficie se puede "deformar" en el espacio; en este capítulo centramos nuestra atención en las deformaciones infinitesimales que surgen naturalmente al variar isométricamente una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Los resultados de este capítulo y la discusión sobre los tipos de deformaciones de superficies se pueden encontrar en el capítulo 12 de Spivak [2] (excepto la sección 1.2.1).

Definición: Una variación isométrica de un encaje $X : M \to \mathbb{R}^3$ es una función $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^3$ tal que

- $\alpha_t : M \to \mathbb{R}^3$ es un encaje, donde $\alpha_t(p) = \alpha(t,p)$ para todo $p \in M$,
- $\alpha_0 = X$,
- $\alpha_t^* <,>= \alpha_0^* <,>$ para todo $t \in [0,1]$.

El objeto infinitesimál asociado a una variación isométrica α es la función $Y : M \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$Y(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(t,p);$$

el campo de vectores Y es llamado **la deformación infinitesimal** generada por la variación isométrica α.

Gracias a que la variación es isométrica, si $p \in M$, para cualesquiera dos vectores $u, v \in T_pM$ y $t \in [0,1]$

$$< dX(u), dX(v) >=< \alpha_{t*}(u), \alpha_{t*}(v) >$$

y así

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} < \alpha_{t*}(u), \alpha_{t*}(v) > \\ &=< \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_{t*}(u), dX_p(v) > + < dX_p(u), \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_{t*}(v) > . \end{aligned}$$

Ahora si c es una curva en M tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = u$, entonces

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_{t*}(u) &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha(t, c(s)) \\ &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(t, c(s)) \\ &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} Y(c(s)) \\ &= dY_p(u). \end{aligned}$$

Entonces la deformación infinitesimal cumple con la relación

$$0 =< dY(u), dX(v) > + < dX(u), dY(v) > \tag{1.1}$$

para cualquier par de vectores $u, v \in TM$. Ahora sin mencionar ninguna variación isométrica, cualquier función $Y : M \to \mathbb{R}^3$, que cumpla con la relación (1.1) se llamará **deformación infinitesimal de** M.

Si tenemos una variación isométrica α tal que para todo tiempo $t \in [0,1]$, la deformación α_t es **trivial**, es decir, si existen funciones $B : [0,1] \to SO_3(\mathbb{R})$ y $v : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de modo que

$$\alpha(t, p) = B(t)X(p) + v(t),$$

entonces

$$Y(p) = B'(0)X(p) + v'(0),$$

donde $B'(0)$ es matriz antisimétrica. Inversamente si la deformación infinitesimal es de la forma

$$Y(p) = CX(p) + w, \tag{1.2}$$

con C matriz antisimétrica y $w \in \mathbb{R}^3$, entonces Y es tangente a la variación isométrica trivial

$$\alpha(t, p) = e^{tC}X(p) + tw.$$

Así una deformación infinitesimal de la forma (1.2) se dirá **trivial**, y en caso de que el encaje X solo admita deformaciones infinitesimales triviales, X se dirá **infinitesimalmente rígido**.

Al ver que un producto de un vector por una matriz antisimétrica se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \times (a, b, c),$$

las deformaciones infinitesimales triviales se pueden escribir como

$$Y(p) = X(p) \times A + w, \quad A, w \in \mathbb{R}^3.$$

Como consecuencia de esto tenemos que

$$dY(x) = dX(x) \times A \quad \forall x \in TM;$$

de hecho la misma fórmula se cumple para cualquier deformación infinitesimal dejando al vector A variar:

Lema 1.1. *Si Y es una deformación infinitesimal de $X : M \to \mathbb{R}^3$, entonces para cada $p \in M$, existe un único $A(p) \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$dY(x) = dX(x) \times A(p) \quad \textit{para todo } x \in T_pM.$$

Demostración:
Sean $x_1, x_2 \in T_pM$ dos vectores linealmente independientes. Mientras $< dY(x_i), dX(x_i) >= 0$, hay ciertos vectores $A_i \in \mathbb{R}^3$ con

$$dY(x_i) = dX(x_i) \times A_i.$$

Mas aun, por (1.1),

$$\begin{aligned} 0 &= < dY(x_2), dX(x_1) > + < dY(x_1), dX(x_2) > \\ &= < dX(x_2) \times A_2, dX(x_1) > + < dX(x_1) \times A_1, dX(x_2) > \\ &= < A_2, dX(x_1) \times dX(x_2) > + < A_1, dX(x_2) \times dX(x_1) > \\ &= < A_2 - A_1, dX(x_1) \times dX(x_2) > . \end{aligned}$$

Con esto $A_2 - A_1$ pertenece a $dX(T_pM)$ y se puede escribir como

$$A_2 - A_1 = a\ dX(x_1) + b\ dX(x_2)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Si definimos

$$A(p) := A_2 - b\ dX(x_2) = A_1 + a\ dX(x_1),$$

se tiene

$$dY(x_i) = dX(x_i) \times A_i = dX(x_i) \times A(p). \qquad \square$$

El campo vectorial $A : p \mapsto A(p)$, es llamado el **campo de rotación** (**infinitesimal**) de la deformación infinitesimal. Como vimos, cuando la deformación es trivial, el campo de rotación es constante y de hecho el inverso también es cierto:

Lema 1.2. *Si el campo de rotación A de la deformación infinitesimal Y es constante, entonces Y es trivial.*

Demostración:
Por hipótesis, existe un vector $A \in \mathbb{R}^3$ con

$$dY(x) = dX(x) \times A$$

para todo x tangente a M. Sea c una curva en M, con $c(0) = p_0 \in M$. Entonces

$$\frac{d}{dt}Y(c(t)) = dY(c'(t)) = dX(c'(t)) \times A = \frac{d}{dt}X(c(t)) \times A.$$

Entonces

$$Y(c(t)) - Y(p_0) = [X(c(t)) - X(p_0)] \times A$$

y

$$Y(c(t)) = X(c(t)) \times A + w_0$$

con $w_0 \in \mathbb{R}^3$ algun vector que no depende de c. Entonces para todo $p \in M$ tenemos

$$Y(p) = X(p) \times A + w_0$$

y Y es trivial. □

1.2. Rigidez infinitesimal de superficies compactas convexas.

Cuando se tienen ω y η 1-formas $\mathbb{R}^3$-valuadas en M, podemos definir las 2-formas $\omega \,\mathbf{x}\, \eta$ y $<\omega, \eta>$ de la siguiente manera:

$$\omega \,\mathbf{x}\, \eta(x, y) := \omega(x) \times \eta(y) - \omega(y) \times \eta(x),$$

y

$$<\omega, \eta> (x, y) :=< \omega(x), \eta(y) > - < \omega(y), \eta(x) > .$$

Con esto si tenemos un encaje $X : M \to \mathbb{R}^3$ con curvatura Gaussiana K y curvatura media H, y si $N : M \to \mathbb{R}^3$ es su normal interior, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

Proposición 1.3. *Si Ω es la forma de área de M, entonces*

$$dX \,\mathbf{x}\, dX = 2N\Omega \tag{1.3}$$
$$dX \,\mathbf{x}\, dN = -2HN\Omega \tag{1.4}$$
$$dN \,\mathbf{x}\, dN = 2KN\Omega. \tag{1.5}$$

Demostración: Dado un punto $p \in M$ y $\{x_1, x_2\}$ una base positivamente orientada de T_pM, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} dX \,\mathbf{x}\, dX(x_1, x_2) &= 2dX(x_1) \times dX(x_2) \\ &= 2N(p) \cdot \text{area del paralelogramo generado por } dX(x_1), dX(x_2) \\ &= 2N(p)\ \Omega(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Mas aun, si

$$\begin{aligned} dN(x_1) &= \alpha dX(x_1) + \beta dX(x_2) \\ dN(x_2) &= \gamma dX(x_1) + \delta dX(x_2), \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} dX \,\mathbf{x}\, dN(x_1, x_2) &= \delta dX(x_1) \times dX(x_2) - \alpha dX(x_2) \times dX(x_1) \\ &= (\alpha + \delta) N(p) \Omega(x_1, x_2) \\ &= -2H(p) N(p) \Omega(x_1, x_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dN \,\mathbf{x}\, dN(x_1, x_2) &= 2dN(x_1) \times dN(x_2) \\ &= 2(\alpha\delta - \gamma\beta) dX(x_1) \times dX(x_2) \\ &= 2K(p) N(p) \Omega(x_1, x_2). \qquad \square \end{aligned}$$

1.2.1. Deformación infinitesimal como solución de una EDP elíptica.

Suponiendo, para simplificar notación, que la superficie es subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y X es la función inclusión, para cada deformación infinitesimal $Y : M \to \mathbb{R}^3$ podemos considerar las componentes normales de dY y de su vector de rotación:

$$p = < dY, N >, \qquad \varphi = - < A, N >;$$

estas dos funciones determinan completamente a dY mediante la fórmula

$$dY = -\varphi dX \times N + pN. \tag{1.6}$$

Para ver esto, si denotamos la parte tangente del campo A por A^T, podemos escribir

$$p = < dX \times A, N > = [dX, A, N] = [dX, A^T, N]$$

donde $[\cdot,\cdot,\cdot]$ denota el producto mixto[1]; con esto tenemos[2]

$$p =< dX \times A^T, N >= -i_{A^T}\Omega$$

y entonces $dX \times A^T = pN$, de lo cual, usando $dY = dX \times A$ y $A = A^T - \varphi N$ se deduce la ecuación (1.6).

Lema 1.4. *Se cumplen las siguientes relaciones*

- $(d\varphi \wedge dX) \times N = \nabla\varphi\ \Omega$,
- $p \wedge dN = dN(A^T)\Omega$

  y
- $dp = -div(A^T)\Omega$.

Demostración: Consideremos $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal directa del espacio tangente a M, tenemos que

$$\begin{aligned}(d\varphi \wedge dX)(e_1,e_2) \times N &= (d\varphi(e_1)e_2 - d\varphi(e_2)e_1) \times N \\ &= d\varphi(e_1)e_2 \times N - d\varphi(e_2)e_1 \times N.\end{aligned}$$

Dado que $\{e_1, e_2, N\}$ es base ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$, se tiene $e_1 \times N = -e_2$ y $e_2 \times N = e_1$. Con esto tenemos que

$$(d\varphi \wedge dX)(e_1,e_2) \times N = d\varphi(e_1)e_1 + d\varphi(e_2)e_2 = \nabla\varphi$$

y así $(d\varphi \wedge dX) \times N = \nabla\varphi\ \Omega$.

Ahora, dado que

$$p_1 := p(e_1) = -\Omega(A^T, e_1) \quad \text{y} \quad p_2 := p(e_2) = -\Omega(A^T, e_2),$$

tenemos que

$$A^T = -p_2 e_1 + p_1 e_2;$$

con esto

$$p \wedge dN(e_1,e_2) = p_1 dN(e_2) - p_2 dN(e_1) = dN(-p_2e_1 + p_1e_2) = dN(A^T).$$

Por último por definición de la divergencia tenemos que

$$d(i_{A^T}\Omega) = \mathrm{div}(A^T)\Omega,$$

de lo que se concluye que $dp = -\mathrm{div}(A^T)\Omega$. $\square$

Observando que la condición $ddY = 0$ nos da la igualdad

$$0 = -(d\varphi \wedge dX) \times N + \varphi dX \,\mathbf{x}\, dN + dpN - p \wedge dN,$$

[1] $[u, v, w] = \det(u, v, w)$ (determinante en la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

[2] $i_{A^T}\Omega$ es la contracción por el campo A^T de la 2-forma Ω, es decir $i_{A^T}\Omega(u) = \Omega(A^T, u)$ para todo u vector tangente a M.

(ver (1.6)), recordando la ecuación (1.4) y usando el Lema 1.4, obtenemos las siguientes igualdades (que corresponden a tomar parte tangente y normal de $ddY = 0$):

$$\begin{cases} \nabla\varphi = S(A^T) \\ \\ dp = 2H\varphi\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

donde $S = -dN$ denota el operador de forma de M.

Si se tiene además la hipótesis de que la curvatura es positiva sobre toda M, entonces S se puede invertir y gracias a la tercera relación del Lema 1.4, el sistema se convierte en la ecuación

$$\Delta_{II}\varphi + 2H\varphi = 0, \tag{1.8}$$

donde Δ_{II} es el operador diferencial elíptico sobre M dado por

$$\Delta_{II}\varphi = \operatorname{div}\left(S^{-1}(\nabla\varphi)\right).$$

Observación 1.5. Si se resuelve la ecuación (1.8) para φ, la segunda ecuación del sistema (1.7) define una 2-forma "dp"; la condición para que esta forma sea exacta es que su integral sea 0, esto es una consecuencia de la ecuación (1.8) ya que la integral de una divergencia es cero. Con esto la solución φ y la 1-forma p definen una 1-forma "dY" dada por la ecuación (1.6); esta 1-forma es cerrada (pues la condición de ser cerrada viene de que φ y dp satisfacen (1.7)) y dado que el grupo de cohomología (de De Rahm) $H^1(M) = 0$, entonces esta 1-forma es exacta y entonces es la diferencial de una función Y (que será entonces una deformación infinitesimal).

1.2.2. Fórmula de Blaschke y rigidez infinitesimal.

Introducimos la llamada **función soporte** del encaje X definida por

$$h = -< X, N >: M \to \mathbb{R},$$

podemos observar que $h(p)$ es la distancia (con signo) del origen al plano tangente (afín) de $X(M)$ en $X(p)$. Dado que N apunta hacia adentro y si $X(M)$ es convexa con el origen en su interior, entonces h es exactamente la distancia.

Ahora podemos demostrar la rigidez infinitesimal de los ovaloides, para lo cual necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.6 (Fórmula integral de Blaschke)**.** *Dada $Y : M \to \mathbb{R}^3$ una deformación infinitesimal con vector de rotación A, entonces dA es un endomorfismo de TM en cada punto y se cumple que*

$$\det dA \leq 0$$

con igualdad si y solo si $dA = 0$; además

$$\int_M h(\det dA)\Omega = 0. \tag{1.9}$$

Demostración: Considerando la deformación infinitesimal Y con vector de rotación A, se tiene que

$$dY = dX \times A$$

y usando que $0 = d(dY)$, obtenemos que

$$0 = -dX \,\mathbf{x}\, dA. \tag{1.10}$$

Escogiendo un marco movil $\{X_1, X_2\}$ en una vecindad de $p \in M$, es decir dos campos locales linealmente independientes, entonces la relación (1.10) se escribe como

$$dX(X_1) \times dA(X_2) - dX(X_2) \times dA(X_1) = 0; \tag{1.11}$$

tomando el producto interno de (1.11) con $dX(X_1)$ obtenemos

$$0 = - < dX(X_2) \times dA(X_1), dX(X_1) >=< dA(X_1), dX(X_1) \times dX(X_2) >,$$

y así $0 =< dA(X_1), N >$, análogamente para $dX(X_2)$ obtenemos $0 =< dA(X_2), N >$ y entonces $< dA, N >= 0$, es decir $dA : T_pM \to T_pM$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} dA(X_1) &= \alpha dX(X_1) + \beta dX(X_2) \\ dA(X_2) &= \gamma dX(X_1) + \delta dX(X_2) \end{aligned}$$

para algunas funciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y entonces la ecuación (1.11) implica que

$$\alpha + \delta = 0.$$

Ahora, gracias a que $0 = d(dA)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \;&= d(dA)(X_1, X_2) = X_1 \cdot dA(X_2) - X_2 \cdot dA(X_1) - dA([X_1, X_2]) \\ &= \gamma X_1 \cdot dX(X_1) + \delta X_1 \cdot dX(X_2) - \alpha X_2 \cdot dX(X_1) - \beta X_2 \cdot dX(X_2) \\ &+ \text{término tangente a M.} \end{aligned}$$

Tomando producto punto con N, y usando que $\alpha + \delta = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \;&= \gamma II(X_1, X_1) - 2\alpha II(X_1, X_2) - \beta II(X_2, X_2) \\ &= \gamma l - 2\alpha m - \beta n \end{aligned}$$

nombrando l, m, n correspondientemente a los valores de II, y si escogemos X_1, X_2 principales en p, tenemos

$$m = II(X_1, X_2) = 0,$$

y entonces la ecuación queda como

$$\gamma l - \beta n = 0.$$

Mientras $K = ln > 0$, entonces γ y β tienen el mismo signo. Entonces

$$0 \leq \beta\gamma \qquad \text{y} \qquad 0 = \beta\gamma \text{ si y solo si } \beta = \gamma = 0.$$

Entonces en cada punto p tenemos

$$0 \leq \alpha^2 + \beta\gamma = -\det dA$$

con igualdad si y solo si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, i.e. $dA = 0$, lo que prueba la primera parte del lema.

Consideremos ahora la 1-forma
$$\omega =< X \,\mathbf{x}\, A, dA >,$$
con la cual tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega &=< dX \,\mathbf{x}\, A, dA > + < X \,\mathbf{x}\, dA, dA > \\ &= - < A, dX \,\mathbf{x}\, dA > + < X, dA \,\mathbf{x}\, dA > \\ &= 0 + < X, dA \,\mathbf{x}\, dA > \end{aligned}$$

por (1.10), pero por un argumento similar a la prueba de la ecuación (1.5)

$$dA \,\mathbf{x}\, dA = 2(\det dA) N \Omega,$$

con lo que al tomar producto punto con X aparece la función soporte y nos da

$$d\omega = -2h(\det dA)\Omega$$

y entonces la fórmula (1.9) se sigue del Teorema de Stokes. □

Teorema 1.7. *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta con curvatura positiva, entonces M es infinitesimalmente rígida.*

Demostración: Dada Y una deformación infinitesimal cualquiera en M con vector de rotación A, por el lema anterior $\det dA \leq 0$ y mientras $h > 0$, la formula integral de Blaschke implica que $\det dA = 0$ y entonces
$$dA = 0.$$
Así el vector de rotación A es constante y entonces por el Lema 1.2, la deformación infinitesimal Y es trivial y M es infinitesimalmente rígida. □

Corolario 1.8. *La única solución de la ecuación diferencial*

$$\Delta_{II}\varphi + 2H\varphi = 0,$$

en una superficie compacta M con curvatura positiva, es $\varphi = - < A, N >$, con $A \in \mathbb{R}^3$ constante.
□

Capítulo 2

Unicidad en el problema de Weyl: Teorema de Cohn-Vossen

El teorema de Cohn-Vossen (Teorema 2.3) es concerniente a la unicidad en el problema de Weyl. Fué primero demostrado por Cohn-Vossen en 1927 suponiendo que la superficie fuera analítica, siendo luego mejorado por O. K. Zhitomirsky, hasta que Herglotz dio una prueba muy corta (que es la presentada aquí) asumiendo que la superficie es solo de clase C^3. El contenido de este capítulo al igual que el primero es escencialmente lo expuesto por Spivak en [2].

Lema 2.1 (Formula integral de Herglotz)**.** *Dada una superficie compacta M y dos encajes isométricos*

$$f, \overline{f} : M \to \mathbb{R}^3,$$

con $H, \overline{H}$ sus correspondientes curvaturas medias y $N, \overline{N}$ sus correspondientes normales interiores, entonces, si h denota la función soporte de f, se cumple

$$2\int_M (\overline{H} - H)\Omega = -\int_M h\,det(d\overline{N} - dN)\Omega.$$

Demostración: Dado $p \in M$ fijo, consideramos el isomorfismo de espacios tangentes

$$\iota = d(f \circ \overline{f}^{-1}) : d\overline{f}(T_pM) \to df(T_pM).$$

Ahora si tomamos la 1-forma sobre M dada por

$$\omega = < f \times N, (\iota \circ d\overline{N}) >,$$

usando marcos moviles se puede demostrar, como en la fórmula de Blaschke, que su diferencial exterior está dada por

$$d\omega = -[2\overline{H} - h(2K - \det(d\overline{N} - dN))]\Omega,$$

con K su curvatura de Gauss(ver [2, Pág. 192] para detalles). Dado que M es compacta, por el teorema de Stokes, se tiene que

$$2\int_M \overline{H}\Omega - 2\int_M hK\Omega = -\int_M h\det(d\overline{N} - dN)\Omega. \tag{2.1}$$

Usando la igualdad (2.1) para $f = \overline{f}$ obtenemos una de las **fórmulas de Minkowski**:

$$\int_M H\Omega = \int_M hK\Omega. \tag{2.2}$$

Así combinando las fórmulas (2.1) y (2.2) llegamos a la fórmula deseada. □

Antes de demostrar la rigidez de los ovaloides, necesitamos un preliminar algebraico del cual omitimos la prueba por ser estandar en algebra lineal, puede consultarse por ejemplo en Spivak [2]:

Lema 2.2. *Si A, B son dos transformaciones lineales autoadjuntas de $\mathbb{R}^2$ que son positivo definidas, y si además* $\det A = \det B$, *entonces*

$$\det(A - B) \leq 0,$$

con igualdad si y solo si $A = B$. □

Teorema 2.3 (Cohn-Vossen)**.** *Si $f, \overline{f} : M \to \mathbb{R}^3$ son dos encajes isométricos con M superficie compacta conexa con curvatura positiva, entonces f y $\overline{f}$ difieren por un movimiento euclidiano.*

Demostración: Consideremos $N, \overline{N} : M \to \mathbb{R}^3$ las normales interiores de f y $\overline{f}$ respectivamente; dado que las aplicaciones

$$dN, d\overline{N} : T_pM \to T_pM$$

tienen mismo determinante $K(p) > 0$, entonces el Lema 2.2, el hecho que $h > 0$ y la formula integral de Herglotz implican que

$$\int_M (\overline{H} - H)\Omega \geq 0.$$

Pero intercambiando f y $\overline{f}$ en esta desigualdad concluimos que

$$\int_M (\overline{H} - H)\Omega = 0,$$

dando entonces que

$$\int_M h\det(d\overline{N} - dN)\Omega = 0,$$

con lo que $\det(d\overline{N} - dN) = 0$. De nuevo el Lema 2.2 implica que $d\overline{N} = dN$ en todos lados, con lo que el teorema fundamental de la teoría de superficies implica que f y $\overline{f}$ difieren por un movimiento Euclidiano. □

La condición de que la curvatura es estrictamente positiva es necesaria: existen ejemplos de superficies de revolución con curvatura no negativa isométricas pero que no son congruentes (i.e. no puede llevarse una en la otra mediante movimientos rígidos). Ver por ejemplo Berger & Gostiaux [4].

Capítulo 3

Enunciado preciso del problema de Weyl y método de continuidad

Consideramos M una superficie difeomorfa a la esfera S^2; con el fin de obtener normas adecuadas sobre funciones en M que contengan información sobre sus diferenciales y dado que no existe un sistema de coordenadas global, consideramos lo siguiente:

Tomamos una bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen suficientemente grande, de modo que la imagen inversa de las proyecciones estereográficas en S^2 se intersecten. Esto da dos regiones compactas R_1, R_2 que se intersectan y cubren a M. Así, si tenemos una función $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^k, podemos definir

$$\|f\|_k^{(i)} = \sum_{|j| \leq k} \sup_{R_i} |D^j f|, \qquad i = 1, 2$$

donde $j \in \mathbb{N}_0^2$, y si $j = (j_1, j_2)$, entonces $|j| = j_1 + j_2$ y

$$D^j f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}.$$

Una noción importante en el estudio de las EDP, es la noción de continuidad de Hölder: una función f es Hölder continua con exponente α (para $0 < \alpha \leq 1$) en R_i, si la cantidad

$$\|f\|_\alpha^{(i)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \qquad x, y \in R_i$$

es finita. Consideraremos entonces el espacio $C^{k+\alpha}$ de funciones sobre la M (con $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$) que son las funciones de clase C^k tales que todas sus parciales $k-$ésimas son Hölder continuas con exponente α sobre R_1 y R_2. Siendo este un espacio normado con norma

$$\|f\|_{k+\alpha} = \sum_{i=1}^{2}(\|f\|_k^{(i)} + \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta f\|_\alpha^{(i)}),$$

así queda definido entonces el espacio normado $(C^k, \|\cdot\|_k)$ para $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$.

De igual manera podemos considerar el espacio S_k de funciones en M con valores en $\mathbb{R}^3$ tales que sus funciones coordenada pertenecen a C^k, con norma la suma de las normas de sus coordenadas, es decir, si

$$X = (X_1, X_2, X_3) : S^2 \to \mathbb{R}^3$$

pertenece a S_k,

$$\|X\|_k := \|X_1\|_k + \|X_2\|_k + \|X_3\|_k;$$

análogamente, definimos el espacio M_k de formas cuadráticas de manera que si $g \in M_k$ está dado en R_i como

$$g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

entonces E, F, G son de clase C^k y tiene norma

$$\|g\|_k = \sum_{i=1}^{2}(\|E\|_k^{(i)} + \|F\|_k^{(i)} + \|G\|_k^{(i)}).$$

Los espacios C^k, S_k y M_k con las normas definidas arriba forman espacios de Banach [5]. Finalmente introducimos dos subconjuntos de M_k para $k \geq 2$:

- $M_k' \subseteq M_k$ el conjunto de métricas Riemannianas sobre M cuya curvatura es positiva y
- $M_k'' \subseteq M_k'$ el conjunto de métricas Riemannianas sobre M de curvatura positiva que además pueden ser logradas mediante un encaje en $\mathbb{R}^3$ de clase C^2 .

Una vez introducidos estos espacios, el problema de Weyl puede ser formulado como sigue: Se cumple la igualdad de espacios

$$M_k'' = M_k'. \tag{3.1}$$

El resultado final en el articulo de Nirenberg [1] (el cual es el expuesto en este trabajo) afirma que (3.1) es cierto para $k \geq 4$, es decir:

Teorema 3.1. *Dada una métrica Riemanniana g de clase C^4 en M de curvatura positiva, entonces existe un encaje isométrico $X : M \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2.*

Para probar este teorema, necesitamos probar primero una versión un poco mas débil:

Teorema 3.2. *Sea $g \in M'_{4+\alpha}$ una métrica, $0 < \alpha < 1$. Entonces existe un encaje $X \in S_{4+\alpha}$ de manera que*

$$X^* <,>= g;$$

si además $g \in M'_{m+\beta}$ para $m \geq 4$ entero y $0 < \beta < 1$, entonces $X \in S_{m+\beta}$.

El Teorema 3.2 se prueba usando el método de continuidad que puede formularse en los siguientes tres pasos:

1. $M'_{4+\alpha}$ es un espacio conexo,
2. $M''_{4+\alpha}$ es abierto en $M'_{4+\alpha}$,
3. $M''_{4+\alpha}$ es cerrado en $M'_{4+\alpha}$ para $0 < \alpha < 1$.

Terminamos esta sección con la prueba de la conexidad de $M'_{4+\alpha}$:

Para un punto fijo $p \in M$, tomemos una función $\varphi : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ definida en una vecindad de p tal que $d\varphi_p \neq 0$ y armónica con respecto a la métrica g, es decir tal que

$$\Delta_g \varphi = *d * d\varphi = 0,$$

donde $* : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo[1] dado por la relación

$$g(*\alpha, \beta)\Omega_g = \alpha \wedge \beta$$

(aquí g también denota la métrica natural sobre $\Omega^1(M)$). La condición de ser armónica implica que $d * d\varphi = 0$ (es decir $*d\varphi$ es una forma cerrada) y entonces por el lema de Poincaré existe una función ψ tal que

$$* \, d\varphi = d\psi, \tag{3.2}$$

definida en una vecindad (tal vez mas pequeña que U) de p. Dado que para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$ se tiene que α y $*\alpha$ son ortogonales sobre g y $g(*\alpha, *\alpha) = g(\alpha, \alpha)$, además de que $d\varphi_p \neq 0$, entonces $d\varphi_p$ y $d\psi_p$ son linealmente independientes y (φ, ψ) define un sistema de coordenadas local en p (conocido como **coordenadas isotérmicas**) en el cual la métrica se expresa como

$$g = c(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

para una función positiva c; más aún ψ también es armónica pues se tiene que $\Delta\psi = *d * d\psi = *d *^2 d\varphi = - * dd\varphi = 0$.

Observación 3.3. Un difeomorfismo conforme $f : U \subseteq \mathbb{C} \to V \subseteq \mathbb{C}$, de clase C^k ($k \geq 1$), que preserva orientación es holomorfo (y por tanto un biholomorfismo).

[1] Operador $*$ de Hodge

Con esta observación, vemos que las coordenadas isotérmicas nos dan la posibilidad de introducir una estructura compleja $(M, \mathcal{C})$: si (φ, ψ) son coordenadas isotérmicas, $z = \varphi + i\psi$ define un parámetro complejo de la superficie (en efecto, la acción de i en los complejos corresponde a la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en TM, lo que permite ver fácilmente que los cambios de cartas son holomorfos). Pero en este caso el **Teorema de Uniformización** implica que existe un biholomorfismo con la estructura canónica de superficie de Riemann de S^2

$$\Psi : (S^2, \mathcal{C}_0) \to (M, \mathcal{C}).$$

Observemos que $\Psi : (S^2, g_0) \to (M, g)$ es conforme (g_0 es la métrica canónica de S^2), es decir, existe $h : S^2 \to \mathbb{R}$ positiva tal que

$$\Psi^* g = h g_0,$$

ya que Ψ es un biholomorfismo con respecto a las estructuras complejas asociadas a g_0 y g, y por lo tanto $d\Psi$ conmuta con las rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en TS^2 y TM.

Teniendo esto, $h^t g_0 = e^{t \log(h)} g_0$ es una curva de métricas en S^2 con curvatura positiva

$$K_t = \frac{1}{h^t}(1 - t + thK), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

donde K es la curvatura de (M, g). Con esto $t \mapsto h^t g_0$ es una curva de métricas de curvatura positiva en S^2 que conectan g_0 con $\Psi^* g$, entonces para que pertenezcan a $M'_{4+\alpha}$ (demostrando entonces la conexidad por trayectorias de $M'_{4+\alpha}$) falta ver la regularidad de h (como función en M): dado que las coordenadas isotérmicas son soluciones de

$$\Delta_g \varphi = \Delta_g \psi = 0$$

y $g \in M'_{4+\alpha}$, entonces el teorema de regularidad de soluciones de ecuaciones elípticas lineales ([5, Pág. 109] o Teorema A.2 en el apéndice), implica que φ y ψ (y por tanto h) son de clase $C^{4+\alpha}$; así $g_t \in M'_{4+\alpha}$ y entonces se tiene la conexidad.

Capítulo 4

$M''_{4+\alpha}$ es abierto en $M'_{4+\alpha}$

Para demostrar la segunda parte en el método de continuidad, se puede probar de hecho una versión ligeramente mas fuerte, que es la siguiente:

Teorema 4.1. *Dado $g \in M''_{4+\alpha}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g' \in M'_{2+\alpha}$ con*

$$\|g - g'\|_{2+\alpha} < \varepsilon,$$

entonces existe un encaje $X' \in S_{2+\alpha}$, con $X'^* <,>= g'$ (es decir $g' \in M''_{2+\alpha}$). Mas aún, si $g' \in M'_{4+\alpha}$, entonces $X' \in S_{4+\alpha}$.

Si escribimos $g' = g + h$, con $h \in M'_{2+\alpha}$ y $\|h\|_{2+\alpha} < \varepsilon$, y si suponemos que X' es el encaje dado por el Teorema 4.1, entonces podemos escribir $X' = X + Y$ con $Y \in S_{2+\alpha}$ y se tendrá la igualdad (como formas cuadráticas):

$$g' = g + h =< dX', dX' >=< dX, dX > +2 < dX, dY > + < dY, dY > .$$

Dado que $g =< dX, dX >$, entonces la demostración del Teorema 4.1 es equivalente a encontrar $Y \in S_{2+\alpha}$ tal que se cumpla

$$2 < dX, dY >= h- < dY, dY > . \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) es la versión **no homogénea** de la ecuación lineal que aparece en el estudio de las **deformaciones infinitesimales** de una superficie (ecuación (1.1) con $u = v$).

Para mostrar la existencia de una función Y que cumpla con (4.1), usamos un esquema de iteración: comenzando con $Y_0 = 0$, definimos recursivamente Y_n como una solución de la ecuación

$$2 < dX, dY_n >= h- < dY_{n-1}, dY_{n-1} >, \qquad n = 1, 2, ...$$

y mostramos que Y_n converge en $S_{2+\alpha}$ si $\|h\|_{2+\alpha}$ es pequeño.

Para demostrar esto, se debe dar un resultado de existencia para la ecuación lineal

$$2 \ < dX, dY >= h- < dV, dV >, \tag{4.2}$$

con $X \in S_{4+\alpha}$ una superficie con curvatura positiva, $h \in M_{2+\alpha}$ y $V \in S_{2+\alpha}$, que es el siguiente

Teorema 4.2. *Dada V en $S_{2+\alpha}$ existe una solución $Y \in S_{2+\alpha}$ de (4.2). En general la solución no es única, pero para cada V, existe una solución particular (denotada por $\phi(V)$) de manera que*

$$\|\phi(V)\|_{2+\alpha} = \|Y\|_{2+\alpha} \leq \bar{K}(\|h\|_{2+\alpha} + \|V\|^2_{2+\alpha}) \tag{4.3}$$

y

$$\|\phi(V) - \phi(V_1)\|_{2+\alpha} \leq \bar{K}\|V + V_1\|_{2+\alpha} \cdot \|V - V_1\|_{2+\alpha} \tag{4.4}$$

se cumplen para todo $V, V_1 \in S_{2+\alpha}$, en donde $\bar{K}$ es una constante positiva que sólo depende de la superficie X.

Observación 4.3. Resuelto el Teorema 4.2, podemos escoger

$$\varepsilon = \frac{R}{2\overline{K}}, \quad \text{donde} \quad R < \frac{1}{2\overline{K}},$$

y se tiene entonces que definiendo recursivamente la sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el esquema de iteración, vemos que si $\|Y_{n-1}\|_{2+\alpha} < R$,

$$\begin{aligned} \|Y_n\|_{2+\alpha} = \|\phi(Y_{n-1})\|_{2+\alpha} &\leq \overline{K}(\|h\|_{2+\alpha} + \|Y_{n-1}\|^2_{2+\alpha}) \\ &< \overline{K}(\tfrac{R}{2\overline{K}} + R^2) < \overline{K}(\tfrac{R}{2\overline{K}} + \tfrac{R}{2\overline{K}}) = R \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\phi(Y_n) - \phi(Y_m)\|_{2+\alpha} &\leq \overline{K}\|Y_n + Y_m\|_{2+\alpha} \cdot \|Y_n - Y_m\|_{2+\alpha} \\ &\leq 2R\overline{K}\|Y_n - Y_m\|_{2+\alpha}. \end{aligned}$$

Dado que $2R\overline{K} < 1$, entonces ϕ es de contracción y así $\{Y_n\}$ converge a un $Y \in S_{2+\alpha}$, que además cumple con $\|Y\|_{2+\alpha} < R$.

Como R puede ser escogido tan pequeño como sea necesario, entonces podemos escogerlo de manera que

$$X' = X + Y$$

siga siendo un encaje y tenga curvatura positiva. Con esto, si el Teorema 4.2 se cumple, se tendrá que $M''_{4+\alpha}$ es abierto en $M'_{4+\alpha}$.

Observación 4.4. Es suficiente resolver el Teorema 4.2 para $V \in S_{3+\alpha}$, pues si tomamos $\widetilde{V} \in S_{2+\alpha}$, este se puede aproximar por una sucesión $\{V_m\}$ en $S_{3+\alpha}$ de modo que $\|\widetilde{V} - V_m\|_{2+\alpha} \to 0$ (dado que $S_{3+\alpha}$ es denso en $S_{2+\alpha}$). Si se soluciona (4.2) para cada V_m se puede demostrar (gracias a las estimaciones del Teorema 4.2) que la sucesión de soluciones converge en $S_{2+\alpha}$ a una solución de (4.2) para $\widetilde{V}$, con las estimaciones requeridas.

4.1. Introducción de nuevas variables dependientes.

Para simplificar la notación, podemos suponer nuevamente que M es subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y X es la función inclusión. Consideramos $\overline{g} = h- < dV, dV >$ la forma bilineal de la ecuación (4.2); gracias a la observación 4.4, podemos suponer $V \in S_{3+\alpha}$ y tenemos que $\overline{g} \in M_{2+\alpha}$. En el estudio de las deformaciones infinitesimales, vimos que una deformación infinitesimal podía ser expresada en términos de dos nuevas variables (ecuación (1.6)) que a su vez eran descritas por una EDP elíptica (ecuación (1.8)); procedemos de manera análoga en el estudio de las soluciones de la ecuación (4.2):

Como $\overline{g}$ es simétrica, existe U tensor simétrico (1,1) sobre M tal que

$$\overline{g} = g(U(x), y) \quad \forall x, y \in TM.$$

Entonces si Y es solución de (4.2), para todo $x \in TM$ tenemos que

$$2 < dX(x), dY(x) >= \overline{g}(x, x) =< U(x), dX(x) >,$$

con lo que

$$< 2dY(x) - U(x), dX(x) >= 0;$$

por lo tanto $dY - \frac{1}{2}U$ es un operador antisimétrico de TM y por tanto existe $A : M \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$dY(x) = \frac{1}{2}(dX(x) \times A + U(x)),$$

o simplemente

$$dY = \frac{1}{2}(dX \times A + U). \tag{4.5}$$

Si consideramos (al igual que lo hicimos con las deformaciones infinitesimales, Sección 1.2.1) las componentes normales de dY y A:

$$\varphi = - < A, N >, \qquad p =< dY, N >,$$

y separamos A en sus componentes tangente y normal: $A = A^T - \varphi N$, observando que $dX \times A^T = 2pN$, podemos expresar dY en términos de φ, p y $\overline{g}$ como

$$dY = \frac{1}{2}(-\varphi dX \times N + U) + pN. \tag{4.6}$$

Considerando U como 1-forma con valores en $\mathbb{R}^3$, dU es una 2-forma sobre M con valores en $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto existe un campo Z tal que si Ω_g es la forma de área sobre M de la métrica g, entonces

$$dU = Z\Omega_g.$$

Considerando entonces la igualdad $ddY = 0$ tenemos que

$$0 = -d\varphi \wedge dX \times N + \varphi dX \,\mathbf{x}\, dN + 2dpN - 2p \wedge dN + Z\Omega_g,$$

obteniendo cada una de estas expresiones análogamente a la sección 1.2 obtenemos que

$$\nabla\varphi\ \Omega_g = (-dN(A^T) + Z - 2H\varphi N)\Omega_g + 2dpN$$

y tomando parte tangente y normal llegamos al sistema de ecuaciones

$$\nabla\varphi = S(A^T) + Z^T \tag{4.7}$$

$$dp = (H\varphi - \frac{1}{2}Z^N)\Omega_g. \tag{4.8}$$

Dado que se cumple la igualdad

$$dp = -\frac{1}{2}\mathrm{div}A^T\Omega_g$$

(la divergencia se toma con respecto a la métrica g, ver prueba del Lema 1.4), y gracias a que la curvatura de Gauss de g es positiva, podemos invertir el operador de forma y llegar a la ecuación

$$\Delta_{II}\varphi + 2H\varphi = \mathrm{div}\left(S^{-1}(Z^T)\right) + Z^N, \tag{4.9}$$

con Δ_{II} el operador diferencial elíptico sobre M definido por

$$\Delta_{II}\varphi = \mathrm{div}\left(S^{-1}(\nabla\varphi)\right).$$

Observación 4.5. La ecuación (4.9) es el caso no-homogéneo de la EDP que aparece en el estudio de las deformaciones infinitesimales de M (ecuación (1.8)). Podemos observar (al igual que con las deformaciones infinitesimales) que si encontramos una solucíon φ de la ecuación (4.9), las ecuaciones (4.8) y (4.6) nos dan la posibilidad de obtener una función $Y : M \to \mathbb{R}^3$ solución de la ecuación (4.2).

4.2. Teoría de Hilbert sobre ecuaciones elípticas en la esfera aplicada al problema lineal.

Para demostrar la existencia de una solución de la ecuación (4.9), Nirenberg hizo uso de la teoría desarrollada por D. Hilbert sobre funciones de Green para ecuaciones elípticas en la esfera. Alternativamente (siguiendo H. Brezis [3, Pág. 295]), podemos encontrar una solución de (4.9) usando el teorema de Lax-Milgram para formas cuadráticas en espacios de Hilbert: Consideramos O un operador sobre M de la forma

$$O(\varphi) = \mathrm{div}_g(T(\nabla\varphi)) + e\varphi = f, \tag{4.10}$$

donde $T : TM \to TM$ es un operador simétrico positivo definido en cada punto de M (de modo que O es operador elíptico) y consideramos la forma cuadrática sobre $H^1(M)$ [1] dada por

$$B(\varphi, \psi) = \int_M [g(T(\nabla\varphi), \nabla\psi) - e\varphi\psi + \lambda\varphi\psi]\,\Omega_g, \tag{4.11}$$

[1] $H^1(M) = \{u \in L^2(M) : \partial_i u \in L^2(M)\}$ espacio de Sobolev.

donde $\lambda > 0$ es una constante. Si λ es suficientemente grande, B cumple con las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (continuidad y coercividad sobre $H^1(M)$) y entonces para cada $f \in L^2(M)$, existe un único $\varphi = F(f) \in H^1(M)$ de manera que

$$B(\varphi, \psi) = \int_M (f\psi)\Omega_g \qquad \forall \psi \in H^1(M). \tag{4.12}$$

Con esto φ es solución (débil[2]) de (4.10) si y sólo si $F(f + \lambda\varphi) = \varphi$, es decir, si $\widetilde{\varphi} := f + \lambda\varphi$ cumple con

$$\widetilde{\varphi} - \lambda F(\widetilde{\varphi}) = f.$$

Dado que el operador $F : L^2(M) \to H^1(M) \subseteq L^2(M)$ es compacto (la inyección de $H^1(M)$ en $L^2(M)$ es compacta), entonces la ecuación homogénea ($f = 0$) admite sólo una cantidad finita de soluciones linealmente independientes $\{Z_1, ..., Z_k\}$ y la ecuación no homogénea admite solución si y sólo si f es ortogonal (en $L^2(M)$) a Z_j (la bien conocida alternativa de Fredholm).

Si consideramos ahora el operador

$$L(\varphi) = \Delta_{II}\varphi + 2H\varphi,$$

que es de la forma (4.10), una solución de la ecuación homogénea

$$L(\varphi) = \Delta_{II}\varphi + 2H\varphi = 0,$$

corresponde a una deformación infinitesimal de M, y por el último Corolario del capítulo 1 (Corolario 1.8) las únicas soluciones de esta ecuación homogénea son de la forma $\varphi_0 = - < A, N >$, con $A \in \mathbb{R}^3$ constante. Entonces la ecuación no-homogénea (4.9) tendrá solución siempre que se cumpla

$$\int_M \varphi_0 \left(\mathrm{div}_g \left(S^{-1}(Z^T)\right) + Z^N\right) \Omega_g = 0,$$

donde $\varphi_0 = - < A, N >$, $A \in \mathbb{R}^3$, o equivalentemente

$$\int_M N \left(\mathrm{div}_g \left(S^{-1}(Z^T)\right) + Z^N\right) \Omega_g = 0.$$

Para ver que se cumple esta condición, consideramos $N = (N^i)_i \in \mathbb{R}^3$ y W un campo vectorial sobre M; dado que

$$\mathrm{div}_g(N^i W) = dN^i(W) + N^i \mathrm{div}_g(W),$$

al considerar el vector

$$\text{“}\mathrm{div}_g(NW)'' := (\mathrm{div}_g(N^i W))_i = dN(W) + N\mathrm{div}_g(W),$$

el teorema de la divergencia aplicado a cada coordenada da

$$0 = \int_M \mathrm{div}_g(NW)\Omega_g = \int_M dN(W)\Omega_g + \int_M N\mathrm{div}_g(W)\Omega_g.$$

[2]Para ver la existencia de soluciones clásicas, se usan ciertas estimaciones. Detalles de esto se encuentran en el libro de Brezis [3]

Aplicando esto para el campo $W = S^{-1}(Z^T)$ (y usando que $dN = -S$) tenemos que

$$\int_M N\mathrm{div}_g\left(S^{-1}(Z^T)\right)\Omega_g = \int_M Z^T\Omega_g,$$

con lo que se tiene entonces que

$$\int_M N\left(\mathrm{div}_g\left(S^{-1}(Z^T)\right) + Z^N\right)\Omega_g = \int_M Z\Omega_g = \int_M dU = 0,$$

donde la última igualdad es por el Teorema de Stokes aplicado a cada coordenada.

Entonces, por la alternativa de Fredholm, podemos concluir que la ecuación (4.9) tiene solución y las ecuaciones (4.8) y (4.6) dan finalmente una solución de (4.2).

4.3. Prueba del Teorema 4.2.

Para concluir la demostración del Teorema 4.2, falta encontrar una condición adicional para tener una *única* solución $Y = \phi(V)$ de (4.2), que satisface además las estimaciones (4.3)-(4.4); resulta que es suficiente con pedir que Y se anule en algún punto de la esfera. Para obtener las estimaciones (4.3)-(4.4), Nirenberg primero demostró la estimación

$$\|Y\|_{2+\alpha} \leq r\left[\|h\|_{1+\alpha} + \|dc\|_\alpha\right], \tag{4.13}$$

donde c es la 1-forma asociada al campo vectorial Z^T ($c(x) = g(Z^T, x)$) y r alguna constante. Para obtener dicha estimación, Nirenberg utilizó teoría de integrales con núcleos singulares (desarrollada por ejemplo por E. Hopf) además de utilizar el teorema del mapeo abierto de Banach para acotar funciones u que cumplen con $L(u) = f$ para ciertos operadores diferenciales elípticos L; la prueba de la estimación (4.13) es muy técnica (es necesario introducir nuevas variables independientes) y decidimos no incluirla en la tesina, los detalles pueden encontrarse en [1].

Demostración del Teorema 4.2: Considerando una solución particular $Y = \phi(V)$ que se anula en un punto de la esfera, se puede ver que dc involucra las derivadas segundas de los coeficientes de h pero no involucra las derivadas terceras[3] de V, entonces

$$\|dc\|_\alpha \leq k(\|h\|_{2+\alpha} + \|V\|^2_{2+\alpha}).$$

El término $\|V\|_{2+\alpha}$ aparece al cuadrado porque dV entra cuadráticamente en $\overline{g}$. Con esta estimación de $\|dc\|_\alpha$ y asumiendo la estimación (4.13) para la solución $Y = \phi(V)$, concluimos que

$$\|Y\|_{2+\alpha} \leq \bar{K}(\|h\|_{2+\alpha} + \|V\|^2_{2+\alpha}), \tag{4.14}$$

que es la primera estimación del Teorema 4.2. Para la segunda estimación del teorema notamos que la solución Y fué escogida linealmente dependiente de $\overline{g}$ (ecuación (4.2)), entonces si Y es solución

[3]Esto no es obvio pero calculando dc en coordenadas locales, se ve que las derivadas terceras de V se cancelan; esta importante afirmación fué hecha por Weyl.

de $2 < dX, dY >= h - |dV|^2$ y Y_1 es solución de $2 < dX, dY >= h - |dV_1|^2$, entonces $Y - Y_1$ satisface (4.13) con

$$\overline{g}' = |dV|^2 - |dV_1|^2 =< d(V + V_1), d(V - V_1) >= h',$$

esto es

$$\|Y - Y_1\|_{2+\alpha} \leq r\left[\| < d(V + V_1), d(V - V_1) > \|_{1+\alpha} + \|dc'\|_\alpha\right]. \qquad (4.15)$$

De nuevo dc' no involucra derivadas de V y V_1 de orden mayor que dos, con lo que se da la desigualdad

$$\|dc'\|_\alpha \leq k\|V + V_1\|_{2+\alpha}\|V - V_1\|_{2+\alpha}.$$

Insertando esta última desigualdad en (4.15), da la segunda desigualdad del Teorema 4.2 y concluye su demostración. □

Capítulo 5

$M''_{4+\alpha}$ es cerrado en $M'_{4+\alpha}$

5.1. Estimaciones de Weyl y Nirenberg.

La prueba de que $M''_{4+\alpha}$ es cerrado en $M'_{4+\alpha}$ requiere encontrar una cota no trivial de $\|X\|_{2+\beta}$, dependiendo solo de g. H. Weyl demostró que si $X \in S_2$ tiene primera forma fundamental $g \in M''_{4+\alpha}$ (para $\alpha < 1$), entonces el cuadrado de la curvatura media está acotado por

$$H^2 \leq \max\left\{K - \frac{1}{4K}\Delta_g K\right\}.$$

Con esta cota no trivial, es posible demostrar que existe una constante k que depende solo de $\|g\|_4$ tal que

$$\|X\|_2 \leq k. \tag{5.1}$$

Mas aun, Nirenberg probó usando que la función $\rho = \frac{1}{2} < X, X >$, satisface la ecuación de Darboux

$$\det_g(\nabla^2\rho - g) = K(2\rho - |\nabla\rho|^2)$$

(ver apéndice) y usando teoría desarrollada por E. Hopf sobre ecuaciones no-lineales elípticas que dado $X \in S_2$ con primera forma fundamental $g \in M''_{4+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, existen constantes $\overline{k}$ y $\beta < 1$ dependiendo solo de $\|g\|_4$ y de una cota de $\frac{1}{\sqrt{\det g}}$ tal que

$$\|X\|_{2+\beta} \leq \overline{k}. \tag{5.2}$$

La existencia de estas estimaciones es el punto crucial en la prueba de que $M''_{4+\alpha}$ es cerrado en $M''_{4+\alpha}$, las pruebas se encuentran en [1].

5.2. Lema final.

Con ayuda de estas cotas, podemos probar el siguiente

Lema 5.1. *Sea $g \in M_4'$, suponiendo que existe una sucesión $\{g_i\}_i$ de elementos $g_i \in M''_{4+\alpha_i}$ $(0 < \alpha_i < 1)$, tal que*

$$\|g_i - g\|_4 \to 0 \quad \textit{cuando} \quad i \to \infty,$$

entonces $g \in M_4''$, es decir existe $X \in S_2$ tal que $X^* <,>= g$. Además por el Lema A.3, si $g \in M'_{m+\beta}$ $(m \geq 4$ y $0 < \beta < 1)$, entonces $X \in S_{m+\alpha}$.

Como consecuencia de este lema se tiene que $M''_{4+\alpha}$ es cerrado en $M'_{4+\alpha}$ y por tanto la demostración del Teorema 3.2 estará completa.

Demostración: (Lema 5.1) Dado que la sucesión $\{g_i\}_i$ converge a g en M_4', entonces existe $k > 0$ (independiente de i) tal que

$$\|g_i\|_4 < k,$$

y por tanto se tiene que $\frac{1}{\sqrt{\det g_i}}$ y $\frac{1}{K_i}$ son uniformemente acotados. Mas aún existen encajes $X_i \in S_{4+\alpha_i}$ tal que g_i es su primera forma fundamental, aplicando las estimaciónes de Weyl y Nirenberg (y dado que $\frac{1}{\sqrt{\det g_i}}$ y $\frac{1}{K_i}$ son uniformemente acotados) se tiene que existen $\overline{k} > 0$ y $\beta < 1$ independientes de i tales que

$$\|X_i\|_{2+\beta} < \overline{k},$$

con lo que la sucesión X_i y sus derivadas hasta orden dos son equicontinuas, con lo que podemos escoger una subsucesión que converja a algún $X \in S_{2+\beta}$ que cumple con la misma estimación

$$\|X\|_{2+\beta} \leq \overline{k}.$$

Además X tiene a g como primera forma fundamental pues las derivadas primeras de X_i convergen a las derivadas primeras de X (coeficientes de g_i y g) y se tiene que el encaje X tiene curvatura positiva porque $X^* <,>= g$, con lo que $g \in M_4''$. $\square$

Habiendo probado el Teorema 3.2, podemos demostrar el resultado principal:

Demostración: (Teorema 3.1) Dado $g \in M_4'$, lo aproximamos por una sucesión $\{g_i\}_i$ de elementos $g_i \in M'_{4+\alpha_i}$ (donde $0 < \alpha_i < 1$), tal que $\|g_i - g\|_4 \to 0$, entonces por el Teorema 3.2, que dice que $M'_{4+\alpha} = M''_{4+\alpha}$ para cada $0 < \alpha < 1$, tenemos que $g_i \in M''_{4+\alpha_i}$ y entonces por el Lema 5.1, $g \in M_4''$. $\square$

Capítulo 6

Un problema abierto

En la relatividad general, como consecuencia del conocido principio de equivalencia, no existe un concepto bien definido de masa (densidad de energía-momento) de un sistema. Por otro lado cuando existe simetría asintótica, conceptos de energía y momento pueden ser definidos; estos son llamados energía-momento ADM y energía-momento Bondi (dependiendo del tipo de simetría asintótica). Hace mas de 40 años se propuso medir la energía de un sistema encerrándolo en una membrana (superficie Σ que es topológicamente una 2-esfera) y luego asociarle a esta un 4-vector energía-momento, que es la idea detrás de el concepto de masa quasilocal m_Σ (componente del tiempo del vector energía-momento); obviamente existen algunas condiciones que debe cumplir la masa quasilocal:

1. $m_\Sigma \geq 0$,
2. $m_\Sigma = 0$ para el espacio-tiempo plano (espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$),
3. La masa ADM (o Bondi) deberá ser recuperada para espacios tiempo con simetría asintótica,
4. m_Σ deberá ser equivalente a la definición estandar si el espacio-tiempo tiene simetría esférica y m_Σ es evaluada en esferas.

Muchos intentos se han hecho para definir la masa quasilocal (por ejemplo [6], [7]), en estos trabajos se supone que Σ acota una hipersuperficie de tipo espacio Ω y la métrica induce curvatura siempre positiva en Σ, entonces por el Teorema de Weyl podemos encontrar un encaje isométrico de Σ en $f(\Sigma) \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$ y comparar las curvaturas medias de $\Sigma \subseteq \Omega$ y $f(\Sigma) \in \mathbb{R}^3$; sin embargo estos intentos han fallado en cumplir todas las condiciones de la masa quasilocal además de que se necesita una foliación de hipersuperficies de tipo espacio en el espacio-tiempo.

Para poder capturar completamente la información se necesitará probablemente encontrar una extensión del teorema de Weyl para encajes en el espacio de Minkowski (existencia y unicidad, imponiendo condiciones extrínsecas adicionales) para poder eliminar la dependencia de la foliación de hipersuperficies. En [8], Wang y Yau proponen una definición de masa quasilocal dando un teorema de existencia y unicidad de encajes imponiendo una condición sobre Σ mas débil que la condición de tener curvatura positiva (sombra convexa sobre alguna función altura fija), sin embargo, no se tiene una manera natural de obtener tal función altura y el problema sigue abierto en general.

Apéndice A

Ecuación de Darboux y regularidad de encajes

Dada una superficie con curvatura positiva $X : M \to \mathbb{R}^3$ con vector normal interior $N : M \to \mathbb{R}^3$, suponiendo que el origen se encuentra en el centro de la mayor esfera que puede ser inscrita en X, consideramos la función

$$\rho = \frac{1}{2} < X, X > .$$

Recordando la función soporte $h = - < X, N >$ (positiva por la elección del vector normal N), tenemos que el encaje se separa en parte tangente y normal como $X = X^T - hN$, y entonces se tiene que

$$2\rho = |X|^2 = |X^T|^2 + h^2.$$

Ahora considerando la diferencial de ρ, tenemos que para todo y vector tangente a M, se cumple que

$$d\rho(y) =< dX(y), X > \tag{A.1}$$

y entonces la norma cuadrada del vector gradiente de ρ está dada por

$$|\nabla\rho|^2 = d\rho(\nabla\rho) =< dX(\nabla\rho), X >;$$

dado que $dX(\nabla\rho)$ es tangente, tenemos que

$$|\nabla\rho|^2 =< dX(\nabla\rho), X^T > .$$

Usando que

$$< dX(\nabla\rho), X^T >=< \nabla\rho, dX^{-1}(X^T) >= d\rho(dX^{-1}(X^T)),$$

y (A.1), obtenemos que $|\nabla\rho|^2 =< X, X^T >$, de lo que podemos concluir que $|\nabla\rho|^2 = |X^T|^2$ y por tanto tenemos la igualdad

$$h^2 = 2\rho - |\nabla\rho|^2. \tag{A.2}$$

Proposición A.1 (Ecuación de Darboux)**.** *Si g es la primera forma fundamental de X, entonces la forma bilineal*

$$g - \nabla^2 \rho$$

es positivo definida y la función ρ cumple con la EDP (elíptica) de tipo Monge-Ampère dada por

$$det_g(\nabla^2 \rho - g) = K(2\rho - |\nabla \rho|^2). \tag{A.3}$$

Demostración: Dados $x, y \in \Gamma(TM)$ campos vectoriales, la Hessiana de ρ está dada por

$$\nabla^2 \rho(x, y) = x \cdot d\rho(y) - d\rho(\nabla_x y);$$

calculando

$$x \cdot d\rho(y) = x \cdot < dX(y), X > = < x \cdot dX(y), X > + < dX(y), dX(x) >,$$

y dado que $x \cdot dX(y) = dX(\nabla_x y) + II(x, y)N$ y $< dX(x), dX(y) >= g(x, y)$, se tiene

$$x \cdot d\rho(y) = < X, dX(\nabla_x y) > + II(x, y) < X, N > + g(x, y),$$

y tenemos entonces que

$$\nabla^2 \rho(x, y) = -hII(x, y) + g(x, y),$$

es decir, tenemos la igualdad de formas cuadráticas

$$\nabla^2 \rho - g = -hII. \tag{A.4}$$

Dado que $\det_g II = K$ y usando (A.2) se sigue que

$$\det_g(\nabla^2 \rho - g) = h^2 \det_g(II) = K(2\rho - |\nabla \rho|^2).$$

Mas aun $g - \nabla^2 \rho$ es positivo definido porque II lo es (y $h > 0$). □

A.1. Regularidad de encajes.

En ocasiones se quieren obtener propiedades de regularidad de un encaje X dadas las condiciones de regularidad de su primera forma fundamental g; para esto, enunciamos primero el teorema de regularidad de ecuaciones elípticas (lineales o no-lineales) sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ ([5]):

Teorema A.2 (Regularidad de ecuaciones no-lineales elípticas)**.** *Sea $u \in C^2(\Omega)$ satisfaciendo $F(u) = 0$ en Ω, donde F es un operador elíptico (lineal o no-lineal). Entonces si los coeficientes de F son de clase $C^{k+\alpha}$, entonces $u \in C^{2+k+\alpha}(\Omega)$.*

Supongamos que X es de clase C^2 sobre la esfera y consideremos la expresión de g en coordenadas locales $\{u, v\}$ dada por

$$g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

entonces tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} < X, X_{uu} > &= \rho_{uu} - E, \\ < X_u, X_{uu} > &= \tfrac{1}{2} E_u, \\ < X_v, X_{uu} > &= F_u - \tfrac{1}{2} E_v. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Dado que X tiene curvatura positiva entonces la función soporte h es positiva y X, X_u, X_v son linealmente independientes dado que

$$\det(X, X_u, X_v) =< X, X_u \times X_v >= -\sqrt{\det(g)}h < 0;$$

como consecuencia de esto y de (A.5) podemos expresar X_{uu} como combinación lineal de las parciales segundas de ρ y de los coeficientes de g (análogamente para X_{uv}, X_{vv} y sus parciales de orden superior). Dado que ρ cumple con la ecuación de Darboux (A.3), entonces como corolario del teorema de regularidad para ecuaciones elípticas (Teorema A.2) tenemos el siguiente lema:

Lema A.3. *Dado un encaje $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 con primera forma fundamental $g \in M'_{m+\alpha}$ con $m \geq 2$ entero y $0 < \alpha < 1$, entonces $X \in S_{m+\alpha}$.*

Bibliografía

[1] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953) 337-394.

[2] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. 5*, Publish or Perish, 1999.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag 2011.

[4] M. Berger y B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 1987.

[5] D. Gilbarg y N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag 2001, (reimpresión de la segunda edición 1998).

[6] J. D. Brown y J.W. Jork, *Quasilocal energy in general relativity, Mathematical aspects of classical field theory*, (Seatle, WA 1991), 129-142, Contemp. Math., 132, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[7] C.M. Liu y S.T. Yau, *Positivity of quasilocal mass II*, Amer. Math. Soc., Volumen 19, No. 1, pg 181-204, 2005.

[8] M.T. Wang y S.T. Yau, *Quasilocal mass in general relativity*, Phys. Rev. Lett., PRL 2, 021101 (2009), Amer. Phys. Soc.