



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

Polarización del vacío a un loop

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO

**LICENCIADO EN
CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS**

PRESENTA

Vázquez Nambo, Manuel

ASESOR

Víctor Manuel Villanueva

Sandoval

agosto /2005

DEDICATORIA

Dedico este trabajo y esfuerzo puestos en él, a mi querida madre que incondicionalmente me apoyo en todo lo que pudo, a mi amada hija por enseñarme que basta una mirada de ternura para seguir adelante en la vida y que además forma una parte muy importante ya que tal vez sin ella no hubiese logrado muchas cosas.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente al Dr. Víctor Manuel Villanueva Sandoval por su invaluable ayuda en el desarrollo de este trabajo, al Dr. Alberto Mendoza por su gran ayuda moral e intelectual que de manera desinteresada me ha brindado, al Dr. Gerardo Tinoco que muchas veces se preocupó por ayudarme, al Dr. Armando Sepúlveda por su ayuda intelectual y moral y a todos los profesores que durante toda mi estancia en la escuela me ofrecieron su amistad.

Agradezco a todos amigos de manera muy especial a: Manuel Zamora, Epifanio Infante, Alejandro Waldo, Yadira Márquez y Diana Sepulveda por brindarme su amistad y que sin duda alguna aprecio y admiro por enseñarme que no hay nada más bello que una amistad desinteresada.

Índice general

1. Partículas bosónicas.	5
1.1. Mecánica cuántica no relativista de una partícula de spin menor.	5
1.2. Estados estacionarios de espacio momento, energía y operadores de momento.	7
1.3. La ecuación de Schrödinger en un campo electromagnético. . .	8
1.4. Teoría de perturbación de primer orden no relativista dependiente del tiempo.	8
1.5. Teoría de perturbación para segundo orden y orden superior. .	10
1.6. Ecuación de Klein Gordon.	10
2. Partículas fermiónicas.	13
2.1. Grupo de rotación y $SU(2)$	13
2.2. Ecuación de Dirac.	16
2.3. Ecuaciones de Maxwell	20
3. Amplitudes en QED escalar y espinorial.	23
3.1. Sección eficaz.	24
3.2. Teoría del propagador.	30
3.3. Reducción de formulas LSZ.	36
3.4. Reducción de los espinores de Dirac.	40
3.5. Evolución del operador temporal.	42
3.6. Teorema de Wick.	47
3.7. Reglas de Feynman.	53
4. Descripción de la polarización del vacío.	57
4.1. Descripción de la polarización del vacío para fermiones. . . .	57
4.2. Descripción de la polarización del vacío caso escalar.	60

5. Apéndice.	65
5.1. Notación relativista y espacio de Minkowski.	65
5.2. Principio de la mínima acción.	67
5.3. Teorema de Noether.	69

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis estudiamos interacciones entre campos fundamentales, tales como aquellos que representan partículas cargadas que interactúan con la fuerza electromagnética por ejemplo: bosones (que son partículas con spin entero) cargados representados por un campo escalar ϕ y fermiones (partículas con spin semi-entero) cargados que representamos por medio de campos espinoriales ψ . Tales interacciones se dan en el contexto de la Electrodinámica Cuántica, que es la teoría que nos permite estudiar la interacción entre estos distintos elementos. Podemos mencionar también que la Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en inglés) es la teoría mejor comprobada por los científicos hasta la actualidad, (un ejemplo es la razón giromagnética del electrón que se ha medido hasta 7 cifras significativas). Una motivación fundamental para realizar este trabajo de tesis en un principio fue estudiar interacciones de N fotones a un "loop" con partículas en el "loop" como escalares o espinores. De hecho, el objetivo inicial era trabajar en el formalismo de tiempo propio de Schwinger o formalismo de línea del mundo en analogía a las integrales que se llevan a cabo en Teoría de Cuerdas. Sin embargo, dada la complicación física y matemática del problema, nos concentramos al estudio del cálculo de 2 fotones a un "loop" para fermiones y escalares como partículas que realizan un "loop". De este modo, el trabajo fundamental realizado en esta Tesis fue llevar a cabo el cálculo de la amplitud a un "loop" de 2 fotones con escalares y fermiones. En QED, este cálculo se conoce como la polarización del vacío. Para estudiar esta interacción, necesitamos el estudio de las ecuaciones que gobiernan las partículas escalares (spin $s = 0$), como caso particular de campos bosónicos, sus invariancias, propiedades y soluciones. Es decir, el estudio de las partículas que obedecen la ecuación de Klein-Gordon, esto se revisa en el capítulo 1. En el capítulo 2 realizamos un análisis y revisión similar para las partículas fermiónicas que de hecho obedecen la ecuación de Dirac (spin $s = 1/2$). En el capítulo 3, llevamos a cabo el estudio de las interacciones entre los tres campos de interés: el campo electromagnético A_μ , el campo escalar y el campo de Dirac, los cálculos de la amplitud para 2 fotones a un "loop" de los casos escalares y espinoriales los llevamos a cabo independientemente en el capítulo 4. Finalmente damos algunas conclusiones y un bosquejo del trabajo, por último, se ha agregado un apéndice para incluir material que puede ser útil al revisar la obra expuesta y que ayuda a que este trabajo de tesis sea una obra autocontenida.

Capítulo 1

Partículas bosónicas.

Resumen

En éste capítulo se estudiara la mecánica cuántica no relativista de una partícula de spin menor, también se verán como son los estados estacionarios de espacio-momento así como los operadores de la energía-momento para una partícula. Se analizará como es la ecuación de Schrödinger en un campo electromagnético y la teoría de perturbación a primer y segundo orden en el caso no relativista que es dependiente del tiempo, finalmente llegaremos a la ecuación de Klein Gordon para una partícula escalar sin spin.

1.1. Mecánica cuántica no relativista de una partícula de spin menor.

En ésta sección revisaremos algunos resultados de la mecánica cuántica para una partícula no relativista que se describe por medio de una función de onda $\psi(\vec{x}, t)$, donde \vec{x} es la posición de la partícula a tiempo t . Si esta partícula es representada por el vector de estado a un potencial $V(\vec{x}, t)$ entonces $\psi(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (1.1)$$

donde m es la masa de la partícula. Una partícula libre es descrita por la ecuación de Schrödinger con $\psi(\vec{x}, t)$ una solución de onda plana:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{-iEt/\hbar} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

la cual esta normalizada dentro de un volumen L^3 :

$$\int_{L^3} \phi^*(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = 1$$

donde el asterisco denota conjugación compleja. Aquí \vec{p} es el momento y E es la energía de la partícula $E = \vec{p}^2/2m$. Tomando el complejo conjugado en la ecuación de Schrödinger:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V^*(\vec{x}, t) \right\} \psi^*(\vec{x}, t) = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}(\vec{x}, t), \quad (1.2)$$

y multiplicando (1.2) por $\psi^*(\vec{x}, t)$ la ecuación se reduce a:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + (V - V^*) |\psi|^2, \quad (1.3)$$

donde el argumento (\vec{x}, t) lo quitamos por conveniencia. Supongamos $V = V^*$ un potencial real entonces la ecuación (1.3) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.4)$$

donde:

$$\rho = |\psi(\vec{x}, t)|^2, \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^*(\vec{x}, t) \nabla \psi(\vec{x}, t) - \psi(\vec{x}, t) \nabla \psi^*(\vec{x}, t)), \quad (1.5)$$

ρ y \vec{j} son reales. La ecuación (1.4) es una ecuación de continuidad y ρ es interpretada como la densidad de probabilidad de corriente de la partícula, con $\rho \geq 0$. Si integramos la ecuación (1.4) sobre un volumen V limitado para una superficie S , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\vec{x} + \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (1.6)$$

donde $d\vec{S}$ es normal para \vec{S} , por lo que el teorema de la divergencia es usado en el segundo termino de la ecuación (1.6) entonces reescribiéndola como:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\vec{x} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.7)$$

el decremento de la probabilidad determina la partícula en un volumen V que es igual al flujo de la probabilidad dada por \vec{j} dentro de V de la sección de la superficie S donde $d\vec{S}$ es normal dentro y a lo largo de S .

1.2. Estados estacionarios de espacio momento, energía y operadores de momento.

En esta parte repasaremos brevemente algunos resultados básicos de la mecánica cuántica no relativista, que será utilizado directamente o extendido convenientemente para tratamientos más completos. Si $V(\vec{x}, t)$ es independiente de t , $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$, entonces la dependencia de $\psi(\vec{x}, t)$ esta dada por:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{x}) \quad (1.8)$$

donde $\psi(\vec{x})$ satisface la ecuación:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}), \quad (1.9)$$

la energía de una partícula cuya función de onda esta dada por las ecuaciones (1.8), (1.9) es independiente del tiempo y la partícula se encuentra en un estado estacionario. La función de onda de espacio momento $\psi(\vec{p})$ es definida por la transformada de Fourier:

$$\psi(\vec{p}) = \int d^3x e^{ip\cdot x/\hbar}\psi(\vec{x}), \quad (1.10)$$

con la función inversa:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-ip\cdot x/\hbar}\psi(\vec{p}), \quad (1.11)$$

donde $\psi(\vec{p})$ satisface la ecuación:

$$[p^2/2m + V(\vec{p})]\psi(\vec{p}) = E\psi(\vec{p}), \quad (1.12)$$

$V(\vec{p})$ es la transformación de Fourier, notemos la analogía entre la energía total E y la energía cinética $p^2/2m$ + la energía potencial $V(\vec{p})$. La ecuación de Schrödinger en coordenadas espaciales puede escribirse en la forma de la ecuación (1.12), si introducimos el operador de la energía y el operador momento:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (1.13)$$

entonces la ecuación (1.12) queda como:

$$\{\hat{p}^2/2m + V(\vec{x}, t)\}\psi(\vec{x}, t) = \hat{E}\psi(\vec{x}, t)$$

donde la ecuación (1.9) es una eigenfunción de \hat{E} con eigen-valor E , por lo que $e^{i\vec{p}\cdot x/\hbar}$ es una eigenfunción de \hat{p} con eigen-valor p . De esto modo los operadores \hat{E} , \hat{p} provienen de la interpretación de la partícula (energía-momento) de la función de onda ψ .

1.3. La ecuación de Schrödinger en un campo electromagnético.

La ecuación de Schrödinger para una partícula de carga ($e > 0$) moviéndose en un campo electromagnético descrito por un potencial \vec{A} y un potencial escalar ϕ se determina tomando el operador de energía como:

$$\hat{E} = (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2/2m + e\phi \quad (1.14)$$

el cual se obtiene haciendo las sustituciones en la relación de la partícula energía-momento:

$$\hat{E} = \hat{p}^2/2m.$$

Si retomamos la correspondencia de los operadores de las ecuaciones (1.13) y (1.14) obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{ie\hbar}{2mc}[\nabla \cdot (\vec{A}\psi) + \vec{A} \cdot \nabla\psi] + \frac{e^2\vec{A}^2}{2mc^2}\psi + e\phi\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (1.15)$$

usando $\nabla \cdot (\vec{A}\psi) = \vec{A} \cdot \nabla\psi + \psi \nabla \cdot \vec{A}$ y cambiando \vec{A} y ϕ probamos que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ y $\phi = 0$ por lo que la ecuación se reduce a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{A} \cdot \nabla\psi + \frac{e^2\vec{A}^2}{2mc^2}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (1.16)$$

que es la ecuación de Schrödinger en un campo electromagnético dependiente del tiempo.

1.4. Teoría de perturbación de primer orden no relativista dependiente del tiempo.

En esta sección recapitularemos la derivación de la, "regla de Fermi" para la transición de probabilidad por unidad de tiempo, para el caso de

una sola partícula en un potencial, el cual es considerado como causa de la transición. Supongamos que el potencial lleno consiste de una dependencia del espacio para $W(\vec{x})$ y una dependencia del espacio-tiempo $V(\vec{x}, t)$. La ecuación de Schrödinger para una partícula singular en este potencial combinado es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + W(\vec{x}) + V(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (1.17)$$

donde suponemos que $V(\vec{x}, t)$ es pequeña y queremos determinar las soluciones para (1.18) las cuales son correctas a primer orden en $V(\vec{x}, t)$, expandiendo $\psi(\vec{x}, t)$ en términos de las soluciones del estado estacionario y definiendo el índice f en $V(\vec{x}, t) = 0$ tenemos:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_f a_f(t) u_f(\vec{x}) e^{-iE_f t/\hbar} \quad (1.18)$$

donde:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + W(\vec{x}) \right] u_f(\vec{x}) = E_f u_f(\vec{x}), \quad (1.19)$$

los coeficientes de expansión $a_f(t)$ dependen de t y $a_f(t)^2$ da la probabilidad, si $\psi(\vec{x}, t)$ es normalizada bajo la acción de $V(\vec{x}, t)$ la partícula debe tener una transición para el estado f en un tiempo t y la suma en la ecuación (1.19) es interpretada como una integral si los estados f son continuos. A primer orden en $V(\vec{x}, t)$ los coeficientes son dados por:

$$a_f^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') \exp\left\{ \frac{i(E_f - E_i)t'}{\hbar} \right\} dt' \quad (1.20)$$

el superíndice¹ indica que la formula es únicamente valida a primer orden en $V(\vec{x}, t)$ donde:

$$V_{fi}(t) = \int u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (1.21)$$

en la ecuación (1.21), i es el índice de un estado estacionario inicial, el cual es el estado de la partícula en un tiempo $T = t_0$, cuando el potencial es insignificante:

$$a_f^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{\text{espacio}} \int_{\text{time}} u_f^*(x) e^{iE_f t'/\hbar} V(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}) e^{-iE_f t'/\hbar} d^3\vec{x} dt' \quad (1.22)$$

un caso simple para considerar es cuando el potencial $\vec{V}(\vec{x}, t)$ es independiente de t excepto en algún tiempo $t = -T/2$ y cambiado en un tiempo final en $T/2$,

esta condición de límite es útil idealizando un proceso de dispersión, donde la partícula se piensa como una aproximación en la región de interacción en un potencial $V = 0$ para $t < -T/2$, entonces en cierta etapa la dispersión del potencial es durante un tiempo T , y finalmente detectada en la región de interacción como una partícula libre aumentada con $V = 0$ para $t > T/2$.

1.5. Teoría de perturbación para segundo orden y orden superior.

Para el segundo orden en V , uno puede probar que para $a_f^{(1)}$ en la ecuación:

$$a_f^{(1)} = \frac{V_{fi}}{i\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_{fi}t'} dt' \quad (1.23)$$

se tiene que sumar el termino:

$$a_f^{(2)} = -i2\pi\delta(E_f - E_i) \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni}, \quad (1.24)$$

donde la suma es sobre todos los estados conectados por el potencial para i y f . Este resultado se puede representar graficamente por figuras y puede ser generalizado para todos los ordenes, así la expresión para p_{fi} es:

$$p_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 N_f(E_i), \quad (1.25)$$

donde la amplitud es T_{fi} . Para todos los ordenes en V y es una suma de series que se denota por:

$$T_{fi} = V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} + \sum_m \sum_n V_{fn} \frac{1}{E_m - E_n} V_{nm} \frac{1}{E_i - E_m} V_{mi} + \dots \quad (1.26)$$

donde $m \neq n, m \neq i$.

1.6. Ecuación de Klein Gordon.

Para deducirla escribiremos una ecuación de onda para una partícula sin spin la cual es denotada como ϕ . La ecuación es obtenida de la ecuación de

momento:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2 \quad (1.27)$$

donde los operadores diferenciales $(\partial/c\partial t, -\nabla)$ forman las componentes de un vector contravariante ∂^μ de este modo se forma un cuatri-vector contravariante $p^\mu = (E/c, \vec{p})$. Esta es la primera y básica conexión entre la relatividad especial y la mecánica cuántica, que es hecha para tratar los operadores de energía y momento \hat{E} y \hat{P} como parte del mismo cuatri-vector $\hat{p}^\mu = (\hat{E}/c, \hat{p})$ por lo tanto escribiendola en forma covariante:

$$\hat{p}^\mu = i\hbar\partial^\mu = i\hbar\nabla. \quad (1.28)$$

Sustituimos los operadores diferenciales para \vec{E} y \vec{P} en la teoría cuántica:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, \quad (1.29)$$

a carencia de la covarianza de Lorentz para una partícula libre en la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{E}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi \quad \text{o} \quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \quad (1.30)$$

se presenta de la forma no covariante en el cual \hat{E} y \hat{P} ó $(\partial/\partial t$ y $\nabla)$ aparecen en (1.31). Si tomamos ψ para que sea un escalar de Lorentz, el lado izquierdo y derecho de la ecuación se transforman bajo las transformaciones de Lorentz (de este modo \hat{E} y \hat{P}^2 son escalares), y utilizando la ecuación:

$$\hat{E}\psi = (c^2\hat{p}^2 + m^2c^4)^{1/2}\psi, \quad (1.31)$$

la cual incorpora la relación correcta de la energía momento de la teoría especial de la relatividad en el espacio de coordenadas de la ecuación (1.29) quedando:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4)^{1/2}\psi, \quad (1.32)$$

donde el cuadrado de la raíz del operador diferencial resulta un operador no lineal. En algunos casos en una ecuación covariante se puede ver que \hat{E} y \hat{P} o $\partial/\partial t$ y ∇ aparecen simétricamente por lo tanto para una ecuación de onda de spin 0 usamos la ecuación (1.32) y obtenemos:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \quad (1.33)$$

los dos primeros términos corresponden a la ecuación de onda y se pueden agrupar bajo la forma del Alembertiano como se denota a continuación:

$$(\square + m^2)\phi = 0, \tag{1.34}$$

que es la ecuación de Klein Gordon, esta fué derivada simultáneamente e independientemente por muchos autores, entre ellos Schrödinger, de Broglie y por supuesto Klein y Gordon de manera independiente. La deducción de la ecuación del Alembertiano se deduce en el apéndice.

Capítulo 2

Partículas fermiónicas.

Resumen

Aquí se dará una breve reseña del grupo de Lorentz y se revisará la ecuación de Dirac que tiene gran importancia en la teoría cuántica de campos en donde la ecuación de Klein Gordon tiene dificultades tales como el hecho de que la densidad de probabilidad ρ sea negativa y que la ecuación admita soluciones de energía negativa. Analizaremos además la importancia de juntar al electrón en el campo de Maxwell, lo cual da origen a la electrodinámica cuántica

2.1. Grupo de rotación y SU(2).

En general una rotación espacial se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde R es la matriz rotación que preserva distancias en el origen, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ó $r'^T r' = r^T r$, (T=transpuesta) por lo tanto:

$$r^T R^T R r = r^T r$$

$$R^T R = 1 \quad (2.2)$$

R es una matriz ortogonal de 3×3 . Estas matrices forman un grupo:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = 1,$$

el cual es denotado como $O(3)$; para matrices en n dimensiones se denota $O(n)$. Las matrices unitarias también forman un grupo denotado por $U(n)$. La ecuación de Dirac se puede deducir de los espinores, para esto consideremos una transformación de Lorentz de forma que halla dos tipos diferentes de componentes espinoriales y definamos a continuación los generadores:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \quad (2.4)$$

$$[A_x, A_y] = iA_z \text{ y permutaciones cíclicas}$$

$$[B_x, B_y] = iB_z \text{ y permutaciones cíclicas}$$

$$[A_i, A_j] = 0 \quad (i, j = x, y, z),$$

esto prueba que \vec{A} y \vec{B} generan un grupo $SU(2)$ y los dos grupos conmutan. El grupo de Lorentz es entonces esencialmente $SU(2) \otimes SU(2)$, transformando los estados en algo bien definido para dos momentos angulares (i, j') donde uno de los primeros corresponde a \vec{A} y el segundo \vec{B} como caso especial uno de los otros debe corresponder al spin cero dados por:

$$(j, 0) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = i\vec{K}^j \quad (\vec{B} = 0)$$

$$(0, j) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = -i\vec{K}^j \quad (\vec{A} = 0)$$

este factor corresponde a las dos posibilidades en:

$$\vec{K} = \pm \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad (2.5)$$

podemos definir dos tipos de espinores que son del tipo *I* y tipo *II*, los espinores del primer tipo están dados por:

$$: \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \vec{J}^{(1/2)} = \vec{\sigma}/2, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\vec{\sigma}/2,$$

si $(\vec{\theta}, \vec{\phi})$ son los parámetros de una rotación, entonces ξ se transforma como:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \exp\left(i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\phi}\right)\xi \\ &= \exp\left[i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta} - i\vec{\phi})\right]\xi \equiv M\xi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Los espinores del segundo tipo son:

$$: \left(0, \frac{1}{2}\right) : \vec{J}^{(1/2)} = \vec{\sigma}/2, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\vec{\sigma}/2,$$

donde los espinores se denotan por η y se transforman como:

$$\eta \longrightarrow \exp\left[i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta} + i\vec{\phi})\right]\eta \equiv N\eta. \quad (2.7)$$

Es importante notar que estas representaciones de equivalencia del grupo de Lorentz es la matriz S que muestra que $N = SMS^{-1}$ que es un factor relacionado con:

$$N = \xi M^* \xi^{-1} \quad \text{con} \quad \xi = -i\sigma_2, \quad (2.8)$$

donde:

$$\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 = -\sigma_2^2 \vec{\sigma} = -\vec{\sigma},$$

entonces:

$$\begin{aligned} N &= \xi M^* \xi^{-1} = \sigma_2 \exp\left[-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^* \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})\right]\sigma_2 \\ &= \sigma_2^2 \exp\left[\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})\right] = N. \end{aligned}$$

Notemos que el $\det M = \det N = 1$ matrices complejas de 2×2 con determinante unidad forman el grupo $SL(2, C)$, que tiene seis parámetros por lo que las matrices son de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Estas matrices consisten de cuatro números complejos y dos condiciones, estos seis parámetros son relacionados para tres ángulos y tres velocidades de las transformaciones generales de Lorentz; donde tenemos dos tipos diferentes de dos componentes de espinores transformados respectivamente por las ecuaciones (2.5) y (2.6), estas ecuaciones corresponden a las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz.

2.2. Ecuación de Dirac.

Un propósito de la ecuación de Dirac concierne parcialmente en las dificultades de interpretación con la ecuación de Klein Gordon, que hay dos inconvenientes: (a) el hecho de que la opción de probabilidad ρ puede ser negativa y (b) que la ecuación admita soluciones de partículas libres de energía negativa. Estos inconvenientes están relacionados en la ecuación de Klein Gordon, pero Dirac observo que se pueden separar. Para obtener tal separación es necesario únicamente tener una ecuación la cual sea lineal en $\partial/\partial t$ semejante a la ecuación de Schrödinger. Entonces el valor de la función de onda puede ser arbitrariamente especificada en algún tiempo dado y debemos hacer a ρ no negativa, como en el caso de la ecuación de Schrödinger, pero tenemos todavía la ecuación relativista covariante. Si es lineal en $\partial/\partial t$ esta tiene que ser lineal en ∇ también, por lo que la transformación de Lorentz es lineal y homogénea en x y t , por lo que la forma de la ecuación debe ser preservada en ∇ que aparece linealmente si $\partial/\partial t$ es lineal. Dirac de este modo propuso la ecuación para una partícula de masa m dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{c \partial t} = \left[-i\hbar \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta mc \right] \psi, \quad (2.9)$$

donde $\psi(x, t)$ y el termino mc se ponen para obtener la ecuación relativista de energía-momento. La ecuación de Dirac difiere de la ecuación de Klein Gordon, en que es de primer orden y únicamente para partículas de spin $\frac{1}{2}$; la ecuación de Klein Gordon nada mas expresa la relación entre energía,

momento y masa de algún spin, por lo tanto la ecuación de Dirac tiene un origen diferente y pueden ser derivada de las propiedades de transformación de espinores bajo el grupo de Lorentz. En esencia la ecuación de Dirac es una relación de estos espinores, introduciremos la operación de paridad bajo la cual la velocidad cambia de signo en el (boost) de Lorentz $\vec{v} \longrightarrow -\vec{v}$, los generadores \vec{K} también cambian de signo $\vec{K} \longrightarrow -\vec{K}$ y son las componentes de un vector \vec{J} que no cambia de signo pero se transforma como $\vec{J} \longrightarrow +\vec{J}$ teniendo un vector axial o un pseudovector, por lo que el índice se transforma como un momento angular bajo paridad, esto es que $(j, 0)$ y $(0, j)$ son representaciones intercambiadas denotadas como:

$$(j, 0) \longleftrightarrow (0, j), \quad \text{bajo paridad} \quad (2.10)$$

donde:

$$\xi \longleftrightarrow \eta,$$

si consideramos paridad, entonces no es suficiente considerar los dos espinores ξ y η separadamente, por lo que el cuatri-espinor es:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

bajo las transformaciones de Lorentz y ψ se transforma como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} e^{1/2\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\phi)} & 0 \\ 0 & e^{1/2\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\phi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

con:

$$\bar{D}(\Lambda) = \xi D^*(\Lambda) \xi^{-1}, \quad (2.13)$$

donde Λ denota las transformaciones de Lorentz que pueden escribirse como:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.14)$$

y bajo paridad ψ se transforma como:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

El cuatri-espinor ψ es una representación irreducible del grupo de Lorentz que aumenta por paridad, notemos que la representación (2.10) no es unitaria, esto es debido a que la matriz $\exp(\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi})$ tampoco es unitaria. En general en mecánica cuántica, se esta interesado únicamente en representaciones unitarias de un grupo de simetría, estas preservan la probabilidad de transición entre dos estados. Esto esta relacionado con el grupo de lorentz. Ahora veremos las transformaciones de la ecuación (2.10) para el caso de un *boost* de Lorentz $\vec{\theta} = 0$ en el mismo tiempo los dos espinores ξ, η son:

$$\xi \longrightarrow \phi_R, \quad \eta \longrightarrow \phi_L, \quad (2.15)$$

por lo que poniendo R, L por derecha e izquierda, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_R &\longrightarrow e^{1/2\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}} \phi_R \\ &= [\cosh(\phi/2) + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sinh(\phi/2)] \phi_R, \end{aligned} \quad (2.16)$$

aquí \vec{n} denota un vector unitario en la dirección del *boost* de Lorentz. Supongamos que el espinor original se refiere a la partícula en reposo, $\phi_R(0)$ y la transformada de una partícula con momento \vec{p} , $\phi_R(\vec{p})$ si ponemos $\cosh(\phi/2) = [(\gamma + 1)/2]^{1/2}$, $\sinh(\phi/2) = [(\gamma - 1)/2]^{1/2}$ entonces:

$$\phi_R(\vec{p}) = \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right)^{1/2} \right] \phi_R(0), \quad (2.17)$$

donde la partícula tiene energía total E , masa m y momento \vec{p} , $\gamma = E/m$ con $c = 1$ entonces:

$$\phi_R(\vec{p}) = \frac{E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{[2m(E + m)]^{1/2}} \phi_R(0), \quad (2.18)$$

de manera similar:

$$\phi_L(\vec{p}) = \frac{E + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{[2m(E + m)]^{1/2}} \phi_L(0), \quad (2.19)$$

pero cuando una partícula esta en reposo no se puede definir el spin como vuelta a la izquierda o vuelta a la derecha, así que $\phi_R(0) = \phi_L(0)$ entonces las ecuaciones (2.16) y (2.17) son:

$$\phi_R(\vec{p}) = \frac{E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \phi_L(\vec{p}) \quad (2.20)$$

$$\phi_L(\vec{p}) = \frac{E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \phi_R(\vec{p}), \quad (2.21)$$

que podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} -m\phi_R(\vec{p}) + (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi_L(\vec{p}) &= 0, \\ (p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi_R(\vec{p}) - m\phi_L(\vec{p}) &= 0, \end{aligned}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.22)$$

si definimos el cuatri-espinor como:

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \phi_R(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.23)$$

donde las matrices 4×4 son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

haciendo los cálculos en la ecuación (2.20) obtenemos:

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\psi(p) = 0, \quad (2.25)$$

notando que:

$$p_\mu = (E, -\vec{p}), \text{ por lo tanto } (\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \gamma^0 p_0 - \gamma \cdot \vec{p})$$

que se puede reescribir como:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\gamma(p) = 0, \quad (2.26)$$

que es la ecuación de Dirac para partículas con masa de spin $\frac{1}{2}$. La ecuación de Dirac tiene relación con las ecuaciones de Maxwell debido a la cuantización libre del electrón y la cuestión de juntar el electrón en el campo de Maxwell como se mostrara en la siguiente sección.

2.3. Ecuaciones de Maxwell .

Las ecuaciones de Maxwell son de gran importancia en la física, debido a que constituyen la base del electromagnetismo. Queremos discutir la cuestión de juntar el electrón con el campo de Maxwell A_μ . Iniciaremos este análisis con una discusión breve de las ecuaciones de Maxwell, que como se sabe las ecuaciones de Maxwell(1831-1879) fueron escritas en términos de los campos eléctrico \vec{E} e inducción magnética \vec{B} después referido como campo magnético en el sistema de unidades CGS-ESV. Nuestra discusión del campo de un spin sin masa comienza con las clásicas ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.30)$$

Las cuales contienen implícitamente la conservación de la carga:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.31)$$

Debido a que la divergencia de un rotacional igual a cero, y a que el rotacional del gradiente igual a cero, podemos remplazar el campo magnético y el campo eléctrico con potenciales A^0 y \vec{A} como sigue:

$$\vec{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.32)$$

El hecho es que estas ecuaciones no se transforman de acuerdo a las transformaciones Galileanas, esto de alguna forma condujo al descubrimiento de la teoría de la relatividad. Para ver la invariancia relativista definamos:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \quad (2.33)$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad (2.34)$$

entonces se puede demostrar utilizando el teorema de Noether que se puede ver en el apéndice; que la corriente es conservativa, y se escribe como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.35)$$

entonces las ecuaciones de Maxwell en una forma resumida son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (2.36)$$

donde:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (2.37)$$

esto quiere decir que el tensor es simétrico y su representación matricial es:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

entonces podemos derivar las ecuaciones de Maxwell escribiendo la acción como:

$$\ell = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad (2.39)$$

si sustituimos esto en la ecuación de movimiento de Euler Lagrange, determinamos que las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.40)$$

que justamente son las ecuaciones clásicas de Maxwell. Una consecuencia de esta construcción es que la teoría de Maxwell es invariante bajo una simetría local, que es un parámetro el cuál es dependiente en el espacio tiempo:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda(x) \quad (2.41)$$

donde una transformación cuyos parámetros son constantes es llamada una transformación global, si aplicamos sucesivamente la transformación podemos determinar que forman un grupo con las leyes de suma:

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (2.42)$$

esta es la misma ley de grupo para $U(1)$ por lo que las ecuaciones de Maxwell son localmente invariantes bajo $U(1)$, sin embargo esta transformación del tensor de Maxwell es invariante:

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.43)$$

que trae como consecuencia que también el lagrangiano sea invariante donde una aplicación del teorema de Noether nos da el tensor de energía momento que es igual a:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}\partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}, \quad (2.44)$$

el cual es un tensor no simétrico. Esto quiere decir que el tensor de momento angular no se conserva, por lo que haciendo una transformación al tensor de energía momento quedaría:

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda(F^{\mu\lambda}A^\nu), \quad (2.45)$$

resultando el tensor de energía momento simétricamente conservado dado por:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (2.46)$$

Es importante notar que la suma de este termino extra no afecta las cargas integradas, las cuales son medidas directamente. Para ver que las cargas asociadas se conservan con el tensor energía momento sea:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (2.47)$$

$$T^{i0} = (\vec{E} \times \vec{B})^i \quad (2.48)$$

la cuál es la densidad de energía y el vector Poynting. De este modo el tensor energía momento es una cantidad físicamente aceptable y compatible con la medida invariante.

Capítulo 3

Amplitudes en QED escalar y espinorial.

Resumen

Hasta ahora nuestra discusión ha sido algo formal no conectado con el experimento. Debido a eso tenemos que concentrarnos en las funciones de Green, que describen el movimiento de partículas donde $p_\mu^2 \neq m^2$. Para hacer la conexión con el experimento, necesitamos reescribir nuestro resultado previo en términos de números que pueden ser medidos en el laboratorio, por ejemplo rapidez de decaimiento de partículas inestables y de secciones transversales. Son muchas maneras en las cuáles se define la sección eficaz pero quizá la mas simple e intuitiva es como definir el tamaño efectivo de toda partícula en el blanco. La sección eficaz es de este modo el área efectiva de toda partícula en el blanco, según lo visto por una rayo entrante. La sección eficaz es frecuentemente medida en términos de "barns", por ejemplo un nucleón es cerca de un fermi $10^{-13}cm$, su área es cerca de $10^{-26}cm^2$ o cerca de .01 barns, lo que nos da la sección transversal de una partícula en una cierta reacción, así podemos calcular el tamaño eficaz de la partícula en relación a un nucleón. Por otro lado, históricamente los cálculos de *QED* fueron aparentemente usando dos formulas independientes. Una formulación fue desarrollada por Schwinger y Tomonaga usando la generalización de los métodos del operador covariante desarrollado en mecánica cuántica. De este modo la formulación fue excesivamente difícil para el calculo por lo que se descarto y se busco otro método mas simple. La segunda formulación fue desarrollada por Feynman aprovechando el uso del propagador, Feynman postulo una lista de reglas simples de las cuales se pueden organizar gráficamente para el calculo de matrices de dispersión de complejidad arbi-

traria. El punto débil de los métodos gráficos de Feynman es que no fueron demostrados rigurosamente, Dyson demostró la equivalencia de estas dos formulaciones para derivar las reglas de Feynman de una interacción gráfica. En este capítulo primero veremos como probar el método rápido del propagador de Feynman, este método es conveniente para los términos de orden menor de la matriz de dispersión por lo que debemos desarrollar el formalismo de reducción Lehmann-Symanzik-Zimmermann (*LSZ*), para los diagramas de Feynman de complejidad arbitraria de donde ahora en adelante haremos la aproximación para ciertos campos, por ejemplo el campo electromagnético, el desarrollo de la teoría de dispersión que en esta aproximación es mas intuitiva.

3.1. Sección eficaz.

Para calcular la sección transversal en términos de los índices de colisiones en un experimento de dispersión, imaginamos un blanco con N_T partículas, toda partícula con area efectiva o sección transversal σ , el area total tomada por éstas partículas es $N_T\sigma$, por lo que si lanzamos un rayo de partículas a un blanco con area A , entonces para que una partícula golpee el área que ocupan las partículas ($N_T\sigma$) dividamos por el área A , así el número de partículas en el rayo que es absorbido o reflejado es N_B , de este modo el número de dispersión esta dado por:

$$\sigma = \left(\frac{\text{numero de eventos}}{N_B N_T} \right) A, \quad (3.1)$$

esto confirma que la sección transversal tiene dimensiones de área, en la practica es mas conveniente la manera de expresar la sección transversal en función del flujo lo cual es igual a $\rho\nu$, si el rayo se esta moviendo a la velocidad ν para un estado estacionario entonces el número de partículas en el rayo N_B es igual a la densidad del rayo ρ del volumen, si el rayo es un pulso que regresa en t segundos, entonces el volumen del rayo es $\nu t A$. De este modo $N_B = \rho\nu t A$, entonces la sección transversal puede escribirse como:

$$\sigma = \left(\frac{\text{numero de eventos}}{(\rho\nu t A) N_T / t} \right) A, \quad (3.2)$$

donde N_T esta normalizado y la transición es el número de dispersión de eventos por segundo. El siguiente problema es escribir la transición para que aparezca en la sección transversal en términos de la matriz S . De este modo podemos calcular la probabilidad de una colección de partículas en algún estado inicial i que debe decaer o dispersar dentro de otra colección de partículas en un estado final j . De la mecánica cuántica no relativista sabemos que la sección transversal σ puede ser calculada analizando las propiedades de la dispersión de la onda, además la dispersión estacionaria de una onda plana e^{ikz} en la dispersión de un blanco inmóvil esta dado por:

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad (3.3)$$

donde el termino e^{ikr} representa la dispersión de la onda, la cuál se expande radialmente del blanco, de este modo $|f(\theta)|^2$ es proporcional a la probabilidad de que una partícula se disperse dentro de un ángulo θ . Mas precisamente, la sección transversal esta dada por el cuadrado de $f(\theta)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (3.4)$$

donde la diferencial del ángulo solido esta dado por:

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta, \quad (3.5)$$

y la sección transversal total es:

$$\int d\Omega |f(\theta)|^2 = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma, \quad (3.6)$$

sin embargo para nuestros propósitos esta formulación no es conveniente debido a que es intrínsecamente no relativista. Por lo que para dar una formulación relativista, empecemos por describir el proceso que toma de un estado inicial consistiendo de una de estados asintóticos en $t \rightarrow -\infty$ a un estado final $|f\rangle$ cuando $t \rightarrow \infty$, para calcular la probabilidad de un estado inicial a un estado final introducimos la matriz S :

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) F_{fi} \quad (3.7)$$

donde δ_{fi} son las partículas que no interactúan y F_{fi} es la matriz de transición, la cuál describe la dispersión no trivial. Una de las constricciones

vienen de la mecánica cuántica, esto significa que la matriz S es unitaria y se representa como:

$$\sum_f S_{fi}^* S_{fk} = \delta_{ik}, \quad (3.8)$$

donde si tenemos el cuadrado de la matriz S , podemos calcular la transición de probabilidades. La colección de los estados de probabilidad i hacen la transición para el estado final f y es:

$$P_{fi} = S_{fi}^* S_{fi} \quad (3.9)$$

así mismo la probabilidad total de todos los posibles estados de dispersión iniciales y finales son:

$$P_{total} = \sum_f S_{fi}^* S_{fi}. \quad (3.10)$$

Ahora calcularemos mas precisamente la \sum_f , definamos nuestros estados en una caja de volumen V :

$$|\vec{P}\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_p / V} a^\dagger(p) |0\rangle \text{ (bosones)} \quad (3.11)$$

de la misma manera:

$$|\vec{P}\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 (E_p / mV)} a^\dagger(p) |0\rangle \text{ (fermiones)} \quad (3.12)$$

de esta forma sí normalizamos los estados para los bosones y fermiones quedaría como:

$$\langle \vec{P} | \vec{P}' \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') / V \text{ (bosones)}, \quad (3.13)$$

$$\langle \vec{P} | \vec{P}' \rangle = (2\pi)^3 \frac{E_p}{m} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') / V \text{ (fermiones)}. \quad (3.14)$$

Con esta normalización, el operador unidad puede ser expresado en forma de una integral dada por:

$$1 = \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} |P\rangle \langle P| \text{ (bosones)}, \quad (3.15)$$

similarmente para el calculo de fermiones sería:

$$1 = \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3 E_p} \frac{m}{E_p} |P\rangle \langle P| \text{ (fermiones)}, \quad (3.16)$$

para probar esta normalización, podemos decir que el número 1 actúa en un estado arbitrario $|q\rangle$, donde los niveles de estado son invariantes. Esto nos da un número de estados en un momento p , por lo que con esta normalización podemos determinar que:

$$\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(0)/V, \quad (3.17)$$

lo cuál no tiene sentido, esto se puede demostrar utilizando la propiedad:

$$\langle p | p \rangle = \delta(p - p), \quad (3.18)$$

de este modo interpretaremos las densidades de las partículas dentro de una caja de longitud L y volumen V , ahora definamos δ en función del momento p , esto es que:

$$\delta^3(\vec{p}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-L/2}^{L/2} dx dy dz e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right), \quad (3.19)$$

esto implica que si tomamos la definición:

$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (3.20)$$

decimos que el volumen de la caja V tiende a infinito únicamente al final del calculo. El origen de este problema es que tenemos que conocer el comportamiento de las ondas planas, además que los paquetes de onda son confinados a una región específica del espacio y tiempo. Para estas ondas planas no localizadas podemos dividir con cuidado cantidades infinitas proporcionales al volumen del espacio y tiempo, de esta forma podemos calcular cantidades finitas, (otro análisis es usando paquetes de onda que son completamente localizados en el espacio y tiempo, este desarrollo de los paquetes de onda restringen mas a los paquetes de onda para definir una región en el espacio y tiempo, este análisis con paquetes de onda es mucho más complicado pero de igual forma se llega al mismo resultado). Nuestra tarea ahora, es calcular la dispersión de la sección eficaz $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots$ y estimar el decaimiento de una partícula singular $1 \rightarrow 2 + 3 \dots$, entonces podemos normalizar la suma sobre los estados finales, esto es que debemos integrar sobre todos los momentos de los estados iniciales y sumar sobre todos los posibles estados finales, para todo estado final, debemos integrar en toda covarianza de Lorentz, entonces usando:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p^2 - m^2) \theta(p_0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p}, \quad (3.21)$$

dónde la densidad de estados dN_f , es el número de estados de anchura \vec{p} y $\vec{p} + \delta\vec{p}$ dado por:

$$dN_f = \prod_{i=1}^{N_f} \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (3.22)$$

y como antes la diferencial de la sección eficaz $d\sigma$ es el número de transiciones por unidad de tiempo y unidad de volumen dividida entre el flujo \vec{J} de partículas incidentes y es expresado como:

$$d\sigma = \frac{\text{transiciones por segundo por cm}^3}{\text{flujo incidente}} = \left(\frac{|S_{fi}|^2 dN_f}{VT} \right) \frac{1}{J}, \quad (3.23)$$

pero sabemos que la transición por unidad de volumen (con intervalo de espacio momento) es: Transición estimada por $\text{cm}^3 =$

$$\frac{|S_{fi}|^2 dN_f}{VT} = \frac{(2\pi)^8 |F_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \delta^4(0)}{VT} dN_f, \quad (3.24)$$

donde $(2\pi)^4 \delta^4(0) = VT$. Para calcular el flujo incidente primero debemos tomar una composición colineal, como prueba de laboratorio del centro de masas, el flujo incidente J es igual al producto de la densidad del estado inicial $\frac{1}{V}$ y la velocidad relativa $v = |v_1 - v_2|$, donde $v_1 = |\vec{p}_1|/E_1$. En el centro de masas, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} V(2E_1)(2E_2)J &= (2E_1)(2E_2)|v_1 - v_2| = 2E_1 2E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = 4|\vec{p}_1 E_2 - \vec{p}_2 E_1| \\ &= 4[|\vec{p}_1|(E_1 + E_2)] = 4(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

el ultimo paso es un pequeño error que aparece en el flujo como una invarianza de Lorentz en todo el desarrollo, la ultima igualdad únicamente se cumple si las dos partículas son colineales, el ultimo paso no es necesariamente verdadero para un sistema arbitrario de Lorentz en el cuál las dos partículas no son colineales. Para ver esto podemos escribir el flujo para un rayo moviendose en la dirección z como:

$$J \sim \varepsilon_{xy\mu\nu} p_1^\mu p_2^\nu, \quad (3.26)$$

el flujo se transforma como componentes x, y de un tensor antisimétrico de segundo rango, que es una área inversa, donde la sección eficaz es una área para una partícula en el rayo, esto se puede transformar como una área bajo

una transformación arbitraria de Lorentz. De ahora en adelante supondremos que todas las formas de Lorentz son colineales, por lo tanto haremos esta distinción. La formula final para bosones para la sección diferencial eficaz para $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \dots$ es:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i)}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \prod_{i=3}^N \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_{pi}}, \quad (3.27)$$

en forma colineal donde $F_{fi} = \prod_{i=1}^N (2E_{pi} V)^{-1/2} M_{fi}$, notese que todos los factores de V en la matriz S tienen precisamente cancelados los factores que vienen de dN_f y del flujo. Finalmente usando este formalismo para calcular la probabilidad de decaimiento de una partícula singular, la probabilidad esta dada por:

$$P_{\text{total}} = \sum_f \int dN_f |S_{fi}|^2 = \sum_f \int dN_f |F_{fi}|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)]^2, \quad (3.28)$$

si tomamos $\delta_{fi} = 0$ para un proceso de decaimiento, la última expresión desafortunadamente, es singular debido a el cuadrado de la función delta, como antes supondremos que todos los cálculos están dados en una caja finita de volumen V sobre un intervalo de tiempo grande T . De este modo reinterpretaremos una de las funciones delta como sigue:

$$\delta^4(0) = \frac{VT}{(2\pi)^4}, \quad (3.29)$$

ahora definamos el decaimiento de la relación Γ de una partícula inestable como la transición de probabilidad por unidad de volumen de espacio y tiempo dado por:

$$\Gamma = \frac{\text{transicion de probabilidad}}{\text{volumen x segundo}} = \frac{P_{\text{total}}}{VT(2E_i)}, \quad (3.30)$$

por lo tanto el resultado final para el decaimiento de la relación es:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int \prod_{j=1}^{N_f} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i), \quad (3.31)$$

donde el tiempo de vida de la partícula τ es entonces definida como el inverso de la relación de decaimiento:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (3.32)$$

3.2. Teoría del propagador.

En este punto podemos enfatizar que las funciones de Green aparecen en el propagador aprovechando que no satisfacen la condición de masa superficial $p_\nu^\mu = m^2$, ninguna de ellas obedece las ecuaciones usuales de movimiento ya que las funciones de Green describen partículas virtuales no físicas, el desarrollo de las funciones de Green en el espacio momento de un polo son $p_\nu^\mu = m^2$, esto no es una violación a los principios de la física debido a que las funciones de Green no son cantidades medibles. La única cantidad medida es la matriz S donde las partículas externas obedecen la condición de masa superficial. Para seguir calculando la sección eficaz hacemos un examen cuidadoso del método del propagador ordinario en mecánica cuántica, dónde debemos resolver la ecuación.

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - H)\psi = 0. \quad (3.33)$$

Supondremos que el Hamiltoniano es cierto para $H = H_0 + H_I$ y la interacción H_I es pequeña, queremos resolver para el propagador $G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ dado por:

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0 - H_I)G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'), \quad (3.34)$$

donde resolveremos las funciones de Green para el caso de interacciones, entonces podemos usar el principio de Huygens para resolver la evolución del tiempo de la onda, recordemos que el principio de Huygens dice que la evolución del futuro de una onda puede ser determinada para asumir que todo punto a lo largo de una onda es una fuente independiente de una onda infinitesimal, si sumamos sobre todas estas pequeñas contribuciones podemos determinar el lugar en el espacio de la onda. Matemáticamente esta expresión es denotada por:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3x' G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')\psi(\vec{x}', t') : \text{donde } t > t', \quad (3.35)$$

donde nuestro objetivo es resolver por completo la función de Green G , en términos de la función de Green G_0 la cuál queremos entender para determinar el propagador, para el caso de interacción tenemos que expandir en H_I usando la siguiente formula para operadores A y B dada por:

$$\frac{1}{A + B} = \frac{1}{A(1 + A^{-1}B)} = \frac{1}{1 + A^{-1}B} \frac{1}{A}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - A^{-1}B + A^{-1}BA^{-1}B + \dots)A^{-1} \\
&= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \dots
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Otra forma de escribir esto es:

$$\frac{1}{A+B} = A^{-1} - \frac{1}{A+B}BA^{-1}, \tag{3.37}$$

con los valores dados por:

$$A = -H_0 + i\frac{\partial}{\partial t},$$

$$B = -H_I,$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{A+B} \\
G_0 &= \frac{1}{A},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

entonces tenemos las identidades:

$$\begin{aligned}
G &= G_0 + GH_I G_0 \\
G &= G_0 + G_0 H_I G_0 + G_0 H_I G_0 H_I G_0 + \dots
\end{aligned} \tag{3.39}$$

mas explícitamente, podemos escribir esto recursivamente como:

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= G_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \int dt_1 \int d^3x_1 G(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) \\
&\quad \times H_I(\vec{x}_1, t_1) G_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}', t'),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

sí expandemos esta expresión en serie de potencias encontramos:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = G_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \int dt_1 \int d^3x_1$$

$$\begin{aligned}
& \times G_0(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) H_1(\vec{x}_1, t_1) G_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}', t') \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 d^3 x_1 d^3 x_2 G_0(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) H_1(\vec{x}_1, t_1) \\
& \times G_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2) H_1(\vec{x}_2, t_2) G_0(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}', t') + \dots \tag{3.41}
\end{aligned}$$

entonces usando el principio de Huygens podemos expandir para la evolución de la función de onda en el tiempo

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}, t) &= \psi_0(\vec{x}, t) + \int d^4 x_1 G_0(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) \psi_0(\vec{x}_1, t_1) \\
& + \int d^4 x_1 d^4 x_2 G_0(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) H_1(\vec{x}_1, t_1) G_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2) \psi_0(\vec{x}_2, t_2) \\
& + \dots + \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n G_0(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1) H_1(\vec{x}_1, t_1) \dots \\
& \times G_0(\vec{x}_{n-1}, t_{n-1}; \vec{x}_n, t_n) \psi_0(\vec{x}_n, t_n) + \dots \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Veamos ahora como resolver para la matriz S de orden mas bajo. Postulamos que hay una infinidad de ondas planas dadas por $\phi = e^{-ik \cdot x} / (2\pi)^{3/2}$ y necesitamos calcular la transición de probabilidad de un paquete de onda que comienza en un estado inicial i del potencial de dispersión, entonces la onda emerge como otra onda plana, pero en un estado diferente al estado final f , para el orden mas bajo la probabilidad de transición puede ser calculado examinando el principio de Huygens dado por:

$$\psi(\vec{x}, t) = \phi_i(\vec{x}, t) + \int d^4 x' G_0(\vec{x}, t; x', t') H_1(\vec{x}', t') \phi_i(\vec{x}', t') + \dots \tag{3.43}$$

donde para extraer la matriz S , multiplicamos esta ecuación de la derecha por ϕ_j^* y integramos el primer termino de la derecha esta dado entonces por δ_{ij} , si Hacemos expansión sobre la función de Green podemos expresar la

función de Green en términos de G_0 de estos campos libres. Posteriormente por integración determinamos:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i \int d^4x \phi_f^*(x') H_I(x') \phi_i(x') + \dots, \quad (3.44)$$

de esta forma la matriz de transición es proporcional a los elementos de la matriz del potencial H_I . Ahora generalizaremos este ejercicio para el problema en cuestión. El calculo de QED de la dispersión de un electrón debido a un potencial de Coulomb. Nuestro punto principal es el electrón de Dirac en la presencia de un potencial externo de coulomb, la interacción de la ecuación de Dirac es:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eA(x)\psi(x), \quad (3.45)$$

donde se utilizara únicamente para orden menor, consideraremos el potencial A_μ como un potencial clásico, entonces podemos resolver esta ecuación usando únicamente el método del propagador, por lo que la solución de esta ecuación es:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + e \int d^4y S_F(x-y) A(y) \psi(y), \quad (3.46)$$

donde ψ_0 es una solución libre homogénea de la ecuación de Dirac. Para calcular la matriz de dispersión es conveniente insertar la expansión del propagador de Feynman $S_F(x-x')$ en términos de la función orden-tiempo $\theta(t-t')$, determinando:

$$\psi(x) = \psi_i(x) - ie \int d^4y i\theta(t-t') \int d^3p \sum_{r=1}^2 \bar{\psi}_p^r(x) \psi_p^r(y) A(y) \psi(y), \quad (3.47)$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Ahora queremos calcular en esta expresión la amplitud de partida de la onda $\psi(x)$ que es dispersada en el estado final, dado por $\psi_f(x)$, este hecho se usa para multiplicar ambos lados de la ecuación por $\bar{\psi}_f$ y integrar sobre todo el espacio-tiempo. El resultado nos da la matriz de orden menor:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) A(x) \psi_i(x), \quad (3.48)$$

si insertamos ahora la expresión para el vector potencial, el cuál corresponde a un potencial eléctrico A_0 , denotado por el potencial estándar de Coulomb $1/r$ y es:

$$A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|} \quad (3.49)$$

su transformación de Fourier esta dada:

$$\int \frac{d^3x}{|\vec{x}|} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{4\pi}{|\vec{q}|^2}, \quad (3.50)$$

insertando la expresión de la onda plana para el fermión de campo dentro de la matriz de dispersión ecuación (3.48) y haciendo la integración sobre x , tenemos:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{iZe^2}{4\pi V} \int d^4x \sqrt{\frac{m}{E_f}} \bar{u}(p_f, s_f) e^{ip_f \cdot x} [\gamma^0 \frac{1}{|\vec{x}|}] \sqrt{\frac{m}{E_i}} u(p_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x} \\ &= \frac{iZe^2}{V} \sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}} \frac{\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 \vec{u}(p_i, s_i)}{|\vec{q}|^2} 2\pi \delta(E_f - E_i), \end{aligned} \quad (3.51)$$

recordemos que $Vd^3p_f/(2\pi)^3$ es el número que contiene un estado final en el intervalo d^3p_f , si multiplicamos esto por $|S_{fi}|^2$ y tenemos la probabilidad de transición de una partícula dentro de estos estados, el cuadrado de la matriz S da unas cantidades divergentes como $\delta(0)$, la cuál es debido al factor que no tenemos localizado en un paquete de onda. Si $2\pi\delta(0) = T$, entonces localizamos el proceso de dispersión en una caja de longitud V y duración T , dividiendo por T nos da la razón de transición R por unidad de tiempo dentro de este intervalo de momento, finalmente, si dividimos por la razón de transición el flujo de partículas incidentes $|\vec{v}_i|/V$ nos da la sección diferencial eficaz dada por:

$$d\sigma = |S_{fi}|^2 \frac{Vd^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{VT|\vec{v}_i|/V}. \quad (3.52)$$

Para calcular la sección eficaz por unidad de ángulo solido, debemos descomponer el momento como elemento de volumen:

$$d^3p = d\Omega p^2 dp, \quad (3.53)$$

entonces usando el factor $p_f dp_f = E_f dE_f$, tenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\vec{q}|^4} \sum_{\text{spin}} \frac{1}{2} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \\ &= \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\vec{q}|^4} \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^0 \not{p}_i + m \gamma^0 \not{p}_f + m), \end{aligned} \quad (3.54)$$

en la ultima parte usamos el hecho de que la suma de spines pueden ser escrita como:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_f \Gamma_{ui}|^2 &= (\bar{u}_f \Gamma_{ui})(u_i^\dagger \Gamma^\dagger \bar{u}_f^\dagger) \\
&= (\bar{u}_f \Gamma_{ui})(\bar{u}_i \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0 u_f) \\
&= \bar{u}_{f,\alpha} \Gamma_{\alpha,\beta} u_{i,\beta} \bar{u}_{i,\gamma} (\gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0)_{\gamma,\delta} u_{f,\delta} \\
&= \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m}\right)_{\delta,\alpha} \Gamma_{\alpha,\beta} \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m}\right)_{\beta,\gamma} (\gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0)_{\gamma,\delta} \\
&= Tr \left\{ \frac{\not{p}_f + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0 \right\} \tag{3.55}
\end{aligned}$$

donde tenemos que usar el factor para que la suma sobre los spines nos den:

$$\sum_{\text{spines}} u_\beta(p, s) \bar{u}_\alpha(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{\beta\alpha}, \tag{3.56}$$

aquí la ultima traza de números pares de matrices de Dirac sobreviven:

$$Tr \gamma^0 \not{p}_i \gamma^0 \not{p}_f = 4(2E_i E_f - p_i \cdot p_f), \tag{3.57}$$

finalmente, necesitamos alguna información cinética, si θ es el ángulo entre p_f y p_i , entonces:

$$p_i \cdot p_f = m^2 + 2\beta^2 E^2 \sin^2(\theta/2)$$

con:

$$|\vec{q}| = 4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \tag{3.58}$$

obteniendo la sección eficaz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4|\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} \left[1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{3.59}$$

en el límite no relativista $\beta \rightarrow 0$ y se obtiene la formula de dispersión de Rutherford.

3.3. Reducción de formulas LSZ.

En esta sección se introducirá un método mas conveniente que es el formalismo de reducción LSZ, del cual podemos derivar las amplitudes de dispersión para todo orden en teoría de perturbación. El método LSZ da una simple derivación de las reglas de Feynman las cuáles son originalmente derivadas de una aproximación mas intuitiva, la teoría LSZ aproxima físicamente la matriz S . Empezaremos por definir la "entrada" y "salida" de estados, los cuáles son partículas libres en tiempos asintóticos que son cuando $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$ respectivamente. Nuestro objetivo es expresar la interacción de la matriz S definida en términos del campo de interacción $\phi(x)$ de estos estados asintóticos libres, la matriz S es definida como el elemento de matriz de transición de un estado asintótico fijo a otro, entonces sea f una colección de estados asintóticos libres cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que i se refiere a otra colección de estados asintóticos cuando $t \rightarrow -\infty$, entonces la matriz S describe la dispersión de estados i dentro de estados f dada por:

$$S_{fi} = {}_{out}\langle f|i\rangle_{in}, \quad (3.60)$$

si postulamos que la existencia de un operador S que convierte estados asintóticos en $t = \infty$ a estados en $t = -\infty$ denotados como:

$$|f\rangle_{in} = S|f\rangle_{out},$$

donde la matriz S es:

$$S_{fi} = {}_{out}\langle f|S|i\rangle_{out} = {}_{in}\langle f|S|i\rangle_{in}, \quad (3.61)$$

para estos estados asintóticos tenemos campos asintóticos ϕ_{in} y ϕ_{out} que son campos libres de esta forma se describirán estos estados asintóticos libres. En particular definiremos el vector estado como el estado vacío multiplicado por operadores de creación denotados como:

$$|q\rangle_{in} = a_{in}^\dagger(q)|0\rangle_{in} = -i \int d^3x e_q(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x)|0\rangle_{in}. \quad (3.62)$$

El método de LSZ nos ayuda para reducir todas las expresiones que ocasiona que el campo de interacción $\phi(x)$ este lleno (por lo que el elemento de matriz no se puede calcular tan fácilmente), en expresiones mas simples que implican el campo asintótico libre ϕ_{in} y ϕ_{out} , la matriz S es escrita como una transición

que no es útil. El objetivo del método *LSZ* se aprovecha, de este modo para continuar el proceso hasta que se extrae gradualmente fuera (out) de la matriz entera S , de los campos que contienen los estados asintóticos. Hay sin embargo un punto sutil que se debe mencionar, donde el campo que es tomado en el tiempo infinito negativo o positivo debe acercarse suavemente al valor de los campos asintóticos libres de modo que:

$$x \longrightarrow -\infty; \quad \phi(x) \longrightarrow Z^{1/2} \phi(x)_{\text{in}}, \quad (3.63)$$

donde el factor $Z^{1/2}$ resulta debido a los efectos de normalización. De este modo la suposición es correcta, entonces se puede probar que la matriz S se transforma mas fácilmente y no toma el lugar de dispersión. De esta forma tomamos la suposición mas fuerte de que los elementos de la matriz de los dos campos $\phi(x)$ y ϕ_{in} toman el tiempo infinitamente negativo quedando:

$$x \longrightarrow -\infty; \quad \langle f | \phi(x) | i \rangle \longrightarrow Z^{1/2} \langle f | \phi_{\text{in}}(x) | i \rangle, \quad (3.64)$$

que por el momento no tomaremos en cuenta las implicaciones y regresaremos a la evaluación de Z después. Si tomamos arbitrariamente el elemento de matriz para la dispersión de m partículas con momento q_i dentro de n partículas con momento p_j obtenemos el campo ϕ_{in} del estado asintótico:

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}} &= \text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | a_{\text{in}}^\dagger(q_1) | q_2, q_3, \dots, q_m \rangle_{\text{in}} \\ &= -i \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e_{q_1}(x) \overrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | \phi(x)_{\text{in}} | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

pero queremos convertir la integral $\int d^3x$ en una de cuatro dimensiones, así que usando la identidad:

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x A(x, t), \quad (3.66)$$

tenemos un termino cuando $t \rightarrow -\infty$, si sumamos y restamos el mismo termino; $t \rightarrow \infty$ entonces nos da una integral para el espacio tiempo de cuatro dimensiones:

$$\begin{aligned} &\text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}} \\ &+ i Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e_{q_1}(x) \overrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}] \end{aligned}$$

$$- iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x [e_{q_1}(x) \overrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}], \quad (3.67)$$

este último termino puede ser escrito como el operador creación de un estado fuera (out):

$$\begin{aligned} & - iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x [e_{q_1}(x) \overrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}] \\ & = \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

y como convertimos una integral tridimensional a una cuatridimensional entonces tenemos que generar un termino nuevo cuando $t \rightarrow \infty$, el cual es un elemento de matriz de un operador fuera $a_{\text{out}}^\dagger(q_1)$. Este operador es un operador de aniquilación que actúa por la izquierda, en general esto da cero, la única excepción es la colección de estados fuera que tienen precisamente el mismo estado con momento q_1 , por lo que el elemento de matriz desaparece a menos que, el *iesimo* estado con momento p_i tenga exactamente el mismo momento q_1 denotado como:

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, q_3 \dots \rangle_{\text{in}} \sum 2p_i^0 (2\pi)^3 \delta^3(p_i - q_1) \\ & \times \text{out} \langle p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n | q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde el signo intercalado significa que suprimimos esa variable particular, este termino es llamado (gráfica desconectada) debido a que una partícula emerge inafectada por el proceso de dispersión por lo tanto se desconecta del resto de las partículas. Ahora daremos un paso en el calculo que hasta ahora las expresiones son no covariantes debido a la presencia de dos derivadas del tiempo, convertiremos las derivadas del tiempo en el elemento reducido de la matriz en completamente un objeto covariante restaurando así la invarianza de lorentz, esto es posible debido a el operador $\partial_0^2 - \partial_i^2 + m^2$ que aniquila la onda plana $\exp(-iq_1 \cdot x)$, si integramos por partes podemos convertir las derivadas del tiempo en derivadas totalmente covariantes ∂_μ^2 quedando como:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \partial_0 [e_{q_1}(x) \overrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}] \\ & = - \int d^4x [\partial_0^2 e_{q_1}(x)]_{\text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}} \\ & + \int d^4x e_{q_1}(x) \partial_0^2 \text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x [(-\partial_i^2 + m^2)e_{q_1}(x)] \text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}} \\
&\quad + \int d^4x e_{q_1}(x) \partial_0^2 \text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}} \\
&= \int d^4x e_{q_1}(x) (\partial_\mu^2 + m^2) \text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

por lo tanto determinamos que:

$$\begin{aligned}
&\text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}} = \text{grafico desconectado} \\
&+ iZ^{-1/2} \int d^4x e_{q_1}(x) (\partial_\mu^2 + m^2) \text{out} \langle p_1, p_2, \dots | \phi(x) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}, \tag{3.71}
\end{aligned}$$

ahora completaremos el primer paso del programa *LSZ* para determinar el estado con momento q_1 de los estados dentro(in), reduciremos el elemento de la matriz abstracta S dentro de un campo ϕ y continuaremos con el proceso dentro de todos los campos asintóticos extraídos de los estados asintóticos una complicación se presenta cuando extraemos el segundo campo del estado fuera(out) con momento p_1 , determinemos como adoptar el orden del tiempo del producto de dos campos (o en otras palabras no podemos hacer la transición de la derivada del tiempo a la derivada covariante de Lorentz), repitiendo el calculo anterior y incluyendo esta importante característica del orden del tiempo:

$$\begin{aligned}
&\text{out} \langle p_1, \dots | \phi(x_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}} = \text{out} \langle p_2, \dots | \phi(x_1) a_{\text{in}}(p_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}} \\
&+ iZ^{-1/2} \int d^4y_1 e_{p_1}^*(y_1) (\partial_\mu^2 + m^2)_{y_1} \text{out} \langle p_2, \dots | T \phi(y_1) \phi(x_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

aquí el operador a_{in} actúa a la derecha y es un operador de aniquilación que destruye un estado con momento exactamente p_1 generando una gráfica discontinua, completando todos los pasos tenemos el doble elemento de la matriz reducida:

$$\text{out} \langle p_1, \dots, | q_1, \dots \rangle_{\text{in}} = \text{grafico desconectado}$$

$$\begin{aligned}
& + (iZ^{-1/2})^2 \int d^4x_1 d^4y_1 e_{p_1}^*(y_1) e_{q_1}(x_1) (\partial_\mu^2 + m^2)_{y_1} (\partial_\mu^2 + m^2)_{x_1} \\
& \quad \times \text{out} \langle p_2, \dots | T \phi(y_1) \phi(x_1) | q_2, \dots \rangle_{\text{in}}, \tag{3.73}
\end{aligned}$$

entonces para aplicar este proceso de reducción de todos los campos contenidos internamente con los vectores asintóticos la única complicación es que generamos gráficas discontinuas y tenemos que ser cuidadosos con el orden temporal, así que nuestro resultado final es:

$$S_{fi} = \text{in} \langle p_1, p_2 \dots p_n | S | q_1, q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}}$$

$$\text{out} \langle p_1, p_2, \dots, p_n | q_1, q_2 \dots, q_m \rangle_{\text{in}} = \text{grafica desconectada}$$

$$\begin{aligned}
& + (iZ^{-1/2})^{n+m} \int d^4y_1 \dots d^4x_m \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m e_{p_i}^*(y_i) e_{q_j}(x_j) \\
& \quad \times (\partial_\mu^2 + m^2)_{y_1} \dots (\partial_\mu^2 + m^2)_{x_m} \langle 0 | T \phi(y_1) \dots \phi(x_m) | 0 \rangle, \tag{3.74}
\end{aligned}$$

en general escogemos el momento por lo que las gráficas desconectadas son cero. Para valores del momento donde la gráfica desconectada son no cero, podemos usar este formalismo para reducir los términos.

3.4. Reducción de los espinores de Dirac.

Ahora aplicaremos el formalismo de los espinores de Dirac para la reducción de matrices fermiónicas S , siguiendo los pasos del caso de los bosones de esta forma podemos escribir los operadores de creación y aniquilación en términos del campo de Dirac, así que escribimos la condición asintótica como:

$$x^0 \rightarrow -\infty; \quad \langle f | \psi(x) | i \rangle \rightarrow Z_2^{-1/2} \langle f | \psi_{\text{in}}(x) | i \rangle, \tag{3.75}$$

más adelante escribiremos la matriz S y reduciremos un operador de creación fuera(out) utilizando la ecuación:

$$d_\alpha^\dagger(k) = \int d^3(x) \bar{V}_k^\alpha(x) \gamma^0 \psi(x), \tag{3.76}$$

aplicando esto obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{out}\langle f|k, i\rangle_{\text{in}} &= \text{out}\langle f|b_{\text{in}}^\dagger(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} = -i \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x \text{out}\langle f|\bar{\psi}(x)|i\rangle_{\text{in}} U_k(x, \epsilon) \\
&= \text{out}\langle f|b_{\text{out}}^\dagger(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} - iZ_2^{-1/2} \int d^3(x) [\text{out}\langle \bar{\psi}(x)|i\rangle_{\text{in}} (-i) \overleftarrow{\partial}_0 \gamma^0 U_k(x, \epsilon) \\
&\quad + \text{out}\langle f|\bar{\psi}(x)|i\rangle_{\text{in}} (-i) \overrightarrow{\partial}_0 \gamma^0 U_k(x, \epsilon)], \tag{3.77}
\end{aligned}$$

de forma similar que la anterior transformamos $\gamma^0 \partial_0$ a la forma covariante $\gamma^\mu \partial_\mu$, con esto podemos concluir debido a que podemos remplazar la derivada del tiempo con una derivada de espacio (debido a el espinor $u(k, \epsilon)e^{-ik \cdot x}$ satisfaciendo la ecuación de Dirac), esta forma nos permite escribir diferentes tipos de formulas de reducción, dependiendo de el proceso de creación o aniquilación que estemos analizando, la reducción de las formulas a una reducción singular se expresan como:

$$\begin{aligned}
\text{out}\langle f|b_{\text{in}}^\dagger(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} &= -iZ_2^{-1/2} \int d^4x \text{out}\langle f|\bar{\psi}(x)|i\rangle_{\text{in}} (-i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) U_k(x, \epsilon) \\
\text{out}\langle f|d_{\text{in}}^\dagger(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} &= +iZ_2^{-1/2} \int d^4x \bar{V}_k(x, \epsilon) (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \text{out}\langle f|\psi(x)|i\rangle_{\text{in}} \\
\text{out}\langle f|b_{\text{out}}(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} &= -iZ_2^{-1/2} \int d^4x \bar{U}_k(x, \epsilon) (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \text{out}\langle f|\psi(x)|i\rangle_{\text{in}} \\
\text{out}\langle f|d_{\text{out}}(k, \epsilon)|i\rangle_{\text{in}} &= +iZ_2^{-1/2} \int d^4x \text{out}\langle f|\bar{\psi}(x)|i\rangle_{\text{in}} (-i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) V_k(x, \epsilon),
\end{aligned}$$

donde tenemos la gráfica desconectada. Haciendo reducciones sucesivas hasta que todos los operadores de creación y aniquilación sean reducidos fuera(out), podemos tomar los elementos de la matriz del orden-tiempo de los diferentes campos. Tomemos el elemento de la matriz entre las partículas entrantes y las partículas salientes, las partículas entrantes son dadas por p_1, p_2, \dots , y las antipartículas entrantes dadas por p'_1, p'_2, \dots , las partículas salientes son:

q_1, q_2, \dots , y sus respectivas antipartículas salientes dadas como: q'_1, q'_2, \dots , entonces los elementos de la matriz después de la reducción produce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \text{out} \langle 0 | b_{\text{out}}(q_1) \dots d_{\text{out}}(q'_1) \dots b_{\text{in}}^\dagger(p_1) \dots d_{\text{in}}^\dagger(p'_1) \dots | 0 \rangle_{\text{in}} \\
&= (-iZ_2^{-1/2})^{n/2} (iZ_2^{-1/2})^{-n'/2} \int d^4x_1 \dots d^4x'_1 \dots d^4y_1 \dots d^4y'_1 \dots \\
&\quad \times \bar{U}_{q_1}(y_1)(i \overrightarrow{\not{\partial}} - m)_{y_1} \dots \bar{V}_{p'_1}(x'_1)(i\gamma^\mu \overrightarrow{\not{\partial}} - m)_{x'_1} \dots \\
&\quad \times \langle 0 | T[\bar{\psi}(y'_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(x_1) \dots \psi(x'_1) \dots] | 0 \rangle \\
&\quad \times (-i \overrightarrow{\not{\partial}} - m)_{x_1} U_{p_1}(x_1) \dots (-i \overrightarrow{\not{\partial}} - m)_{y'_1} V_{q'_1}(y'_1) \dots, \tag{3.78}
\end{aligned}$$

donde hemos desechado los gráficos desconectados, de esta manera podemos reducir fuera(out) los procesos de dispersión uniformemente mas complejos de los términos de las formulas de reducción.

3.5. Evolución del operador temporal.

Las formulas de reducción LSZ pueden convertir el elemento abstracto de la matriz S en el producto de los valores de la expectativa de vacío de los campos que obran reciprocamente. De este modo podemos saber como tomar el elemento de matriz de los campos de interacción, donde no podemos determinar la extracción de número fuera(out) de estos elementos de matriz, el problema es que todo es escrito completamente en términos de la interacción del campo, del cuál no sabemos casi nada, para esto hacemos una aproximación en la teoría para poder expandir en la constante que se junta, la cual es del orden de $1/137$ para QED. Comencemos partiendo el hamiltoniano en dos partes distintas:

$$H = H_0 + H_1 \tag{3.79}$$

donde H_0 es el hamiltoniano libre y H_1 es la parte interactuando. Para la teoría ϕ^4 , por ejemplo la parte de interacción es:

$$H_1 = \int d^3 \mathfrak{H}_1,$$

donde:

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.80)$$

En este punto es útil recordar de la mecánica cuántica varios "esquemas" en los cuales se describe la evolución del tiempo. En la ecuación de Schrödinger la función de onda $\psi(x, t)$ y el vector de estado son funciones del tiempo t , pero los operadores en la teoría son constantes en el tiempo. En el "esquema" de Heisenberg, al contrario es verdad que la función de onda y estado son vectores constantes en el tiempo, pero la evolución de los operadores en el tiempo y variables dinámicas de la teoría son gobernadas por el hamiltoniano:

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}, 0) e^{-iHt}. \quad (3.81)$$

En el formalismo *LSZ* debemos determinar esto convenientemente para definir otro "esquema", el cual asemeje al "esquema" de interacción en este nuevo "esquema", necesitamos determinar el operador unitario $U(t)$ que toma completamente el campo de interacción $\phi(x)$ para el estado asintótico libre dentro(in):

$$\phi(t, \vec{x}) = U^{-1}(t) \phi_{in}(t, \vec{x}) U(t), \quad (3.82)$$

donde: $U(t) \equiv U(t, -\infty)$, es la evolución del operador tiempo el cuál obedece:

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$$

$$U^{-1}(t_1, t_2) = U(t_2, t_1)$$

por lo tanto:

$$U(t, t) = 1, \quad (3.83)$$

Tenemos ahora los dos tipos de campos escalares, uno libre y el otro interactuando por lo que se tiene que ser cuidadoso para distinguir el hamiltoniano escrito en términos de la interacción libre de campos. Entonces el campo libre ϕ_{in} y la interacción de campo satisface las dos ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \vec{x}) = i[H(t), \phi(t, \vec{x})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_{in}(t, \vec{x}) = i[H_0^{in}, \phi_{in}(t, \vec{x})], \quad (3.84)$$

si resolvemos para $U(t)$ necesitamos extraer un poco mas de las identidades diferenciando la expresión $UU^{-1} = 1$ entonces:

$$\left[\frac{d}{dt}U(t)\right]U^{-1}(t) + U(t)\frac{d}{dt}U^{-1}(t) = 0, \quad (3.85)$$

ahora tomemos la derivada ϕ_{in} por lo que si utilizamos las identidades tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_{in}(t, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t)\phi(t, \vec{x})U^{-1}]$$

$$\dot{U}(t)\phi(t, \vec{x})U^{-1} + U(t)\dot{\phi}(t, \vec{x})U^{-1}(t) + U(t)\phi(t, \vec{x})\dot{U}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & \dot{U}(t)(U^{-1}\phi_{in}U)U^{-1} + U(t)[iH(\phi, \pi), \phi]U^{-1} + UU^{-1}\phi_{in}U\dot{U}^{-1} \\ & \dot{U}U^{-1}\phi_{in} + iU[H(\phi, \pi), \phi]U^{-1} + \phi_{in}U\dot{U}^{-1} = [\dot{U}U^{-1} + iH(\phi_{in}, \pi_{in}), \phi_{in}], \end{aligned} \quad (3.86)$$

la ultima expresión dentro de los paréntesis debe ser igual $i[H_0^{in}, \phi_{in}]$, esto es lo mismo que la expresión que conmuta con todo operador dentro(in) y donde debe ser un número c por lo que la ecuación es:

$$\dot{U}U^{-1} + i[H(\phi_{in}, \pi_{in}) - H_0^{in}] = \text{numero } c \quad (3.87)$$

(donde se puede probar que c no contribuye con la matriz S), de este modo el operador $U(t)$ satisface lo siguiente:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_I(t)U(t, t_0) \quad (3.88)$$

donde:

$$H_I(t) \equiv H(\phi_{in}, \pi_{in}) - H_0^{in}, \quad (3.89)$$

que es $H_I(t)$ definida para ser la interacción hamiltoniana, definida únicamente con campos asintóticos libres, donde $H_I(t)$ no necesariamente conmuta con $H_I(t')$, a diferentes tiempos la integración de la ecuación anterior se toma como un pulso, de este modo se puede probar que:

$$U(t) = U(t, -\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= T \exp\left(-i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1)\right) \\
&= T \exp\left(-i \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3 x_1 \mathfrak{H}_I(\vec{x}_1, t_1)\right), \tag{3.90}
\end{aligned}$$

donde el operador T lo integramos sobre el orden del tiempo t_1 , para probar esta expresión basta con sustituir en la ecuación (3.88), sin embargo esta expresión no es muy útil, por lo que debemos determinar una manera mucho mas conveniente, si expandemos en series de potencias de Taylor la expresión:

$$\begin{aligned}
U(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t d^4 x_1 \int_{-\infty}^t d^4 x_2 \dots \\
&\times \int_{-\infty}^t d^4 x_n T[\mathfrak{H}_I(x_1) \mathfrak{H}_I(x_2) \dots \mathfrak{H}_I(x_n)] \tag{3.91}
\end{aligned}$$

tenemos una solución explicita para $U(t)$, descompongamos la función de Green tomando el elemento de la matriz de una interacción de series del campo ϕ , debemos usar el operador $u(t)$ para convertir la expresión entera para un campo asintótico libre. Para esto primero elegimos una secuencia de puntos de espacio-tiempo x_i^μ , definidos como $x_1^0 > x_2^0 > \dots x_n^0$, podemos ordenar el operador del tiempo T , entonces podemos remplazar todos los campos de interacción con los campos libres, haciendo la conversión $\phi = U^{-1} \phi_{in} U$ por todas partes:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n))|0\rangle = \langle 0|\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle \\
&\langle 0|U^{-1}(t_1)\phi_{in}(x_1)U(t_1)U^{-1}(t_2)\phi_{in}(x_2)U(t_2) \\
&\dots U(t_{n-1})U^{-1}(t_n)\phi_{in}(x_n)U(t_n)|0\rangle \\
&= \langle 0|U^{-1}(t_1)\phi_{in}(x_1)U(t_1, t_2)\phi_{in}(x_2)\dots U(t_{n-1}, t_n)\phi_{in}(x_n)U(t_n)|0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 0|U^{-1}(t)U(t, t_1)\phi_{in}(x_1)\dots\phi_{in}(x_n)U(t_n, -t)U(-t)|0\rangle \\
&= \langle 0|U^{-1}(t)U(t, t_1)\phi_{in}(x_1)\dots\phi_{in}(x_n)U(t_n, -t)U(-t)|0\rangle \\
&= \langle 0|U^{-1}(t)T[\phi_{in}(x_1)\phi_{in}(x_2)\dots\phi_{in}(x_n)U(t, -t)]U(-t)|0\rangle \\
&= \langle 0|U^{-1}(t)T[\phi_{in}(x_1)\dots\phi_{in}(x_n) \exp(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t'))]U(-t)|0\rangle, \quad (3.92)
\end{aligned}$$

donde t es arbitrariamente mucho mayor que t_1 y $-t$ mucho menor que t_n , fijaremos mas adelante $t = \infty$ en la ultima línea, donde tenemos el orden del operador tiempo T , que nos permite mover todos los U 's dentro de la matriz elemento y de esta manera combinarlos todos dentro de $U(t, -t)$, así que puede ser expandido como una función de interacción Lagrangiana (definida estrictamente en términos de los campos asintóticos libres). Aquí hay una parte que no se ha calculado por lo que ahora la desarrollaremos, aunque todavía tenemos el termino $U(-t)$ y $\langle 0|U^{-1}(t)$ a eliminar en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, en general suponemos que el vacío es estable para esta teoría y sabemos que el vacío es un eigen-estado del operador U para alguna fase, donde $U(t) \equiv U(t, -\infty)$, entonces podemos fijar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)|0\rangle = |0\rangle, \quad (3.93)$$

donde se toma el límite de modo que $U(-\infty, \infty) = 1$, sin embargo para el otro estado $\langle 0|U^{-1}(t)$ debemos ser mas cuidadosos ya que el límite es $U^{-1}(\infty) = U^{-1}(-\infty, +\infty)$, donde el vacío es estable. Esto significa que el vacío en $t = -\infty$ sigue siendo el vacío en $t = +\infty$, hasta una fase de modulo λ , de este modo determinamos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t) = \lambda \langle 0|, \quad (3.94)$$

para la ecuación con $|0\rangle$ la fase λ , es igual a:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(t)|0 \rangle^{-1} \\
&= \langle 0|T \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{in})|0 \rangle^{-1}. \tag{3.95}
\end{aligned}$$

La fase λ nos da la contribución para la gráfica del vacío (es decir sin cualquier gráfico externo), poniendo de este modo todo junto tenemos una expresión para la función de Green definida para los campos de interacción:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)]|0 \rangle, \tag{3.96}$$

esta interacción de la función de Green escrita en términos de los campos libres se convierte en:

$$\begin{aligned}
&G(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \frac{\langle 0|T \phi_{in}(x_1)\dots\phi_{in}(x_n) \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{in})\}|0 \rangle}{\langle 0|T \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_I[\phi_{in}(x)]\}|0 \rangle}. \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Sí usamos el formalismo que se construyó anteriormente, podemos reescribir la matriz en términos de los campos asintóticos libres, dentro de la expansión de potencias de la exponencial en la función de Green:

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \dots d^4y_m \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2) \\
&\dots\phi(x_n) \mathfrak{H}_I(y_1)\mathfrak{H}_I(y_2)\dots\mathfrak{H}_I(y_m)]|0 \rangle_c, \tag{3.98}
\end{aligned}$$

donde el subíndice c se refiere a los diagramas conectados únicamente. De ahora en adelante se denotara por el subíndice a todos los campos dentro(in), sin embargo debemos recordar que tenemos hecha la transición del "esquema" de Heisenberg para este nuevo "esquema" donde todos los campos son libres, el proximo paso es evaluar el producto del orden del tiempo de un número arbitrario de campos libres, todo esto nos conduce al teorema de Wick que lo veremos en la siguiente sección.

3.6. Teorema de Wick.

Comenzaremos nuestra discusión definiendo los operadores ordenados normalmente, en general la situación clásica no es semejante, el producto de dos

campos cuánticos tomados en el mismo punto:

$$\lim_{x \rightarrow y} \phi(x)\phi(y) = \infty. \quad (3.99)$$

Desafortunadamente nuestra acción consiste de campos multiplicados en el mismo punto, tal que la transición para la teoría cuántica es levemente ambigua para nuestras expresiones. Recordemos el producto del orden normal de dos campos. Veamos como descomponer el campo escalar dentro de los operadores de creación (etiquetando por un signo menos a los operadores de aniquilación y por un signo mas a los operadores de creación) $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi(x)^-$ entonces el producto del orden normal de estos campos cambia las partes de creación y aniquilación, tales que los operadores de creación siempre aparezcan en la izquierda, y los operadores de aniquilación siempre aparezcan en la derecha, por lo que el orden del producto normal es definido como:

$$\begin{aligned} : \phi(x)\phi(y) : \equiv & \phi(x)^+\phi^+(y) + \phi(x)^-\phi^+(y) + \phi(y)^-\phi^+(x) \\ & + \phi(x)^-\phi^-(y), \end{aligned} \quad (3.100)$$

Una consecuencia del orden normal es que el valor esperado del vacío de cualquier producto de orden normal se anula, esto es debido a que los operadores de aniquilación aparecen a la derecha:

$$\phi^+|0\rangle = \langle 0|\phi^- = 0. \quad (3.101)$$

De forma similar se puede definir el orden del producto normal para productos mas complicados de campos. Ahora procederemos a determinar una relación entre el orden normal de productos y el orden de productos del tiempo, para probar la siguiente identidad o teorema de Wick para dos campos:

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)] =: \phi(x_1)\phi(x_2) : + \text{un numero } c, \quad (3.102)$$

la única diferencia entre el orden del tiempo y el orden del producto normal es que tienen modificados varias partes de creación y aniquilación de los campos, tomemos la expresión del número c con el valor esperado del vacío por ambos lados, donde el valor esperado del vacío del orden normal produce cero como se muestra:

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)] =: \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle. \quad (3.103)$$

Sí tenemos tres campos el teorema de Wick queda como:

$$\begin{aligned}
T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : \\
&+ \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle\phi(x_3) \\
&+ \langle 0|T[\phi(x_2)\phi(x_3)]|0\rangle\phi(x_1) \\
&+ \langle 0|T[\phi(x_3)\phi(x_1)]|0\rangle\phi(x_2), \tag{3.104}
\end{aligned}$$

donde los últimos tres términos pueden ser sumados por $\sum_{\text{permutaciones}}$, la cual se suman sobre todas las permutaciones de x_1, x_2, x_3, \dots . Para probar ésta expresión con tres campos escalares, tomamos la identidad original justo con dos campos escalares y multiplicamos ambos lados de la ecuación en la derecha por $\phi(x_3)$, la cual tiene el tiempo mayor, si introducimos $\phi(x_3)$ dentro del producto del orden normal, combinemos $\phi^+(x_3)$, donde los operadores de aniquilación están en la derecha de todas formas, así combinando $\phi^-(x_3)$ dentro del producto del orden normal es más difícil para $\phi^-(x_3)$ que debe moverse pasando $\phi^-(x_1)$ y $\phi^-(x_2)$, en todo tiempo se mueve pasando uno de estos términos, tomando la expresión del número c , la cual es igual a el producto del orden del tiempo:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi^+(x_2)\phi^-(x_3)|0\rangle &= \langle 0|\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle \\
&\langle 0|T[\phi(x_2)\phi(x_3)]|0\rangle, \tag{3.105}
\end{aligned}$$

de esta forma tomemos todos los términos de la identidad de Wick, asimismo para cuatro campos el cálculo es similar y es dado por:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T[\phi(x_1)\dots\phi(x_4)]|0\rangle = : \phi(x_1)\dots\phi(x_4) : \\
&+ \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle : \phi(x_3)\phi(x_4) :
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T [\phi(x_1)\phi(x_2)] |0\rangle \langle 0|T [\phi(x_3)\phi(x_4)] |0\rangle, \quad (3.106)$$

Por ahora el producto del orden del tiempo de n campos pueden ser escritas en términos de suma de productos de orden normal, para el caso general de n puntos (*si n es par*) el teorema de Wick es:

$$\begin{aligned} T[(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n))] &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) : \\ &+ \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T [\phi(x_1)\phi(x_2)] |0\rangle : \phi(x_3)\dots\phi(x_n) : \\ &+ \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T [\phi(x_1)\phi(x_2)] |0\rangle \langle 0|T [\phi(x_3)\phi(x_4)] |0\rangle : \phi(x_5)\dots\phi(x_n) : \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &+ \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T (\phi(x_1)\phi(x_2)) |0\rangle \dots \langle 0|T (\phi(x_{n-1})\phi(x_n)) |0\rangle, \quad (3.107) \end{aligned}$$

donde el penúltimo término es:

$$\sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T (\phi(x_1)\phi(x_2)) |0\rangle \dots \langle 0|T [\phi(x_{n-2})\phi(x_{n-1})] |0\rangle \phi(x_n). \quad (3.108)$$

Estas fórmulas se prueban por inducción en n , se supone que es cierto para $n - 1$ y se prueba para n , entonces podemos multiplicar la formula entera de la derecha por $\phi(x_n)$, en la cuál el tiempo aumenta mas rápido así combinando $\phi(x_n)$ con el resto de los productos se determina la formula para n . El teorema de Wick para valores esperados en el vacío nos da:

$$\begin{aligned} \langle 0|T [\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)] |0\rangle &= \sum_{\text{permutaciones}} \langle 0|T [\phi(x_1)\phi(x_2)] |0\rangle \\ &\dots \langle 0|T [\phi(x_{n-1})\phi(x_n)] |0\rangle. \quad (3.109) \end{aligned}$$

La generalización para campos fermiónicos es semejante, la única complicación es que se toma un signo menos extra debido a las propiedades de

anti-conmutación de los campos fermiónicos así que por mas complicados que sean los productos se inserta (-1) para el caso de campos fermiónicos por lo que el teorema de Wick es:

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \langle 0|T[\psi(x)\psi(y)]|0\rangle, \quad (3.110)$$

si insertamos las ecuaciones (3.98) y (3.110) en (3.74) nos da una reducción completa de la matriz S escrita como función de de campos de interacción en términos de las funciones de Green de campos libres, en el último paso debemos eliminar $(\partial_\mu^2 + m^2)$ factores que aparecen en la ecuación (3.74) debido a que actúan en dos puntos de las funciones de Green convertidas en funciones delta:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu^2 + m^2)_x \langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle &= -i\delta^4(x-y) \\ (i\partial\!\!\!/ - m)_x \langle 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle &= i\delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (3.111)$$

de esta manera tenemos que completar la reducción de los elementos de la matriz S dentro de productos de sumas de dos puntos en las funciones de Green. En la práctica la descomposición precede rápidamente, para ver esto debemos analizar bien la función a primer orden dentro una interacción dada por $-\lambda\phi^4/4!$, donde si expándemos:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_4) &= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y \langle 0|T[\phi(x_1)\dots\phi(x_4)\phi(y)^4]|0\rangle + \dots \\ &+ (-i\lambda) \int d^4 y \prod_{i=1}^4 \langle 0|T[\phi(x_i)\phi(y)]|0\rangle + \dots \\ &+ (-i\lambda) \int d^4 y \prod_{i=1}^4 [i\Delta_F(x_i - y)] + \dots, \end{aligned} \quad (3.112)$$

usando el teorema de Wick, el termino $4!$ desaparece debido a que aquí hay $4!$ líneas externas en x_i que pueden ser conectados para los cuatro campos contenidos en ϕ^4 . Otro ejemplo de esta descomposición es dada para la función a segundo orden:

$$G(x_1, \dots, x_4) = \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right) \frac{1}{2!} \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_4)\}$$

$$\times [\phi(y_1)^4][\phi(y_2)^4]\rangle|0\rangle, \quad (3.113)$$

donde la expansión por el teorema de Wick es:

$$G(x_1, \dots, x_4) = \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \{ [i\Delta_F(y_1 - y_2)]^2 \Delta_A \\ + [i\Delta_F(y_1 - y_1)][i\Delta_F(y_1 - y_2)] \Delta_B \}, \quad (3.114)$$

con:

$$\Delta_A = \Delta_F(x_1 - y_1) \Delta_F(x_2 - y_1) \Delta_F(x_3 - y_2) \Delta_F(x_4 - y_2) \\ + \Delta_F(x_1 - y_1) \Delta_F(x_3 - y_1) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_4 - y_2) \\ + \Delta_F(x_1 - y_1) \Delta_F(x_4 - y_1) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_3 - y_2) \quad (3.115)$$

$$\Delta_B = \Delta_F(x_1 - y_1) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_3 - y_2) \Delta_F(x_4 - y_2) \\ + \Delta_F(x_1 - y_2) \Delta_F(x_2 - y_1) \Delta_F(x_3 - y_2) \Delta_F(x_4 - y_2) \\ + \Delta_F(x_1 - y_2) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_3 - y_1) \Delta_F(x_4 - y_2) \\ + \Delta_F(x_1 - y_2) \Delta_F(x_2 - y_2) \Delta_F(x_3 - y_1) \Delta_F(x_4 - y_2), \quad (3.116)$$

estos cálculos se prueban gráficamente. Finalmente pasamos del espacio x al espacio p usando la transformada de Fourier:

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k), \quad (3.117)$$

y también:

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.118)$$

Cuando cambiamos la integración en x , obtenemos una función delta en todos los vértices, los cuales representan la conservación del momento y cuando todo el espacio x es cambiada la integración y esta por la izquierda una función delta representa toda la conservación del momento. Cuando esta por la izquierda con un momento de integración para todo "loop" interno, entonces todas las reglas de Feynman pueden ser representadas en el espacio momento.

3.7. Reglas de Feynman.

En esta parte se interpretaran graficas para las reglas de Feynman a las cuales podemos hacer una inspección acerca de las funciones de Green de complejidad arbitraria con una Lagrangiana de interacción dada por $-\lambda\phi^2/4!$ donde M_{fi} aparece en la ecuación:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i)}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \prod_{i=3}^N \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_{p_i}}, \quad (3.119)$$

que puede ser calculada como:

1. Todas las posibles gráficas conectadas, topológicamente distintas, incluyendo "loops" con n términos pares, ignorando el vacío a vacío de gráficas.
2. Para toda línea interna se le asocia el propagador dado por:

$$\text{---} \underset{\mathbf{p}}{\curvearrowright} \text{---} \quad i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.120)$$

3. Para cada vértice se agrega el factor $-i\lambda$.
4. Para todo momento interno correspondiente a un "loop", asociado con un factor de integración:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (3.121)$$

5. Dividir toda la gráfica con una simetría total por el factor S correspondiente a el número de direcciones o caminos permutando las líneas internas

y los vértices, permitiendo tener fijas las líneas externas.

6. El momento es conservado en todos los vértices donde el factor de simetría S se puede calcular para los cuatro puntos de la función dados por $1/4!$ que viene de la interacción Lagrangiana cancelando el $4!$, la dirección en la cuál las cuatro líneas externas pueden ser pares fuera con los cuatro campos escalares apareciendo en ϕ^4 , de tal manera que $S = 1$.

Si ahora consideramos los dos puntos de los diagramas conectados a segundo orden, el cuál es un doble "loop" tiene la topología del símbolo ϕ , aquí son cuatro direcciones en las cuales todos los pares externos pueden ser conectados por otro vértice y hay 3×2 direcciones o formas en los cuales los vértices internos pueden ser pares fuera, por lo que dado un factor de $1/S = (1/4!)(1/4!) \times (4 \times 4) \times (3 \times 2) = 1/3!$, de forma que $S = 6$. Para QED, las reglas de Feynman son mas complicadas y la interacción Hamiltoniana es:

$$\mathcal{H} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (3.122)$$

la expansión de potencias de la lagrangiana de interacción debe ser bajo varios factores de \mathcal{H}_1 . Sí usamos el teorema de Wick para pares de fermiones y el vector mesón para formar las líneas de los vertices del propagador, hay pocas diferencias que notar, primera: cuando tenemos un fermión a un "loop" hacemos la descomposición de Wick, entonces debe tener un factor extra -1 en todas las integraciones de los "loops" de fermiones. Segundo: varios propagadores del vector meson en diferentes medidas pueden ser usados, pero todos los términos proporcionales a p_μ o p_ν desaparecen debido a la medida de invarianza, de esta forma las reglas de Feynman para QED son:

1. Para toda línea interna del fermión, asociada a un propagador:

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{---} \underset{\mathbf{p}}{\text{---}} \text{---} \quad (3.123)$$

2. Para toda línea interna del fotón:

$$iD_F(p)_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad \text{---} \underset{\mu}{\text{---}} \underset{\mathbf{p}}{\text{---}} \underset{\nu}{\text{---}} \quad (3.124)$$

3. En todo vértice, poner un factor de:

$$-ie\gamma_\mu \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad (3.125)$$

5. Para cada "loop" interno, integrar sobre:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (3.126)$$

6. Un factor relativo -1 aparece entre gráficas que difieren de cada uno de los otros por un intercambio interno de dos líneas de fermiones idénticos externos.

7. Las líneas internas del fermión aparecen con flechas en ambos lados, sin embargo a la derecha y izquierda los diagramas son topológicamente equivalentes y se cuentan solamente una vez:

8. las líneas externas del electrón y del positrón que incorporan un gráfico aparecen con los factores $u(p, s)$ y $\bar{v}(p, s)$ respectivamente, las líneas externas del electrón y del positrón que salen de un gráfico aparecen con los factores $\bar{u}(p, s)$ y $v(p, s)$, donde la dirección de las líneas del positrón se toma para ser contrario a las líneas del electrón, de modo que los positrones entrantes tengan ímpetus el salir del diagrama.

Por ejemplo para electrodinámica escalar, con el termino adicional en el lagrangiano:

$$L = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (3.127)$$

se tiene el siguiente operador hamiltoniano de interacción:

$$\mathcal{H} = -ie\phi^\dagger (\overleftarrow{\partial}_\mu - \overrightarrow{\partial}_\mu) \phi A^\mu - e^2 A_\mu^2 \phi^\dagger \phi, \quad (3.128)$$

y las reglas de Feynman son:

1. Para cada vértice escalar-escalar insertar el factor:

$$-ie(p + p')_\mu, \quad (3.129)$$

donde p y p' son el momento para la línea escalar.

3. Insertar un factor de:

$$2ie^2 g_{\mu\nu} \quad (3.130)$$

para cada gráfica:

2. Insertar un factor adicional para cada "loop" con únicamente dos líneas para el fotón.

En resumen tenemos que ver que hay dos métodos para los cuales estudiamos QED, el primer método es el de Feynman con el propagador este aunque es un poco mas simple no es muy riguroso, el segundo es el mas convencional utilizando el operador de Sc.

Capítulo 4

Descripción de la polarización del vacío.

Resumen

Antes de comenzar el cálculo nos podemos preguntar con que clase de respuesta contamos y cuál sería su interpretación, nuestra discusión de la renormalización de la fuerza del campo en este capítulo dejara claro el papel de los diagramas de correcciones radiactivas y que la identidad $Z_1 = Z_2$ asegura que la suma de las correcciones virtuales del fotón desaparece mientras que la transferencia q del ímpetu va a cero, a este proceso se le llama diagrama del orden de la polarización del vacío. Podemos decir también que el fotón se puede ver como modificación a la estructura de un par virtual del electrón dispersado. En esta parte se hará el calculo para la polarización del vacío del caso fermiónico y escalar.

4.1. Descripción de la polarización del vacío para fermiones.

La parte interesante en esta parte es el lazo del electrón donde las reglas de Feynman para el caso de fermiones a un "loop" nos dan la ecuación:

$$i \Pi_2^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right], \quad (4.1)$$

más generalmente se define $i \Pi^{\mu\nu}$ para que sea la suma de todas las inserciones de una partícula irreducible en el propagador del fotón, así que $i \Pi_2^{\mu\nu}$ es la

contribución a segundo orden en (e) , por lo que en $i\Pi^{\mu\nu}$ los únicos tensores que pueden aparecer son $g^{\mu\nu}$ y $q^\mu q^\nu$, la identidad "Ward" sin embargo dice que $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$, esto implica que $\Pi^{\mu\nu}$ es proporcional al proyector $(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2)$ además esperamos que $\Pi^{\mu\nu}(q)$ no tenga un polo en $q^2 = 0$ ya que la única forma de que haya un polo es que debe ser una partícula de masa reducida de estado intermedio, lo cual no puede ocurrir en el diagrama $1PI$, sin embargo es conveniente extraer la estructura del tensor $\Pi^{\mu\nu}$ dado por:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad (4.2)$$

donde $\Pi^{\mu\nu}(q^2)$ es regular en $q^2 = 0$, ahora se hará el calculo de $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ usando la ecuación:

$$\begin{aligned} i \Pi_2^{\mu\nu}(q) &= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

si introducimos los parámetros de Feynman para el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2} \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}, \end{aligned}$$

donde $x + y = 1$ y $\ell = k + xq$, si ponemos el numerador en términos de ℓ queda como:

$$\begin{aligned} \text{numerador} &= 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) \\ &\quad + (\text{terminos lineales en } \ell), \end{aligned} \quad (4.4)$$

haciendo una rotación de Wick a la ecuación (4.3) y substituyendo $\ell^0 = i\ell_E^0$:

$$= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4}$$

$$\times \frac{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^2 + g^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \quad (4.5)$$

tenemos $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$, esta integral es divergente por lo que le da al fotón una masa infinita que es una contradicción con el experimento, pero se puede rescatar utilizando algunos reguladores como el de Pauli-Villars. Este regulador preserva la relación $Z_1 = Z_2$. Si consideramos el espacio tiempo para tener una dimensión en el tiempo $y(d-1)$ dimensiones del espacio, entonces podemos usar la rotación de Wick para las integrales de Feynman, para que nos den integrales sobre un espacio Euclidiano d -dimensional. Haciendo una regularización dimensional a la ecuación (4.5):

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \quad (4.6)$$

donde la primera parte de la ecuación es:

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

y el segundo factor:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell^2) \frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}, \end{aligned}$$

si hacemos la sustitución $x = \Delta/(\ell^2 + \Delta)$ y utilizamos la definición de la función beta:

$$dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (4.7)$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}, \quad (4.8)$$

$\Gamma(z)$ tiene polos aislados en $z = 0, -1, -2, \dots$, por lo que la integral también tiene polos en $d = 4, 6, 8, \dots$ para determinar el comportamiento cerca de $d = 4$ definimos $\epsilon = 4 - d$ y usando la aproximación:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \vartheta(\epsilon), \quad (4.9)$$

aplicamos la formula de regularización dimensional para la integral de momento en (4.5), los términos con ℓ^2 quedan como:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

por lo que tenemos un polo en $d=2$, puesto que la divergencia cuadrática en 4 dimensiones se convierte en una divergencia logarítmica en 2 dimensiones, evaluemos los términos en (4.5) y usando $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &= -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\times [g^{\mu\nu}(-m^2 + x(1-x)q^2) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu] \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i \prod_2(q^2), \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde:

$$\prod_2(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Delta^{2-d/2}}$$

que es la solución para el caso de fermiones.

4.2. Descripción de la polarización del vacío caso escalar.

Para este caso algo que es muy importante y que reduce bastante el calculo es que las trazas de las matrices de Dirac no aparecen ya que son iguales a cero por lo que el calculo del caso escalar a un "loop" utilizando las reglas de Feynman son:

$$A^{\mu\nu} = \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{-ie(k+k')^\mu}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{-ie(k+k')^\nu}{(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon},$$

donde: $A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}(q, m, e)$

$$\begin{aligned}
&= (-ie)^2 \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{(k+k')^\mu}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{(k+k')^\nu}{(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= (-ie)^2 \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{(2k+q)^\mu}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{(2k+q)^\nu}{(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

para $k' = k + q$. Ahora utilizando los parámetros de Feynman para la parte del denominador:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2},$$

con $x + y = 1$,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2]^2}, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

si hacemos $\Delta = x(1-x)q^2 - m^2$ y sustituimos en la ecuación (4.12):

$$= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[\ell^2 + \Delta]^2},$$

sustituyendo en la ecuación (4.11) y desarrollando el numerador:

$$\begin{aligned}
&= (-ie)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu}{[\ell^2 - \Delta]^2} \\
&= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu 2k^\nu + 2(k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu) + q^\mu q^\nu}{[\ell^2 - \Delta]^2}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

cambiando el numerador en términos de ℓ

$$\text{numerador} = 4(\ell^\mu - xq^\mu)(\ell^\mu - xq^\nu) + 2((\ell^\mu - xq^\mu)q^\nu + (\ell^\nu - xq^\nu)q^\mu) + q^\mu q^\nu,$$

si hacemos una rotación de Wick $\ell^0 = i\ell_E^0$ el numerador nos queda como:

$$\text{numerador} = 4[\ell_E^\mu \ell_E^\nu - x\ell_E^\mu q^\nu - x\ell_E^\nu q^\mu + x^2 q^\mu q^\nu]$$

$$\begin{aligned}
& +2[\ell_E^\mu q^\nu - xq^\mu q^\nu + \ell_E^\nu q^\mu - xq^\nu q^\mu] + q^\mu q^\nu \\
& = 4\ell_E^\mu \ell_E^\nu - 4x\ell_E^\mu q^\nu - 4x\ell_E^\nu q^\mu + 4x^2 q^\mu q^\nu \\
& +2\ell_E^\mu q^\nu - 2xq^\mu q^\nu + 2\ell_E^\nu q^\mu - 2xq^\nu q^\mu + q^\mu q^\nu \\
& = 4\ell_E^\mu \ell_E^\nu + (\ell_E^\mu q^\nu + \ell_E^\nu q^\mu)(2 - 4x) + q^\mu q^\nu(4x^2 - 2x + 1) - 2xq^\nu q^\mu,
\end{aligned}$$

sustituyendo en (4.13)

$$\begin{aligned}
A^{\mu\nu}(q, m, e) &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \\
&\times \frac{4\ell_E^\mu \ell_E^\nu + (2 - 4x)(\ell_E^\mu \ell_E^\nu + q^\nu q^\mu) + (1 - 2x + 4x^2)q^\mu q^\nu - 2xq^\nu q^\mu}{[\ell_E^2 - \Delta]^2},
\end{aligned}$$

donde el termino $(2 - 4x)(\ell_E^\mu \ell_E^\nu + q^\nu q^\mu) = 0$. Así que la ecuación nos queda como:

$$A^{\mu\nu} = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \times \frac{\frac{1}{4}\ell^2 g^{\mu\nu} + (1 - 2x + 4x^2)q^\mu q^\nu - 2xq^\nu q^\mu}{[\ell_E^2 - \Delta]^2}, \quad (4.14)$$

si aplicamos regularización dimensional:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(\frac{1}{d}\ell_E^2 g^{\mu\nu})}{[\ell_E^2 - \Delta]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{d} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2} - 1} g^{\mu\nu} \\
& = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} (\Delta \cdot g^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

finalmente:

$$iA^{\mu\nu} = \frac{-ie^2}{4} \int_0^1 dx \int \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}}$$

$$\times [g^{\mu\nu}(m^2 - x(1-x)q^2) + (1-2x+4x^2)q^\mu q^\nu - 2xq^\nu q^\mu], \quad (4.15)$$

que es la solución final para el caso escalar.

Conclusiones

En esta tesis se realizo el caso de dos fotones a un "loop" para fermiones y escalares, el caso de un fotón a un "loop" no se realizo ya que es el caso trivial, nuestro trabajo principal consistio en revisar el caso fermiónico y hacer el calculo del caso escalar en el cual algo que es muy importante es que las matrices de Dirac no aparecen, esto debido a que son iguales a uno, esto permite que el calculo se simplifique un poco, pero el desarrollo es similar al caso fermónico por lo que de manera semejante la carga aislada es infinitamente más grande que la carga observada, esta diferencia no es observable lo que se puede observar es la dependencia de q^2 de la carga eléctrica eficaz, esta cantidad depende de la diferencia:

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \equiv A^{\mu\nu}(q^2) - A^{\mu\nu}(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right), \quad (4.16)$$

la cual es independiente de ϵ ya que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Sí consideremos la estructura analítica de $\widehat{\Pi}_2(q^2)$. Para $q^2 < 0$, que es el caso cuando el propagador del fotón para $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ es real y analítico, entonces para un proceso q^2 debe ser positivo, ya que la función del logaritmo tiene un corte ramal cuando su argumento es negativo, es decir, cuando $m^2 - x(1-x)q^2 < 0$ el producto $x(1-x)$ es mayor que $1/4$, así que $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ tiene un corte ramal en $q^2 = 4am^2$ en el umbral para la creación de un par electrón-positrón. Para la parte imaginaria de $\widehat{\Pi}_2$ tenemos $q^2 > 4m^2$ para q^2 donde los valores de x que contribuyen son entre los puntos $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$, con $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$ donde $Im[\log(-X \pm i\epsilon)] = \pm\pi$, tenemos:

$$Im[\widehat{\Pi}_2(q^2 \pm i\epsilon)] = \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \quad (4.17)$$

Para el caso fermiónico la sección transversal para la producción de un par fermión-antifermión sería justo lo que esperaríamos de la relación unitaria con la dispersión de bhabha que nos da la sección eficaz total para $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ donde el parámetro β es la velocidad de los fermiones de todo el centro de masa. Para los dos casos si se modifica la interacción electromagnética, en

el límite no relativista tiene sentido calcular el potencial para la interacción entre cargas no semejantes, donde la corrección del término para el potencial indica que la fuerza electromagnética es más fuerte a pequeñas distancias. Este efecto puede ser medido en el átomo de hidrógeno donde los niveles de energía cambian. Por último debido a la complejidad del cálculo el caso de n fotones no se realiza ya que es bastante complejo y requiere bastante tiempo.

Capítulo 5

Apéndice.

5.1. Notación relativista y espacio de Minkowski

En un principio se consideraba el éter como un sistema universal de referencia con respecto al cual se suponía que se propagaban las ondas luminosas, Eisten encontró que no existía tal eter ya que si todo el espacio estuviera lleno de éter, podríamos referir a éste todos los movimientos. La ausencia del éter implica, por tanto que no hay un sistema universal de referencia puesto que la luz o en general, las ondas electromagnéticas es el único medio por el cual se puede transmitir información a través del espacio vacío. Consideremos dos eventos en el espacio-tiempo (x,y,z) y $(x+dx, y+dy, z+dz)$ entonces podemos generalizar la noción de la distancia entre dos puntos en el espacio para el "intervalo" entre dos puntos en el espacio-tiempo; designando esto como ds . Sea dx^μ las componentes de un vector que tiene asociada una norma ds^2 ; entonces esto se puede escribir como:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = (dx^1)^2 + d(dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad (5.1)$$

si establecemos que ds es el mismo para todos los observadores inerciales, esto debe ser invariante bajo las transformaciones y rotaciones de Lorentz por lo que: $ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu$ donde:

$$\delta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a \partial x^b}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (5.2)$$

finalmente $ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu$ con:

$$\|g_{\mu\nu}\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \quad (5.3)$$

con esta definición los eventos son separados para conservación del tiempo $ds^2 > 0$ para conservación del espacio $ds^2 < 0$ y para la conservación de longitud nula $ds^2 = 0$ en tres dimensiones el vector se considera como:

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.4)$$

que es invariante bajo rotaciones. Definiendo:

$$x^\mu = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3) = (ct, x, y, z) \quad (5.5)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \quad (5.6)$$

entonces podemos usar la regla de bajar y subir índices:

$$ds^2 = \sum_{\mu}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.7)$$

y la relación entre los dos vectores introducen un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ donde el vector covariante se denota como:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3 \quad (5.8)$$

por lo tanto, se puede escribir lo anterior como una matriz diagonal denotada como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

en el espacio de Minkowski, por lo que $g_{\mu\nu}$ contiene toda la información acerca de la geometría del espacio. En relatividad especial el tensor métrico juega un papel pasivo. Pero en relatividad general juega un papel activo donde la geometría del espacio no es fija, por ejemplo las ecuaciones de Einstein son ecuaciones diferenciales para $g_{\mu\nu}$ esto es comúnmente una partícula, para

trabajar en unidades donde $c = 1$, $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. Si definimos ahora los operadores diferenciales como:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \quad (5.10)$$

y

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (5.11)$$

entonces el segundo operador diferencial de segundo orden es:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (5.12)$$

que es llamado el operador Alembertiano.

5.2. Principio de la mínima acción.

En esta sección hablaremos sobre la importancia que tiene las ecuaciones de movimiento, también conocidas como el principio de la mínima acción; antes de empezar esta discusión de teoría de campos utilizaremos $c = 1$ y $\hbar = 1$. En mecánica clásica hay dos formulaciones equivalentes, una basada en las leyes de Newton y otra en el principio de la mínima acción, estos dos formalismos parecen tener muy poco en común ya que el primero depende de cambios infinitesimales de una partícula y el segundo depende de todas las posibles trayectorias entre dos puntos; uno de los grandes logros de la mecánica clásica fue la demostración de las ecuaciones de Newton que son equivalentes a minimizar la acción sobre todas las trayectorias entre un punto inicial con uno final y la relación del principio de incertidumbre de Heisenberg para introducir probabilidades considerando todas las posibles trayectorias que toma la partícula. En mecánica cuántica sabemos que es una probabilidad finita, esta desviación de la trayectoria es muy pequeña en la escala determinada por la constante de plank. En tres dimensiones la partícula tiene tres grados de libertad q^i y el movimiento de la partícula esta determinado por el lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i)$ el cual es una función de la posición y la velocidad de la partícula:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}^i)^2 - V(q) \quad (5.13)$$

donde $V(q)$ son algunos potenciales en la cuál se mueve la partícula. Clásicamente el movimiento de la partícula es determinado minimizando la acción la cuál esta dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i) dt \quad (5.14)$$

derivando para minimizar la acción:

$$\delta S = 0 \quad (5.15)$$

si hacemos una pequeña variación en la trayectoria de la partícula $\delta q^i(t)$ y mantenemos los puntos extremos fijos:

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0 \quad (5.16)$$

entonces para calcular la δS debemos variar la lagrangiana con respecto a los cambios en la posición y la velocidad:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q^i} \delta q^i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) = 0 \quad (5.17)$$

si integramos la última expresión por partes:

$$\delta S = \int dt \left\{ \delta q^i \left[\frac{\delta L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \right] + \frac{d}{dt} \left(\delta q^i \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \right) \right\} = 0 \quad (5.18)$$

donde la variación desaparece en los extremos de la integración, entonces la acción es minimizada como:

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} = 0 \quad (5.19)$$

la cuál es la ecuación de Euler Lagrange, sustituyendo la lagrangiana en la ecuación de movimiento:

$$m \frac{d^2 q^i}{dt^2} = - \frac{\partial V(q)}{\partial q^i} \quad (5.20)$$

la cuál forma la base de la mecánica Newtoniana.

5.3. Teorema de Noether.

La ventaja de este formalismo es que podemos usar las simetrías de la acción para derivar el principio de conservación, por ejemplo: en mecánica clásica si el Hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces la energía se conserva. La precisión de la formulación matemática de esta correspondencia esta dada por el teorema de Noether. En general una acción puede ser invariante bajo una transformación del campo, o bajo la simetría del espacio tiempo, pero primero discutiremos la simetría donde el campo ϕ^α varia de acuerdo a algunos parámetros $\delta\epsilon^\alpha$ y la acción varia como:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta\ell}{\delta\phi^\alpha} \delta\phi^\alpha + \frac{\delta\ell}{\delta\partial_\mu\phi^\alpha} \delta\partial_\mu\phi^\alpha \right) = \int d^4x \left(\partial_\mu \frac{\delta\ell}{\delta\partial_\mu\phi^\alpha} \delta\phi^\alpha + \frac{\delta\ell}{\delta\partial_\mu\phi^\alpha} \partial_\mu \delta\phi^\alpha \right) \quad (5.21)$$

$$= \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta\ell}{\delta\partial_\mu\phi^\alpha} \delta\phi^\alpha \right) \quad (5.22)$$

donde usamos la ecuación de movimiento y convertimos la variación de la acción dentro de la derivada total. Esto define la corriente:

$$J_\alpha^\mu = \frac{\delta\ell}{\delta\partial_\mu\phi^\beta} \frac{\delta\phi^\beta}{\delta\epsilon^\alpha}, \quad (5.23)$$

si la acción es invariante bajo la transformación, entonces la corriente conservada es:

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0 \quad (5.24)$$

por lo tanto la carga:

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J_\alpha^0 \quad (5.25)$$

también se conserva.

Bibliografía

- [1] Lewis H. Ryder, Quantum Field Theory, Ed. Cambridge University Press.
- [2] I.J.R. Aitchison, Relativistic Quantum Mechanics.
- [3] James D. Bjorken and Sidney D. Drell, Relativistic Quantum fields.
- [4] Michio Kaku Quantum Field Theory A Modern introduction.
- [5] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory.