UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS DE FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luís Rivera Gutiérrez"

"REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DEL GRUPO SIMÉTRICO"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:
GLORIA FERNANDA ABSALÓN MARTÍNEZ

ASESOR:
DR. LUIS VALERO ELIZONDO

MORELIA, MICHOACAN, DICIEMBRE 2005

Agradecimientos

Esta tesis se la dedico a:
Mis padres por su ayuda
Mario Arturo Absalón y Montes
Aurora Gloria Martínez.

A mis tíos:
Roberto y Celia Pollack por su apoyo

A mis abuelitas Gloria y Oliva

A mi hermano Mario

A todos mis familiares por su apoyo.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, U.M.S.N.H

Especial reconocimiento a todos mis maestros.

A mi Asesor de tesis: Dr Luis Valero Elizondo

A la L.F.M Patricia Manríquez Zavala por su especial apoyo a:

Muy especialmente a la Lic. Alejandra Lozano por su gran ayuda paciencia y comprensión . . . !' Gracias !

Índice general

1. Prerrequisitos **7**
1.1. El grupo simétrico 7
1.2. Prerrequisitos de la teoría de representaciones 8

2. Tabloides y Módulo de Specht **25**
2.1. Diagramas, tableaux y tabloides 25
2.2. Módulos de Specht 30
2.3. La base estandard del módulo de Specht 36
2.4. Particiones p-regulares 37

3. Representaciones irreducibles de S_n. **39**
3.1. Representaciones irreducibles de S_n. 39
3.2. Dimensión de D^{μ} 39
3.3. Dimension de $D^{(n-1,1)}$ 42
3.4. Datos obtenidos de Symmetrica 44

4. Resultados originales **47**

5. GAP **55**
5.1. Programa 55
5.2. rutinas 58

6. Conclusión **61**

Introducción

Por medio de este trabajo de tesis tratamos las particiones p-regulares de n, donde n es un enntero y p es un número primo, para finalizar analizando las dimensiones de las representaciones irredusibles de S_n sobre un campo de característica p.

En el capítulo uno, damos loos prerrequisitos: En primerlugaar definimos el grupo simétrico S_n, o el grupo de permutaciones de n; en segundo lugar definimos los prerrequisitos de la teoría de representaciones.

En el capítulo dos, se dan los conseptoos de un tableau, asi como los tabloides, y de ahi definimos los politabloides y vemos el módulo de Specht S^{μ}, que es el móulo generado por todos los politabloides de la forma μ.

En el capítulo tres, nosotros damos la definición de las representaciones irreducibles y definimos el diagrama de gancho, por medio de este diagrama se puede encontrar la dimensión de S^{μ}. Se da la dimensión de $D^{(n-1,1)}$ explicitamente y se da una demostración. Y por último se dan las dimensiones de $D^{(n-2,2)}$ para un campo de característica p, estos datos fueron buscados en Symmetrica.

En el capítulo cuatro, por medio de los datoos encontradoos en Symmetrica pudimos dar formulas explicitas para $D^{(n-2,2)}$, el cálculo de la dimensión de $D^{(n-2,2)}$ es un proceso bastante costoso, desde el punto de vista de tiempo, debido a que para esto se debe encontrar el rango de la matriz de Gram. . También se dan demostraciones de algunos de estos casos, y los otros se dejan como conjeturas.

En el capítulo cinco se hace un programa en GAP para calcular explici-

tamente $S^\mu \cap S^{\mu\perp}$. Esto se hace con el fin de poder encontrar las dimensiones para $D^{(n-2,2)}$ cuando $n \equiv 2 \pmod 4$.
Pero nada más se pudo dar explicitamente el conjunto cuando $n \equiv 6$. Y al analizar el conjunto pudimos analizar las dimensiones.

En el capítulo seis, nosotros damos las conclusiones quue pudimos encontrar segun los datos encontrados en Symmetrica.

Capítulo 1

Prerrequisitos

1.1. El grupo simétrico

Definición 1. Una **permutación** es una función biyectiva del conjunto $\{1,\dots,n\}$ en sí mismo. El conjunto de todas las permutaciones de n números, junto con la composición usual de funciones, es el **grupo simétrico de grado** n, denotado S_n. Si X es un subconjunto de $\{1,\dots,n\}$, denotamos S_X al subgrupo de S_n que fija a todos los elementos que no están en X. Una **transposición** es una permutación que intercambia dos números y fija a los demás. Usaremos notación cíclica para denotar permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (145)(3687)$$

Las funciones se escriben a la derecha (i.e. $x\varphi$ en lugar de $\varphi(x)$). Por lo tanto, $(12)(23) = (132)$ (otros autores lo interpretan como (123)).

Los siguientes resultados se pueden encontrar en el Rotman.

Teorema 2. *Toda permutación en S_n es o bien un ciclo, o bien producto de ciclos disjuntos. Esta factorización es única salvo el orden de los ciclos.*

Teorema y definición 3. *Toda permutación en S_n es producto de transposiciones. Dada una permutación fija, el número de factores en cualquier factorización en transposiciones es siempre par o siempre impar. Si el número de transposiciones es par, la permutación se llama **par**, y se dice que tiene **signo 1**; de lo contrario, la permutación se llama **impar**, y se dice que tiene*

signo -1. *La función signo es un homomorfismo de grupos de S_n en el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$. Su núcleo se llama el* ***grupo alternante de grado*** *n, y se denota A_n. Éste es un subgrupo normal de S_n de índice 2, y consiste de todas las permutaciones pares de S_n.*

Ejemplo 4. En este ejemplo usaremos el grupo simétrico S_6. La permutación $(1,6)(2,5,3)$ se escribe como producto de transposiciones de la siguiente manera:

$$(1,6)(2,5,3) = (1,6)(2,5)(2,3)$$

Como esta permutación es producto de un número impar de transposiciones, entonces esta permutación es impar.
La permutación $(1,5,6) = (1,5)(1,6)$ es una permutación par.

Definición 5. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ es una **partición** de n si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son enteros no negativos con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$. Se dice que la permutación π tiene **tipo cíclico** λ si los ciclos que aparecen en π tiene longitudes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ Por ejemplo, $(2568)(13)(49)(7)$ tiene tipo cíclico $(4,2,2,1,0,0,\ldots) = (4,2,2,1) = (4,2^2,1)$.

1.2. Prerrequisitos de la teoría de representaciones

Presentaremos algunos de los resultados fundamentales de la teoría de representaciones. El lector puede encontrar las demostraciones en el Curtis y Reiner.

Definición 6. Sea G un grupo. Un G**-Conjunto** es un conjunto X en el que el grupo G actúa, es decir, existe una función $\cdot : G \times X \longrightarrow X$, para la cual usamos la notacion gx en lugar de $\cdot(g,x)$, y que cumple lo siguiente:

(i) Para toda x en X se tiene que $ex = x$, donde e denota la identidad del grupo G

(ii) Para todos g, h en G y para toda x en X, se tiene que $(gh)x = g(hx)$.

Ejemplo 7. Todo grupo G en sí mismo es un G-conjunto. Donde la acción de $g_2 \in G$ sobre g_1 está dado por la multiplicación derecha $\cdot(g_1, g_2) = g_1 g_2$.

Definición 8. Sea G un grupo finito y k un campo. Un conjunto M es un kG-**módulo** (también llamado módulo sobre kG) si es un k-espacio vectorial que a la vez es un G-conjunto, donde las dos estructuras satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:

(i) Para toda g en G y para cualquiera v,u en M se tiene que $g(v + u) = (gv) + (gu)$.

(ii) Para toda g en G, para toda v en M y para toda a en k se tiene que $g(av) = a(gv)$.

Ejemplo 9. Sea G el grupo simétrico S_3 y el campo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Para todo entero $n > 1$. El conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un G-módulo con la suma usual

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Y la acción definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (1, 2) \cdot (a, b, c) &= (b, a, c) \\ (1, 2, 3) \cdot (a, b, c) &= (c, a, b) \\ (1, 3, 2) \cdot (a, b, c) &= (b, c, a) \end{aligned}$$

Es decir permutando las coordenadas del punto (a, b, c), como el elemento de S_3 indica.

Definición 10. Sean G un grupo, k un campo y M un kG-módulo y N un subconjunto de M. Decimos que N es un kG-**submódulo** de M si N es a la vez un k-subespacio vectorial y un G-subconjunto de M.

Ejemplo 11. Sean k un campo, G un grupo y M un kG-módulo. Entonces el conjunto $\{0\}$ (que usualmemte se denota 0) es una órbita de M como G-conjunto. En particular, 0 es un kG-submódulo de M.

Vamos a comprobar que 0 cumple las condiciones para un kG-submódulo de M :

i) 0 es un k-subespacio vectorial de M; lo cual se tiene por Algebra Lineal

ii) Probar que 0 es un G-subconjunto de M. Pd que para toda $g \in G$, $g0 = 0$. Como M es un módulo en especial es un G-conjunto se cumple que para todo $g \in G$ y $u, v \in M \quad g(u + v) = gu + gv$; esto don lleva a que $g \cdot 0 = g \cdot (0 + 0) = g \cdot 0 + g \cdot 0$. lo cual implica que $g \cdot 0 = 0 \in 0$. Por lo tanto 0 es un G-subconjunto de M.

Entonces el conjunto 0 es un kG-submódulo de M.

Ejemplo 12. Sean k un campo, G un grupo y M un kG-módulo. Sea M^G el conjunto de los puntos fijos de M bajo la acción de G; M^G es un kG-submódulo de M.

El conjunto de los puntos fijos de M está definido de la siguiente manera
$M^G = \{x \in M \mid gx = x \quad \forall g \in G\}$
comprobaremos que M^G es un kG-submódulo de M se necesita que se cumplan:

i) M^G es un k-subespacio vectorial de M.

   1. M^G es cerrado bajo suma vectorial. Sean $u, v \in M^G$ Por demostar que $u + v \in M^G$.
      Como u y v son puntos fijos en M se tiene que $u + v = gu + gv \quad \forall g \in G$.
      Por otro lado por propiedades del módulo M se tiene que $g(u + v) = gu + gv$. Por lo tanto $u + v = g(u + v)$ lo cual quiere decir que $u + v \in M^G$.

   2. M^G es cerrado bajo multiplicación por escalares.
      Sea $v \in M^G$. Pd que para toda $a \in k$ se tiene que $av \in M^G$
      Como v esun punto fijo de M se tiene que $av = ag(v) = g(av)$. Lo que significa que $av \in M^G$.
      Por lo tanto M^G es un k-espacio vectorial de M.

ii) M^G es un G-subconjunto de M.
   Sea $v \in M^G$ Pd $gv \in M^G$.
   Esto se obtiene de la definición de M^G ya que $g(v) = v$.
   Por lo tanto M^G es un kG-submódulo de M.$\square$

Definición 13. Sea M un kG-módulo y N un kG-submódulo de M con la operación inducida sobre M.
Tomamos la relación (mod N) donde $m_1 \equiv m_2 \pmod{N}$ si $m_1 - m_2 \in N$. También tenemos $rm_1 \equiv rm_2 \pmod{N}$. El **módulo cociente** $\frac{M}{N}$ es el conjunto de clases módulo N,$M/N = \{m + n | m \in M\}$ junto con las operaciones:
$(m + N) + (m' + M) = (m + m') + M$
$\alpha(m + N) = \alpha m + M$

$g(m+M) = gm + M$

Definición 14. Sean k un campo, G un grupo, M un kG-módulo y $N_1, ..., N_s$ kG-submódulos de M. Decimos que el kG-módulo M es la **suma directa** de los submódulos $N_1, \ldots, N_s$, y lo denotamos $M = N_1 \bigoplus \cdots \bigoplus N_s$ (o también $M = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$), si M es la suma directa de los $N_1, \ldots, N_s$ como k-espacios vectoriales.

Ejemplo 15. Sea k el campo que consiste de 3 elementos $\mathbb{F}_3$ y el grupo de dos elementos $G = \{e, x\}$, donde e es el elemento identidad de G.
El modulo $\mathbb{F}_3 G = \{e, x, -e, -x, 0, e+x, e-x, -e+x, -e-x\}$ Consideremos los siguientes submódulos de $\mathbb{F}_3 G$

$$M_1 = \{e+x, -e-x, 0\}$$
$$M_2 = \{e-x, -e+x, 0\}$$

$\mathbb{F}_3$ es suma directa de M_1 y M_2 ($M_1 \bigoplus M_2$) , ya que se cumplen:

1. $M_1 \bigcap M_2 = 0$

2. $\mathbb{F}_2 G = M_1 + M_2$.
   e se obtiene sumando el segundo elemento de M_1 con el segundo elemento de M_2, ya que $(-e-x) + (-e+x) = 2e$, pero como el campo tiene tres elementos el $2 = -1$, lo cual implica que $-2e = e$. De manera similar, x se obtiene al sumar el segundo elemento de M_1 con el primer elemento de M_2.

Definición 16. Sea M un kG-módulo y N un submódulo de M. N es **sumando directo** de M si y sólo si existe $T \leq M$ tal que $M = N \bigoplus T$. En este caso decimos que T es un **complemento** del submódulo N.

Ejemplo 17. En el ejemplo 15, como $\mathbb{F}_3 G = M_1 \bigoplus M_2$; M_1 es complemento de M_2 y viseversa.

Definición 18. una **representación** de G es un morfismo de grupos $\rho : V \longrightarrow GL(V)$, donde $GL(V) = \{T : V \rightarrow V | T \text{ es invertible}\}$ llamado el grupo genereal lineal. Que cumple lo siguiente:

i) $\rho_1 = 1v$

ii) $\rho_{st} = \rho_s \rho_t \quad \forall \quad s, t \in G$

iii) $\rho_{s^{-1}} = \rho_{s-1}$

Definición 19. Sean G un grupo finito, k un campo y M un kG-módulo. Para cada g en G, denote por $\rho_M(g)$ la transformación lineal de M en sí mismo que manda a cada vector v en gv. De hecho, $\rho_M(g)$ es una transformación lineal biyectiva (con inverso $\rho_M(g^{-1})$). La función $\rho_M : G \longrightarrow GL(M)$ se llama la **representación** asociada al kG-módulo M

Observación 20. Sea G un grupo, k un campo, $\rho : G \longrightarrow GL_n(k)$ una representación. Sea $M = k^n$, Definimos una G-acción en M por:

$$g \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \rho(g) \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 21. Sea $G = C^4 =< x \mid x^4 = 1 >$ tómese la representación

$$\rho : G \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$x^2 \longmapsto A^2.$$

$$A^4 = I$$

Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = M$

donde la acción del grupo es:

$x \cdot (a, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

$x^2 \cdot (a, b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}.$

Definición 22. Una **representación p-modular** es aquella donde el campo tiene característica p. Si el campo tiene caracteística 0, se llama **representación ordinaria**.

Ejemplo 23. Sea k el campo con p elementos F_p y G cualquier grupo. La representación del F_pG es p-modular.

Definición 24. El **módulo trivial** es k con la acción de:
Para toda $g \in G$ y $a \in k$, $ga = a$

Definición 25. Sean G un grupo, k un campo y M un kG-módulo. Decimos que M es un kG-módulo **simple** (también llamado **irreducible**) si M tiene exactamente dos kG-submódulos, a saber, 0 y M mismo. Note que en particular $M \neq 0$.

Ejemplo 26. El módulo trivial es simple

Definición 27. Sean $k \leq F$ campos, G grupo, M un kG-módulo, $\rho : G \longrightarrow GL_n(k)$ la representación asociada a M. El módulo M con **escalares extendidos** al campo F es el módulo asociado a la representación

$$G \xrightarrow{\rho} GL_n(k) \hookrightarrow Gl_n(F)$$

Definición 28. Un módulo simple es **absolutamente irreducible** si es simple para toda extensión del campo

Ejemplo 29. Considerando el ejemplo 21 .
$x \cdot v \in V = \mathbb{R}v$
$x \cdot (a, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1.$
cuyas raíces son $\alpha = \pm i$, las cuales no pertenecen a $\mathbb{R}$. Lo cual quiere decir que es irreducible. Pero si extendemos el campo a $\mathbb{C}$ las raíces si están y por lo tanto no es irreducible. Lo cual quiere decir que M no es absolutamente irreducible.

Definición 30. kG es llamado **módulo regular**.

Ejemplo 31. El módulo trivial es absolutamente irreducible para todo campo.

Definición 32. Un **homomorfismo** $\varphi : M \longrightarrow N$ de módulos es un mapeo que cumple las siguiente condiciones:

(i) $\forall \quad m, m' \in M \ \varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$

(ii) $\forall m \in M$ y $\forall a \in k \ \varphi(gm) = a\varphi(m)$
(iii) $\forall m \in M$ y $\forall g \in G \ \varphi(gm) = g\varphi(m)$

Ejemplo 33. Sea M un KG-módulo y n un entero positivo entonces para $i = 1, 2, \dots, n$ el mapeo $pr_i : M^n \longrightarrow M$ descrito por:

$$pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

es un homomorfismo de módulos; llamada proyección de M^n sobre M.

Definición 34. El **núcleo** o **Kernel** de φ, denotado $Ker\varphi$, está definido como $Ker\varphi = \{v \in M \mid \quad \varphi(v) = 0\}$. El núcleo es un submódulo de M.

Ejemplo 35. El Kernel del morfismo del ejemplo 33 es el conjunto de todas los elementos de la M^n cuya entrada i-ésima es cero.

Definición 36. La **imagen** de φ, denotado $Im\varphi$, está definido como $Im\varphi = \{\varphi(v) \mid \quad v \in M\}$. La imagen es un submódulo de N

Ejemplo 37. La imagen del ejemplo 33 es M

Definición 38. Una **serie de composición** de M es una cadena de submódulos
$0 = M_t \leq M_{t-1} \leq \dots \leq M_1 \leq M$, donde M_{i+i} es maximal de M_i
Los **factores de composición** son los cocientes M_i/M_{i+1} los cuales son simples, porque hay un homomorfismo $M_i \longleftrightarrow M_i/M_{i+1}$ y $M_{i+1} \longleftrightarrow M_{i+1}/M_{i+1}$, además como M_{i+1} es maximal de M_i entonces 0 es maximal de M/M_i lo cual quiere decir que el cociente es simple. Un **factor de composición de arriba** son todos los cocientes M/T donde T es un submódulo maximal de M.

Ejemplo 39. el módulo $M = \mathbb{F}C_2$ donde C_2 es el grupo cíclico formado por dos elementos ($C_2 = \{1, x \quad | \quad x^2 = 1\}$). El único submódulo maximal de M es $\mathbb{F}(1 + x)$. Entonces la serie de composición de M es :

$$0 < M_1 < M$$

Los factores de composición son:

$$M_1/0 = M_1, \qquad M/M_1 \cong M_2$$

Teorema 40. ***Jordan-Hölder***.*Sean* $0 = M_t \leq M_{t-1} \leq \dots \leq M_1 \leq M$ *y* $0 = T_s \leq T_{s-1} \leq \dots \leq T_1 \leq M$ *dos series de composición de* M *entonces* $t = s$ *y además existe una biyección , tal que los cocientes correspondientes* $M_i/M_(i+1)$ *y* T_j/T_{j+1} *son isomorfos.*

Definición 41. Sea k un campo y sea V espacio de dimensión n. Una **forma bilineal** es una aplicación $B : V \times V \longrightarrow k$

Notación 42. $B(u, v) =< u, v >$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $\forall v, u, w \in V$ y $\forall \alpha \in k$

$< v, u + \alpha w >=< v + u > +\alpha < v, w >$.

ii) $< v + \alpha u, w >=< v, w > +\alpha < u, w >$

Corolario 43. $< 0, v >= 0 =< v, 0 > \forall\ v \in V$.

Observación 44. Si V es un k-espacio vectorial con base $v_1, v_2, \cdots, v_n$ y $< , >$ es una forma bilineal en V, entonces $< , >$ esta determinada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \ldots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \ldots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \ldots & < v_n, v_n > \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \sum_{i=i}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j}^{n} \alpha_i \beta_j < v_i, v_j >$$

Definición 45. $\big(< v_i, v_j > \big)$ es la **matriz de Gram** de la forma bilineal $< \quad , \quad >$.

Ejemplo 46. Considere el espacio vectorial $V = k \times k$, cuya base es $V_1 = (0, 1)$ y $V_2 = (1, 0)$.
La forma bilineal esta dada por:

$$< V_1, V_1 >= 1, \qquad < V_1, V_2 >= -1$$
$$< V_2, V_1 >= 0, \qquad < V_2, V_2 >= 2$$

Calculemos $< (1, 3), (-1, 4) >$ de dos formas:
Primero utilizando la matriz de Gram

$$(1, 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (1, 3) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = 19$$

Segundo usando las propiedades de la forma bilineal:

$$< (1,3), (-1,4) > = < (1,3), -(1,0) > +4 < (1,3), (0,1) >$$

$$= - < (1,3), (1,0) > +4 < (1,3), (0,1) >$$

$$= -[< (1,0), (1,0) > +3 < (0,1), (1,0) >]$$

$$+4[< (1,0), (0,1) > +3 < (0,1), (0,1) >$$

$$= -1 + 4[-1 + 6] = -1 + 20 = 19$$

Definición 47. Decimos que una forma bilineal $< \quad , \quad >$ actuando en un kG-módulo V es :

- **Simétrica** si $< u, v > = < v, u >, \ \forall u, v \in V$
- **G-invariante** si $< gv, gu > = < v, u > \ \ \forall u, v \in V, \ \forall g \in G$
- **Singular**, si existe $x \in V$, $x \neq 0$ tal que $< x, v > = 0, \ \forall v \in V$
- **No singular**, si para toda $x \in V$ con $x \neq 0$, existe $v \in V$ tal que $< x, v > \neq 0$

Observación 48. $< \quad , \quad >$ es simétrica si y sólo si $(< V_i, V_j >)$ es simétrica si y sólo si $< V_i, V_j > = < V_j, V_i >$ Para toda i y j.

$<,>$ es no singular si y sólo si $(< V_i, V_j >)$ es no singular si y sólo si $Det(< V_i, V_j >) \neq 0$.

Ejemplo 49. Sea B la forma bilineal cero, G actúa en $\mathbb{R}^2$; G-invariante, simétrica y singular; cuya matriz de Gram es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es simétrica porque $< u, v > = < v, u > = 0$.
Es G-invariante $< gu, gv > = < u, v >$.

Ejemplo 50. Se da un ejemplo de una forma bilineal B que es G-invariante, simétrica y no singular.
G actúa en $\mathbb{R}^2$ donde $g \cdot (a,b) = (a,b)$; $\quad \forall g \in G$ y $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
$< u, v >= u \cdot v$ el producto interno vectorial dado por
$< (u_1, u_2), (v_1, v_2) >= u_1 v_1 + u_2 v_2$.
Lo que implica que considerando la base canónica.

$$< e_i, e_j >=< e_j, e_i >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por definicion de la acción de $G < g \cdot u, g \cdot v >=< u, v >$
La matriz de Gram de la forma bilineal $< \quad , \quad >$ es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 51. El **espacio dual de** V, denotado V^*, es:

$$V^* = \{ f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ es transformación lineal} \}$$

Observación 52. V^* es un k-espacio vectorial. Esto se debe a que, si $f, g \in V^*$ entonces $f + g \in V^*$ cuya regla de correspondencia esta dada por
$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$; Si $\alpha \in k, \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v)$.

Definición 53. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ base de V.
La **base dual** de V es una base como espacio vectorial de V^*, $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^* \in V^*$.

$v_i^* : V \to k$. Sea $v = \displaystyle\sum_{j=i}^{n} \alpha_j v_j$ donde $\alpha_j \in k$ y $v_j \in V$ entonces: $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$v_i^*(v) = v_i^*\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Big) = \alpha_i.$$

Definición 54. Si V es un kG-módulo entonces V^* es un kG-módulo.
Sean $g \in G, \quad f \in V^* \quad$ y $\quad v \in V$ definimos la acción del G sobre V^* como:

$$g \cdot f : V \longrightarrow k$$

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} v) \in k$$

Con esta acción V^* es un G-conjunto:
$1 \cdot f(v) = f(1^{-1}v) = f(1 \cdot v) = f(v)$

También se cumple:
$(gh) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$
Sean $g, \quad h \in G, \quad f \in V^*$ y $v \in V$

Por una parte tenemos que:
$[(gh) \cdot f](v) = f((gh)^{-1}v)) = f(h^{-1}g^{-1}v)$

Por otro lado tenemos que:
$[g \cdot (h \cdot f)](v) = (h \cdot f)(g^{-1}v) = f(h^{-1}(g^{-1}v))$

También se cumple que:
$g \cdot (f + f') = g \cdot f + g \cdot f'$
$[g \cdot (f + f')](v) = (f + f')(g^{-1}v) = f(g^{-1}v) + f'(g^{-1}v) = (g \cdot f)(v) + (g \cdot f')(v) = [(g \cdot f) + (g \cdot f')](v)$

Y también se cumple:
$g \cdot (\alpha f) = \alpha(g \cdot f))$.
$g \cdot (\alpha f)(v) = (\alpha f)(g^{-1}v) = \alpha[fg^{-1}v)] = \alpha(g \cdot f)(v)$

Ejemplo 55. Sea G arbitrario, k un campo y $M = k$ el módulo trivial. Entonces el módulo dual del trivial es trivial, pues para toda $f \in M^*$ y para toda $g \in G$ tenemos

$$(g \cdot f)(m) = f(g^{-1} \cdot m) = f(m)$$

En el último paso estamos usando la acción de G.
Entonces $g \cdot f = f$ para toda $g \in G$.

Observación 56. Si V es kG-módulo entonces V^* es KG-módulo

Observación 57. Si $V \xrightarrow{\varphi} W$ homomorfismo de kG-módulos, entonces $W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$ es un homomorfismo de kG-módulos, donde $\varphi^*(f) = f\varphi$

- $\varphi^*(f + f') = \varphi^*(f) + \varphi^*(f')$

  $\varphi^*(f + f')(v) = [(f + f') \circ \varphi](v) = f(\varphi(v)) + f'(\varphi(v)) =$
  $= (f \circ \varphi)(v) + (f' \circ \varphi)(v) = \varphi^*(f)(v) + \varphi^*(f)(v) = [\varphi^*(f) + \varphi^*(f')](v)$

- $\varphi^*(\alpha f) = \alpha\varphi^*(f)$

  $$\varphi^*(\alpha f)(v) = (\alpha f) \circ \varphi(v) = \alpha(f(\varphi(v)) = \alpha[\varphi^*(f)(v)]$$

- $\varphi^*(g \cdot f) = g \cdot (\varphi^*(f))$

  Por un lado se tiene:

  $$[\varphi^*(g \cdot f)](v) = [(g \cdot f) \circ \varphi](v) = (g \cdot f)(\varphi(v)) = f(g^{-1})(\varphi(v))$$

  Por otro lado se tiene:
  $[g \cdot \varphi^*(f)](v) = [g \cdot (f \circ \varphi)](v) = (f \circ \varphi)(g^{-1}v) = f(\varphi(g^{-1}v))$

Teorema 58. ***Teorema de isomorfismo para kG-módulos***.
Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ homomorfismo de kG-módulos entonces la función :

$$M/Ker\varphi \xrightarrow{\overline{\varphi}} Im\varphi$$

$$m + Ker\varphi \longrightarrow \varphi(m)$$

está bien definida y es un isomorfismo de kG-módulos.

Demostración.
Primero se demostrara que $\overline{\varphi}$ está bien definida:
Sea $m, m' \in G$ tal que $m + Ker\varphi = m'Ker\varphi$. Por demostrar que $\varphi(m) = \varphi(m')$. Tenemos que existe h tal que $m = h + m'$
$\varphi(m) = \varphi(h + m') = \varphi(h) + \varphi(m') = \varphi(m')$.

Segundo vamos a demostrar que $\overline{\varphi}$ es homomorfismo:

(i) Sean $a + Ker\varphi$ y $b + Ker\varphi \in M/Ker\varphi$. Por demostrar que $\overline{\varphi}((a + Ker\varphi) + (b + Ker\varphi)) = \overline{\varphi}(a + Ker\varphi)\overline{\varphi}(b + Ker\varphi)$.
$\overline{\varphi}((a + Ker\varphi) + (b + Ker\varphi)) = \overline{\varphi}(a + b + Ker\varphi) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \overline{\varphi}(a + Ker\varphi) + \overline{\varphi}(b + Kern\varphi)$.

(ii) Sean $\alpha \in k$ y $m + Ker\varphi \in M \ker\varphi$. Por demostrar que $\overline{\varphi}(\alpha(m + ker\varphi)) = \alpha\overline{\varphi}(m + Ker\varphi)$. $\overline{\varphi}(\alpha(m + ker\varphi)) = \overline{\varphi}(\alpha m + \alpha Ker\varphi) = \overline{\varphi}(\alpha m + ker\varphi) = \varphi(\alpha m) = \alpha\varphi(m) = \alpha\overline{\varphi}(m + Ker\varphi)$

(iii) Sean $g \in G$ y $m + Ker\varphi \in M \ker\varphi$. Por demostrar que $\overline{\varphi}(g(m + ker\varphi)) = g\overline{\varphi}(m + Ker\varphi)$. $\overline{\varphi}(g(m + ker\varphi)) = \overline{\varphi}(gm + gKer\varphi) = \overline{\varphi}(gm + ker\varphi) = \varphi(gm) = g\varphi(m) = g\overline{\varphi}(m + Ker\varphi)$
por lo tanto $\overline{\varphi}$ es homomorfismo de kG-módulos.

Tercero vamos a demostrar que $\overline{\varphi}$ es inyectiva:
Sean $m + Ker\varphi$ y $x + Ker\varphi \in M/Ker\varphi$ supongamos que $\overline{\varphi}(m + Ker\varphi) = \overline{\varphi}(x + Ker\varphi)$, por demostrar $mKer\varphi = xKer\varphi$; lo que es lo mismo probar que existe $h \in Ker\varphi$ tal que $m = x + h$.
Por hipotesis tenemos que $\varphi(m) = \overline{\varphi}(m + Ker\varphi) = \overline{\varphi}(x + Ker\varphi) = \varphi(x)$.
Entonces $\varphi(m) - \varphi(x) = 0$
$\varphi(m) + \varphi(-x) = 0$, $\varphi(m - x) = 0$.
Entonces $h = m - x \in Ker\varphi$; Por lo tanto $M = x + h$.

Por último vamos a demostrar que $\overline{\varphi}$ es suprayectiva:
Sea $x \in Im\varphi$, es decir, existe $m \in M$ tal que $x = \varphi(m)$
Por demostrar que existe $a + Ker\varphi \in M/Ker\varphi$ tal que $\overline{\varphi}(a + Ker\varphi) = x$
Sea $a = m$ tenemos que $\overline{\varphi}(m + Ker\varphi) = \varphi(m) = x$.

Teorema 59. *Todo simple es factor de composición del módulo regular.*

Demostración Sea $\varphi : kG \longrightarrow S$ donde S es un submódulo simple cuya regla de correspondencia es $x \longmapsto xs_0$, con $s_0 \in S, \quad s_0 \neq 0$.
es un homomorfismo $\varphi(x + x') = (x + x')s_0 = xs_0 + x's_0 = \varphi(x)\varphi(x')$
$a \in k$ $\varphi(ax) = (ax)s_0 = a(xs_0) = a\varphi(x)$. Donde $s_0 \in Im\varphi \neq 0, Im\varphi \leq S$ simple, por lo tanto $Im\varphi = S$.
Por el teorema de isomorfismo:
$S = Im\varphi \cong kG/Ker\varphi$.

Teorema 60. *Todo simple es inescindible.*
Demostración. *Si M es simple entonces no existen submódulos diferentes de $\{0\}$ y el total; lo cual quiere decir que M es inescindible, debido a que $M \neq A \bigoplus B$.*

Observación 61. No todo inescindible es simple

Ejemplo 62. Sean $k = F_2 = \{0, 1\}, \qquad G = \{e, g\}$ donde e es la identidad del grupo.Sea kG el conjunto de las combinaciones lineales de G sobre F_2.

Entonces $kG = \{0 = 0 \cdot e + 0 \cdot g, e = 1 \cdot e + 0 \cdot g, g = 0 \cdot e + 1 \cdot g, e + g = 1 \cdot e + 1 \cdot g\}$.El cual es un kG-módulo. ya que es un espacio vectorial y un G-conjunto, porque

$$\begin{aligned} x \cdot 0 = 0 \qquad \forall g \in G \\ e \cdot g = g \\ e \cdot e = e \\ e \cdot (e+g) = e+g \\ g \cdot e = g \\ g \cdot (e+g) = e+g \end{aligned}$$

Los subespacios vectoriales de kG además del$\{0\}$ y el total son:

$$\begin{aligned} < e > &= \{0, e\} \\ < g > &= \{0, g\} \\ < e+g > &= \{0, e+g\} \end{aligned}$$

Los dos primeros subconjuntos no son G-subconjuntos de kG debido a que

En $< e >$
$g \cdot e = g \notin < e >$

En $< g >$
$g \cdot g = e \notin < g >$

$< e+g >$ es un G-subconjunto de kG ya que

$e \cdot (e+g) = e+g$
$g \cdot (e+g) = e+g$

Por lo tanto los submódulos de kG son:
$\{0\} \quad < e+g > \;$ y $\; kG$

kG no es irreducible porque $< e+g >$ es submódulo de kG, pero si es inescindible debido a que no hay submódulos cuya suma directa es el kG porque $< e+g > \cap kG \neq \{0\}$. Entonces tendriamos que la única suma sería $< e+g > + < e+g >$, la cual no es directa,$< e+g > \cap < e+g > \neq \{0\}$.

Ejemplo 63. Considere el campo $k = F_3 = \{0, 1, -1\}$ y el grupo $G = \{e, g\}$. Sea kG el espacio vectorial de combinaciones lineales de G sobre k, $\mid kG \mid = 3^2 = 9$. KG tiene los siguientes elementos:
$\{0 \cdot e + 0 \cdot g = 0,\ 0 \cdot e + 1 \cdot g = g,\ 0 \cdot e + (-1) \cdot g = -g,\ 1 \cdot e + 0 \cdot g = e,\ 1 \cdot e + 1 \cdot g = e +$

$g,\ 1{\cdot}e{+}(-1){\cdot}g = e{-}g,\ -1{\cdot}e{+}0{\cdot}g = -e,\ -1{\cdot}e{+}1{\cdot}g = -e{+}g,\ -1{\cdot}e{+}(-1){\cdot}g\}.$

Tambien es un G-conjunto:

$$\begin{gathered}
x \cdot 0 = 0 \qquad \forall g \in G \\
e \cdot g = g \\
e \cdot (-g) = -g \\
e \cdot e = e \\
e \cdot (e+g) = e \cdot e + e \cdot g = e + g \\
e \cdot (e-g) = e \cdot e + e \cdot (-g) = e - g \\
e \cdot (-e) = -e \cdot e = e \\
e \cdot (-e+g) = -e \cdot e + e \cdot g = -e + g \\
e \cdot (-e-g) = -e \cdot e + e \cdot (-g) = -e - g
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
g \cdot g = e \\
g \cdot (-g) = -e \\
g \cdot e = g \\
g \cdot (e+g) = g \cdot e + g \cdot g = g + e = e + g \\
g \cdot (e-g) = g \cdot e + g \cdot (-g) = g - e = -e + g \\
g \cdot (-e) = -g \cdot e = g \\
g \cdot (-e+g) = -g \cdot e + g \cdot g = -g + e = e - g \\
g \cdot (-e-g) = -g \cdot e + g \cdot (-g) = -g - e = -e - g
\end{gathered}$$

Por lo tanto es un kG-módulo

Los subespacios vectoriales de kG son:

$< e >= \{0, e, -e\}$

$< g >= \{0, g, -g\}$

$< e + g >= \{0, e + g, -e - g\}$

$< e - g >= \{0, e - g, -e + g\}$

Del ejemplo 62 sabemos que $< e >$ y $< g >$ no son subconjuntos de kG.Pero $< e + g >$ y $< e - g >$son subconjuntos debido que la acción sobre G es cerrada:

En $< e + g >$ se tiene

$e \cdot x = x \quad \forall x \in < e + g >$

$g \cdot (e + g) = e + g$

$g \cdot (-e - g) = -e - g$

En $< e - g >$ se tiene
$e \cdot x = x \quad \forall x \in < e - g >$
$g \cdot (e - g) = -e + g$
$g \cdot (-e + g) = e - g$
Por lo tanto los submódulos de kG son:
$\{0\}, \qquad < e + g > \qquad < e - g > \qquad$ y $\qquad kG.$

Como $< e + g > \cap < e + g >= 0$ entonces podemos hacer la suma directa entre ellos: Como $(e + g) + (e - g) = 2e = -e, \quad (e + g) + (-e + g) = 2g = -g, \quad (-e-g)+(e-g) = -2g = g,$ y $(-e-g)+(-e+g) = -2e = e$ Por lo tanto $< e + g > \oplus < e - g >= kG$.

kG no es irreducible ni inescindible;lo primero porque existen subódulos diferentes de 0 y el kG, y lo segundo se tiene porque exite una suma directa de submódulos que es igual a kG.

Teorema 64. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- *kG es semisimple como kG-módulo (regular).*
- *Para todo kG-módulo M, M es módulo semisimple.*
- *Para todo kG-módulo M, y todo submódulo $N \leq M$, existe $T \leq M$ tal que $M = N \bigoplus T$.*

Teorema 65. ***Teorema de Maschke***
Sea k campo de característica p, G un grupo finito.
kG es semisimple si y sólo si $p \nmid |G|$.

Demostración $N \leq M$ submódulo por demostrar que existe $T \leq M$ tal que $M = N \bigoplus T$. Hipótesis $p \nmid |G|$.
Sabemos que existe $T_1 \leq M$ tal que $M = N \bigoplus T_1$ como espacios vectoriales.
Construimos una transformacion lineal:

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

$$n + t \longmapsto n.$$

Para esta transformación el $Ker\varphi = T_1$.
Construimos $\psi : M \longrightarrow N$ homomorfismo de kG-módulos donde:

$$\psi(m) = \sum_{g \in G} g\varphi(g^{-1}m)$$

$\psi(m+m') = \psi(m) + \psi(m')$
Para toda $m \in M, \quad x \in G$.

$$\psi(xm) = \sum_{g\in G} g\varphi(g^{-1})(xm)) = \sum_{g\in G} g\varphi(g^{-1}x)m)$$

Haciendo el cambio de variable $h^{-1} = g^{-1}x$ se tiene que $h = x^{-1}g$ y por lo tanto $g = xh$, sustituyendo esto tenemos:

$$\sum_{h\in G}(xh)\varphi(h^{-1}m) = \sum_{h\in G}(x(h\varphi(h^{-1}m) = x\sum_{h\in G} h\varphi(h^{-1}m)) = x\psi(m)$$

Construimos otro homomorfismo de kG-módulos:

$$\tilde{\psi}(m) = \frac{1}{|G|}\psi(m)$$

Evaluando en n.

$$\tilde{\psi}(n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\varphi(g^{-1}n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g(g^{-1})) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} n = \frac{1}{|G}|G|n = n$$

Entonces $M = N \bigoplus Ker\tilde{\psi}$.

Capítulo 2

Tabloides y Módulo de Specht

2.1. Diagramas, tableaux y tabloides

En esta sección presentamos un resumen de los resultados que necesitaremos para crear las representaciones irreducibles de S_n. Las demostraciones de todos estos resultados se pueden encontrar en el [James].

Definición 66. Si λ es una partición de n, entonces el **diagrama** $[\lambda]$ es

$$\{(i,j)|i,j \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, \quad 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Si $(i,j) \in [\lambda]$, entonces se dice que (i,j) es un **nodo** de $[\lambda]$. El k-ésimo **renglón** (respectivamente la k-ésimo **columna**) de un diagrama consiste en aquellos nodos cuya primera (respectivamente, segunda) coordenada es k. El primer renglón de λ se dice que es el renglón más **alto** de λ.

Definición 67. Si λ y μ son particiones de n, decimos que λ **domina** a μ, denotado $\lambda \trianglerighteq \mu$, si para toda j, $\quad \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{j} \mu_i$. Si $\lambda \trianglerighteq \mu$ y $\lambda \neq \mu$, lo denotamos $\lambda \triangleright \mu$.

Ejemplo 68. las particiones del 7 son:
$(7),(6,1),(5,2),(5,1^2),(4,3),(4,2,1),(4,1^3),(3^2,1),(3,2^2),$
$(3,2,1^2),(3,1^4),(2^3,1),(2^2,1^3),(2,1^5),(1^7)$
El orden de dominación en el conjunto de particiones de 7.
Hay dos cadenas posibles; La primera:
$(7) \triangleright (6,1) \triangleright (5,2) \triangleright (5,1^2) \triangleright (4,2,1) \triangleright (4,1^3) \triangleright (3,2,1^2) \triangleright (3,1^4) \triangleright (2^2,1^3) \triangleright (2,1^5) \triangleright (1^7)$

La segunda:
$(7) \rhd (6,1) \rhd (5,2) \rhd (4,3) \rhd (4,2,1) \rhd (3^2,1) \rhd (3,2^2) \rhd (3,2,1^2) \rhd (2^3,1) \rhd (2^2,1^3) \rhd (2,1^5) \rhd (1^7)$

Definición 69. Si λ y μ son particiones de n, escribimos $\lambda > \mu$ si y solo si el menor j para el cual $\lambda_j \neq \mu_j$ satisface $\lambda_j > \mu_j$. (Note que algunos autores escriben $\lambda < \mu$). Este orden se lama **orden lexicográfico**.

Ejemplo 70. El orden lexicográfico en el conjunto de particiones del 7.
$(7) > (6,1) > (5,2) > (5,1^2) > (4,3) > (4,2,1) > (4,1^3) > (3^2,1) > (3,2^2) > (3,2,1^2) > (3,1^4) > (2^3,1) > (2^2,1^3) > (2,1^5) > (1^7)$

Definición 71. Si $[\lambda]$ es un diagrama, el **diagrama conjugado** $[\lambda']$ se obtiene intercambiando los renglones y las columnas en $[\lambda]$. λ' es la **partición conjugada** a λ.

Ejemplo 72. Las partición conjugada a $(3,1)$ es $(2,1,1)$. Esto es porque $[\lambda] = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$
Sacando el diagrama conjugado: $[\lambda'] = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$, lo cual quiere decir que $\lambda' = (2,1,1)$.

Proposición 73. *$\lambda \lhd \mu$ si y sólo si $\mu' \lhd \lambda'$.*

Definición 74. Un **λ-tableau** es uno de los $n!$ arreglos de enteros obtenidos al reemplazar cada nodo en $[\lambda]$ por uno de los números $1,\ldots,n$, sin permitir repeticiones. Note que S_n actúa en el conjunto de λ-tableaux.

Ejemplo 75. Los $(2,1)$-tableaux son:

$$\begin{matrix} 2 & \\ 1 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & \\ 3 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

La acción de $(1,2)$ en los $(2,1)$-tableaux

$$\begin{matrix} 2 & \\ 1 & 3 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} 1 & \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & \\ 1 & 2 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} 3 & \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & \\ 2 & 3 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} 2 & \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ll} 3 & \\ 2 & 1 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ll} 3 & \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 3 & 2 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ll} 2 & \\ 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2 & \\ 3 & 1 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ll} 1 & \\ 3 & 2 \end{array}$$

Teorema 76. *(Lema combinatorio fundamental) Sean λ y μ particiones de n, y suponga que t_1 es un λ-tableau y t_2 es un μ-tableau. Suponga que para toda i los números del i-ésimo renglón de t_2 pertenecen a diferentes columnas de t_1. Entonces $\lambda \trianglerighteq \mu$*

Definición 77. Si t es un tableau, su **estabilizador por renglones**, R_t, es el subgrupo de S_n que fija los renglones de t como conjuntos. El **estabilizador por columnas** C_t, se define similarmente.

Ejemplo 78. El estabilizador por renglones y el estabilizador por columnas del tableau

$$t = \begin{array}{lll} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & \\ 6 & 1 & \end{array}$$

Son $R_t = S_{\{4,5,7\}} \times S_{\{2,3\}} \times S_{\{6,1\}}$.
$C_t = S_{\{4,2,6\}} \times S_{\{5,3,1\}} \times S_{\{7\}}$.

Ejemplo 79. Consideremos el tableau del ejemplo 78 y sea $\pi = (1, 2, 3, 4)$ entonces:

$$t\pi = \begin{array}{lll} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & \\ 6 & 2 & \end{array}$$

Entonces $R_{t\pi} = S_{\{1,5,7\}} \times S_{\{3,4\}} \times S_{\{6,2\}}$

Por otro lado

$$\pi^{-1} R_t \pi = (1, 4, 3, 2)[S_{\{4,5,7\}} \times S_{\{2,3\}} \times S_{\{6,1\}}](1, 2, 3, 4)$$

$$= (1, 4, 3, 2)S_{\{4,5,7\}}(1, 2, 3, 4)\times(1, 4, 3, 2)S_{\{2,3\}}(1, 2, 3, 4)\times(1, 4, 3, 2)S_{\{6,1\}}(1, 2, 3, 4)$$

$$= S_{\{1,5,7\}} \times S_{\{3,4\}} \times S_{\{6,2\}}$$

Por lo tanto $C_{t\pi} = \pi^{-1}C_t\pi$

Observación 80. Sea t un tableau, $\pi \in S_n$. Entonces $C_{t\pi} = \pi^{-1}C_t\pi$ y $R_{t\pi} = \pi^{-1}R_t\pi$.

$$t = \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn_r} \end{array}$$

$$t\pi = \begin{array}{cccc} (a_{11}\pi) & (a_{12}\pi) & \dots & (a_{1n_1}\pi) \\ \vdots & & & \\ (a_{i1}\pi) & (a_{i2}\pi) & \dots & (a_{in_i}\pi) \\ \vdots & & & \\ (a_{r1}\pi) & (a_{r2}\pi) & \dots & (a_{rn_r}\pi) \end{array}$$

$R_t = S_{\{a_{11},a_{1,2},\dots,a_{1n_1}\}} \times S_{\{a_{21},a_{22},\dots,a_{2n_2}\}} \times \cdots \times S_{\{a_{r1},a_{r2},\dots,a_{rn_r}\}}$

$R_{t\pi} = S_{\{(a_{11}\pi),(a_{12}\pi),\dots,(a_{1n_1}\pi)\}} \times, \cdots \times S_{\{(a_{r1}\pi),\dots,a_{rn_r}\}}$

Si $\sigma \in R_t$ vamos a verificar que $\pi^{-1}\sigma\pi \in R_{t\pi}$
Consideremos un renglón del tableau $t\pi$ entonces:

$$\{(a_{i1}\pi)(\pi^{-1}\sigma\pi), \quad (a_{i2}\pi)(\pi^{-1}\sigma\pi), \dots, (a_{in_i}\pi)(\pi^{-1}\sigma\pi)\}$$

$$= \{(a_{i1}\sigma)\pi, \quad (a_{i2}\sigma)\pi, \dots, (a_{in_i}\sigma)\pi\}$$

Como $\sigma \in R_t$ entonces el renglón del tableau no cambia, lo único que cambia es el orden de los a_{ij} donde $j = 1, \dots, n_i$.

$= \{a_{ib_1}, a_{ib_2}, \dots, a_{b_{n_1}}\}$ donde b_k es una de las j no necesariamente en el mismo orden.

lo cual quiere decir que $\pi^{-1}R_t\pi \subset R_{t\pi}$
Por lo dicho $\pi R_{t\pi}\pi^{-1} \subset R_{(t\pi)\pi^{-1}} = R_t$. Multiplicando π^{-1} por la izquierda, y π por la derecha se tiene que: $R_{t\pi} \subset \pi^{-1}R_t\pi$.
Por lo tanto $R_{t\pi} = \pi^{-1}R_t\pi$. Analogamente se demuestra que $C_{t\pi} = \pi^{-1}C_t\pi$.

Definición 81. Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de λ-tableaux haciendo $t_1 \sim t_2$ si y sólo si $t_1\pi = t_2$ para alguna $\pi \in R_{t_1}$ (es decir, si para todo i, el i-ésimo renglón de t_1 consta de los mismos números que el i-ésimo renglón de t_2. El **tabloide** $\{t\}$ que contiene a t es la clase de equivalencia de t bajo esta relación. Note que S_n actúa en el conjunto de los λ-tabloides.

Ejemplo 82. los (2^2)-tabloides son:

$$\{t_1\} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array} \quad \{t_2\} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array} \quad \{t_3\} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array}$$

$$\{t_4\} = \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array} \quad \{t_5\} = \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array} \quad \{t_6\} = \begin{array}{cc}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$$

La acción de $(1,2,3)$ en los (2^2)-tabloides es:
$\{t_1\} \mapsto \{t_4\}$ $\quad$ $\{t_2\} \mapsto \{t_1\}$ $\quad$ $\{t_3\} \mapsto \{t_5\}$
$\{t_4\} \mapsto \{t_2\}$ $\quad$ $\{t_5\} \mapsto \{t_6\}$ $\quad$ $\{t_6\} \mapsto \{t_3\}$.

Definición 83. $\{t_1\} < \{t_2\}$ si y sólo si existe i tal que:
(i) Cuando $j > i$, j está en el mismo renglón de $\{t_1\}$ y $\{t_2\}$.
(ii) i está en un renglón de mayor índice en $\{t_2\}$ que en $\{t_1\}$ (es decir, i está en un renglón más alto en $\{t_1\}$ que en $\{t_2\}$).

Ejemplo 84. El orden total $<$ en los (2^2)-tabloides es:
$\{t_6\} < \{t_5\} < \{t_3\} < \{t_4\} < \{t_2\} < \{t_1\}$.

Definición 85. Dado un tableau cualquiera t, sea $m_{ir}(t)$ el número de entradas menores o iguales que i en los primeros r renglones de t. Entonces escribimos $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$ si y sólo si para toda i y para toda r, $m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}(t_2)$.

Ejemplo 86. Las entradas significativas de la matriz $m_{ir}(t)$ para el tableau t del ejemplo 78 son:
$m_{13}(t) = 1$ $\quad$ $m_{22}(t) = 1$ $\quad$ $m_{23}(t) = 2$ $\quad$ $m_{32}(t) = 2$ $\quad$ $m_{33}(t) = 3$ $\quad$ $m_{41}(t) = 1$
$m_{42}(t) = 3$ $\quad$ $m_{43}(t) = 4$ $\quad$ $m_{51}(t) = 2$ $\quad$ $m_{52}(t) = 4$ $\quad$ $m_{53}(t) = 5$ $\quad$ $m_{61}(t) = 2$
$m_{62}(t) = 4$ $\quad$ $m_{63}(t) = 6$ $\quad$ $m_{71}(t) = 3$ $\quad$ $m_{72}(t) = 5$ $\quad$ $m_{73}(t) = 7$.

Proposición 87. *Considere dos λ-tabloides $\{t_1\}$ y $\{t_2\}$. Si $\{t_1\} \triangleleft \{t_2\}$ entonces $\{t_1\} < \{t_2\}$.*

Lema 88. *Sea t un tableau, y sea $w < x$ tales que w está en el renglón a y x en el renglón b de t. Entonces:*
(i)

$$m_{ir}(t(wx)) - m_{ir}(t) = \begin{cases} 1 & si\ b \leq r < a\ y\ w \leq i < x \\ -1 & si\ a \leq r < b\ y\ w \leq i < x \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

(ii) $\{t\} \lhd \{t(wx)\}$ si $w > x$ y w está más abajo que x en t.

Tomemos el ejemplo 78, consideremos $w = 3$ y $x = 4$, por lo tanto $a = 2$, $b = 1$.
En este caso cuando $i = 3$ y $r = 1$ se tiene que $m_{31}(t(34)) - m_{31}(t) = 1$ y en todos los demás es cero.

Lema 89. *Si $x - 1$ está más abajo que x en t, y t es un λ-tableau, entonces no existe un λ tableau t_1 tal que $\{t\} \lhd \{t_1\} \lhd \{t(x-1,x)\}$.*

2.2. Módulos de Specht

Definición 90. Sea μ una partición de n. El **subgrupo de Young** S_μ asociado a μ es el subgrupo de S_n dado por

$$S_\mu = S_{1,2,\ldots,\mu_1} \times S_{\mu_1+1,\ldots,\mu_1+\mu_2} \times S_{\mu_1+\mu_2,\ldots,\mu_1+\mu_2+\mu_3} \times \ldots$$

Ejemplo 91. El subgrupo de Young asociado a la partición $\mu = (4, 3, 2^2, 1^3)$ es:

$$S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{5,6,7\}} \times S_{\{8,9\}} \times S_{\{10,11\}} \times S_{\{12\}} \times S_{\{13\}} \times S_{\{14\}}$$

Definición 92. Sea F un campo arbitrario, y sea $M_F^\mu = M^\mu$ el FS_n**-módulo de permutaciones** sobre el conjunto de μ-tabloides.

Ejemplo 93. Sea F un campo arbitrario, G un grupo finito, y X un G-conjunto finito. Entonces el módulo de permutación FX es irreducible si y sólo si $|X| = 1$.
Supongamos que X consta de 2 elementos, es decir, $X = \{a, b\}$, la acción depende de g. Entonces FX tiene un submódulo $F(a+b) = \{\alpha(a+b)|\alpha \in F\}$
$\alpha(a + b) + \beta(a + b) = (\alpha + \beta)(a + b)$.
$(\alpha(a + b)) \cdot g = \alpha[a \cdot g + b \cdot g] = \alpha(a + b)$.

En general $X = \{a, b, c, \dots h\}$ entonces FX tiene un submódulo submódulo dado por $F(a + b + c + \cdots + h)$.

Por lo tanto $|X| = 1$ para que FX sea irreducible.

Lema 94. *Sea μ una partición no trivial. Entonces M^μ no es irreducible. Si μ es una partición no trivial, entonces por lo menos hay dos μ-tabloides, y por el ejemplo 93 entonces M^μ no es irreducible.*

Proposición 95. *M^μ es un FS_n-módulo cíclico, generado por cualquier tabloide, y $dim M^\mu = n!/(\mu_1\mu_2\dots)$.*

Definición 96. Sea t un tableau. La **suma con signo por columnas**, κ_t, es el elemento FS_n dado por

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} (sgn\pi)\pi$$

El **politabloide**, e_t, asociado al tableau t está dado por

$$e_t = \{t\}\kappa_t.$$

El **Módulo de Specht** $S^\mu_F = S^\mu$ para la partición μ es el submódulo de M^μ generado por los politabloides. Note que el politabloide e_t depende del tableau t, no nada más del tabloide $\{t\}$. Si $v \in M^\mu$, decimos que v **involucra** al tabloide $\{t\}$ si su coeficiente no es cero. Observe también que todos los tabloides en e_t tienen coeficiente ± 1.

Ejemplo 97. Sea t el tableau:

$$t = \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

Entonces los elementos de C_t son: $()$, $\quad (1,2)$, $\quad (3,4)$ y el $(1,2)(3,4)$

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} (sgn\pi)\pi = 1 - (1,2) - (3,4) + (1,2)(3,4) = (1 - (1,2))(1 - (3,4))$$

Donde 1 es la permutación identidad.

$$e_t = \{t\}\kappa_t = \begin{array}{cc} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{cc} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}(1,2) - \begin{array}{cc} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}(3,4) + \begin{array}{cc} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}(1,2)(3,4)$$

$$= \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$$

La $dimS^{(2^2)} = 3$ debido a que: Los tableau de 2_2 son:

$$t_1 = \begin{array}{cc} 1 & 2\\ 3 & 4\end{array} \quad t_2 = \begin{array}{cc} 1 & 2\\ 4 & 3\end{array} \quad t_3 = \begin{array}{cc} 1 & 3\\ 2 & 4\end{array} \quad t_4 = \begin{array}{cc} 1 & 3\\ 4 & 2\end{array} \quad t_5 = \begin{array}{cc} 1 & 4\\ 2 & 3\end{array} \quad t_6 = \begin{array}{cc} 1 & 4\\ 3 & 2\end{array}$$

$$t_7 = \begin{array}{cc} 2 & 1\\ 3 & 4\end{array} \quad t_8 = \begin{array}{cc} 2 & 1\\ 4 & 3\end{array} \quad t_9 = \begin{array}{cc} 2 & 3\\ 1 & 4\end{array} \quad t_{10} = \begin{array}{cc} 2 & 3\\ 4 & 1\end{array} \quad t_{11} = \begin{array}{cc} 2 & 4\\ 1 & 3\end{array} \quad t_{12} = \begin{array}{cc} 2 & 3\\ 3 & 1\end{array}$$

$$t_{13} = \begin{array}{cc} 3 & 1\\ 2 & 4\end{array} \quad t_{14} = \begin{array}{cc} 3 & 1\\ 4 & 2\end{array} \quad t_{15} = \begin{array}{cc} 3 & 2\\ 1 & 4\end{array} \quad t_{16} = \begin{array}{cc} 3 & 2\\ 4 & 1\end{array} \quad t_{17} = \begin{array}{cc} 3 & 4\\ 1 & 2\end{array} \quad t_{18} = \begin{array}{cc} 3 & 4\\ 2 & 1\end{array}$$

$$t_{19} = \begin{array}{cc} 4 & 1\\ 2 & 3\end{array} \quad t_{20} = \begin{array}{cc} 3 & 4\\ 1 & 2\end{array} \quad t_{21} = \begin{array}{cc} 4 & 1\\ 3 & 2\end{array} \quad t_{22} = \begin{array}{cc} 4 & 2\\ 3 & 1\end{array} \quad t_{23} = \begin{array}{cc} 4 & 3\\ 1 & 2\end{array} \quad t_{24} = \begin{array}{cc} 4 & 3\\ 2 & 1\end{array}$$

$$e_{t_1} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$$

$$e_{t_2} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$$

$$e_{t_3} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$$

$$e_{t_6} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 3 & 4\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 4\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array}$$

Ejemplo 98. Consideremos la partición (2^2):
los tabloides:

$$t_1 = \begin{array}{cc} 2 & 4\\ 1 & 3\end{array}$$

$$t_2 = \begin{array}{cc} 1 & 4\\ 3 & 2\end{array}$$

Son dos $\mu - tabloides$ tales que e_{t_1} no involucra a $\{t_2\}$, porque

$$e_{t_1} = \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & 4\\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$$

Ejemplo 99. Sean t un tableau y $\pi \in S_n$. Entonces $\kappa_t\pi = \pi\kappa_{t\pi}$ y $e_t\pi = e_{t\pi}$

Considere el tableau:

$$t = \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}$$

y la partición $(1,2,3)$, entonces:

$$t\pi = \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}$$

La suma por columnas es:
$\kappa_{t\pi} = 1 - (3,2) - (4,1) + (3,2)(4,1)$, por lo tanto
$\pi\kappa_{t\pi} = (1,2,3)[1 - (3,2) - (4,1) + (3,2)(4,1)]$
$\quad = (1,2,3) - (1,3) - (1,2,3,4) + (1,3,4)$

Por otro lado :
$\kappa_t\pi = [1 - (2,1) - (4,3) + (2,1)(4,3)](1,2,3)$
$\quad = (1,2,3) - (1,3) - (1,2,3,4) + (1,2,3,4)$

Por lo tanto $\kappa_t\pi = \pi\kappa_{t\pi}$.

El politabloide asociado a $t\pi$ es:

$$e_{t\pi} = \begin{array}{cc}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

Por otra parte

$$e_t\pi = \left\{ \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} \right\}(1,2,3)$$

$$= \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}(1,2,3) - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}(1,2,3) - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array}(1,2,3) + \begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}(1,2,3)$$

$$= \begin{array}{cc}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

Por lo tanto $e_t\pi = e_{t\pi}$

Proposición 100. *S^μ es un módulo cíclico, generado por cualquier politabloide.*

Ejemplo 101. Sean μ una partición de n, t un μ-tableau y $(a,b) \in C_t$, entonces existen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in FS_n$ tales que $\kappa_t = (1-(a,b))(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)$.

Ejemplo 102. Sean μ una partición, y sean t_1 y t_2 μ-tableaux, Entonces

(i) Existe $\pi \in C_t$ tal que $\{t_2\} = \{t_1\} : \pi$ implica

(ii) $e_{t_1} = \pm e_{t_2}$ implica:

(iii) e_{t_1} involucra a $\{t_2\}$

A continuación se da un ejemplo donde (iii) no implica (ii) considere el tableau:

$$t_1 = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$$

Entonces el politabloide de t_1, e_{t_1} es:

$$e_{t_1} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

El politabloide e_{t_1} involucra al tableau

$$t_2 = \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}$$

cuyo politabloide es:

$$e_{t_2} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array}$$

sustrayendo los politabloides e_{t_1} y e_{t_2}:

$$e_{t_3} = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

Entonces $e_{t_1} = e_{t_2} + e_{t_3} \neq \pm e_{t_2}$.

Lema 103. *Sean λ y μ particiones de n. suponga que t es un λ-tableau, que t^* es un μ-tableau y que $\{t^*\}\kappa_t \neq 0$. Entonces $\lambda \trianglelefteq \mu$, y si $\lambda = \mu$ entonces $\{t^*\}\kappa_t = \pm\{t\}\kappa_t$ $(= \pm e_t)$.*

Corolario 104. *Si u es un elemento de M^μ y t es un μ-tableau, entonces $u\kappa_t$ es un multiplo de e_t.*

Definición 105. Sea μ una partición. Definimos una forma bilineal $< \quad , \quad >$ en M^μ dando sus valores en la base de tabloides:

$$< \{t_1\}, \{t_2\} >= \begin{cases} 1 & \text{si } \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0 & \text{si } \{t_1\} \neq \{t_2\} \end{cases}$$

Note que esto define a una forma bilineal simétrica, S_n-invariante y no singular para todo campo. si el campo es $\mathbb{Q}$, esto es un producto interior.

Teorema 106. ***(Teorema del submódulo de James)*** *Si U es un submódulo de M^μ, entonces o bien $S^\mu \leq U$ o $U \leq (S^\mu)^\perp$.*

Teorema 107. *$S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$ es cero o absolutamente irreducible. Más aún, si no es cero, entonces $S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ es el único submódulo maximal de S^μ, y $S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$ es auto-dual.*

Demostración primero vamos a demostrar que $S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ es irreducible.

Por el teorema de correspondencia de módulos dice que si M es un módulo y T y V son submódulos y V es un submódulo tal que $V \leq T$ entonces $0 = V/V \leq T/V \leq M/V$.
Basta probar que $S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ es maximal, en particular vamos a demostrar que es el único submódulo maximal, hay dos casos:

(i) $S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ es igual a S^μ .
En cuyo caso $S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp) = 0$.

(ii) Para todo M módulo de S^μ se tiene que $M \subseteq S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$.
Por demostrar (ii) Sea $M \lneq S^\mu \leq M^\mu$. Entonces por el teorema de James cualquiera de las dos :
1) $S^\mu \leq M$ Pero esto es una contradicción.

2) $M \leq (S^\mu)^\perp$.

Por lo tanto $M \subseteq S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$; y por lo tanto $S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$ es irreducible.

Por demostrar que $S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$ es absolutamente irreducible.

Lema 108. *Si la caracteristica de F es cero, y si Θ es un elemento no cero de $Hom_{FS_n}(S^\lambda, M^\mu)$, entonces $\lambda \trianglerighteq \mu$. si $\lambda = \mu$, entonces /Theta es multiplicación de una constante.*

Teorema 109. ***(Las representaciones ordinarias irreducibles de** S_n**)*** *Los módulos de Specht sobre $\mathbb{Q}$ son auto-duales y absolutamente irreducibles, y dan todas las representaciones ordinarias irreducibles de S_n.*

2.3. La base estandard del módulo de Specht

Definición 110. t es un **tableau standard** si los números se incrementan a lo largo de los renglones y abajo de las columnas de t.

Ejemplo 111. Sea $\mu = (3, 2)$, el μ-tableau:

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$$

es un μ- tableau estandard.

Definición 112. $\{t\}$ es un **tabloide estandard** si hay un tabloide standard en la clase de equivalencia $\{t\}$.

Ejemplo 113. El tabloide

$$\{t\} = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

es un tabloide estandar debido a que el tableau del Ejemplo 111 pertenece a la clase de equivalencia de $\{t\}$.

Definición 114. e_t es un **politaboide standard** si t es estandard.

Ejemplo 115. el politabloide

$$e_t = \begin{array}{ccc} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array} + \begin{array}{ccc} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

es un politabloide estandard

Observación 116. Los tabloides estandard contienen un único tableau estandar. De igual manera los politabloides contienen un sólo tabloide estandard.

Teorema 117. *El conjunto de politabloides e_t tal que t es un μ-tableau estandard forman una base para S^μ.*

2.4. Particiones p-regulares

Definición 118. Sea p un entero positivo. Una partición μ es p-**singular** si para alguna i se tiene

$$\mu_{i+1} = \mu_{i+2} = \cdots = \mu_{i+p} > 0$$

Si μ no es p-singular, decimos que μ es p-**regular**.

Ejemplo 119. Las particiones 2-regulares de 3 son:

$$\begin{array}{c}(3)\\(2,1)\end{array}$$

Las particiones 2-regulares de 4 son:

$$\begin{array}{c}(4)\\(3,1)\end{array}$$

Las particiones 2-regulares de 5 son:

$$\begin{array}{c}(5)\\(4,1)\\(3,2)\end{array}$$

Definición 120. Sea p un entero positivo. Una clase de conjugación de un grupo se llama p-regular si el orden de cualquier elemento en esa clase es primo relativo con p.

Ejemplo 121. Las clases 2-regulares de:

$$\begin{array}{ccc}S_3 & S_4 & S_5\\(\cdot)(\cdot)(\cdot) & (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot) & (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)\\(\cdot\cdot\cdot) & (\cdot\cdot\cdot) & (\cdot\cdot\cdot)\\ & & (\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\end{array}$$

Lema 122. *Sea p un entero positivo. El número de clases p-regulares de S_n es igual al número de particiones p-regulares de n*

Definición 123. Sea μ una partición. Definimos g^{μ} como el máximo común divisor del conjunto $\{< e_t, e_{t^*} >|\ e_t$ y e_{t^*} son politabloides en $S_n\}$. Nota : por convención, se toman unicamente los valores absolutos de los números distintos de cero al tomar máximo común divisor.

Ejemplo 124. Concidere la partición $\mu = (2, 2)$.La base estandar de $S_{\mathbb{Q}}{}^{\mu}$esta constituida por los siguientes politabloides:

$$e_1 = \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array},$$

$$e_2 = \begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{cc}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{cc}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array},$$

Calculando el producto interno de los básicos:

$$\begin{array}{c} < e_1, e_1 >= 4 \\ < e_2, e_2 >= 4 \\ < e_1, e_2 >= 2 \end{array}$$

El máximo común divisor de los productos internos es igual al $m.c.d(4, 4, 2) = 2$.

Y por lo tanto $g^{\mu} = 2$

Lema 125. *Suponga que la partición μ tiene z_j partes iguales a j. Entonces $\prod_{j=1}^{\infty} z_j!$ divide a g^{μ} y g_{μ} divide a $\prod_{j=1}^{\infty}(z_j!)^j$. Note que $0! = 1$, así que estos productos son en realidad finitos.*

Corolario 126. *Si t^* es el μ-tableau que se obtiene invirtiendo el orden de los números en cada renglón de t, entonces $e_{t^*}\kappa_t$ es un múltiplo de e_t, y este múltiplo es primo relativo con p si y sólo si μ es p regular.*

Capítulo 3

Representaciones irreducibles de S_n.

3.1. Representaciones irreducibles de S_n.

Teorema 127. *El número de clases de conjugación de S_n es igual al número de particiones de n, que por lo tanto es igual al número de representaciones irreducibles ordinarias de S_n.*

Teorema 128. *Supongase que S^μ es definida sobre un campo de característica p. Entonces $S^\mu/(S^\mu \cap S^{\mu^\perp})$ es diferente de cero si y sólo si μ es $p-regular$.*

Definición 129. Supongase que la característica de F es p (primo o $= \infty$) y que μ es p-regular. Sea $D_F^\mu = S_F^\mu/(S_F^\mu \cap S_F^{\mu^\perp})$.

Teorema 130. *Supongase que nuestro campo F tiene característica p (primo o $= \infty$). Como μ varía sobre las particiones p-regulares de n, D^μ varía sobre un conjunto completo de irreducibles no equivalentes de FS_n-módulos. Cada D^μ es auto-dual y absolutamente irreducible.*

3.2. Dimensión de D^μ

Teorema 131. *Las dimensiones de las representaciones irreducibles D^μ dentro de S_n sobre un campo de característica p pueden ser calculadas evaluando el p-rango de la matriz se Gram con respecto a su base estandar de S^μ.*

Definición 132. La entrada (i, j) del diagrama de gancho de $[\mu]$ consiste de los (i, j)-nodos delante de él con los nodos para la derecha de éste y los nodos abajo de éste.

Ejemplo 133. Sea $\mu = [2, 2]$. Los tabloides de μ son de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} x & x \\ x & x \end{matrix}$$

La entrada $(1, 1)$ del diagrama de gancho es 3, esto se debe a que contando los nodos que tiene a la dereha y abajo de él, contandolo, son 3.
La entrada $(1, 2)$ del diagrama es 2.
La entrada $(2, 1)$ es 2.
Y por último la entrada $(2, 2) = 1$. Por lo tanto el diagrama de gancho esta dado de la siguiente manera:

3	2
2	1

Ejemplo 134. Sea $\mu = [4, 3, 1]$ los tabloides de μ son de la sigiente forma:

$$\begin{matrix} x & x & x & x \\ x & x & x & \\ x & & & \end{matrix}$$

El diagrama de Gancho es el siguiente:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Teorema 135. *La dimensión de los módulos de Specht S^λ esta dado por:*

$$dim S^\lambda = \frac{n!}{\Pi (\textit{longitud de gancho en } [\lambda])}$$

Definición 136. Supongase que $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_r p^r$ donde para cada i, $0 \leq n_i < p$ y $n_r \neq 0$. Entonces

$$\nu_p(n) = max\{i | n_j = 0 \text{ para } j < i\}.$$

Ejemplo 137. Sea $p = 2$ y n un número impar, entonces:

$$\nu_2(n) = 0.$$

Esto se debe a que un número impar en base 2 se escribe de la siguiente manera $(\ldots 1)_2$, esta forma no tiene ningun cero a la derecha.

Ejemplo 138. El 2 se escribe en base binaria como $(10)_2$. Debido a que esta expresión tiene un cero a la derecha, entonces:

$$\nu_2(2) = 1$$

Ejemplo 139. El 8 en expresión binaria se escribe como $(1000)_2$. Esta expresión tiene tres ceros a la derecha, esto quiere decir que:

$$\nu_2(8) = \nu_2(2^2) = 3.$$

Ejemplo 140. Considere el siguiente número binario $(10100)_2$,en base binaria es el número 20. Esto significa que como el 20 tiene dos ceros en expresión binaria, entonces:

$$\nu_2(20) = 2.$$

Definición 141. El diagrama p-potencia $[\mu]^p$ es obtenido relacionado cada entero h_{ij} en la gráfica de gancho para μ por $\nu_p(h_{ij})$.

Ejemplo 142. La partición $\mu = (8, 5, 2)$ tiene como diagrama de Gancho el siguiente

$$\begin{array}{cccccccc} 10 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & & & & \end{array}$$

El diagrama 3-potencia de μ es:

$$[\mu]^3 = \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \end{array}$$

Ejemplo 143. Considere la permutación de el ejemplo 142. Entonces el diagrama 2-potencia de μ es:

$$[\mu]^2 = \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \end{array}$$

Teorema 144. *Supongase que $\mu = (x, y)$ es p-regular. Entonces S^{μ} definido sobre el campo de p elementos es reducible si y sólo si alguna columna de $[\mu]^p$ contiene dos números diferentes.*

3.3. Dimension de $D^{(n-1,1)}$

En está sección se analizara la dimensión de D^{μ} cuando $\mu = (n-1,1)$ Los siguientes datos se obtuvieron en Symmetrica

$2-regular$	D^{μ}
$[2,1]$	2
$[3,1]$	2
$[4,1]$	4
$[5,1]$	4
$[6,1]$	6
$[7,1]$	6
$[8,1]$	8
$[9,1]$	8
$[10,1]$	10

Proposición 145. *Sea $k = \mathbb{F}_2$.La dimensión de $D^{(n-1,1)}$ Esta dado por*

$$DimD^{\mu} = \begin{cases} n-1 & si\ n\ es\ impar \\ n-2 & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Demostración
Primeramente definimos una correspondencia entre los tabloides y los singuletes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \overline{\underline{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n-1}} \\ \ \underline{n} \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{n}$$

La base del grupo de Specht S^{μ}

$$\begin{array}{l} \overline{\underline{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n}} \\ \ \underline{2} \end{array} - \begin{array}{l} \overline{\underline{2 \quad 3 \quad \cdots \quad n}} \\ \ \underline{1} \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{2} - \overline{1}$$

$$\begin{array}{l} \overline{\underline{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n}} \\ \ \underline{3} \end{array} - \begin{array}{l} \overline{\underline{3 \quad 2 \quad \cdots \quad n}} \\ \ \underline{1} \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{3} - \overline{1}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{l} \overline{\underline{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n-1}} \\ \ \underline{n} \end{array} - \begin{array}{l} \overline{\underline{n \quad 2 \quad \cdots \quad n-1}} \\ \ \underline{1} \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{n} - \overline{1}$$

Vamos a ver cuando $S^{\mu} \cap S^{\mu^{\perp}} = 0$
Sea $x \in S^{mu}$.Entonces x es combinación lineal de la base de S^{mu}

$$x = \alpha_2(\overline{2} - \overline{1}) + \alpha_3(\overline{3} - \overline{1}) + \cdots + \alpha_n(\overline{n} - \overline{1})$$

haciendo producto interno con $\overline{2} - \overline{1}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} < x, \overline{2} - \overline{1} > &= < x, \overline{2} > - < x, \overline{1} > \\ &= \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n \\ &= \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Similarmente se tiene que:

$$\begin{aligned} < x, \overline{3} - \overline{1} > &= < x, \overline{3} > - < x, \overline{1} > \\ &= \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n \\ &= \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < x, \overline{n} - \overline{1} > &= < x, \overline{n} > - < x, \overline{1} > \\ &= \alpha_n + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n \\ &= \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Restando $< x, \overline{2} - \overline{1} > - < x, \overline{3} - \overline{1} >$ tenemos que:

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Similarmente se obtiene al restar $< x, \overline{3} - \overline{1} > - < x, \overline{4} - \overline{1} >$ y asi sucesivamente tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_4 - \alpha_5 &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones no queda que $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha_n = 0$
Como el campo tiene 2 elementos entonces:

$$x = (\overline{2} - \overline{1} + (\overline{3} - \overline{1}) + \cdots + (\overline{n} - \overline{1})$$

Si n es impar:

$$x = \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n}$$

Entonces:

$$< \overline{2} - \overline{1}, \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n} >= 1 + 0 = 1$$

Esto implica que $x \notin S^{\mu^{\perp}}$; $S^{\mu} \cap S^{\mu^{\perp}} = 0$ y por lo tanto $D^{\mu} = S^{\mu}$.

Si n es par:

$$x = \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n}$$

En este caso tenemos que $< \overline{i} - \overline{1}, x >= 0 \quad \forall \quad i = 2, 3, \ldots, n$. Esto quiere decir que $x \in S^{\mu}\perp$; entonces $S^{\mu} \cap S^{\mu^{\perp}}$.
Denotamos $\alpha = \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n}$. entonces $S^{\mu} \cap S^{\mu\perp} = \{0, \alpha\}$. Y por lo tanto :

$$D^{\mu} = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

3.4. Datos obtenidos de Symmetrica

Tabla 146. DIMENSION 2 -REGULAR DE n

2	
μ	$DimD^{\mu}$
[2]	1

3	
μ	$DimD^{\mu}$
[3]	1
[2, 1]	2

4	
μ	$DimD^{\mu}$
[4]	1
[3, 1]	2

5	
μ	$DimD^{\mu}$
[5]	1
[4, 1]	4
[3, 2]	4

6	
μ	$DimD^{\mu}$
[6]	1
[5, 1]	4
[4, 2]	4
[3, 2, 1]	16

7	
μ	$DimD^{\mu}$
[7]	1
[6, 1]	6
[5, 2]	14
[4, 3]	8
[4, 2, 1]	20

8	
μ	$DimD^{\mu}$
$[8]$	1
$[7,1]$	6
$[6,2]$	14
$[5,3]$	8
$[5,2,1]$	64
$[4,3,1]$	40

9	
μ	$DimD^{\mu}$
$[9]$	1
$[8,1]$	8
$[7,2]$	26
$[6,3]$	48
$[6,2,1]$	78
$[5,4]$	16
$[5,3,1]$	40
$[4,3,2]$	160

10	
μ	$DimD^{\mu}$
$[10]$	1
$[9,1]$	8
$[8,2]$	26
$[7,3]$	48
$[7,2,1]$	160
$[6,4]$	16
$[6,3,1]$	198
$[5,4,1]$	128
$[5,3,2]$	200
$[4,3,2,1]$	768

Tabla 147. DIMENSIÓN p-MODULAR DE $D^{(n-2,2)}$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$[2,2]$		1	2	2	2	2	2	2	2
$[2,3]$	4	1	5	5	5	5	5	5	5
$[2,4]$	4	9	8	9	9	9	9	9	9
$[2,5]$	14	13	8	14	14	14	14	14	14
$[2,6]$	14	13	20	19	20	20	20	20	20
$[2,7]$	26	27	27	19	27	27	27	27	27
$[2,8]$	26	34	35	35	35	35	35	35	35
$[2,9]$	44	34	43	44	44	44	44	44	44
$[2,10]$	44	54	43	54	53	54	54	54	54
$[2,11]$	64	64	65	65	53	65	65	65	65
$[2,12]$	64	64	77	77	77	76	77	77	77
$[2,13]$	90	90	90	89	90	76	90	90	90
$[2,14]$	90	103	103	89	104	104	104	104	104
$[2,15]$	118	103	103	119	119	119	119	119	119
$[2,16]$	118	135	135	135	135	135	134	135	135
$[2,17]$	152	151	152	152	152	152	134	152	152
$[2,18]$	152	151	170	170	170	170	170	169	170
$[2,19]$	188	189	188	189	189	189	189	189	189
$[2,20]$	188	208	188	208	209	209	208	209	209
$[2,21]$	230	208	230	208	229	230	230	230	230
$[2,22]$	230	252	252	252	229	252	252	252	251
$[2,23]$	274	274	275	275	275	275	275	275	251
$[2,24]$	274	274	298	299	299	299	299	299	299
$[2,25]$	324	324	298	324	324	324	324	324	324

Capítulo 4

Resultados originales

Al analizar las datos de la tabla 147 del capitulo anterior encontramos la siguiente conjetura:

Conjetura 148. Si $p = 2$ la dimensión de D^μ es la siguiente:

$$DimD^\mu = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{2} - (n-2) & \text{si } n \equiv 0 \text{ mod}(4), \\ \frac{n(n-3)}{2} - 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ mod}(4), \\ \frac{n(n-3)}{2} - (n-1) & \text{si } n \equiv 2 \text{ mod}(4), \\ \frac{n(n-3)}{2} & \text{si } n \equiv 3 \text{ mod}(4). \end{cases}$$

Si p es diferente de 2:

$$DimD^\mu = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{2} - 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ mod}(p), \\ \frac{n(n-3)}{2} - (n-2) & \text{si } n \equiv 2 \text{ mod}(p), \\ \frac{n(n-3)}{2} & \text{en otro caso).} \end{cases}$$

Proposición 149. *Sea $p = 2$ si n es congruente con 3 módulo 4 entonces $S^\mu = D^\mu$.*

Demostración:
El diagrama de gancho para la partición $(n-2, 2)$ es :

$$\begin{matrix} n-1 & n-2 & x & x \\ 2 & 1 & & \end{matrix}$$

Vamos a calcular $\nu_2(n-1)$ y $\nu_2(n-2)$. Por hipótesis tenemos que $n \equiv 3 \pmod 4$, entonces $n-1 \equiv 2 \pmod 4$, de aquí se concluye que $n-1$ es un número par. Así que: $\nu_2(1) = 0$

Por otro lado $n-2 \equiv 1 \pmod 4$, por otro lado $n-3 \equiv 1 \pmod 4$, lo cual implica que $\frac{n-3}{2} \equiv 0 \pmod 4$. Por lo tanto n-2 se escribe en forma binaria de la siguiente manera: $n-2 = (\ldots 01)_2$; lo cual implica que $\nu_2(n-2) = 1$.
entonces:

$$[\mu]^2 = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & x & x \\ 0 & 1 & & \end{array}$$

Como los elementos de las columnas de $[\mu]^2$ son iguales, por el Teorema 144 el módulo S^μ es irreducible y por lo tanto $S^\mu = D^\mu$.

Proposición 150. *Sea $p > 2$ primo. Sea n un número entero, entonces $n-1$ no es congruente con 0 módulo p ni $n-2$ es congruente con 0 módulo p si y sólo si $D^\mu = S^\mu$.*

Demostración:
Por hipótesis tenemos que $n-1$ no es congruente $0 \pmod p$ o n no es congruente $2 \pmod p$ El diagrama de gancho de la partición $(n-2, 2)$ es el siguiente :

$$\begin{array}{cccc} n-1 & n-2 & n-4 & \ldots 1 \\ 2 & 1 & & \end{array}$$

si $n-1$ no es congruente $0 \pmod p$ entonces $\nu_p(n-1) = 0$; porque no existe $j < i$ tal que $n_j = 0$. De manera similar se tiene que $\nu_p(n-2) = 0$. Y como $p > 2$ entonces $\nu_p^(1) = 0$ y $\nu_p(2) = 0$; y por lo tanto el diagrama potencia de μ es :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & & \end{array}$$

Y por el teorema 144, tenemos que : S^μ es irreducible y por lo tanto $S^\mu = D^\mu$

Proposición 151. *Sea $p = 2$. Si n es congruente con 1 módulo 4 entonces $DimD^\mu = \frac{n(n-3)}{2} - 1$.*

Ejemplo 152. El politabloide :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}$$

lo denotamos como 45. De manera similar se denotan todos los tabloides.

Para demostrar la proposición anterior vamos a ver algunos ejemplos: Sea $\mu = (3, 2)$. S_μ esta generado por los siguientes politabloides:

$$\begin{aligned} e_1 &= 45 - 15 - 42 + 12 \\ e_2 &= 35 - 15 - 32 + 12 \\ e_3 &= 34 - 14 - 32 + 12 \\ e_4 &= 25 - 15 - 23 + 13 \\ e_5 &= 24 - 14 - 23 + 13 \end{aligned}$$

Usando la matriz de Gram para calcular la dimensión de D^μ,es decir calculando el rango de dicha matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la dimensión de D^μ es 4; por lo cual $|S^\mu \cap S^{\mu\perp}$.

Vamos a verificar que $x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ elemento de S^μ pertenece a $S^{\mu\perp}$.

$$\begin{aligned} e_1, x &= 0 + 0 + 1 + 1 = 0 \\ e_2, x &= 0 + 0 + 1 + 1 = 0 \\ e_3, x &= 1 + 0 + 0 + 1 \\ e_4, x &= 1 + 0 + 1 + 0 \\ e_5, x &= 1 + 1 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in S^{\mu\perp}$. Lo que implica que $DimD^\mu = 4$.

Para darnos mejor idea vamos a pasar al siguiente número que es congruente con 1 módulo 4, que es $n = 9$.

La base de S^μ es :

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 89 - 19 - 28 + 12\\
e_2 &= 79 - 19 - 27 + 12\\
e_3 &= 78 - 18 - 27 + 12\\
e_4 &= 69 - 19 - 26 + 12\\
e_5 &= 68 - 18 - 26 + 12\\
e_6 &= 67 - 17 - 26 + 12\\
e_7 &= 59 - 19 - 25 + 12\\
e_8 &= 58 - 18 - 25 + 12\\
e_9 &= 57 - 17 - 25 + 12\\
e_{10} &= 56 - 16 - 25 + 12\\
e_{11} &= 49 - 19 - 24 + 12\\
e_{12} &= 48 - 18 - 24 + 12\\
e_{13} &= 47 - 17 - 24 + 12\\
e_{14} &= 46 - 16 - 24 + 12\\
e_{15} &= 45 - 15 - 24 + 12\\
e_{16} &= 39 - 19 - 23 + 12\\
e_{17} &= 38 - 18 - 23 + 12\\
e_{18} &= 37 - 17 - 23 + 12\\
e_{19} &= 36 - 16 - 23 + 12\\
e_{20} &= 35 - 15 - 23 + 12\\
e_{21} &= 34 - 14 - 23 + 12\\
e_{22} &= 29 - 19 - 23 + 13\\
e_{23} &= 28 - 18 - 23 + 13\\
e_{24} &= 27 - 17 - 23 + 13\\
e_{25} &= 26 - 16 - 23 + 13\\
e_{26} &= 25 - 16 - 23 + 13\\
e_{27} &= 24 - 14 - 23 + 13
\end{aligned}
$$

Vamos a verificar que $x = \sum_{i=1}^{22} e_i + e_{24} + e_{26}$, elemento de $S^{\mu\perp}$.

$$\begin{aligned}
< e_1, x >= {} & 0+0+1+0+1+1+0+1+1+1+0+1+1 \\
& +1+1+0+1+1+1+1+1+1+0+0 = 16 = 0 \\
< e_2, x >= {} & 0+0+0+0+1+1+0+1+1+1+0+1+1 \\
& +1+1+0+1+1+1+1+1+1+1+0 = 16 = 0 \\
< e_3, x >= {} & 1+0+0+1+0+1+1+0+1+1+1+0+1 \\
& +1+1+1+0+1+1+1+1+0+1+0 = 16 = 0 \\
< e_4, x >= {} & 0+0+1+0+0+0+0+1+1+1+0+1+1 \\
& +1+1+0+1+1+1+1+1+1+0+0 = 14 = 0 \\
< e_5, x >= {} & 1+1+0+0+0+0+1+0+1+1+1+0+1 \\
& +1+1+1+0+1+1+1+1+0+0+0 = 14 = 0 \\
< e_6, x >= {} & 1+1+1+0+0+0+1+1+0+1+1+1+0 \\
& +1+1+1+1+0+1+1+1+0+1+0 = 16 = 0 \\
< e_7, x >= {} & 0+0+1+0+1+1+0+0+0+0+0+1+1 \\
& +1+1+0+1+1+1+1+1+1+1+0 = 14 = 0 \\
< e_8, x >= {} & 1+1+0+1+0+1+0+0+0+0+1+0+1 \\
& +1+1+1+0+1+1+1+1+1+0+0 = 14 = 0 \\
< e_9, x >= {} & 1+1+1+1+1+0+0+0+0+0+1+1+0 \\
& +1+1+1+1+0+1+1+1+0+0+0 = 14 = 0 \\
< e_{10}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+0+0+0+0+1+1+1 \\
& +0+1+1+1+1+0+1+1+0+1+0 = 16 = 0 \\
< e_{11}, x >= {} & 0+0+1+0+1+1+0+1+1+1+0+0+0 \\
& +0+0+0+1+1+1+1+1+0+0+1 = 12 = 0 \\
< e_{12}, x >= {} & 1+1+0+1+0+1+1+0+1+1+0+0+0 \\
& +0+0+1+0+1+1+1+1+0+0+0 = 12 = 0 \\
< e_{13}, x >= {} & 1+1+1+1+1+0+1+1+0+1+0+0+0 \\
& +0+0+1+1+0+1+1+1+0+1+0 = 14 = 0 \\
< e_{14}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+0+0+0+0 \\
& +0+0+1+1+1+0+1+1+0+0+0 = 14 = 0 \\
< e_{15}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+0+0+0 \\
& +0+0+1+1+1+1+0+1+0+0+1 = 16 = 0 \\
< e_{16}, x >= {} & 0+0+1+0+1+1+0+1+1+1+0+1+1 \\
& +1+1+0+0+0+0+0+0+0+1+1 = 12 = 0 \\
< e_{17}, x >= {} & 1+1+0+1+0+1+1+0+1+1+1+0+1 \\
& +1+1+0+0+0+0+0+0+1+1+1 = 14 = 0 \\
< e_{18}, x >= {} & 1+1+1+1+1+0+1+1+0+1+1+1+0 \\
& +1+1+0+0+0+0+0+0+1+0+1 = 14 = 0 \\
< e_{19}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+0+1+1+1 \\
& +0+1+0+0+0+0+0+0+1+1+1 = 16 = 0 \\
< e_{20}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
& +1+0+0+0+0+0+0+0+1+1+0 = 16 = 0 \\
< e_{21}, x >= {} & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
& +1+1+0+0+0+0+0+0+1+1+1 = 18 = 0 \\
< e_{22}, x >= {} & 1+0+1+0+1+0+0+1+0+0+0+1+0 \\
& +0+0+1+0+1+1+1+1+0+0+0 = 10 = 0 \\
< e_{23}, x >= {} & 1+0+1+0+1+0+0+1+0+0+0+1+0 \\
& +0+0+1+0+1+1+1+1+0+0+0 = 10 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< e_{24}, x >&= 0+1+1+0+0+1+0+0+1+0+0+0+1\\
&+0+0+1+1+0+1+1+1+0+0+0 = 10 = 0\\
< e_{25}, x >&= 0+0+0+1+1+1+0+0+0+1+0+0+0\\
&+1+0+1+1+1+0+1+1+0+0+0 = 10 = 0\\
< e_{26}, x >&= 0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+0+0+0\\
&+0+1+1+1+1+1+0+1+0+0+0 = 10 = 0\\
< e_{27}, x >&= 0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1\\
&+1+1+1+1+1+1+1+1+0+0+0 = 10 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in S^{\mu\perp}$.

Notación 153. llamemos por δ a los politabloides que son de la siquiente forma:

$$e_\delta = \begin{array}{cc} \overline{1 \quad 2} \\ \underline{x \quad y} \end{array} \quad \text{donde } 3 \le x \le y \le n$$

llamemos por γ a los politabloides :

$$e_\gamma = \begin{array}{cc} \overline{1 \quad 3} \\ \underline{2 \quad x} \end{array} \quad \text{donde } 3 \le x \le n-1$$

Observación 154.

$$< e_\gamma, e_{\gamma'} >= 0 \; < e_\gamma, e_{\delta'} >= \begin{cases} 0 & \text{Si } y' = x \text{ y } x' = 3; \\ 1 & \text{Si } y' = x \text{ y } x' \ne 3; \\ 1 & \text{Si } y' \ne x \text{ y } x' = 3; \\ 0 & \text{Si } y' \ne x \text{ y } x' \ne 3; \end{cases}$$

$$< e_\delta, e_{\delta'} >= \begin{cases} 1 & \text{Si } x' \ne x \text{ y } y' \ne y; \\ 0 & \text{Si } x' \ne x \text{ y } y' = y; \\ 0 & \text{Si } x' = x \text{ y } y' = y\ ; \\ 0 & \text{Si } x' = x \text{ y } y' \ne y; \end{cases}$$

$$< e_\delta, e_{\delta'} >= \begin{cases} 0 & \text{Si } x' \ne x \text{ y } x' \ne y; \\ 1 & \text{Si } x' = x; \\ 1 & \text{Si } x' = y; \end{cases}$$

Observación 155. Note que hay $n-3$ e_γ's , por notacíon e_γ son los politabloides de $2x$ donde $3 \leq x \leq n$.
Por otra parte la dimensión de $S^\mu = \frac{n(n-3)}{2}$, y por lo tanto el número de los e'_δ 's es:

$$\frac{n(n-3)}{2} - (n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Ahora calculamos el producto interior $< \sum e_{\delta'}, e_\delta >$. De 154 el producto interno $< e_\delta, e_{\delta'} >= 1$ Si $x' \neq x$ o $y' = y$.vamos a contar cuantos $e_{\delta'}$'s cumplen con esta propiedad; para esto vamos a calculamos su complemento, es decir, cuando $x' = x$ o $y' = y$. si $x' = x$ entonces los politaloides que estamos comparando son los que tienen los tabloides xy y xy' como y' está variando, entonces hay $n-x$ que cumplen esto.
Para $y' = y$ tenemos que los politabloides son xy y $x'y$, como x' está variando entonces hay $y-3$ ocurrencias y hay 1 ocurrencia en la interseccion, entonces: los e_δ's que $x' = x$ o $y' = y$ son $n - x + y - 3 - 1 = n - 4 + (y - x)$.

Entonces la fórmula general de $< \sum e_{\delta'}, e_{delta} >$ pata toda n es :

$$< \sum e_{\delta'}, e_\delta >= \frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n - x + y - 4)$$

Para $n \equiv 1 \pmod 4$ vamos a demostrar que el elemento de S^μ que pertenece a ${S_\mu}^\perp$ es:

$$\lambda = \sum e_\delta + \sum_{i \quad impar} e_{\gamma_i}$$

Primero analizamos la paridad de los términos de la formula general. $frac(n-2)(n-3)2$ es impar , esto se debe a que como $n \equiv 1 \pmod 4$, $n - 3 \equiv 2 \pmod 4$.
Por otro lado $n-4$ es impar .
Esto implica que la paridad de $< \sum e_\delta, e_\delta >$ depende de la paridad de $y - x$.
Si $y - x$ es par entonces $< \sum e_\delta, e_\delta >$ es par. Si $y - x$ es impar entonces $< \sum e_\delta, e_\delta >$ es impar.

Si estamos en un campo de dos elementos:

Si $< \sum e_\delta, e_\delta >= 0$, tenemos tres casos.

x par y y par tomemos un e_δ fijo, $e_\delta = xy - 1y - 2x + 12$.
consideramos $e_{\gamma'} = 2x' + 1x' + 23 + 13$ donde $5 \leq x' \leq n-1$
Vamos analizar el producto interno de $< e_\delta, e_{\gamma'} >= 0$ x par y y
Analizando los terminos que contribuyen en $e_{\gamma'}$
El tabloide $2x'$ contribuiría en el producto interno si $x' = x$ o $x' = 3$. Pero no pueden pasar ninguno de los dos casos, debido a que ; en el primer caso

$x' = x$ porque x es par x' impar; y el segundo caso por notación de los de los e_γ. Por lo mismo la contribución de los tabloides $1x'$ y 23 es 0 Por último la contrbución del tabloide 13 es cero. Por lo tanto $< \sum delta, \lambda >= 0$
x es impar y es impar
Hay dos casos:

1. Cuando $x \neq 3$. El tabloide $2x'$ cuando $x' = x$ hay una ocurrencia. $1x'$ también hay una ocurrencia. Entonces las occurrencias totales son dos. Como estamos en un campo de 2 elementos,la $< e_\delta, \sum_{i \text{ impar}} e_{\gamma_i} >= 0$
   .

2. Cuando $x = 3$
   En este caso $e_\delta = 3y - 1y - 23 + 12$.
   El tabloide $2x'$ no tiene contribución, esto se debe a que tendría $x' = 3$, pero por definición de e_γ, x' debe ser diferente de tres. El término $1x'$ contribuye cuando $x' = y$, es decir 1 vez; en el término 23 una vez. Por lo tanto el producto interno $< \sum_{i \text{ impar}} e_{\gamma_i}, e_\delta >= 2 = 0$.

Por lo tanto $< e_\delta, \lambda >= 0$.

Si la $< \sum \delta, \delta >= 1$. Entonces $x - y$ es impar y se dan las siguientes posibilidades.

- x es par , y es impar $e_{\gamma'} = 2x' + 1x' + 23 + 13$ No hay ninguna contribución en el tabloide $2x'$; hay una en el tabloide $1x'$, cuando $x' = y$;no hay contribución en 23 y 13. Por lo tanto la $\sum_{i=1} e_{\gamma_i}, e_\delta = 1$. Por lo tanto $< \delta, \lambda = 0 >$

- x impar y par.
  Pueden suceder :

  1. $x = 3$ $e_\delta = 3y - 1y - 23 - 12$ $e_{\gamma'} = 2x' - 1x' - 23 - 13$
     No contribuyen los tabloides $2x'$, $1x$, 13. El tabloide 23 contribuye $\frac{n-3}{2}$ (numero impar), ya que y es impar. $< \sum_{i\text{impar}} e_\gamma, e_\delta >= 1$ Por lo tanto $< e_\delta, \lambda >= 0$

  2. $x \neq 3$ El termino $2x'$ interviene una vez cuando $x' = x$; los demas terminos no contribuyen $< \sum_{i \text{ impar}} e_{\gamma_i}, e_\delta >= 1$.

Y por lo tanto $< e_\delta, \lambda >= 0$.

Capítulo 5

GAP

5.1. Programa

En esta sección se hace un programa para encontrar explicitamente los elementos de S^{μ} que pertenecen a $S^{\mu\perp}$:

```
son_perpendiculares := function(x,e)
# e es politabloide, x es combinacion lineal de politabloides

local aux, q;

aux := 0;
for q in x do
aux := aux + Size(Intersection(q,e));
od;

if IsEvenInt(aux) then
return true;
else
return false;
fi;
end;

###————————
```

```
es_ortogonal := function(x,smu)
# smu es una lista de todos los politabloides standard,
# x es un subconjunto de smu, es decir, x es una
# combinacion lineal de politabloides con coeficientes en F2

local flag,y;

flag := true;

for y in smu do
if not(son_perpendiculares(x,y)) then
flag := false;
break;
fi;
od;

return flag;
end;

# # #——————————

crea_smu := function(n)
# Crea al conjunto de politabloides standard de
# tamanio (n-2,2)

local smu, x, y;

smu := [];

for x in [4..n] do
Add(smu,[[1,x],[1,3],[2,3],[2,x]]);
od;

for x in [3..(n-1)] do
for y in [(x+1)..n] do
Add(smu,[[1,2],[1,y],[2,x],[x,y]]);
od;
od;
```

```
return smu;
end;

#——————

smu_ortogonal := function(n)
# Calcula los elementos de smu ortogonales a todo smu

local smu,smu_ortogonal, x, subsets;

smu := crea_smu(n);
smu_ortogonal := [];
subsets := Combinations(smu);

for x in subsets do
if es_ortogonal(x, smu) then
Add(smu_ortogonal, display_poli(x));
fi;
od;

return smu_ortogonal;
end;

# # #——————-

display_poli:= function(x)
# Escribe politabloides simplificados

local resp, y;

resp := [];
for y in x do
Add(resp,y[4]);
od;
```

return resp;

end;

Este programa lo hicimos para ayudarnos a la dimensión de D^μ

5.2. rutinas

Calculamos $S^\mu \cap S^{\mu\perp}$ para $n \equiv 2 \pmod 4$

```
gap> l:= smu_ortogonal(6);
[ [  ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 2, 5 ] ], [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 3, 6 ] ]
 , [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 6 ] ],
[ [ 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ], [ [ 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 2, 6 ] ]
 , [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ], [ [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 6 ] ]
  , [ [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 5 ] ],
 [ [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
 [ [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ] ],
     [ [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ] ]
  , [ [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ] ]
```

```
gap> Sort(l);
gap> l;
[ [  ], [ [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ], [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 3, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 2, 5 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ], [ [ 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 2, 6 ] ]
    , [ [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 3, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 4, 5 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ] ], [ [ 3, 5 ], [ 4, 6 ], [ 2, 6 ] ]
    , [ [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ] ],
  [ [ 3, 6 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 5 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ], [ [ 4, 5 ], [ 3, 6 ], [ 2, 5 ] ]
    , [ [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 4 ], [ 2, 6 ] ],
  [ [ 4, 5 ], [ 4, 6 ], [ 5, 6 ], [ 2, 5 ] ] ]
gap> quit;
```

Al analizar esta corrida encontramos los cinco elementos que son linealmente independientes son.

```
[[ [2,4], [2,5], [2,6] ]
 [ [3,4], [3,5], [3,6] ]
 [ [3,4], [3,5], [4,5], [2,4],[2,6] ]
 [ [3,4], [3,5], [4,6], [5,6]]
 [ [3,4],[3,6], [4,6], [2,6] ]]
```

Capítulo 6

Conclusión

En esta tesis vimos las particiones p-regulares para formar, para formar el módulo de *Specht*, y finalizar analizando las representaciones irredusibles de S_n.

Por medio de Symmetrica analizamos las dimensiiones de las representacioones irredusibles de S_n, por medio de este análisis pudimos encontrar una manera explicita de calcular esta dimensiones.
Esta manera se puede encontrar para cualquier primo; ésta tiene dos casos, cuando $p = 2$ ó $p > 2$.

Algunas de estas formulas se demostraron y las otras se dejan como conjetura, debido a que en estos casos la dimensión de $S^\mu \cap S^{\mu\perp}$ depende de n.

Con el proposito de encontrar una manera de demostrar cuando $p = 2$ las conjeturas construimos un programa que calcula $S^\mu \cap S^{\mu\perp}$. hicimos la corrida del programa cuando $n = 6$ que es el primer caso cuando $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, y despues calculamos la dimensión de $S^\mu \cap S^{\mu\perp}$.Para el siguiente caso ya no se pudo calculaar.

Notamos que si pudieramos demostrar las conjeturas para $p = 5$ ya se demuestran para todos los primos; debido a que el producto interno de dos politabloides es a lo mas 4.

Por último si p es lo suficientemente grandes se pueden calcular casi todas las dimensiones de las representacioines irreducibles de S_n de dichas particiones.

Bibliografía

[1] John B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Addison Wesley, 2002.

[2] Kenneth Hoffman, Ray Kunze. *Álgebra lineal*. Prentice Hall, 1973.

[3] Gordon Douglas James. *The representation theory of the symmetric groups*. Number 682 in Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1978.

[4] Gordon Douglas James and Adalbert Kerber. *The representation theory of the symmetric group*. Encyclopedia of mathematics and its applications; v. 16. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1981.

[5] Luis Valero-Elizondo. Some simple projective Brauer quotients of the simple modules for the symmetric groups in characteristic two. *Journal of Algebra*, 236:796–818, 2001.

Aquí damos una pequeña bibliografía con los libros y artículos que profundizan el material de la tesis.

El libro clásico para el estudio de las representaciones irreducibles de los grupos simétricos es [3]. En este libro se discute la teoría de representaciones tanto clásica (en característica cero) como modular (en característica prima). De este libro obtuvimos la mayor parte de los resultados preliminares que discutimos en esta tesis. Un tratado aún más completo de las representaciones de los grupos simétricos se puede encontrar en [4].

El álgebra lineal que se utiliza en este trabajo es básica, y se puede encontrar por ejemplo en el [2]. La teoría de grupos que usamos también es bastante elemental, y puede hallarse en el [1].

En [5] se calculan dimensiones de algunos módulos simples para los grupos simétricos en característica dos.

Índice alfabético

FS_n-módulo de permutaciones, **92**
G-invariante, **47**
-Conjunto, **6**

absolutamente irreducible, **28**
alto, **66**

base dual, **53**

columna, **66**
complemento, **16**

diagrama, **66**
diagrama conjugado, **71**
domina, **67**

escalares extendidos, **27**
espacio dual de V, **51**
estabilizador por columnas, **77**
estabilizador por renglones, **77**

factor de composición de arriba, **38**
factores de composición, **38**
forma bilineal, **41**

grupo alternante de grado, **3**
grupo simétrico de grado, **1**

homomorfismo, **32**

imagen, **36**
impar, **3**
involucra, **96**
irreducible, **25**

Kernel, **34**

módulo, **8**
módulo cociente, **13**
Módulo de Specht, **96**
módulo regular, **30**
módulo trivial, **24**
matriz de Gram, **45**

núcleo, **34**
No singular, **47**
nodo, **66**

orden lexicográfico, **69**

par, **3**
partición, **5**
partición conjugada, **71**
permutación, **1**
politabloide, **96**
politaboide standard, **114**

regular, **118**
renglón, **66**
representación, **18**, **19**
representación ordinaria, **22**
representación p-modular, **22**

serie de composición, **38**
signo -1, **3**

signo 1, **3**
Simétrica, **47**
simple, **25**
Singular, **47**
singular, **118**
subgrupo de Young, **90**
submódulo, **10**
suma con signo por columnas, **96**
suma directa, **14**
sumando directo, **16**

tableau, **74**
tableau standard, **110**
tabloide, **81**
tabloide estandard, **112**
tipo cíclico, **5**
transposición, **1**