Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Administración óptima de recursos

T E S I S

Que para obtener el título de:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a:

FRANCISCO JAVIER RUBIO ALVAREZ

Asesores:

Dr. Eugenio P. Balanzario
Dra. Tatjana Vukasinac

Morelia Michoacán, Febrero de 2006

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional.
A mis asesores Tatjana y Balanzario por sus útiles consejos y enseñanzas.
A los profesores de la facultad que han sabido formar una escuela de calidad con bajos recursos económicos.
Un saludo a los CHIKWIBOYS y demás compañeros(as) de generación.

Índice general

1. Introducción

Algunos de los problemas que se presentan en las matemáticas y que modelan fenómenos reales requieren de maximizar o minimizar un funcional sujeto a ciertas restricciones, este tipo de problema son concernientes al cálculo de variaciones. El cálculo de variaciones es una teoría general de valores extremos, su nombre es derivado de su técnica: las variaciones, la cual es una herramienta que permite obtener condiciones necesarias para que, ciertos vectores provean de valores extremos a un funcional sujeto a ciertas restricciones.

Se puede decir que el cálculo de variaciones comenzó en 1696 cuando Johann Bernoulli propuso el problema de la Braquistócrona. Este consiste en encontrar la curva a lo largo de la cual una partícula deslizará sin fricción entre dos puntos en el tiempo mínimo bajo la acción de la gravedad. El problema ya había sido formulado por Galileo, pero resuelto incorrectamente (1630 y 1638) al proponer la circunferencia como solución al problema, siendo la cicloide la solución correcta. La solución correcta fue encontrada por Newton, Leibniz, L'Hospital, Johann Bernoulli y James Bernoulli, cuyas soluciones fueron publicadas en la edición de mayo del *Acta Eruditorum* en 1697. Los hermanos Bernoulli quedaron sorprendidos al ver que la solución al problema de la Braquistócrona era la misma que la solución al problema de la Tautócrona, resuelto en 1673 por Christian Huygens mediante métodos geométricos. La Tautócrona es la curva por la cual si una partícula se deslizara libremente (sólo bajo la acción de la gravedad), llegaría a la parte inferior de esa curva en el mismo tiempo sin importar el punto de partida sobre la misma.

En 1728 Johann Bernoulli le propuso a Leonhard Euler el problema de obtener geodésicas (curvas de longitud mínima entre dos puntos sobre una superficie), la solución la obtuvo en el mismo año. Dicho problema inició a Euler en el cálculo de variaciones. En 1734 Euler generalizó el problema de la Braquistócrona para minimizar otras cantidades además del tiempo. Las cantidades a minimizar eran expresadas en forma integral. El método de Euler consistía en igualar a cero la variación de la integral, mediante esto obtenía una ecuación diferencial que debía ser satisfecha por la curva de longitud mínima. A partir de esto encontró que para minimizar cantidades que podían ser expresadas en cierta forma integral, la función del integrando debía cumplir una ecuación diferencial ordinaria, conocida en la actualidad como *ecuación de Euler*. Estos resultados fueron publicados en 1744 en su libro *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Propietate Gaudentes*. La desventaja que tenía su método era que utilizaba diferencias en lugar de derivadas y sumas finitas en lugar de integrales, pero sus fórmulas eran simples y elegantes. Se considera que con la publicación de este libro, el cálculo de variaciones se estableció como una rama de las matemáticas.

El trabajo de Euler atrajo a Joseph Louis Lagrange, quien comenzó a trabajar con el cálculo de variaciones en 1750 cuando tenía 19 años. Su más famosa publicación en el tema fue *E-ssai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.* En 1755 obtuvo un procedimiento general y sistemático para resolver una gran variedad de problemas de minimización y maximización, basándose en el método de Euler pero introduciendo el concepto de variación. En una carta que envió a Euler en agosto de 1755 describió su método y lo denominó el método de variaciones, pero Euler en un artículo presentado a la Academia de Berlín en 1756 lo llamó el cálculo de variaciones (*Elementa Calculi Variationum*) y así fue bautizada esta rama de las matemáticas.

La ecuación de Euler es solo una condición necesaria para un valor extremo de un funcional. El papel de esta ecuación es análoga a que la derivada de una función sea nula en un extremo de la función. Las condiciones necesarias para que un extremo de un funcional sea un máximo o un mínimo fueron encontrados por Legendre en 1786 quien introdujo el concepto de segunda variación de un funcional, que es el análogo a la segunda derivada de una función.

Las condiciones suficientes para un extremo de un funcional son debidas a Jacobi y Karl Weierstrass.

El cálculo de variaciones resurgió en el siglo XX por la importancia que ha tomado la teoría del control óptimo, la cual lo utiliza como herramienta.

La primera vez que se publicó un problema variacional del tipo Lagrange (tratado con el método de variaciones) donde se considera la ”condición de Weiertrass” (condiciones suficientes para un extremo) en una ”formulación de control” es en 1933 en un artículo de L. M. Graves. Dicho pro-blema consiste en encontrar las condiciones necesarias sobre una curva de manera que minimice un funcional integral sujeta a ciertas ecuaciones integrales y condiciones finales.

La teoría del control óptimo surgió ante la dificultad que se encontró para aplicar el cálculo de variaciones cuando a las funciones de control se les permite ser funciones continuas a trozos. El máximo representante de esta teoría es Lev Semyonovich Pontryagin que en 1959 hizo una generalización al método de Hamilton aplicado a la óptica geométrica en la forma del principio de maximización que utiliza el cálculo de variaciones. Dicho principio se convirtió en el fundamento de la teoría de control óptimo.

En la presente tesis trataremos el problema de la administración óptima de diversos recursos, tales como recursos naturales (peces), dinero y energía, estos problemas estarán sujetos a ciertas restricciones naturales las cuales serán establecidas en cada sección. Para la solución de cada problema se aplicarán conceptos del cálculo de variaciones y de la teoría de control óptimo.

En el primer capítulo se trata el problema de la administración óptima de pesquerías, mismo que será analizado con métodos elementales.

En el segundo capítulo se introduce el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange, y utilizando esta herramienta se trata el problema del consumo óptimo durante un periodo de inflación, donde la restricción es una cantidad fija de ahorros terminales deseados. También veremos la interpretación de los multiplicadores de Euler-Lagrange para este problema en específico. En la sección 7 se introduce la ecuación de Euler, misma que una aplicaremos al modelo de administración de pesquerías del capítulo 1 y mostraremos algunos resultados de estos modelos de pesca en la sección 8.

En el tercer capítulo se demuestra el Principio de Máximo de Pontryagin que será utilizado para deducir la ecuación de Euler. Usando este principio se hará una aplicación al problema de administración de pesquerías.

Finalmente en las conclusiones haremos un constraste del análisis presentado en los tres capítulos con la situación del Lago de Pátzcuaro.

CAPíTULO 1

Métodos elementales

1. Administración de Pesquerías sin dificultades extremas

Durante siglos la pesca ha sido una fuente importante de alimento para la humanidad. Debido a la creciente demanda de este alimento, la extracción del recurso pesquero ha ido en aumento, lo que ha ocasionado la disminución de varias especies en ríos, lagos y mares. Con esto, la pesca se ha vuelto un negocio poco redituable. El principal problema es el poco interés de administrar el recurso pesquero de una manera óptima. A continuación trataremos este problema.

Supongamos que se ha sobreexplotado el recurso pesquero y que la población actual de peces es muy pequeña. Queremos determinar el tamaño de una flota pesquera de manera que maximice las ganancias producidas por su pesca. Supondremos que podemos establecer una cota máxima en el número de barcos pesqueros, es decir, no es una pesquería de acceso libre. Se considerará la opción de establecer una cantidad de barcos pesqueros (la cual, en la realidad se establecería mediante la negociación con los pescadores) durante cierto intervalo de tiempo que permita a los pescadores subsistir de las ganancias derivadas de su pesca y además que permita que la población de peces alcance el nivel óptimo durante este mismo periodo.

Consideraremos los siguientes factores

1. t el tiempo [años].
2. $u(t)$ el esfuerzo pesquero [barcos/año].
3. c el costo por día de mantener operando un bote [unidad monetaria/barco].
4. $h(t)$ la velocidad de captura [toneladas/año].
5. p es el precio del pescado [unidad monetaria/tonelada].
6. $P = P(u(t))$ son las ganancias generadas por unidad de tiempo [unidad monetaria/año].

La unidad utilizada $barcos$ puede ser cambiada por el arte de pesca utilizado, por ejemplo anzuelos, redes, etcétera. Esta unidad debe ser estandarizada en el caso de que no se utilice solo un arte de pesca, por ejemplo, un barco puede equivaler a varias lanchas o la red utilizada por el barco ser equivalente a varias redes usadas en una lancha.

Consideraremos constantes el precio del pescado p y los costos c.

En los costos c se deben incluir los costos de oportunidad. El costo de oportunidad es la utilidad máxima que podría haberse obtenido de la inversión de los recursos en cualquiera de sus usos alternativos posibles. Por ejemplo, para un pescador del Lago de Pátzcuaro, los ingresos alternativos son los salarios de los oficios a los que se podría dedicar en lugar de la pesca. En la siguiente tabla se muestran estos salarios

Oficio	Ingreso promedio diario(pesos del 2004)
Pescador	117
Albañil	61.4
Carpintero	57.1
Herrero	59.1
Soldador	60.5
Carnicero	57.1
Tapicero	58.2

Fuente: Comisión Nacional de Salarios Mínimos [6]

El costo de oportunidad es el máximo de estos salarios, es decir 61.4 pesos, dedicándose a la albañilería.

Las ganancias por unidad de tiempo están dadas por

$$P = ph(t) - cu(t). \tag{1,1,1}$$

Sea $\delta > 0$ la tasa de interés bancaria anual y supongamos que al depositar dinero en el banco se acumulan intereses compuestos de manera continua, esto para simplificar el problema. También δ puede representar los efectos de la inflación.

Introduciremos ahora el concepto de valor presente con el fin de poder hacer comparaciones entre flujos de dinero en diferentes periodos a lo largo del tiempo.

Si nos encontramos en el tiempo $t = 0$ y existen flujos de dinero en periodos posteriores, debemos notar que el dinero en cada instante t no tiene el mismo valor. Si consi-deramos una tasa de interés anual δ constante, debemos actualizar estos flujos de dinero con la tasa δ.

Una unidad monetaria invertida durante un año se transforma en $e^{\delta T}$ unidades monetarias con $T = 1$ año, es decir 1 unidad monetaria hoy es equivalente que $e^{\delta T}$ dentro de un año. En consecuencia 1 unidad monetaria dentro de un año equivale a $e^{-\delta T}$ unidades monetarias hoy. De manera que para actualizar un flujo futuro, en el siguiente período, debemos multiplicarlo por $e^{-\delta}$. Como los intereses se acumulan de manera continua tenemos que el valor presente de una unidad monetaria en el instante t está dada por $e^{-\delta t}$. Así, el valor presente de $\mathcal{X}$ unidades monetarias en el instante t es $\mathcal{X}e^{-\delta t}$.

Para una secuencia de pagos $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_N$ hechos en los años $0, 1, ..., N$ respectivamente, el *valor presente total* está dado por

$$\sum_{k=0}^{N} \mathcal{X}_k e^{-\delta k}.$$

Similarmente, el valor presente de un flujo continuo de pagos o ingresos en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$ está dado por

$$\int_0^T \mathcal{X}(t) e^{-\delta t} \, dt.$$

Regresando al problema, tenemos que el valor presente de las ganancias tomado al tiempo t está dado por

$$e^{-\delta t}[ph(t) - cu(t)].$$

Por lo tanto, considerando un tiempo de pesca indefinido (es decir a largo plazo), el valor presente de total las ganancias producidas por la flota pesquera es

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}[ph(t) - cu(t)] \, dt \, .$$

Sea $N(t)$ la población de la especie de peces dada en el instante t. Consideraremos funciones de pesca de la forma

$$h(t) = qu(t)N(t), \tag{1,1,2}$$

con $0 \leq q \leq 1$, medido en $[1/barcos]$. El coeficiente q representa la eficiencia del proceso de pesca, este coeficiente depende de la tecnología utilizada para la pesca (redes, anzuelos, alguna tecnología extra). Se calcula utilizando varias técnicas estadísticas para eliminar los efectos de factores que se sabe que no están relacionados con la abundancia de la población. Se toman en cuenta efectos asociados a la escala de operación de cada barco (horas anuales de pesca), la potencia del motor, capacidad de almacenamiento, la antigüedad relativa, etcétera.

Supondremos además que la población tiene un crecimiento logístico en ausencia de pesca. Por lo tanto

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = R\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) - h(t), \tag{1,1,3}$$

donde R se denomina la razón de crecimiento intrínseco, medida en [1/año], es decir, la razón de crecimiento en ausencia de pesca y depende de la especie y sus depredadores. K es el nivel de saturación (también llamado capacidad de carga), es decir, el máximo de peces (en toneladas) que puede sostener el ambiente para la especie dada.

Nuestro problema de control óptimo consiste entonces en encontrar una función $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que maximice el valor presente total de las ganancias

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} u(t)[\, pqN(t) - c\,]\, dt, \tag{1,1,4}$$

sujeto a la restricción

$$\dot{N} = R\, N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} - \frac{q}{R} u(t)\right).$$

Supondremos además que la población inicial está dada por

$$N(0) = \frac{K}{M}, \tag{1,1,5}$$

donde M es un número real positivo. Consideraremos funciones $u(t)$ compuestas, las cuales limitarán el ritmo de captura a la cantidad mínima admisible U_0 durante un periodo de tiempo s, permitiendo que la población llegue hasta un tamaño óptimo, es decir, el tamaño de población que va a maximizar el funcional J y a la vez que los pescadores subsistan de las ganancias generadas de esta pesca. Después se aplicará un número constante de botes U_1 que permita que la población alcance el equilibrio. Por lo tanto consideraremos funciones de la forma

$$u(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t \leq s, \\ \\ U_1, & s < t \leq \infty. \end{cases} \tag{1,1,6}$$

Ahora tenemos que calcular el tiempo s y el número de botes U_1 de manera que determinen un máximo para J. Supondremos que en el largo plazo, la población de peces alcanza un equilibrio (es decir $\dot{N} = 0$, para $s < t < \infty$). Entonces resolviendo las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada caso obtenemos

$$N(t) = \begin{cases} \frac{K\alpha}{R - \beta e^{-\alpha t}}, & 0 \leq t \leq s, \\ \\ K[1 - \frac{q}{R} U_1], & s < t \leq \infty, \end{cases} \tag{1,1,7}$$

donde

$\alpha = R - qU_0,$

$\beta = R - MR + MqU_0.$

Debido a que la población varía de manera continua, se debe cumplir en $t = s$ que

$$\frac{K\alpha}{R - \beta e^{-\alpha s}} = K[1 - \frac{q}{R}U_1].$$

De aquí podemos obtener s en términos de U_1

$$s(U_1) = \frac{1}{\alpha}\log\left[\frac{\beta(R - qU_1)}{R(R - qU_1 - \alpha)}\right]. \tag{1,1,8}$$

De igual manera, escribimos J en términos de U_1

$$J(U_1) = \int_0^{s(U_1)} e^{-\delta t}U_0[\,pqN(t) - c\,]\,dt + \int_{s(U_1)}^{\infty} e^{-\delta t}U_1[\,pqN(t) - c\,]\,dt.$$

Sustituyendo $N(t)$ para el segundo intervalo de tiempo

$$J(U_1) = \int_0^{s(U_1)} e^{-\delta t}U_0[\,pqN(t) - c\,]\,dt + \frac{1}{\delta}pqKU_1e^{-\delta s(U_1)}\left[1 - \frac{U_1}{R}q - b\right], \tag{1,1,9}$$

donde

$$b = \frac{c}{pqK}.$$

Derivando $J(U_1)$ respecto a U_1 e igualando a cero esta derivada podemos obtener el óptimo U_1^*. Es conveniente calcular las raíces mediante algún algoritmo numérico, debido a la complejidad de la expresión resultante de derivar $J(U_1)$. Con esto obtenemos el tiempo de recuperación óptimo de la población

$$s^* = s(U_1^*).$$

La condición para continuar en el negocio es que

$$\frac{1}{\delta}pqKU_1e^{-\delta s(U_1^*)}\left[1 - \frac{U_1}{R}q - b\right] \geq 0, \tag{1,1,10}$$

para $s < t < \infty$, es decir, ganancias no negativas. No consideramos el periodo $0 \leq t \leq s$ ya que durante este periodo se aplicó un esfuerzo mínimo U_0 el cual es establecido solo para que los pescadores subsistan de la pesca generada con este esfuerzo y permitir que la población llegue al tamaño óptimo. Debido a que los parámetros del problema son positivos, la condición para permanecer en el negocio de la pesca es

$$b \leq 1 - \frac{U_1}{R}q.$$

Se toma en cuenta el caso de que

$$\frac{1}{\delta}pqKU_1e^{-\delta s(U_1^*)}\left[1-\frac{U_1}{R}q-b\right]=0, \qquad (1,1,11)$$

debido a que dentro de los costos c, también se incluyeron los costos de oportunidad de usar recursos en la pesca en lugar de cualesquiera otra mejor alternativa. Es decir, el caso $(1,1,11)$ indica que el pescador está obteniendo una ganancia neta igual a su costo de oportunidad en el intervalo de tiempo (s,∞).

2. Administración pesquera y equilibrio bionómico

En esta sección introduciremos algunos factores económicos al problema de administración pesquera propuesto en la sección anterior. Primero calcularemos el esfuerzo pesquero necesario para que haya un equilibrio bionómico, es decir, una población y una economía en equilibrio. Enseguida calcularemos el esfuerzo pesquero necesario para maximizar la tasa de ganancias y haremos una comparación entre ellos. Estos cálculos se harán bajo la suposición de que $\delta=0$.

ESFUERZO PESQUERO NECESARIO PARA EL EQUILIBRIO BIONÓMICO

Supondremos que la población se encuentra en equilibrio, esto es

$$\dot{N}=RN\left\{1-\frac{N}{K}\right\}-uqN=0, \qquad (1,2,1)$$

donde uq representa la razón de extracción de población y lo consideraremos constante.

Supongamos que el precio p por unidad de biomasa pescada es constante, entonces la expresión

$$GT=(uqN)p,$$

representa las ganancias totales resultantes del esfuerzo u. Además supongamos que el costo total CT es proporcional al esfuerzo ejercido

$$CT=c\cdot u,$$

donde c representa el costo de operación mas el costo de oportunidad. Supondremos que los costos igualan a las ganancias en todo instante, es decir

$$GT - CT = uqpN - uc = 0, \tag{1,2,2}$$

De $(1, 2, 2)$ se deduce que $pqN = c$. Entonces estamos analizando el caso en el que el negocio de la pesca no es atractivo, así los pescadores pueden preferir dedicarse a alguna actividad alternativa y las personas que no se dedican a la pesca no lo ven como una opción viable. De esto deducimos que

$$u^* = \frac{R}{q}\left(1 - \frac{c}{pqK}\right). \tag{1,2,3}$$

Con esto hemos encontrado la tasa de extracción necesaria para tener un equilibrio bionómico (equilibrio de la población y económico).

ESFUERZO PESQUERO NECESARIO PARA MAXIMIZAR LA TASA DE GANANCIAS

Supongamos que aplicamos un esfuerzo pesquero constante u. Entonces la expresión

$$\tilde{J}(u) = \frac{uq}{T}\int_0^T [\,pN(t) - \frac{c}{q}\,]\,dt, \tag{1,2,4}$$

representa la tasa de ganancias tomada al tiempo T, en el caso en que el valor presente del dinero es igual para cualquier instante T. Es decir, estamos suponiendo que $\delta = 0$, con esto podemos eliminar el factor $e^{-\delta t}$ del funcional de ganancias $J(u)$ de la sección anterior.

Consideraremos ahora el problema de maximizar el funcional de la tasa de ganancias al largo plazo

$$\tilde{J}(u) = \lim_{T\to\infty}\frac{uq}{T}\int_0^T [\,pN(t) - \frac{c}{q}\,]\,dt, \tag{1,2,5}$$

sujeto a

$$\tfrac{\dot{N}}{N} = R\left(1 - \tfrac{N}{K}\right) - uq, \qquad N(0) = N_0.$$

Esto lo podemos reescribir en la forma

$$\frac{\dot{N}}{N} = R_1\left(1 - \frac{N}{K_1}\right),$$

en donde

$$R_1 = R - uq, \qquad K_1 = K\left(1 - \tfrac{uq}{R}\right) \;\text{ y }\; N(0) = N_0.$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos

$$N(t) = \tfrac{K_1}{1 + C_1 e^{-r_1 t}} \quad \text{en donde} \quad C_1 = \tfrac{K_1 - N_0}{N_0}.$$

Sustituyendo $N(t)$ e integrando vemos que cuando $T \to \infty$

$$\tilde{J}(u) = uq\left(pK_1 - \frac{c}{q}\right) = uq\left\{pK\left(1 - \frac{uq}{R}\right) - \frac{c}{q}\right\}. \tag{1,2,6}$$

Notemos que $(1, 2, 6)$ es una ecuación de segundo grado. Derivando $(1, 2, 6)$ e igualando a cero obtenemos que el máximo de $\tilde{J}(u)$ ocurre en

$$u^* = \frac{R}{2q}\left(1 - \frac{c}{pqK}\right). \tag{1,2,7}$$

Por lo tanto la tasa de extracción que maximiza la tasa de ganancias es la mitad de la tasa de extracción que produce un equilibrio bionómico.

Notemos que si los costos c son muy pequeños (lo que sucede en lugares donde se pesca de manera primitiva como en el Lago de Pátzcuaro), entonces la tasa de extracción que produce un equilibrio bionómico es aproximadamente la tasa de crecimiento, esto es

$$qu^* \approx R.$$

Mientras que la tasa de extracción que maximiza la ganancias es aproximadamente la mitad de la tasa de crecimiento, es decir

$$qu^* \approx \frac{R}{2}.$$

En la pesca libre, los pescadores aplican el mayor esfuerzo posible ya que buscan la mayor ganancia individual (la ideología es: ”si no lo pesco yo, alguien mas lo pescará”), lo cual conduce en el mejor de los casos a un equilibrio bionómico, esto es, sin ganancias (incluyendo los costos de oportunidad) y con una población en equilibrio. Es por esto que los pescadores aunque aplican un gran esfuerzo pesquero ven más atractivas actividades laborales alternativas y muchos de ellos sólo se dedican a la pesca por temporadas.

La solución a este problema se encuentra en que los pescadores trabajen en conjunto y con esto se comporten como un único dueño que busca maximizar sus ganancias administrando el recurso pesquero.

CAPíTULO 2

Principios variacionales y aplicaciones

En este capítulo veremos el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange aplicado a funcionales. Dicho teorema establece las condiciones necesarias para la optimización restringida de un funcional. Este resultado es la base del cálculo de variaciones.

Muchos problemas de ciencia, tecnología y economía pueden ser formulados como problemas del cálculo de variaciones. En la administración de recursos surgen cantidades que tenemos que maximizar o minimizar para un manejo óptimo de estos recursos. Si dichas cantidades pueden ser expresadas como un funcional restringido a ciertas condiciones naturales, entonces podemos aplicar el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange y deducir las decisiones que debemos tomar para optimizar estas cantidades. En la sección 3 aplicaremos el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange a un problema de ahorro y consumo.

Comenzaremos introduciendo un concepto fundamental: la variación de Gâteaux de un funcional.

1. Variación de Gâteaux

DEFINICIÓN 1. *Un funcional F es un operador con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar K; esto es:*

$$F : D(F) \subset X \longrightarrow K. \qquad (2,1,1)$$

TEOREMA 2.1. *(Teorema de la función inversa) Sean $f \in C^1$ una función definida en un conjunto abierto S de E_n (espacio euclídeo n-dimensional) y $T = f(S)$. Supongamos que el Jacobiano $J_f(x_0) \neq 0$ en algún punto x_0 de S. Existen entonces una función g determinada de forma única y dos conjuntos abiertos $A \subset S$ y $B \subset T$ tales que:*

1. $x_0 \in A$ *y* $f(x_0) \in B$

2. $B = f(A)$

3. f *es inyectiva en* A

4. g *está definida en* B, $g(B) = A$, *y* $g[f(x)] = x$ *para todo* $x \in A$

5. *$g \in C^1$ en B.*

DEFINICIÓN 2. *Sea F un funcional definido sobre un subconjunto abierto D de un espacio vectorial normado X, se dice que F tiene variación de Gâteaux denotada $\delta F(x;y)$ si el siguiente límite existe para todo $y \in X$:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x+\epsilon y) - F(x)}{\epsilon} = \delta F(x;y). \tag{2,1,2}$$

Diremos simplemente variación para designar la variación de Gâteaux.

El siguiente teorema nos proporciona un condición necesaria que debe cumplir cualquier vector que sea un extremo local de un funcional.

TEOREMA 2.2. *Si un funcional F definido sobre un subconjunto abierto D contenido en un espacio vectorial normado X tiene un extremo local en un vector $x^* \in D$, y F tiene variación en x^*, entonces la variación de F se anula en x^*, esto es:*

$$\delta F(x^*;y) = 0, \tag{2,1,3}$$

para todo y $\in X$.

Enseguida veremos algunas propiedades de la variación de Gâteaux

• Notemos que el significado de la variación $\delta F(x;y)$ es la derivada direccional de F en la dirección del vector y, esto es:

$$\delta F(x;y) = \left. \frac{dF(x+\epsilon y)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \tag{2,1,4}$$

• Si F tiene variación en x, entonces:

$$\delta F(x;0) = 0, \tag{2,1,5}$$

este resultado se obtiene simplemente sustituyendo $y = 0$ en la definición de variación.

• Para cualquier número a

$$\delta F(x;ay) = \left. \frac{dF(x+\epsilon a y)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = a \left. \frac{dF(x+\sigma y)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = a\delta F(x;y), \tag{2,1,6}$$

tomando $\sigma = \epsilon a$ y usando regla de la cadena.

2. Teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange

Sea X un espacio vectorial normado y sea D un subconjunto abierto de X, y sean F y R dos funcionales que están definidos y tienen variaciones en D. A continuación se tratará el problema de encontrar vectores extremos x^* para F entre todos los vectores x en D que cumplen la restricción:

$$R(x) = r. \tag{2,2,1}$$

DEFINICIÓN 3. *Sea f una función real definida en un conjunto S de E_n. Si $x \in S$ y hay una vecindad $N(x)$ tal que*

$$f(y) \leq f(x), \quad \forall\ y \in N(x) \cap S,$$

se dice que f tiene un máximo local en el punto x.

DEFINICIÓN 4. *Sea F un funcional con variación definida sobre un subconjunto abierto D de un espacio vectorial normado X, se dice que la variación de F es débilmente continua en x si para todo $z \in D$ se cumple*

$$\lim_{y \to x \in X} \delta F(y; z) = \delta F(x; z). \tag{2,2,2}$$

Denotaremos

$$D[R = r] = \{x \in D : R(x) = r\}. \tag{2,2,3}$$

TEOREMA 2.3. *(Teorema de los Multiplicadores de Euler-Lagrange). Sean F y R funcionales definidos sobre un subconjunto abierto D de un espacio vectorial normado X, y sea x^* un vector extremo local en $D[R = r_0]$ para F, donde r_0 es algún número fijo para el cual $D[R = r_0]$ es no vacío. Supongamos que las variaciones de F y R son débilmente continuas en una vecindad de x^*. Entonces se cumple al menos una de las dos posibilidades siguientes:*

1. *La variación de R se anula en x^*, esto es:*

$$\delta R(x^*; y) = 0, \tag{2,2,4}$$

para todo $y \in X$.

2. *Existe λ constante tal que:*

$$\delta F(x^*; y) = \lambda\, \delta R(x^*; y), \tag{2,2,5}$$

para todo $y \in X$.

Demostración.

Supongamos que $(2,2,4)$ no se cumple en general, esto nos dice que existe $y_0 \in X$ tal que:

$$\delta R(x^*; y_0) \neq 0. \tag{2,2,6}$$

Ahora probaremos que entonces se debe cumplir $(2,2,5)$ necesariamente para todo vector $y \in X$. De hecho $(2,2,5)$ se sigue directamente de $(2,2,6)$ y de la relación

$$\det \begin{pmatrix} \delta F(x^*; y) & \delta F(x^*; z) \\ \delta R(x^*; y) & \delta R(x^*; z) \end{pmatrix} = 0, \tag{2,2,7}$$

la cual se deberá cumplir para cualquier par de vectores y y z en X. Ciertamente, si $(2,2,7)$ se cumple para cualquier y y z en X, podemos tomar $z = y_0$, siendo y_0 el vector que cumple $(2,2,6)$. Si expandimos el determinante de $(2,2,7)$ y dividimos por $\delta R(x^*; y_0)$ encontramos que:

$$\delta F(x^*; y) = \lambda\, \delta R(x^*; y), \tag{2,2,8}$$

para todo $y \in X$, denotando:

$$\lambda = \frac{\delta F(x^*; y_0)}{\delta R(x^*; y_0)}.$$

Dado que $(2,2,8)$ es el resultado deseado, se sigue que sólo necesitamos probar $(2,2,7)$. Claramente $(2,2,7)$ se cumple si y o z son el vector cero de X, ya que esto nos implica que cada variación es cero y por consecuencia el determinante es nulo. Por lo tanto, sólo consideraremos vectores no cero.

Así, sean y y z vectores fijos no cero en X, y sean α y β reales lo suficientemente pequeños para que el vector

$$x^* + \alpha y + \beta z,$$

se encuentre en el conjunto abierto D (α y β existen debido a que D es abierto).

Consideraremos los valores de los funcionales :

$$F(x^* + \alpha y + \beta z), \\ R(x^* + \alpha y + \beta z), \tag{2,2,9}$$

como funciones de los números α y β definidos en algún disco abierto:

$$U = \{(\alpha, \beta) : \alpha^2 + \beta^2 < \rho^2\},$$

centrado en el origen del plano $\alpha\beta$. Sin pérdida de generalidad elegimos el radio ρ suficientemente pequeño para que las variaciones de F y R sean débilmente continuas en cada vector en el correspondiente conjunto abierto en D:

$$\mathcal{U} = \{x^* + \alpha y + \beta z : (\alpha, \beta) \in U\}. \tag{2,2,10}$$

Usaremos las expresiones $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ y $\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ para denotar los valores de los funcionales dados por $(2, 2, 9)$ donde fueron considerados como funciones de α y β, esto es:

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) = F(x^* + \alpha y + \beta z), \\ \mathcal{R}(\alpha, \beta) = R(x^* + \alpha y + \beta z), \tag{2,2,11}$$

para cualquier punto (α, β) contenido en el disco U centrado en el origen del plano $\alpha\beta$.

Consideremos el mapeo:

$$f = \mathcal{F}(\alpha, \beta), \\ r = \mathcal{R}(\alpha, \beta), \tag{2,2,12}$$

que mapea al disco U del (α, β)-plano en el (f, r)-plano. El origen en el (α, β)-plano es mapeado al punto $(f, r) = (F(x^*), r_0)$ dado que x^* es un vector extremo en $D[R = r_0]$ para F.

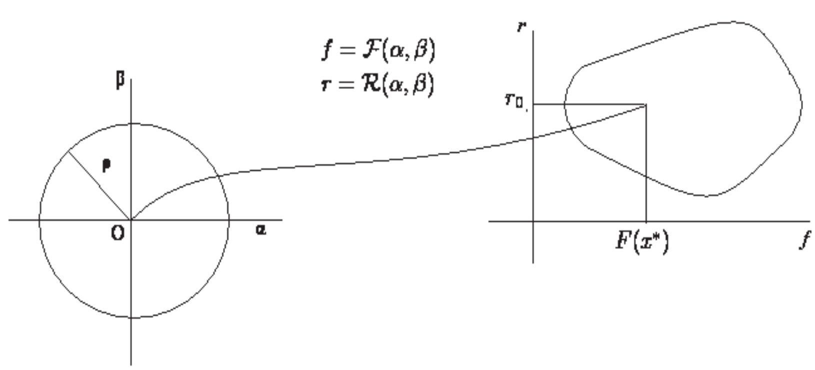

FIGURA 1

Queremos considerar la posibilidad de resolver (invirtiendo) las ecuaciones de $(2, 2, 12)$ en una vecindad del origen $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ para obtener α y β como funciones de f y r en una vecindad del punto $(f, r) = (F(x^*), r_0)$. Esto es posible de acuerdo al teorema de la función inversa si las funciones $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ y $\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ definidas por $(2, 2, 11)$ son continuamente diferenciables (en el sentido usual del cálculo) cerca de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ y tienen determinante Jacobiano distinto de cero:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2,2,13}$$

en $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Para checar si el teorema de la función inversa es aplicable calcularemos las derivadas parciales que aparecen en la matriz Jacobiana. Por ejemplo,

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{F}(\alpha + \epsilon, \beta) - \mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\epsilon}, \tag{2,2,14}$$

si el límite existe. En el presente caso, encontramos con $(2, 2, 11)$ que :

$$\frac{\mathcal{F}(\alpha + \epsilon, \beta) - \mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\epsilon} = \frac{F(x^* + \alpha y + \beta z + \epsilon y) - F(x^* + \alpha y + \beta z)}{\epsilon},$$

de $(2, 1, 2)$ se sigue que:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \delta F(x^* + \alpha y + \beta z; y).$$

Las otras derivadas parciales que aparecen en la matriz Jacobiana se calculan de manera similar, resultando:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta F(x^* + \alpha y + \beta z; y) & \delta F(x^* + \alpha y + \beta z; z) \\ \delta R(x^* + \alpha y + \beta z; y) & \delta R(x^* + \alpha y + \beta z; z) \end{pmatrix}. \tag{2,2,15}$$

De $(2, 2, 15)$ y el hecho de que las variaciones de F y R son débilmente continuas en $\mathcal{U}$ se sigue que las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ definidas por $(2, 2, 11)$ son continuamente diferenciables en el sentido usual del cálculo en U. Además de acuerdo con $(2, 2, 15)$, el determinante Jacobiano del mapeo $(2, 2, 12)$ evaluado en el origen $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ está dado por :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{R}(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \Bigg|_{\alpha=\beta=0} = \det \begin{pmatrix} \delta F(x^*; y) & \delta F(x^*; z) \\ \delta R(x^*; y) & \delta R(x^*; z) \end{pmatrix}.$$

De manera que $(2, 2, 13)$ se cumple en $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ si y sólo si se cumple

$$\det \begin{pmatrix} \delta F(x^*; y) & \delta F(x^*; z) \\ \delta R(x^*; y) & \delta R(x^*; z) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2,2,16}$$

Finalmente, por el teorema de la función inversa se sigue que: la ecuación $(2,2,12)$ puede ser resuelta o invertida cerca del origen para obtener α y β como funciones de f y r si $(2,2,16)$ se cumple.

Ahora veremos que si $(2,2,16)$ se cumple, entonces $F(x^*)$ no puede ser un valor extremo en $D[R=r_0]$, lo cual es una contradicción (con lo que se llega al resultado esperado $(2,2,7)$).

Así supongamos que $(2,2,16)$ es cierto, y sean

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathcal{A}(f,r),\\ \beta &= \mathcal{B}(f,r),\end{aligned} \tag{2,2,17}$$

los mapeos inversos resultantes para $(2,2,12)$ dados por el teorema de la función inversa. La existencia de las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ está garantizada por el teorema de la función inversa, además estas funciones están definidas y son continuas para todos los puntos (f,r) en alguna vecindad V centrada en el punto $(F(x^*),r_0)$ en el (f,r)-plano y por definición satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{A}(f,r),\mathcal{B}(f,r)) &= f,\\ \mathcal{R}(\mathcal{A}(f,r),\mathcal{B}(f,r)) &= r,\end{aligned} \tag{2,2,18}$$

para todo (f,r) en V. Además se cumple que $\mathcal{A}(f,r)=\mathcal{B}(f,r)=0$ en el punto $(f,r)=(F(x^*),r_0)$. Consideremos ahora algún punto $(f^*,r_0)\in V$ y consideremos el correspondiente punto (α^*,β^*) en el (α,β)-plano dado por

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \mathcal{A}(f^*,r_0),\\ \beta^* &= \mathcal{B}(f^*,r_0).\end{aligned} \tag{2,2,19}$$

Entonces por $(2,2,11)$, $(2,2,18)$ y $(2,2,19)$ encontramos que:

$$F(x^*+\alpha^*y+\beta^*z)=\mathcal{F}(\alpha^*,\beta^*)=\mathcal{F}(\mathcal{A}(f^*,r_0),\mathcal{B}(f^*,r_0))=f^*,$$

$$R(x^*+\alpha^*y+\beta^*z)=\mathcal{R}(\alpha^*,\beta^*)=\mathcal{R}(\mathcal{A}(f^*,r_0),\mathcal{B}(f^*,r_0))=r_0.$$

Así con esto, eligiendo el número f^* suficientemente cerca del valor $F(x^*)$ con $f^*>F(x^*)$ o $f^*<F(x^*)$ (está permitido elegir de esta forma los valores ya que $\mathcal{A}$ está definida en una vecindad del punto $(F(x^*),r_0)$) podemos obtener puntos correspondientes $x^*+\alpha^*y+\beta^*z$ en $D[R=r_0]$ arbitrariamente cerca del punto x^*, con el valor $F(x^*+\alpha^*y+\beta^*z)$ mayor o menor que $F(x^*)$. Esto contradice el hecho de que x^* es un vector extremo local en $D[R=r_0]$ para F y por lo tanto probamos que $(2,2,16)$ no se puede cumplir. Dado que y y z eran vectores no cero arbitrarios en X, esto prueba que $(2,2,7)$ se cumple y con esto se completa la demostración. $\square$

3. Una política de consumo óptimo con restricción de ahorros terminales

En esta sección consideraremos el siguiente problema de planeación de ahorro: un individuo desea ahorrar cierta cantidad fija de dinero en un periodo de tiempo fijo, este periodo de ahorro se considerará como un periodo de inflación. Esta persona tiene un ingreso anual, el cual es conocido en función del tiempo al menos durante el tiempo de ahorro. Además tiene una cantidad de ahorros iniciales invertidos (puede ser en el banco, sociedades de inversión, etcétera), estos ahorros iniciales y ahorros subsecuentes le producen ciertas ganancias (intereses por ejemplo). Consideraremos que el ahorrador tiene total disponibilidad sobre sus ahorros, es decir, pueden ser retirados en cualquier momento.

Ahora introduciremos un factor humano al problema, el objetivo será encontrar una función de consumo que permita el ahorro terminal deseado y esta función maximice la satisfacción derivada del consumo de los recursos restantes que no fueron invertidos.

Denotaremos por $S = S(t)$ a los ahorros acumulados e invertidos al tiempo t, estos ahorros están afectados por tres factores:

1. Los ingresos anuales $I = I(t)$. Donde $I(t)$ es una función conocida al menos en el periodo de ahorro y puede ser usada para incrementar los ahorros.
2. Los intereses o ganancias anuales $R = R(t)$ los cuales son generados por los ahorros y pueden ser reinvertidos.
3. El consumo anual $C = C(t)$ que disminuye los ahorros.

Todos estos medidos en [unidades monetarias/año]. Para simplificar supondremos que todas estas cantidades varían de manera continua a través de cada año (por ejemplo intereses compuestos a velocidad constante), además el consumo puede cambiar día a día.

Estas tres cantidades se pueden relacionar por medio de la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{S} = I + R - C. \qquad (2,3,1)$$

Gráficamente

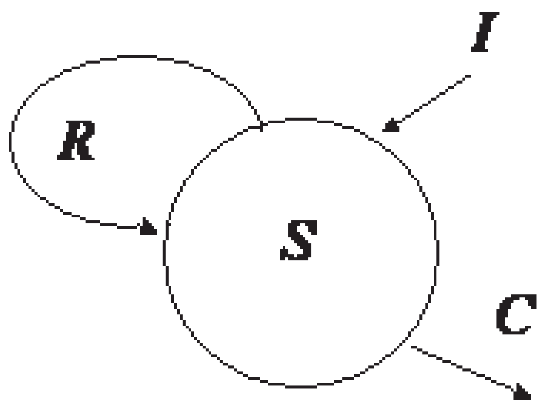

FIGURA 2

Denotaremos los ahorros iniciales por

$$S(0) = S_0, \tag{2,3,2}$$

la cual es una constante no negativa.

Para simplificar, consideraremos que los intereses R son proporcionales a la cantidad de ahorros

$$R = \alpha S, \tag{2,3,3}$$

con $\alpha > 0$.

Sustituimos $(2,3,3)$ en $(2,3,1)$ y obtenemos :

$$\dot{S} - \alpha S = I - C,$$

cuya solución es:

$$S(t) = e^{\alpha t} S_0 + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha\tau} [I(\tau) - C(\tau)]\, d\tau. \tag{2,3,4}$$

Denotaremos por $S(T) = S_T$ a la cantidad de ahorros finales deseados la cual es una constante no negativa y T es el tiempo total de ahorro. Evaluando $(2,3,4)$ en $t = T$ encontramos la siguiente condición:

$$\int_0^T e^{-\alpha t} C(t)\, dt = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt, \tag{2,3,5}$$

la cual deberá ser satisfecha por cualquier función de consumo admisible $C(t)$. Notemos que la parte derecha de $(2,3,5)$ es una constante ya que las cantidades que aparecen son todas conocidas. Definiremos el siguiente funcional sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}[0,T]$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [0,T])

$$R(C) = \int_0^T e^{-\alpha t} C(t)\, dt. \tag{2,3,6}$$

Con esto, la restricción $(2,3,5)$ puede ser reescrita como

$$R(C) = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt. \tag{2,3,7}$$

Ahora lo que necesitamos es una medida de la satisfacción derivada del consumo, esta medida puede ser expresada en forma integral (debido al teorema de representación de Riez's para funcionales sobre $\mathcal{C}[0,T]$, [2]), entonces definiremos enseguida un funcional de satisfacción

$$\mathcal{S}(C) = \int_0^T F(t, C(t))\, dt,$$

para una función $F(t, C(t))$ apropiada que deberá cumplir con ciertas condiciones naturales en el intervalo $[0,T]$. F deberá ser una función creciente con respecto al argumento $C(t)$, es decir, a mayor consumo mayor satisfacción. Además debe ser una función cóncava, esta condición se establece basándonos en la experiencia, ya que valores grandes de consumo no incrementan la satisfacción de igual manera que los valores iniciales.

Nuestro problema concreto ahora es: maximizar el funcional de satisfacción encontrando una función de consumo que le provea de este valor extremo sujeta a la restricción $(2,3,7)$. Consideraremos a detalle el caso de:

$$F(t, C(t)) = e^{-\beta t} \log(1 + C(t)),$$

$t \geq 0$, $C(t) > 0$, esto es, consumos positivos (al menos tiene que comprar comida). $\beta > 0$ es una constante de descuento. El factor $e^{-\beta t}$ puede representar los efectos de la inflación. Veamos que $F(t, C(t))$ es una función creciente con respecto al argumento $C(t)$ debido al factor $\log(1 + C(t))$. Entonces $C(t)$ se deberá escoger de manera que esto se cumpla al menos durante el periodo de ahorro. Entonces el funcional de satisfacción adquiere la forma:

$$\mathcal{S}(C) = \int_0^T e^{-\beta t} \log(1 + C(t))\, dt. \tag{2,3,8}$$

El dominio de este funcional es un subconjunto D del espacio vectorial $\mathcal{C}[0,T]$, que consiste en las funciones continuas que satisfacen

$$C(t) > 0. \tag{2,3,9}$$

Debido a esto el dominio D es un subconjunto abierto. Utilizamos la norma uniforme en este espacio :

$$||C|| = \max_{0\leq t\leq T} |C(t)|.$$

Si denotamos por:

$$r_0 = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt,$$

traducimos el problema a encontrar un vector máximo C^* en $D[R = r_0]$ para el funcional $\mathcal{S}$. Para esto usaremos el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange.

Comenzaremos calculando las variaciones de los funcionales R y $\mathcal{S}$. Debido a la linealidad de R, se tiene que:

$$\frac{R(C+\epsilon\bar{C}) - R(C)}{\epsilon} = R(\bar{C}),$$

de aquí que:

$$\delta R(C, \bar{C}) = R(\bar{C}) = \int_0^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\, dt, \qquad (2,3,10)$$

para cualquier $\bar{C} \in \mathcal{C}[0, T]$ y alguna función fija $C \in \mathcal{C}[0, T]$. Ahora usando propiedades de integral definida (podemos invertir el orden de integración y límite) y usando la definición de $\mathcal{S}(C)$ se deduce que:

$$\delta\mathcal{S}(C, \bar{C}) = \int_0^T \frac{\partial F(t, C(t))}{\partial C}\bar{C}\, dt,$$

para cualquier $\bar{C} \in \mathcal{C}[0, T]$ y alguna función fija $C \in D$. Ahora calculamos la derivada parcial que aparece en la expresión anterior utilizando la definición de $F(t, C)$.

$$\frac{\partial F(t, C)}{\partial C} = \frac{e^{-\beta t}}{1 + C}.$$

Entonces la variación de $\mathcal{S}$ está dada por

$$\delta\mathcal{S}(C, \bar{C}) = \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1 + C}\bar{C}\, dt. \qquad (2,3,11)$$

Claramente, $(2, 3, 10)$ es débilmente continua ya que no depende de C. $(2, 3, 11)$ también es débilmente continua ya que estamos usando funciones continuas en un compacto, esto implica que alcanzan su máximo y su mínimo en ese compacto $|C(t)| \geq m$, $|C_1(t)| \geq m_1$, $0 \leq t \leq T$. Entonces si $||C - C_1|| < \gamma$

$$\left| \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1+C}\, \bar{C}\, dt - \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1+C_1}\, \bar{C}\, dt \right| \leq \int_0^T \frac{e^{-\beta t}|C - C_1|}{(1+C_1)(1+C)}\, \bar{C}\, dt < \frac{\gamma M(\bar{C})(1-e^{-\beta T})}{\beta(1+m)(1+m_1)} = \eta.$$

Donde $M(\bar{C})$ es el máximo de $\bar{C}$ en $[0, T]$. Esto nos dice que para cada $\bar{C}$ fijo y dado $\eta > 0$ podemos encontrar $\gamma > 0$ tal que $|\delta \mathcal{S}(C, \bar{C}) - \delta \mathcal{S}(C_1, \bar{C})| < \eta$ si $||C - C_1|| < \gamma$. Por lo tanto $(2, 3, 11)$ es débilmente continua. Con esto hemos reunido los requisitos para poder utilizar el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange.

Además notemos que, tomando $\bar{C} \equiv 1$ se tiene que

$$\delta R(C, 1) = \int_0^T e^{-\alpha t}\, dt > 0.$$

Es decir, la primera opción del teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange no se cumple para todo $\bar{C}$. Entonces debe existir una constante λ tal que si C^* es un vector extremo local en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$, se cumple que

$$\delta \mathcal{S}(C^*, \bar{C}) = \lambda\, \delta R(C^*, \bar{C}),$$

para todos los vectores $\bar{C} \in \mathcal{C}[0, T]$.

Sustituyendo los valores de cada variación obtenemos la siguiente condición necesaria:

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F(t, C^*(t))}{\partial C} - \lambda e^{-\alpha t} \right] \bar{C}\, dt = 0. \qquad (2,3,12)$$

Tomando $\bar{C} = \frac{\partial F(t, C^*(t))}{\partial C} - \lambda e^{-\alpha t}$ (podemos hacerlo ya que es una función continua), se obtiene

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F(t, C^*(t))}{\partial C} - \lambda e^{-\alpha t} \right]^2 dt = 0.$$

Como el integrando es una función no negativa, se deduce que para todo $t \in [0, T]$

$$\frac{\partial F(t, C^*(t))}{\partial C} - \lambda e^{-\alpha t} = 0.$$

Reemplazando el valor de la derivada parcial obtenemos la siguiente condición necesaria

$$\frac{e^{-\beta t}}{1 + C^*(t)} = \lambda\, e^{-\alpha t}.$$

Entonces podemos obtener una solución dependiente del parámetro λ

$$C^*(t) = -1 + \frac{1}{\lambda} e^{(\alpha-\beta)t}. \tag{2,3,13}$$

El factor $\frac{1}{\lambda}$ lo podemos calcular sustituyendo $(2, 3, 13)$ en $(2, 3, 5)$, integrando se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{\lambda} = \left(S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right) \left(\frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \right). \tag{2,3,14}$$

Con esto encontramos el único vector extremo C^* en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$ que cumple con las restricciones establecidas.

El siguiente paso es ver si C^* es un máximo en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$. Existen ciertos valores de los parámetros α, β, S_T, S_0, T, $I(t)$, para los cuales $C^*(t)$ adquiere valores negativos, por ejemplo un ahorrador demasiado optimista (S_T muy grande para sus ingresos), un país con una economía muy mala ($\beta >> \alpha$), bajo estas condiciones el problema no tiene solución, (por ejemplo, $S_0 = 0$, $\alpha = 0{,}01$, $T = 5$, $S_T = 51300$, $I(t) = 10000$, $\beta = 0{,}1$). Por lo tanto para estos parámetros, la función de consumo C^* no es un máximo en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$.

Ahora supongamos que el consumo óptimo encontrado $C^*(t)$ cumple con la restricción $(2, 3, 9)$. Suponiendo que $\alpha > \beta$, entonces $C^*(t)$ es una función estrictamente creciente, por lo tanto sólo necesitamos que $C^*(0) \geq 0$, entonces

$$C^*(0) = -1 + \frac{1}{\lambda} \geq 0 \implies \frac{1}{\lambda} \geq 1.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{1}{\lambda}$ obtenemos la condición necesaria

$$S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \geq e^{-\alpha T} S_T + \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta}, \tag{2,3,15}$$

esta desigualdad establece las condiciones que se deberán tomar en cuenta para poder fijar el ahorro terminal en base a los demás parámetros del problema. A continuación verificaremos que el consumo óptimo C^* es un vector máximo en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$. Utilizando $(2, 3, 13)$ se obtiene de manera directa

$$\mathcal{S}(C^* + \bar{C}) - \mathcal{S}(C^*) = \int_0^T e^{-\beta t} \log \left[1 + \frac{\bar{C}(t)}{1 + C^*(t)} \right] dt = \int_0^T e^{-\beta t} \log \left[1 + \lambda\, e^{(\beta-\alpha)t} \bar{C}(t) \right] dt,$$

para cualquier $\bar{C}$ en $\mathcal{C}[0, T]$ admisible, esto es, que permita que $C^* + \bar{C}$ esté en $D[R = r_0]$. Debido a esto, tenemos que tanto C^* como $C^* + \bar{C}$ cumplen con las condiciones $(2, 3, 9)$ y $(2, 3, 5)$, sustituimos $C^* + \bar{C}$ en $(2, 3, 5)$ y obtenemos que $\bar{C}$ cumple además con la condición

$$\int_0^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt = 0.$$

Utilizando el teorema de Taylor para funciones de clase $\mathcal{C}^2$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

Sustituyendo $f(x) = \log(1+x)$ encontramos

$$\log(1+x) = x - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,dt.$$

Como $t \in [0, x]$, el integrando es no negativo de donde se deduce que $\log(1+x) \leq x$. Por lo tanto:

$$\log(1 + \lambda\, e^{(\beta-\alpha)t}\bar{C}(t)) \leq \lambda\, e^{(\beta-\alpha)t}\bar{C}(t).$$

Aplicando los dos últimos resultados obtenemos

$$\mathcal{S}(C^* + \bar{C}) - \mathcal{S}(C^*) \leq \lambda \int_0^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt = 0.$$

Esto es

$$\mathcal{S}(C^* + \bar{C}) \leq \mathcal{S}(C^*).$$

Esto prueba que C^* es un máximo en $D[R = r_0]$ para $\mathcal{S}$.

4. Significado de los multiplicadores de Euler-Lagrange

En el problema del consumo óptimo de la sección anterior encontramos que el valor del multiplicador de Euler-Lagrange era

$$\lambda = \frac{1}{r_0 + [(1-e^{-\alpha T})/\alpha]}\frac{1-e^{-\beta T}}{\beta},$$

donde r_0 es la restricción impuesta a R y que debe cumplir cualquier consumo admisible, es decir, $R(C) = r_0$. Este valor estaba dado por

$$r_0 = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt.$$

Con esto podemos reescribir el consumo óptimo C^* de la siguiente manera

$$C^*(t) = -1 + \left(r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right) \left(\frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \right) e^{(\alpha - \beta)t}, \tag{2,4,1}$$

para $0 \leq t \leq T$. Entonces el funcional de satisfacción evaluado en C^* es

$$\mathcal{S}(C^*) = \frac{T(\beta - \alpha)e^{-\beta T}}{\beta} + \left(\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} \right) \left[\frac{\alpha - \beta}{\beta} + \log \frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} + \log \left(r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right) \right].$$

Podemos considerar el valor máximo de $\mathcal{S}$ en $D[R = r_0]$ como una función de r_0. Esto es usado a menudo en aplicaciones para ver cómo los cambios en r_0 (es decir, en las restricciones) afectan el valor de $\mathcal{S}(C^*)$. Para ver esto calcularemos la derivada de $\mathcal{S}(C^*)$ con respecto a r_0

$$\frac{\partial \mathcal{S}(C^*)}{\partial r_0} = \frac{1}{r_0 + [(1 - e^{-\alpha T})/\alpha]} \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta},$$

con lo cual tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{S}(C^*)}{\partial r_0} = \lambda.$$

Así en este caso, el multiplicador de Euler-Lagrange λ dado nos indica la velocidad de cambio del valor extremo $\mathcal{S}(C^*)$ con respecto al valor de la restricción r_0. Supongamos que $\lambda > 0$, entonces la derivada de $\mathcal{S}(C^*)$ con respecto a r_0 es positiva, lo cual nos dice que $\mathcal{S}(C^*)$ es una función creciente con respecto a r_0. Esto nos da un resultado natural, si el ingreso $I(t)$ aumenta, o el nivel de ahorros iniciales S_0 aumenta, o el nivel terminal de ahorros S_T es reducido, entonces el nivel máximo de satisfacción $\mathcal{S}(C^*)$ se incrementa.

5. Una política de consumo óptimo restringido sin dificultades extremas

En esta sección se retomará el problema de la sección 3: encontrar una función de consumo que maximice el funcional de satisfacción derivada del consumo, con ciertas condiciones extras. Anteriormente sólo pedimos que la función de consumo fuera no negativa, esto puede ocasionar que para cierto intervalo de tiempo t y para algunos valores de los parámetros del problema, la función de consumo tome valores pequeños, lo cual en la realidad ocasionaría dificultades al tener una cantidad muy baja de recursos disponibles para subsistir.

Comenzaremos entonces estableciendo la condición

$$C(t) \geq C_0 > 0, \tag{2,5,1}$$

para $t \in [0, T]$ donde C_0 es una constante y representa el consumo mínimo aceptable que es considerado por el ahorrador para evitar las dificultades antes mencionadas. En la sección anterior encontramos la restricción para cualquier función de consumo admisible $C(t)$, ver ecuación $(2, 3, 5)$:

$$S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt = e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} C(t)\, dt. \tag{2,5,2}$$

De $(2, 5, 1)$ se deduce que

$$\int_0^T e^{-\alpha t} C(t)\, dt \geq C_0 \int_0^T e^{-\alpha t}\, dt = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} C_0.$$

Utilizando este último resultado en $(2, 5, 2)$ obtenemos la siguiente condición:

$$S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt \geq e^{-\alpha T} S_T + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} C_0. \tag{2,5,3}$$

Esta desigualdad establece las condiciones en las que $(2, 5, 1)$ y $(2, 5, 2)$ son satisfechas simultáneamente y nos indica cómo deben ser las cantidades S_T y C_0, ya que la parte izquierda de $(2, 5, 3)$ es una constante. Denotando

$$\gamma = S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt,$$

obtenemos una cantidad que nos da una idea de los recursos disponibles. Encontramos que los valores S_T y C_0 están restringidos a la siguiente región sombreada en el (C_0, S_T)-plano

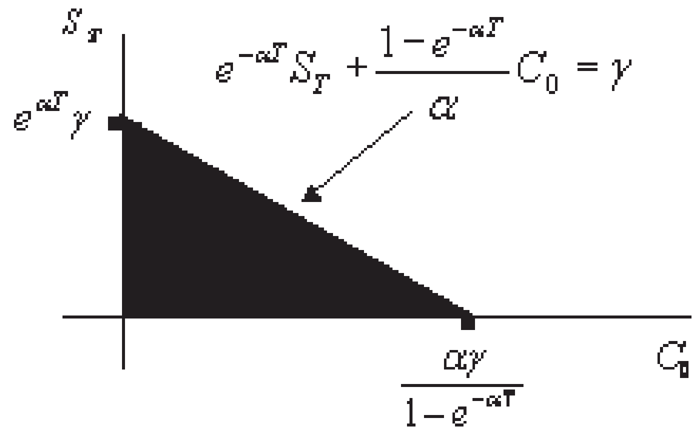

FIGURA 3

Consideraremos a detalle el caso en el que los intereses o ganancias son mayores que la inflación

$$\alpha > \beta. \tag{2,5,4}$$

Además supondremos que las cantidades S_T y C_0 satisfacen la condición adicional

$$S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} < e^{-\alpha T} S_T + \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta}(1 + C_0). \tag{2,5,5}$$

Si se cumple la desigualdad complementaria a $(2,5,5)$ y $\alpha > \beta$, entonces la solución $(2,4,1)$ cumple que $C^*(t) \geq C_0$. En esta sección analizaremos el caso complementario al de la sección anterior, es decir, el caso en el que se cumple la desigualdad $(2,5,5)$, con esto, la solución anterior $C^*(t) < C_0$ para algunos $t \in [0, T]$. El hacer esta suposición será fundamental más delante. $(2,5,5)$ restringe las cantidades S_T y C_0 a la región sombreada de la siguiente figura:

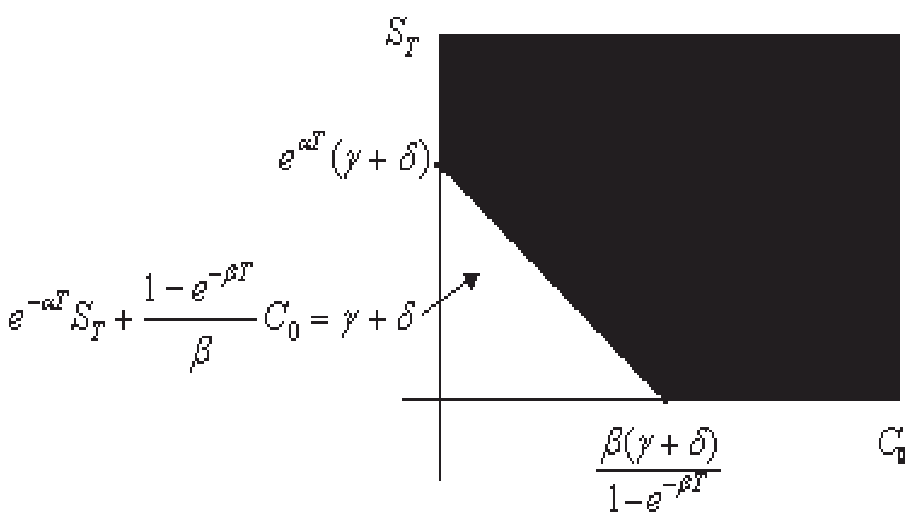

FIGURA 4

con δ definido por

$$\delta = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\beta T}}{\beta}.$$

Debido a que $\alpha > \beta$, se tiene que $\delta < 0$. Entonces las gráficas de la $FIGURA\ 3$ y la $FIGURA\ 4$ tienen intersección no vacía, esta región común define un área donde $(2,5,3)$ y $(2,5,5)$ se cumplen simultáneamente como se muestra a continuación

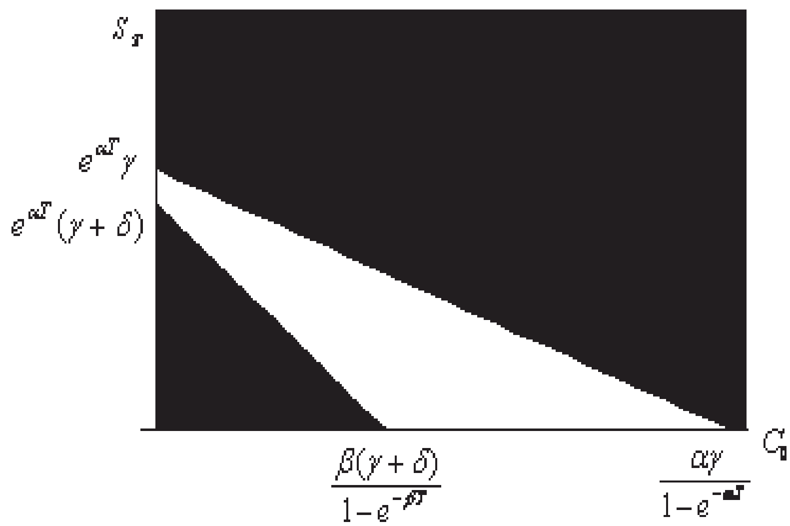

FIGURA 5

Ahora buscaremos una función de consumo que maximice el funcional de satisfacción $\mathbb{S}$ sujeta a las restricciones $(2,5,1)$ y $(2,5,2)$, suponiendo ahora que el ahorrador tiene objetivos realistas, es decir que cumplan con $(2,5,3)$ y $(2,5,5)$ lo que gráficamente se ejemplifica en la $FIGURA\ 5$.

Notemos lo siguiente : Como ya mencionamos, la función de consumo óptimo C^* encontrada en la sección anterior puede ser menor que C_0 para algún intervalo de tiempo inicial, estando sujeta a las nuevas condiciones. Entonces ahora propondremos una función de consumo compuesta, que inicialmente sea igual a una constante C_0 y después incremente lo más rápido posible para maximizar el funcional de satisfacción además de proveernos el ahorro final deseado.

El suponer que se cumple $(2,5,5)$ nos será de utilidad más delante, ya que debido a esta suposición el tiempo en el que se hará el *switch* en la función de consumo será único.

REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA. Consideraremos ahora funciones de consumo compuestas (debido a lo mencionado en el párrafo anterior), esto es

$$C(t) = \begin{cases} C_0, & 0 \leq t \leq \bar{t} \\ \\ C_1(t), & \bar{t} \leq t \leq T, \end{cases} \tag{2,5,6}$$

donde $\bar{t}$ representa algún valor apropiado y es hasta ahora desconocido y $C_1(t)$ es alguna función apropiada de consumo. Ahora el funcional de satisfacción para funciones de consumo compuestas queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(C) &= \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta t} \log(1 + C_0)\, dt + \int_{\bar{t}}^T e^{-\beta t} \log(1 + C_1(t))\, dt \\ &= \frac{1 - e^{-\beta \bar{t}}}{\beta} \log(1 + C_0) + \int_{\bar{t}}^T e^{-\beta t} \log(1 + C_1(t))\, dt, \end{aligned}$$

por lo tanto puede ser considerado como un nuevo funcional $\mathcal{S}_0(\bar{t}, C_1)$. Definimos el nuevo funcional $\mathcal{S}_0$ por

$$\mathcal{S}_0(\bar{t}, C_1) = \frac{1 - e^{-\beta \bar{t}}}{\beta} \log(1 + C_0) + \int_{\bar{t}}^T e^{-\beta t} \log(1 + C_1(t))\, dt = \mathcal{S}(C). \tag{2,5,7}$$

También podemos reescribir la restricción $(2, 5, 2)$ para un consumo compuesto y así manejar el problema de manera análoga a la sección pasada.

$$S_0 + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt = e^{-\alpha T} S_T + \frac{1 - e^{-\alpha \bar{t}}}{\alpha} C_0 + \int_{\bar{t}}^T e^{-\alpha t} C_1(t)\, dt.$$

Entonces definimos un nuevo funcional $R_0 = R_0(\bar{t}, C_1) = R(C)$

$$R_0(\bar{t}, C_1) = \frac{1 - e^{-\alpha \bar{t}}}{\alpha} C_0 + \int_{\bar{t}}^T e^{-\alpha t} C_1(t)\, dt, \tag{2,5,8}$$

que está sujeto a la restricción

$$R_0(\bar{t}, C_1) = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt \equiv r_0. \tag{2,5,9}$$

Tomamos como dominio de los funcionales $R_0(\bar{t}, C_1)$ y $\mathcal{S}_0(\bar{t}, C_1)$ el subconjunto abierto $D \subset X$ consistente de los vectores $(\bar{t}, C_1(t))$ tales que $0 < \bar{t} < T$ y $1 + C_1(t) > 0$, esta última condición para que el funcional de satisfacción esté bien definido. La norma de los vectores está definida por

$$||(\bar{t}, C_1(t))|| = |\bar{t}| + \max_{0 \leq t \leq T} |C_1(t)|.$$

Ahora utilizaremos el teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange para encontrar un vector $(\bar{t}, C_1(t)) \in D[R_0 = r_0]$ que maximice el funcional de satisfacción $\mathcal{S}_0$.

Comenzaremos calculando las correspondientes variaciones

$$R_0(\bar{t} + \epsilon\Delta t, C_1 + \epsilon\bar{C}) = \frac{1 - e^{-\alpha(\bar{t}+\epsilon\Delta t)}}{\alpha} C_0 + \int_{\bar{t}+\epsilon\Delta t}^{T} e^{-\alpha t}(C_1 + \epsilon\bar{C})\, dt,$$

para cualquier vector $(\Delta t, \bar{C}) \in X$ y ϵ lo suficientemente pequeño para permitir que

$$(\bar{t} + \epsilon\Delta t, C_1 + \epsilon\bar{C}) \in D.$$

Ahora usaremos la fórmula

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F(t,\epsilon)\, dt = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \epsilon}\, dt + F(b,\epsilon)\frac{db}{d\epsilon} - F(a,\epsilon)\frac{da}{d\epsilon},$$

donde a y b pueden ser funciones de ϵ, para calcular

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}R_0(\bar{t} + \epsilon\Delta t, C_1 + \epsilon\bar{C}) = & \quad \Delta t e^{-\alpha(\bar{t}+\epsilon\Delta t)} C_0 \\ & - \quad \Delta t e^{-\alpha(\bar{t}+\epsilon\Delta t)}[C_1(\bar{t} + \epsilon\Delta t) + \epsilon\bar{C}(\bar{t} + \epsilon\Delta t)] \\ & + \quad \int_{\bar{t}+\epsilon\Delta t}^{T} e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Evaluamos esta expresión en $\epsilon = 0$ y así encontramos la variación de R_0

$$\delta R_0(\bar{t}, C_1, \Delta t, \bar{C}) = \Delta t e^{-\alpha\bar{t}}[C_0 - C_1(\bar{t})] + \int_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\, dt. \qquad (2{,}5{,}10)$$

Similarmente

$$\delta\mathcal{S}_0(\bar{t}, C_1, \Delta t, \bar{C}) = \Delta t e^{-\beta\bar{t}}[\log(1 + C_0) - \log(1 + C_1(\bar{t}))] + \int_{\bar{t}}^{T} e^{-\beta t}\frac{\bar{C}(t)}{1 + C_1(t)}\, dt, \quad (2{,}5{,}11)$$

para cualquier vector $(\Delta t, \bar{C}) \in X$ y para cualquier vector $(\bar{t}, C_1) \in D$.

Ahora notemos que para $\Delta t = 0$ y $\bar{C} = 1$ se tiene que

$$\delta R_0(\bar{t}, C_1, \Delta t, \bar{C}) > 0,$$

para cualquier vector $(\bar{t}, C_1) \in D$. Por lo tanto no se cumple la primera opción del teorema de los multiplicadores de Euler-Lagrange. Entonces existe λ constante tal que si $(\bar{t}, C_1)$ es un extremo local en $D[R_0 = r_0]$ para $\mathcal{S}_0$ se cumple que:

$$\delta \mathcal{S}_0(\bar{t}, C_1, \Delta t, \bar{C}) = \lambda\, \delta R_0(\bar{t}, C_1, \Delta t, \bar{C}),$$

para cualquier vector $(\Delta t, \bar{C}) \in X$.

Sustituyendo los valores de las variaciones en esta última expresión

$$\Delta t \left[e^{-\beta \bar{t}} \log \frac{1 + C_0}{1 + C_1(\bar{t})} - \lambda\, e^{-\alpha \bar{t}} (C_0 - C_1(\bar{t})) \right] + \int_{\bar{t}}^{T} \left[\frac{e^{-\beta t}}{1 + C_1(t)} - \lambda\, e^{-\alpha t} \right] \bar{C}(t)\, dt = 0.$$

Ahora, hacemos la siguiente elección para Δt y $\bar{C}(t)$

$$\Delta t = \left[e^{-\beta \bar{t}} \log \frac{1 + C_0}{1 + C_1(\bar{t})} - \lambda\, e^{-\alpha \bar{t}} (C_0 - C_1(\bar{t})) \right],$$

$$\bar{C}(t) = \left[\frac{e^{-\beta t}}{1 + C_1(t)} - \lambda\, e^{-\alpha t} \right].$$

Resultando las siguientes condiciones necesarias:

$$e^{-\beta \bar{t}} \log \frac{1 + C_0}{1 + C_1(\bar{t})} = \lambda\, e^{-\alpha \bar{t}} [C_0 - C_1(\bar{t})], \tag{2,5,12}$$

$$\frac{e^{-\beta t}}{1 + C_1(t)} = \lambda\, e^{-\alpha t}, \tag{2,5,13}$$

para $\bar{t} \leq t \leq T$. El siguiente paso es verificar que las condiciones $(2, 5, 12)$ y $(2, 5, 13)$ determinan un vector máximo en $D[R_0 = r_0]$ para $\mathcal{S}_0$. Evaluamos $(2, 5, 13)$ en $t = \bar{t}$ para obtener λ y lo sustituimos en $(2, 5, 12)$, así encontramos la siguiente condición :

$$\log \frac{1 + C_0}{1 + C_1(\bar{t})} = \frac{C_0 - C_1(\bar{t})}{1 + C_1(\bar{t})},$$

la cual se cumple en $t = \bar{t}$ y es satisfecha si :

$$C_1(\bar{t}) = C_0. \tag{2,5,14}$$

Habíamos establecido que el consumo sería una función de consumo compuesta (esto incluye funciones discontinuas), pero $(2, 5, 14)$ nos asegura que la función de consumo que proveerá de un máximo al funcional de satisfacción necesariamente será una función continua. Además usando $(2, 5, 14)$ vemos que $(2, 5, 12)$ se cumple para todo λ ya que ambos lados se anulan con esta condición y por lo tanto ya no es necesario considerarla. Si evaluamos $(2,5,13)$ en $t = \bar{t}$ y sustituimos $(2,5,14)$ obtenemos

$$\lambda = \frac{e^{(\alpha-\beta)\bar{t}}}{1+C_0}.$$

Así encontramos que $C_1(t)$ está dada por

$$C_1(t) = -1 + (1+C_0)e^{(\alpha-\beta)(t-\bar{t})}, \tag{2,5,15}$$

para $\bar{t} \leq t \leq T$. Lo siguiente es calcular el valor de $\bar{t}$, para esto sustituimos $(2,5,15)$ en $(2,5,9)$ y encontramos que $\bar{t}$ debe cumplir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} &S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \tfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} + \textstyle\int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt \\ &\quad = (1+C_0)\left[\tfrac{1-e^{-\alpha \bar{t}}}{\alpha} + e^{-(\alpha-\beta)\bar{t}}\left(\tfrac{e^{-\beta\bar{t}}-e^{-\beta T}}{\beta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2,5,16}$$

Ahora veremos que (2,5,16) determina un valor único para $\bar{t}$ en el intervalo $0 < \bar{t} < T$. Para esto veamos que si evaluamos $(2,5,16)$ en $\bar{t} = 0$ obtenemos que por la desigualdad $(2,5,5)$

$$Parte\, izquierda\, de\, (2,5,16) < Parte\, derecha\, de\, (2,5,16),$$

para $\bar{t} = 0$. Evaluamos $(2,5,16)$ en $\bar{t} = T$, debido a la desigualdad $(2,5,3)$ se tiene que

$$Parte\, izquierda\, de\, (2,5,16) \geq Parte\, derecha\, de\, (2,5,16),$$

para $\bar{t} = T$.

Ahora veamos que la parte izquierda de $(2,5,16)$ es una constante, y que la parte derecha de $(2,5,16)$ es una función continua de $\bar{t}$. Por continuidad $(2,5,16)$ tiene al menos una solución $\bar{t}$ en $0 < \bar{t} < T$. Además la parte derecha de $(2,5,16)$ es una función decreciente de $\bar{t}$ por lo que la solución es única. Para encontrar el valor de $\bar{t}$ puede ser necesario algún algoritmo numérico y el uso de la computadora.

A continuación demostraremos que $C(t)$, dada por $(2,5,6)$ y $(2,5,15)$, maximiza el funcional de satisfacción $\mathcal{S}$. Si $C + \bar{C}$ es algún otro consumo admisible entonces se cumple que:

$$\bar{C} \geq 0, \tag{2,5,17}$$

para $0 \leq t \leq \bar{t}$, ya que en caso contrario el consumo $C(t)$ sería menor que C_0 para algún t y violaría la condición inicial $(2,5,1)$. Notemos que

$$\int_0^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt = 0, \qquad (2,5,18)$$

se cumple ya que tanto C como $C+\bar{C}$ satisfacen $(2,5,2)$.

Entonces calcularemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(C+\bar{C}) - \mathcal{S}(C) &= \int_0^T e^{-\beta t}\log[1+C(t)+\bar{C}(t)]\,dt \\
&- \int_0^T e^{-\beta t}\log[1+C(t)]\,dt \\
&= \int_0^T e^{-\beta t}\log[1+\frac{\bar{C}(t)}{1+C(t)}]\,dt.
\end{aligned}$$

Separamos esta integral en el valor conocido $\bar{t}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(C+\bar{C}) - \mathcal{S}(C) &= \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta t}\log[1+\frac{\bar{C}(t)}{1+C_0}]\,dt \\
&+ \int_{\bar{t}}^T e^{-\beta t}\log[1+\frac{\bar{C}(t)}{1+C_1(t)}]\,dt.
\end{aligned}$$

Usamos ahora el hecho de que $\log(1+x)\leq x$ y lo sustituimos en la expresión anterior

$$\mathcal{S}(C+\bar{C}) - \mathcal{S}(C) \leq \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta t}\frac{\bar{C}(t)}{1+C_0}\,dt + \int_{\bar{t}}^T e^{-\beta t}\frac{\bar{C}(t)}{1+C_1(t)}\,dt.$$

Sustituimos el valor obtenido para $C_1(t)$ y así

$$\mathcal{S}(C+\bar{C}) - \mathcal{S}(C) \leq \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta t}\frac{\bar{C}(t)}{1+C_0}\,dt + \frac{e^{(\alpha-\beta)\bar{t}}}{1+C_0}\int_{\bar{t}}^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt. \qquad (2,5,19)$$

Podemos separar la integral de $(2,5,18)$ y obtener la expresión

$$\int_{\bar{t}}^T e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt = -\int_0^{\bar{t}} e^{-\alpha t}\bar{C}(t)\,dt.$$

Sustituimos esto en $(2,5,19)$, multiplicamos por $e^{-\beta\bar{t}}e^{\beta\bar{t}}$ y factorizamos para obtener

$$\mathcal{S}(C+\bar{C}) - \mathcal{S}(C) \leq \frac{e^{-\beta\bar{t}}}{1+C_0}\int_0^{\bar{t}} [e^{\beta(\bar{t}-t)} - e^{\alpha(\bar{t}-t)}]\bar{C}(t)\,dt.$$

Usando que la función exponencial es una función creciente y la hipótesis $\alpha > \beta$ tenemos que:

$$e^{\beta(\bar{t}-t)} \leq e^{\alpha(\bar{t}-t)},$$

para $0 \leq t \leq \bar{t}$. Entonces el integrando de la expresión anterior es una función negativa, de donde se deduce que

$$\mathcal{S}(C+\bar{C})-\mathcal{S}(C)\leq 0,$$

lo cual prueba que $C(t)$ es un vector máximo para el funcional de satisfacción cumpliendo con todas las restricciones impuestas.

Algo que es importante resaltar es que una vez fijados los parámetros del problema y analizando el valor que toma el funcional de satisfacción $\mathcal{S}$ vemos que este funcional toma un valor mayor en C^* que en C, esto es, el consumo C^* provee de una mayor satisfacción. A pesar de esto el ahorrador podría preferir el consumo compuesto C y así evitar las dificultades que implicaría restringirse a un consumo menor que el consumo mínimo aceptable C_0. Por ejemplo para los parámetros : $C_0 = 14700$, $S_0 = 0$, $\alpha = 0{,}05$, $T = 5$, $S_T = 30000$, $I(t) = 20000$, $\beta = 0{,}01$ se obtienen los valores para el funcional de satisfacción $\mathcal{S}(C^*) = 46{,}813$ y $\mathcal{S}(C) = 46{,}805$ y el tiempo $\bar{t} = 4{,}402$. Esto se ejemplifica en la siguiente gráfica

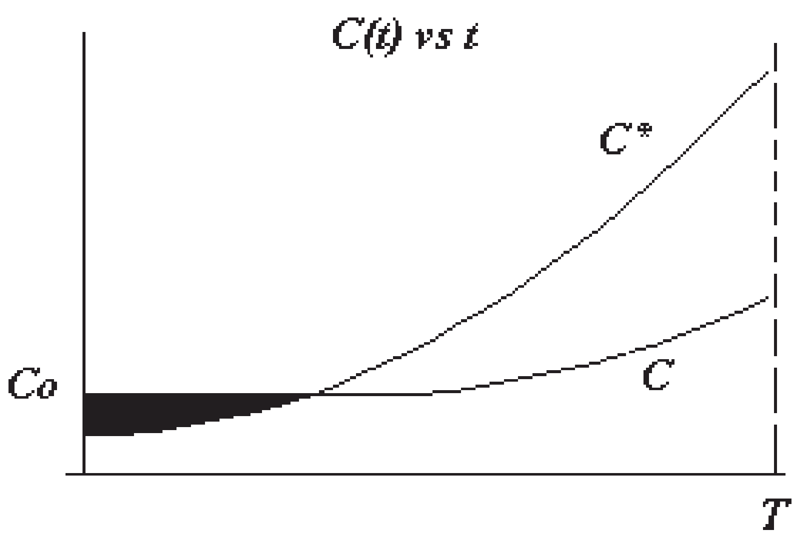

FIGURA 6

6. Ecuación de Euler y esfuerzo pesquero óptimo

A continuación deduciremos la ecuación de Euler. Esta ecuación diferencial deberá ser satisfecha por cualquier función que minimice (maximice) un funcional integral, como se describe enseguida.

Nuestro objetivo es elegir una función $y(x)$ de una colección predeterminada C de curvas, de manera que minimice la integral

$$J = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx. \tag{2,6,1}$$

Donde $L(x, y(x), y'(x))$ es una función con primera derivada parcial continua en todas partes.

Sean $y(x)$ la función que minimiza J y $\eta(x)$ una función derivable en $[a, b]$ tal que $y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon\eta(x) \in C$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Esta última condición se establece para que las trayectorias tengan el mismo punto inicial y final. Esto nos define una vecindad de trayectorias alrededor de la trayectoria óptima. Podemos tomar a J como una función de ϵ, esto es

$$J(\epsilon) = \int_a^b L(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x))\, dx. \tag{2,6,2}$$

Debido a que $J(\epsilon)$ alcanza su mínimo en $\epsilon = 0$, entonces su derivada al respecto de ϵ se anula en $\epsilon = 0$. Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left.\frac{\partial L(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x))}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'}\eta'(x)\right] dx. \end{aligned} \tag{2,6,3}$$

Utilizando la regla de la derivada de un producto

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\eta' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\eta\right) - \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\eta. \tag{2,6,4}$$

Sustituyendo $(2, 6, 4)$ en $(2, 6, 3)$ e integrando resulta

$$J'(0) = 0 = \int_a^b \eta\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right] dx + \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\eta(x)\right|_a^b = \int_a^b \eta\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right] dx,$$

dado que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces se tiene que cumplir que

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right] dx = 0,$$

para cualquier η admisible. Entonces podemos elegir una función η que tenga el mismo signo que la expresión entre corchetes. Así el integrando es una función no negativa. Por lo tanto, si y es un mínimo para J, se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0. \qquad (2{,}6{,}5)$$

Esta es la conocida ecuación de Euler.

Ahora que hemos deducido la ecuación de Euler la aplicaremos en el problema del capítulo 1 para encontrar el esfuerzo que maximiza el valor presente total de las ganancias producidas por esta pesca. Utilizaremos la misma notación que en el capítulo 1, sección 1.

Generalizaremos ahora la razón de crecimiento de la población de peces, ahora supondremos que está dada por:

$$\dot{N} = F(N) - h(t), \qquad (2{,}6{,}6)$$

donde $F(N)$ es la razón de crecimiento de la población de peces en ausencia de pesca y $h(t)$ es la tasa de captura. Esta función depende del esfuerzo pesquero U y del stock de población $N = N(t)$, es decir

$$h = Q(U, N).$$

Ahora supondremos que esta función está dada por

$$h = Q(U, N) = G(N)U.$$

Esta suposición nos conducirá a un modelo lineal de optimización más fácil de manejar. La función $G(N)$ debe ser no decreciente, ya que es de esperarse que si aplicamos un esfuerzo fijo U la captura no decrece, si el stock de población crece. Notemos que hemos generalizado la función h que anteriormente fue considerada como $h = qUN$.

Consideraremos que el precio por tonelada p del pescado y el costo por unidad de esfuerzo c son constantes. Definiremos la siguiente variable

$$c(N) = \frac{c}{G(N)}.$$

Entonces el funcional del valor presente de ganancias

$$J(U) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[\,ph(t) - cU\,]\,dt, \tag{2,6,7}$$

puede ser reescrito como sigue

$$J(U) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[\,p - c(N)\,]h(t)\,dt.$$

Utilizando que $\dot{N} = F(N) - h(t)$, obtenemos

$$J(U) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[\,p - c(N)\,][F(N) - \dot{N}]\,dt, \tag{2,6,8}$$

la cual es una integral de la forma

$$\int \phi(t, N, \dot{N})dt.$$

La condición necesaria para un máximo la obtenemos de la ecuación de Euler

$$\frac{\partial\phi}{\partial N} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{N}}.$$

Realizando los cálculos correspondientes obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial\phi}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}\left\{e^{-\delta t}[\,p - c(N)\,][F(N) - \dot{N}]\right\} = e^{-\delta t}\left\{-c'(N)[F(N) - \dot{N}] + [p - c(N)]F'(N)\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{N}} = \frac{d}{dt}\left\{-e^{-\delta t}[p - c(N)]\right\} = e^{-\delta t}\left\{\delta[p - c(N)] + c'(N)\dot{N}\right\}. \qquad \left(' = \tfrac{d}{dN}\right)$$

Igualando las dos últimas expresiones resulta la ecuación

$$F'(N) - \frac{c'(N)F(N)}{p - c(N)} = \delta. \tag{2,6,9}$$

Esta ecuación es llamada la regla fundamental de explotación de recursos renovables.

Usualmente en los problemas de optimización en los que se aplica la ecuación de Euler se llega a una ecuación diferencial para la función desconocida $N(t)$. Este modelo de administración de pesquerías presenta el llamado caso ”singular” de la ecuación de Euler en el que llegamos a una ecuación algebraica para la función $N(t)$, ésta puede ser resuelta mediante algoritmos numéricos. La solución a $(2, 6, 9)$ la denotaremos por N^*, es la solución que maximiza J.

De igual manera que en el capítulo 1, consideraremos funciones de esfuerzo que permitan que la población crezca hasta el óptimo durante un tiempo inicial s además provea de ganancias suficientes para la subsistencia a los pescadores, siendo este esfuerzo el mínimo posible U_0, y después el esfuerzo pesquero aplicado U_1 permita el equilibrio de la población en el óptimo N^* que maximiza las ganancias. Si calculamos N^* utilizando $(2, 6, 9)$, podemos calcular el esfuerzo óptimo U_1 como veremos a continuación. Consideraremos funciones de esfuerzo de la forma

$$U(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t \leq s \\ \\ U_1, & s < t \leq \infty. \end{cases}$$

Como habíamos mencionado anteriormente, la cantidad de esfuerzo inicial U_0 se negociará con los pescadores.

Llamemos $N_1(t)$ a la solución de

$$\dot{N} = F(N) - h(t) = F(N) - G(N)U_0.$$

Entonces la población en función del tiempo se ve de la forma

$$N(t) = \begin{cases} N_1(t), & 0 \leq t \leq s \\ \\ N^*, & s < t \leq \infty, \end{cases} \tag{2,6,10}$$

de igual manera, denotaremos la población inicial por

$$N(0) = \frac{K}{M}.$$

Por lo tanto el esfuerzo óptimo U_1 lo podemos calcular del hecho

$$0 = \dot{N} = F(N^*) - G(N^*)U_1.$$

Entonces

$$U_1 = \frac{F(N^*)}{G(N^*)}. \tag{2,6,11}$$

Mediante esta formulación podemos encontrar una solución analítica al problema planteado en la primera sección, simplemente sustituyendo

$$F(N) = RN(1 - \frac{N}{K}),$$

$$G(N) = qN,$$

$$c(N) = \frac{c}{qN},$$

utilizamos $(2, 6, 9)$ para calcular el óptimo N^*

$$N^* = \frac{1}{4pqR}\left(cR + KpqR - Kpq\delta + \sqrt{8cKpqR\delta + (-cR - KpqR + Kpq\delta)^2}\right). \quad (2,6,12)$$

$N_1(t)$ estará dado entonces por

$$N_1(t) = \frac{K\alpha}{R - \beta e^{-\alpha t}},$$

donde

$\alpha = R - qU_0$

$\beta = R - MR + MqU_0$.

Para determinar el tiempo de recuperación usamos que la población varía de manera continua, entonces se debe cumplir en $t = s$ que

$$\frac{K\alpha}{R - \beta e^{-\alpha s}} = N^*.$$

De aquí podemos obtener s en términos de N^*

$$s(N^*) = \frac{1}{\alpha}\log\left[\frac{\beta N^*}{RN^* - K\alpha}\right]. \quad (2,6,13)$$

El esfuerzo óptimo U_1 está dado entonces por

$$U_1 = \frac{F(N^*)}{G(N^*)} = \frac{R}{q}\left(1 - \frac{N^*}{K}\right). \quad (2,6,14)$$

Veamos que en este caso procedimos calculando primeramente la población que maximiza el valor presente de las ganancias y después el esfuerzo pesquero que mantiene en equilibrio este nivel de población. La expresión analítica la pudimos obtener introduciendo la ecuación de Euler. Obviamente los resultados numéricos producidos por este modelo y el de la sección 1 del capítulo 1 son los mismos.

7. Datos y resultados

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos con los modelos de pesca para el esfuerzo óptimo de los capítulos 1 y 2. Los datos fueron tomados de una tesis de maestría de economía [6] y son correspondientes al Lago de Pátzcuaro. Estos datos fueron estimados con estadísticas oficiales hasta el año de 1998.

Las unidades del esfuerzo pesquero son redes debido a que es el arte pesquera dominante en el Lago de Pátzcuaro. En este caso las unidades de esfuerzo no necesitaron ser estandarizadas ya que la gran mayoría de los pescadores solo utilizan un tipo de redes, las embarcaciones son muy parecidas en tamaño y no se usa alguna tecnología extra.

Las especies más pescadas que habitan en este Lago viven en diferentes profundidades. Con esto, si se desea pescar cierta especie, se arrastra la red a la profundidad necesaria. Esto permite que la pesca sea especializada y se pueda calcular el esfuerzo necesario por especies.

Para los cálculos se supuso que estas especies tienen un crecimiento logístico en ausencia de pesca.

Supondremos que los pescadores aplican un esfuerzo inicial el cual permite la recuperación de la especie como ya se analizó en los capítulos 1 y 2. El esfuerzo óptimo representa el esfuerzo pesquero que deberán aplicar los pescadores después del tiempo de recuperación para maximizar el valor presente de las ganancias. La población óptima es el nivel de población que proveerá el valor presente máximo. La biomasa actual es la cantidad de peces (en toneladas) que se calcula que existe en la actualidad.

	Blanco	Charal
K [ton.]	98.6	719.6
q	0.080	0.132
R [1/año]	0.678	1.1
Esfuerzo inicial supuesto (redes)	2.0	5.0
Biomasa actual calculada (ton.)	47	538
Tiempo de recuperación (años)	0.46	0
Esfuerzo óptimo (redes)	4.09	4.12
Población óptima (ton.)	51.02	363.87
Esfuerzo pesquero actual (redes) (ton.)	5.3	5.3

OBSERVACIONES: Un problema con el que se enfrenta cualquier persona que necesite hacer cálculos con datos sobre pesca es primeramente la confiabilidad de estos datos. En el Lago de Pátzcuaro existen una serie de problemas que han ocasionado un distanciamiento total de los pescadores con las autoridades. En la actualidad ningún pescador cuenta con permiso de pesca en el Lago de Pátzcuaro. Los datos oficiales son calculados de manera subjetiva ya que no cuentan con una fuente confiable y no hay estadísticas de pesca reales en el Lago de Pátzcuaro desde hace mas de 10 años. Por lo tanto los datos presentados en la tabla anterior debe ser tomados solo de manera ilustrativa. Los datos presentados son los correspondientes al pescado blanco y al charal, estos fueron elegidos debido a que son los mas representativos de la región además son los mas coherentes.

CAPíTULO 3

Teorema de Pontryagin y aplicaciones

En este capítulo trataremos el problema de encontrar funciones de control que conducen un sistema de un estado inicial a un estado final fijos, de manera que minimicen un funcional integral que depende de la función de control. Para esto introduciremos una versión del Principio de Máximo de Pontryagin que nos será de utilidad para la caracterización de esta función de control óptimo.

1. Teorema de Pontryagin

DEFINICIÓN 5. *Las variables de estado de un sistema son números reales que caracterizan el estado del sistema en el intervalo temporal.*

DEFINICIÓN 6. *Las variables de control o inputs son números reales que caracterizan las elecciones o decisiones que se pueden hacer y conducen el estado desde una condición inicial a una condición final.*

DEFINICIÓN 7. *Las ecuaciones de estado son un conjunto de n ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución en el tiempo de las variables de estado.*

TEOREMA 3.1. *(Teorema de Picard [5]) Consideremos el problema con valor inicial*

$$\dot{x} = F(x,t) \qquad\qquad x(t_0) = x_0, \tag{3,1,1}$$

donde x es una función vectorial de t. Supongamos que

i) $F(x,t)$ es continua en una vecindad abierta de (x_0,t_0), y

ii) $F_x(x,t)$ es continua en una vecindad abierta de (x_0,t_0).

Entonces dentro de alguna vecindad abierta de t_0 existe una y solo una solución $x = x(t)$ del problema con valor inicial $(3,1,1)$.

COROLARIO 3.2. *El problema*

$$\dot{x} = F(x,u(t)) \qquad\qquad x(t_0) = x_0,$$

donde F y F_x son continuas en una vecindad de $(x_0, u(t_0))$, tiene una única solución $x = x(t)$ continuamente diferenciable en una vecindad de $t = t_0$, cuando u es continua en una vecindad de t_0.

Demostración. Sea $G(x(t), t) = F(x(t), u(t))$. Aplicamos el teorema de Picard a G y esto demuestra el corolario.

TEOREMA 3.3. *(Principio de Máximo de Pontryagin) Consideraremos los controles admisibles U como funciones continuas por pedazos u cuyos valores $u(t)$ yacen en algún conjunto compacto determinado C. Supongamos que existe un control óptimo $u = u^*(t)$ de U que dirige al sistema*

$$\dot{x} = F(x, u), \tag{3,1,2}$$

a lo largo de la curva $x = x^*(t)$ de tal manera que minimiza el funcional de costo

$$J = \int_0^T L(x, u)\, dt, \tag{3,1,3}$$

satisfaciendo las condiciones finales $x(0) = a$ y $x(T) = b$ para un T específico. Supongamos que L y F son continuamente diferenciables en todas partes. Definimos el Hamiltoniano

$$H(x, \lambda, u) = -L(x, u) + \lambda \cdot F(x, u), \tag{3,1,4}$$

donde λ es llamada la variable adjunta*. Entonces existe una solución (continuamente diferenciable por pedazos) $\lambda = \lambda(t)$ de la* ecuación adjunta

$$\dot{\lambda} = -H_x(x^*, \lambda, u^*), \tag{3,1,5}$$

para la cual el Hamiltoniano H es constante a lo largo de trayectoria óptima $(x^*(t), \lambda(t), u^*)$ para $0 \leq t \leq T$, y este valor constante está dado por

$$E = \sup_v H(x^*(t), \lambda(t), v),$$

donde el supremo está tomado sobre todos los $v \in C$

Demostraremos el teorema bajo dos hipótesis adicionales :

$i)$ Para cada punto inicial existe un control óptimo de ese punto a $x(T) = b$.

$ii)$ $J(x)$ es dos veces continuamente diferenciable. $J(x)$ se definirá en la demostración.

Demostración

Debido a que los controles u son continuas por pedazos, por el teorema de Picard y el corolario 3.2, todas las trayectorias resultantes $x = x(t)$ que satisfacen $(3, 1, 2)$ son continuamente diferenciables por pedazos, ya que F es continuamente diferenciable en todas partes.

Tenemos que H y H_x son continuas en todas partes. Entonces si definimos

$$G(\lambda(t), t) = -H_x(x^*, \lambda, u^*)$$

Aplicando el teorema de Picard a G obtenemos que las soluciones $\lambda = \lambda(t)$ a $(3, 1, 5)$ deben ser también continuamente diferenciables a excepción de la discontinuidades que presente u. Como u tiene una cantidad finita de discontinuidades se tiene entonces que λ es continuamente diferenciable por pedazos.

Notemos que si u es óptimo en $[t_1, t_2]$, es óptimo en cada subintervalo, debido a que si u_1 fuera óptimo en algún subintervalo I entonces el óptimo u^* sería

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_1, t_2] \backslash I \\ \\ u_1(t), & t \in I, \end{cases}$$

lo cual contradice la hipótesis de que u es óptimo en $[t_1, t_2]$.

Supongamos que para cada punto inicial $x(0) = x^0$, existe un control óptimo $u = u(x^0, t)$ de x^0 a b en algún tiempo finito T_0 que minimiza el costo

$$J(x^0) = \int_0^{T_0} L(x, u)\, dt.$$

Notemos que para cualquier subintervalo de $[0, T_0]$, la función $u(x^0, t)$, sigue siendo óptimo para J, entonces

$$J(x(x^0, t)) = \int_t^{T_0} L(x(x^0, s), u(x^0, s))\, ds.$$

Suponiendo que $J(x)$ es diferenciable y los controles son continuos por pedazos, entonces podemos diferenciar con respecto a t la desigualdad anterior para obtener:

$$\begin{aligned} 0 &= L(x(x^0, t), u(x^0, t)) + \nabla J(x(x^0, t)) \cdot \dot{x}(x^0, t) \\ &= L(x(x^0, t), u(x^0, t)) + \nabla J(x(x^0, t)) \cdot F(x(x^0, t), u(x^0, t)), \end{aligned}$$

para todos excepto un número finito (t.e.n.f.) de t (estos t donde no se valdría son donde u es discontinua) y todo x^0. En particular, cuando $u = u^*(t)$, $x = x^*(t)$, y $x^0 = a$, es decir el control óptimo, la trayectoria óptima y la condición inicial del problema, se tiene que

$$0 = L(x^*, u^*) - \lambda \cdot F(x^*, u^*) = -H(x^*, \lambda, u^*), \tag{3,1,6}$$

para casi todo $0 \leq t \leq T_0$, donde elegimos

$$\lambda(t) = -\nabla J(x(a, t)).$$

Entonces H es 0 t.e.n.f. a lo largo de la trayectoria óptima (x^*, λ, u^*) para esta elección de λ.

Para cualquier $v \in C$ fijo, resolvemos $\dot{x} = F(x, v)$ para obtener una solución local $x = \tilde{x}(t)$ que inicia en $x^0 = \tilde{x}(0)$. Dado que en general $x = \tilde{x}$ no es la trayectoria óptima de x^0 a $\tilde{x}(t)$, entonces no minimiza el costo, por lo tanto se tiene que

$$J(x^0) \leq \int_0^{T_0} L(\tilde{x}, v)\, ds = \int_0^t L(\tilde{x}, v)\, ds + \int_t^{T_0} L(\tilde{x}, v)\, ds = \int_0^t L(\tilde{x}, v)\, ds + J(\tilde{x}(t)).$$

Esto es, para $t > 0$,

$$-\frac{J(\tilde{x}(t)) - J(x^0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\tilde{x}, v)\, ds.$$

Entonces en el límite, dado que $L(\tilde{x}, v)$ es continuo en t y $x^0 = \tilde{x}(0)$

$$-\frac{d}{dt} J(\tilde{x}(t)) \bigg|_{t=0} = -\nabla J(x^0) \cdot \dot{\tilde{x}}(0) = -\nabla J(x^0) \cdot F(x^0, v) \leq L(x^0, v). \tag{3,1,7}$$

En particular, tomando el punto x^0 como un punto arbitrario en la trayectoria óptima $x = x^*(t)$ obtenemos (despejando de $(3, 1, 7)$ y usando la definición de el Hamiltoniano H)

$$H(x^*(t), \lambda(t), v) \leq 0,$$

para t.e.n.f. $0 \leq t \leq T$ y todo $v \in C$.

Como consecuencia de $(3, 1, 7)$ y $(3, 1, 6)$, la función

$$h(x, u) = -L(x, u) - \nabla J(x) \cdot F(x, u) = H(x, \lambda, u),$$

toma un valor máximo cuando $x = x^*(t)$ y $u = u^*(t)$ para t.p.n.f t, esto debido a que el Hamiltoniano $H(x, \lambda, u) \leq 0$ y en estos valores x^* y u^* toma el valor cero. Con esto estamos demostrando que el Hamiltoniano toma un valor constante en los valores óptimos x^* y u^* y este valor es un máximo. Suponiendo que $J(x)$ es dos veces continuamente diferenciable en cada x, tenemos entonces que a lo largo de $x = x^*(t)$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial(\nabla J \cdot F)}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial x_j}F_j = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}F_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial x_j}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\dot{\lambda}_j.$$

Lo cual podemos escribir en la forma

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda \cdot F_{x_i} + L_{x_i}.$$

Esto nos dice que λ satisface la ecuación adjunta y con esto el teorema queda demostrado.$\square$

Condiciones de transversalidad

En el caso que el punto terminal $x(T)$ sea libre, pero T sea fijo se tiene una condición adicional, llamada condición de transversalidad. A continuación mostraremos este caso.

Bajo las hipótesis del teorema anterior, excepto que ahora $x(T)$ es libre, queremos minimizar

$$J = \int_0^T L(x,u)\,dt, \qquad (3,1,8)$$

sujeto a

$$\dot{x} = F(x,u). \qquad (3,1,9)$$

Debido a $(3,1,9)$ el funcional J puede ser reescrito en la forma

$$J = \int_0^T [L(x,u) + \lambda(\dot{x} - F(x,u))]\,dt = -\int_0^T H(x,\lambda,u)\,dt + \int_0^T \lambda\dot{x}\,dt. \qquad (3,1,10)$$

Integramos por partes el segundo término de $(3,1,10)$

$$\int_0^T \lambda\dot{x}\,dt = \lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0) - \int_0^T x\dot{\lambda}\,dt.$$

Sustituimos esta expresión en $(3,1,10)$ para obtener

$$J = -\int_0^T [H(x,\lambda,u) + x\dot{\lambda}]\,dt + \lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0). \tag{3,1,11}$$

Supongamos que existe un control óptimo u, que define la trayectoria óptima x. Entonces cualquier perturbación admisible del control óptimo no representa un mínimo para J. Definamos entonces

$$u(t,\epsilon) = u(t) + \epsilon\alpha(t),$$

$$x(t,\epsilon) = x(t) + \epsilon\eta(t),$$

donde α es una función que permite que $u(t,\epsilon)$ sea un control admisible y $\eta(0) = 0$. Esta última condición la establecemos ya que solo podemos perturbar el punto final de la trayectoria óptima, pero no el punto inicial ya que está fijo. Entonces podemos tomar a J como una función de ϵ

$$J(\epsilon) = -\int_0^T [H(x+\epsilon\eta,\lambda,u+\epsilon\alpha) + (x+\epsilon\eta)\dot{\lambda}]\,dt + \lambda(T)[x(T)+\epsilon\eta(T)] - \lambda(0)x(0).$$

Esta función toma su valor mínimo en $\epsilon = 0$. Entonces su derivada al respecto de ϵ se anula en $\epsilon = 0$, esto es

$$0 = \left.\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_0^T [(H_x + \dot{\lambda})\eta + H_u\alpha]\,dt + \lambda(T)\eta(T) = 0. \tag{3,1,12}$$

Utilizando el Principio de Pontryagin tenemos que se debe cumplir la ecuación adjunta

$$-H_x(x,\lambda,u) = \dot{\lambda}.$$

Además H se maximiza en el control óptimo u, entonces $H_u = 0$. Por lo tanto el argumento de la integral de $(3,1,12)$ es cero. Entonces se tiene que

$$\lambda(T)\eta(T) = 0.$$

Como η es una función arbitraria, se tiene la condición de transversalidad

$$\lambda(T) = 0. \tag{3,1,13}$$

Con esto, la ecuación adjunta, la condición de maximización del Hamiltoniano y la condición de transversalidad, forman un sistema de ecuaciones completo.

Si además tenemos que el horizonte temporal T es variable, entonces será necesaria otra condición. Utilizando $(3,1,11)$ se tiene que cumplir

$$\frac{\partial J}{\partial T} = H(x, \lambda, u)\Big|_T + \dot{\lambda}(T)x(T) - [\dot{\lambda}(T)x(T) + \lambda(T)\dot{x}(T)] = 0.$$

Entonces

$$H(x, \lambda, u)\Big|_T - \lambda(T)\dot{x}(T) = 0.$$

Como $x(T)$ es libre, se tiene que $\lambda(T) = 0$. Entonces la condición de transversalidad es

$$H(x, \lambda, u)\Big|_T = 0.$$

En el caso en que el horizonte temporal sea infinito tenemos que:

$$J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T L(x, u)\, dt.$$

Entonces la condición de transversalidad es

$$\lim_{T\to\infty} H(x, \lambda, u)\Big|_T = 0.$$

2. Aplicaciones del principio de Pontryagin

Ejemplo 1 *Ecuación de Euler*

A partir del principio de Pontryagin podemos obtener las ecuación de Euler como veremos a continuación.

Definimos $\dot{x}(t) = u(t)$. Suponemos que existe un control óptimo $\dot{x}^*$ que lleva al sistema $\dot{x}$ a lo largo de la curva $x = x^*$ de tal manera que minimiza el costo

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[t, x(t), u(t)],$$

con f y $u(t)$ continuamente diferenciables en todas partes. Entonces el Hamiltoniano está dado por

$$H(t, x, u, \lambda) = -f[t, x(t), u(t)] + \lambda u(t).$$

Entonces, si maximizamos el Hamiltoniano con respecto a $\dot{x}(t)$, se cumple que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda = 0,$$

y así

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial u},$$

diferenciando este resultado con respecto a t obtenemos

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{3,2,1}$$

ahora utilizamos el hecho de que λ satisface la ecuación adjunta, esto es

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

sustituimos $\dot{\lambda}$ en $(3, 2, 1)$ y obtenemos la ecuación de Euler

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Sustituyendo $u = \dot{x}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}. \quad \square$$

Ejemplo 2 *Minimización de la longitud entre dos puntos*

Del principio de Pontryagin vamos a calcular la curva de menor longitud entre dos puntos dados.

Sea $x = x(t)$ la trayectoria entre los puntos $(0, 0)$ y $(0, T)$. Tenemos que la longitud de arco está dada por

$$L = \int_0^T \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt.$$

Suponemos que existe el control óptimo $\dot{x}^*$ que minimiza el costo L sujeto a $x(0) = 0$ y $x(T) = 0$. Aquí definimos $\dot{x}(t) = u$ como la variable de control. Por lo tanto el Hamiltoniano toma la forma

$$H = -\sqrt{1 + \dot{x}^2} + \lambda u = \sqrt{1 + u^2} + \lambda u.$$

Entonces si maximizamos el Hamiltoniano al respecto de u se cumple que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \lambda = 0, \tag{3,2,2}$$

el Hamiltoniano se maximiza ya que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Ahora, utilizando la ecuación adjunta obtenemos que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

ya que H no depende de x. Por lo tanto $\lambda = k = constante$, sustituimos esto en $(3,2,2)$ resultando que

$$u = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = k_1 = constante,$$

es decir $\dot{x}(t) = k_1$, por lo tanto $x(t) = k_1 t + k$. Ahora, aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x(T) = 0$, obtenemos que $x(t)$ es la recta $x = 0$. $\square$

Ejemplo 3 *Maximización de la pesca para un crecimiento exponencial*

Supongamos que el nivel de población medido en toneladas N de una especie de peces aumenta a velocidad constante en ausencia de pesca. También supongamos que las autoridades han establecido una tasa de pesca máxima y que la tasa de pesca es proporcional al nivel de población. Entonces el cambio de población en el tiempo está dado por

$$\dot{N} = RN - uN, \quad 0 \leq u \leq U,$$

donde uN representa la tasa de pesca, medido en [toneladas/año], U es la máxima razón de pesca y R es la tasa de crecimiento intrínseco de la población de peces, ambas medidas en [1/año]. Supongamos que la población inicial es $N(0) = 1$, que el tiempo terminal T es fijo y que la tasa de crecimiento intrínseco $R = 1$ [1/año]. Tomaremos $T \geq 1$ para permitir que la población tenga al menos un periodo de reproducción. Entonces

$$\dot{N} = N - uN, \quad 0 \leq u \leq U. \tag{3,2,3}$$

Nuestro objetivo es maximizar la pesca durante este periodo de tiempo. Entonces tenemos que minimizar el funcional de costo

$$J = -\int_0^T uN\,dt.$$

El Hamiltoniano del problema es el siguiente

$$H = uN + \lambda N(1-u) = \lambda N + uN(1-\lambda).$$

Este Hamiltoniano es maximizado eligiendo $u = 0$ si $\lambda > 1$ o $u = U$ si $\lambda < 1$. La ecuación adjunta es

$$\dot{\lambda} = -u - \lambda(1-u).$$

Dado que el nivel de población $N(T)$ es libre, tenemos que la condición de transversalidad es $\lambda(T) = 0$. Entonces las soluciones a la ecuación adjunta son

$$\lambda = -\frac{U}{1-U} + \alpha\, e^{(U-1)t}, \qquad (3{,}2{,}4)$$

cuando $u = U$, y

$$\lambda = \beta\, e^{-t}, \qquad (3{,}2{,}5)$$

cuando $u = 0$.

Estas soluciones sólo pasan una vez a través de $\lambda = 1$, debido a que son funciones monótonas. Además debido a la condición final $\lambda(T) = 0$ no se puede finalizar con $u = 0$, ya que $\lambda(T) < 1$ y en consecuencia $u = U$. Entonces se deberá aplicar $u = U$ para todo t ó comenzar con $u = 0$ y hacer un cambio a $u = U$ en algún instante τ.

La constante α de la solución $(3,2,4)$ es determinada por la condición de transversalidad. Entonces para todo t ó para $t > \tau$ se tiene que

$$\lambda = -\frac{U}{1-U}\left[e^{(U-1)(t-T)} - 1\right]. \qquad (3{,}2{,}6)$$

Analizando la ecuación $(3,2,6)$ podemos ver que $\lambda = 1$ se tiene cuando $t = \tau$, donde

$$\tau = T - \delta \qquad \text{y} \qquad \delta = \tfrac{\log U}{U-1}.$$

Veamos que δ es positiva para todos los valores de U. Además si definimos $\delta = 1$ para $U = 1$, entonces δ es una función continua de U.

Podemos identificar dos casos, dependiendo del signo de τ. El primer caso es cuando $T < \delta$, entonces τ es negativo. Entonces para todo t, $u = U$, por lo tanto la solución a $(3,2,3)$ es

$$N = e^{(1-U)t}.$$

Y la máxima pesca está dada por

$$-J = \frac{U}{1-U}[e^{(1-U)T} - 1]$$

Para el caso $U = 1$, calculamos el límite cuando $U \to 1$

$$-J = T$$

El segundo caso es cuando $T > \delta$ y por lo tanto $\tau > 0$. Entonces para maximizar la pesca tenemos que comenzar con esfuerzo $u = 0$ para $t \leq \tau$ y hacer el cambio a $u = U$ para $t > \delta$. Entonces la solución a $(3, 2, 3)$ está dada por

$$N(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \\ e^{\tau U - (U-1)t}, & \tau < t \leq T. \end{cases} \tag{3,2,7}$$

Y la pesca óptima está dada por

$$J = -U \int_{\tau}^{T} N\,dt = \frac{U}{U-1}\left[e^{[\tau U - (U-1)T]} - e^{\tau}\right]$$

Sustituyendo el valor de δ podemos encontrar una expresión más simple para J

$$-J = U^{\frac{1}{1-U}} e^{T} \tag{3,2,8}$$

Para el caso $U = 1$, calculamos el límite cuando $U \to 1$

$$-J = e^{T-1}$$

Entonces la estrategia óptima es no pescar durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \tau$ y después aplicar el máximo esfuerzo posible U durante el intervalo $\tau < t \leq T$. A este tipo de controles se les denomina *bang-bang*.

Ejemplo 4 *Regla fundamental de explotación de recursos renovables*

Utilizaremos la notación de la sección 1 del capítulo 1. Generalizaremos ahora la razón de crecimiento de la población de peces, ahora supondremos que está dada por:

$$\dot{N} = F(N) - h(t), \tag{3,2,9}$$

donde $F(N)$ es la razón de crecimiento de la población de peces en ausencia de pesca y $h(t)$ es la tasa de captura. Supondremos que F es continuamente diferenciable en todas partes. La función $h(t)$ depende del esfuerzo pesquero u y del stock de población $N = N(t)$ es decir

$$h = Q(u, N),$$

ahora supondremos que esta función está dada por

$$h = Q(u, N) = G(N)u.$$

Esta suposición nos conducirá a un modelo lineal de optimización más fácil de manejar. La función $G(N)$ debe ser una función continuamente diferenciable y no decreciente, ya que es de esperarse que si aplicamos un esfuerzo fijo U la captura no decrece si el stock de población crece. Notemos que hemos generalizado la función h que anteriormente fue considerada como $h = quN$.

Consideraremos que el precio p del pescado y el costo por unidad de esfuerzo c son constantes. Definiremos la siguiente variable

$$c(N) = \frac{c}{G(N)}.$$

El problema es maximizar el funcional del valor presente total de las ganancias

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[\, pGu(t) - cu\,]\, dt, \tag{3,2,10}$$

sujeto a

$$\dot{x} = F(N) - h(t) = F(N) - G(N)u, \tag{3,2,11}$$

con $U_0 \leq u(t) \leq U$. Donde U es el esfuerzo pesquero que mantiene la población en el nivel óptimo N^* que es el nivel de población que maximiza $J(u)$ y U_0 es el esfuerzo mínimo aceptable que además permite que la población crezca hasta el nivel N^*, en el periodo $[0, s]$. El Hamiltoniano es

$$H = e^{-\delta t}[pG(N) - c]u + \lambda[F(N) - G(N)u] = \{e^{-\delta t}[pG(N) - c] - \lambda G(N)\}u + \lambda F(N).$$

$G(N)$ debe ser de tal forma que se cumpla la condición de transversalidad

$$\lim_{T\to\infty} \{e^{-\delta T}[pG(N) - c]u + \lambda[F(N) - G(N)u]\} = 0.$$

Para T suficientemente grande el segundo término se anula por hipótesis ($\dot{N} = 0$ para $t > s$).

Denotaremos

$$\varphi(N, t) = e^{-\delta t}[pG(N) - c] - \lambda G(N).$$

El Hamiltoniano evaluado en N^* es maximizado al respecto de u en

$$u^*(t) = \begin{cases} U_0, & \varphi(N^*, t) < 0, \\ \\ U, & \varphi(N^*, t) > 0. \end{cases}$$

Además se debe cumplir la condición necesaria

$$\frac{dH}{du} = 0 = e^{-\delta t}[pG(N) - c] - \lambda G(N).$$

Entonces

$$\lambda = e^{-\delta t}(p - \frac{c}{G(N)}). \tag{3,2,12}$$

También se debe cumplir la ecuación adjunta

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial N},$$

en N^*,u^*. Entonces

$$\dot{\lambda} = -e^{-\delta t}\left[\delta\left(p - \frac{c}{G(N^*)}\right) + \frac{cG'\dot{N}}{(G(N^*))^2}\right],$$

$$-\frac{\partial H}{\partial N} = -e^{-\delta t}pGu^* - e^{-\delta t}(p - \frac{c}{qN^*})[F'(N^*) - G'(N^*)].$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones y usando $(3, 2, 11)$ obtenemos

$$F'(N^*) + \frac{c'(N^*)F(N^*)}{p - c(N^*)} = \delta. \tag{3,2,13}$$

Esta ecuación es llamada la regla fundamental de explotación de recursos renovables.

$(3, 2, 13)$ es aplicable en la explotación de recursos en los que el funcional de costo depende de manera lineal de la función de control. Al ser lineal la dependencia, el Hamiltoniano no puede ser maximizado utilizando las técnicas usuales de cálculo y es necesario analizar el signo del coeficiente de la función de control u en el Hamiltoniano. Este coeficiente es llamado función de *switch*. Este nombre es debido a que si el signo de este coeficiente es positivo entonces u debe ser lo máximo posible, mientras que si el signo es negativo u deberá ser lo mínimo posible, entonces el cambio de signo nos indica donde debemos hacer el cambio o *switch* en el valor de la función de control. En este caso la solución es un control del tipo *bang bang*.

Un caso especial es cuando la función de *switch* se anula, entonces el Hamiltoniano es independiente de la función de control u y por lo tanto el Principio de Máximo de Pontryagin no indica el valor del control óptimo.

Esta aplicación del Principio de Máximo de Pontryagin sustenta el resultado de la sección 7 del capítulo 2.

3. Conclusiones sobre el modelo de administración de pesquerías

1. La solución óptima al modelo de administración de pesquerías de la sección anterior, indica que se debe aplicar el esfuerzo mínimo durante cierto intervalo de tiempo. El esfuerzo mínimo que podemos aplicar es cero, entonces la decisión óptima sería aplicar una veda total durante un intervalo de tiempo y después aplicar el esfuerzo pesquero óptimo. La desventaja de esta estrategia es la dificultad de aplicar vedas totales. En ciertas regiones como el Lago de Pátzcuaro, las autoridades no pueden regular el número de embarcaciones debido a la nula relación entre los pescadores y el gobierno. Aún cuando hay relación, la veda no es respetada por algunos pescadores debido a que la pesca es su única fuente de ingresos.

La presente tesis muestra una solución a este problema; establecer una veda parcial durante cierto periodo, que permitirá a los pescadores seguir teniendo ingresos y después aplicar el esfuerzo pesquero óptimo que maximiza el valor presente de las ganancias.

2. Analizando la tabla de la sección 7 del capítulo 2, vemos que el esfuerzo pesquero que se está aplicando para la extracción del pez blanco es de $5{,}3$ redes por pescador, mientras que el esfuerzo pesquero óptimo es de $4{,}09$. Si calculamos el esfuerzo necesario para una situación de equilibrio bionómico con la fórmula de la sección 2 del capítulo 1, obtenemos un valor de $8{,}48$ redes por pescador. Debido a esto la población de pez blanco se encuentra en decremento y como muestra a continuación en las estadísticas, la extracción ha ido disminuyendo, pero aún no se llega a una situación de equilibrio bionómico, con lo que el negocio de la pesca del pez blanco aún es redituable en el Lago de Pátzcuaro. A continuación mostramos estadísticas oficiales de COMPESCA sobre la extracción del pez blanco, que confirman lo que acabamos de mencionar

Año	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Extracción(tons)	69	42	22	24	20	9	8	9	9	10

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Extracción(tons)	4.1	1.2	0.3	0.1	0	1.02	0.5

Fuente: COMPESCA

3. Recordemos que debido a la nula de relación de los pescadores del Lago de Pátzcuaro con las autoridades, estos datos no son confiables, por lo tanto deben ser tomados sólo de manera ilustrativa. Pero, aunque las cantidades no representen la realidad, sí representan la tendencia y la variación en el tiempo de la extracción de pez blanco. Entonces estos datos nos sirven para confirmar de manera cualitativa lo que dice el modelo de administración de pesquerías, esto es, una disminución de la población y una tendencia al equilibrio bionómico, ya que al disminuir la población de peces, disminuye la extracción y por lo tanto se tiende a aumentar el esfuerzo pesquero para mantener una pesca redituable.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis matemático*, Reverté, España (1960).
[2] Erwin Kreizig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley & Sons, USA (1989).
[3] Eugenio P. Balanzario, *Introducción al control óptimo*, Manuscrito.
[4] Collin W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*,Wiley & Sons, USA (1990).
[5] C. R. MacCluer, *Calculus of variations*,Prentice Hall, USA (2005).
[6] Carlos Francisco Ortiz Paniagua, *Pesca, sociedad y medio ambiente: arreglos institucionales y política pesquera en el Lago de Pátzcuaro:1990-2004*, Tesis de Maestría, ININEE, UMSNH, (2004).
[7] Morris Kline , *Mathematical thought "from ancient to modern times"Volume 2*, Oxford University Press, USA (1972).
[8] Donald Smith , *Variational Methods in Optimization*, Prentice Hall, USA (1974).