



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

MODELO MATEMÁTICO DE LA INVASIÓN DE AGUA DE UN ACUÍFERO PROFUNDO A UN YACIMIENTO DE ACEITE POR UNA FALLA PRODUCTORA: SOLUCIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
LIC. EN FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:
RICARDO NOEL PACHECO VENEGAS

ASESORES:
TUTOR: DR. MARIO CÉSAR SUÁREZ ARRIAGA
COTUROR: DR. FERNANDO SAMANIEGO
VERDUZCO

MORELIA, MICH., JUNIO DE 2006

DEDICATORIA

A mis papás Noel Marcos Pacheco Villaseñor y Rosa Venegas Chávez que me han apoyado a lo largo de mi vida con sus consejos, amor y dedicación.

A mis hermanos Nancy, Elena y Eduardo por todos los momentos que hemos compartido juntos.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Mario César Suárez Arriaga y al Dr. Fernando Samaniego Verduzco por sus consejos y ayuda.

A PEMEX-EXPLORACIÓN Y PRODUCCION por el apoyo financiero que me otorgó para el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE

	RESUMEN	5
1	INTRODUCCIÓN GENERAL	6
1.1	Intervención del Agua en un Campo Petrolero	7
2.	DESARROLLO	9
2.1	Porosidad	9
2.2	Saturación	9
2.3	Presión de Capilaridad	10
2.4	Permeabilidad Relativa	11
2.5	Ley de Darcy	11
2.6	Conservación de Masa	13
3	MODELO MATEMATICO	16
3.1	Introducción	16
3.2	Descripción y Formulación General del Problema	17
3.3	Datos de Campo Necesarios para Resolver el Problema	18
3.4	Posibles Efectos de la Temperatura	19
3.5	Modelo General Tridimensional con Parámetros Constantes	20
3.6	Desarrollo del Modelo en Tres Dimensiones	21
4	MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO	27
4.1	Introducción	28
4.2	Funciones Base en una Dimensión	28
4.2.1	Interpolación lineal	28
4.2.2	Interpolación de orden mayor que uno	31
4.2.3	Funciones de forma de Hermite	32
4.3	Funciones Base en Dos Dimensiones	33
4.3.1	Elementos triangulares	33
4.3.2	Elementos cuadrilaterales	35
4.3.3	Coordenadas triangulares	37
4.4	Problemas Transientes	38
5	GENERACIÓN DE MALLAS	41
5.1	Introducción	41
5.2	Planteamiento del Problema	41
5.3	Método de Interpolación Transfinita	42
5.4	Generación Variacional de Mallas	45
5.4.1	Discretización de Barrera-Pérez	45
5.4.2	Discretización de funcionales	46
5.4.3	Normalización de funcionales	48
5.5	Funcional de Longitud	48

5.6	Funcional de Área	52
5.7	Funcional d Ortogonalidad	55
5.8	Funcional de Suavidad	58
5.9	Combinación de Funcionales	59
6	DESCRIPCIÓN DEL PROGARAMA PAVE	62
6.1	Descripción	62
6.2	PAVE	62
6.2.1	Estructura de PAVE en modo Gráfico	63
6.2.2	Archivos de contorno y malla	65
6.2.3	Creación de algunas mallas	67
6.2.4	Análisis de la clase Funcional	73
6.2.5	Estructura de PAVE en su modo no gráfico	76
6.3	PAVE_EDITOR	77
7	MODELO NUMERICO	83
8	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	85
8.1	Resultados	85
8.2	Conclusiones	90
9	REFERENCIAS	91

RESUMEN.

La invasión de agua a pozos petroleros, es sin duda, un problema de gran interés, tanto en un contexto económico como científico. Las compañías petroleras producen un promedio de tres barriles de agua por uno de petróleo que extraen de los yacimientos agotados. Se gastan varias decenas de billones de dólares por año para hacer frente a los problemas de agua indeseada.

En la tesis expongo algunos resultados que se generaron para el Proyecto Bellota-Jujo de PEMEX que se realizó con la finalidad de crear un modelo que predijera el fenómeno de invasión de agua a los pozos productores. Al contar con el modelo matemático se procedió resolverlo numéricamente por medio del Método del Elemento Finito (MEF), puesto que una solución analítica no era posible debido a la complejidad del problema.

A pesar de que el modelo se estableció para ser resuelto en un dominio rectangular, se pensó en crear un generador de mallas sobre regiones irregulares para extender, en un futuro próximo, el mismo modelo a región más representativa del fenómeno. Para el diseño del generador me basé en los trabajos del Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz (2000). Los dos programas que surgieron con este fin, PAVE y PAVE_Editor, fueron escritos en el lenguaje de programación C++ utilizando los conceptos de Programación Orientada a Objetos. Ambos son descritos, en su funcionamiento y diseño, en uno de los capítulos de la tesis.

Los resultados obtenidos con el generador fueron comparados con mallas obtenidas por otros autores, comprobando su buen desempeño.

Para verificar la certeza del modelo establecido para el problema de flujo se realizaron varias simulaciones, logrando predecir resultados observados en los pozos del Activo Bellota-Jujo.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN GENERAL

Del petróleo se dice que es el energético más importante en la historia de la humanidad; un recurso natural no renovable que aporta el mayor porcentaje de la energía que se consume en el mundo.

Aunque se conoce de su existencia y utilización desde épocas milenarias, la historia del petróleo como elemento vital y factor estratégico de desarrollo es relativamente reciente, menos de 200 años.

En 1859, Edwin L. Drake perforó el primer pozo con el propósito específico de producir petróleo, con el fin de generar cantidades industriales de kerosina para la iluminación.

Este se considera el inicio de la industria petrolera, aunque se sabe que los rusos también perforaron sus primeros pozos de petróleo entre 1806 y 1819, así como los canadienses en 1857. Citando a Max Ball, un destacado intelectual norteamericano:

"El pozo de Drake no fue el primero en suministrar petróleo, pues éste ya había sido producido excavando fosas desde hace cientos de años. No fue el primer pozo en producir petróleo porque muchos pozos perforados para sal habían producido petróleo, tanto en los Estados Unidos como en la China. No fue ni siquiera el primer pozo perforado con este específico propósito de obtener petróleo porque los chinos probablemente habían perforado con este fin antes de Cristo. ¿Cuál fue entonces el mérito del pozo perforado en Titusville por Edwin Drake, otrora conductor de ferrocarriles, "coronel" por cortesía, superintendente de una empresa petrolífera? Simplemente éste: fue el primer pozo perforado con el específico propósito de obtener petróleo en una región con abundantes yacimientos petrolíferos, en un tiempo en que el mundo, rápidamente industrializado requería iluminación y máquinas y clamaba por fuentes de materiales para combustibles y lubricantes. Y por último, el descubrimiento del petróleo se hace en un sitio donde disponía de transportación relativamente barata con ferrocarriles nuevos".

Previo a la aplicación que le dio Edwin Drake al petróleo, los florecimientos petroleros se utilizaban principalmente para producir asfalto, como fue el caso del Lago de Asfalto de Guanoco, del Estado de Sucre, en Venezuela. Cuando se fundó la primera empresa petrolera venezolana, llamada PETROLIA, se enviaron técnicos a capacitarse con el Sr. Drake.

1.1 INTERVENCIÓN DEL AGUA EN UN CAMPO PETROLERO

En la práctica en todos los reservorios de aceite se presenta el flujo simultáneo de agua, aceite y gas, especialmente en los procesos de producción. De gran interés es el mecanismo de drenaje de agua en donde esta desplaza parcial o completamente al aceite y al gas.

En “Walter Control,” Oilfield Review (2000) se reportó que: *en USA, en promedio son producidos siete barriles de agua por cada barril de aceite y en el mundo tres barriles de agua por uno de aceite. El costo de disponer de esta agua es estimado en USA entre 5 y 10 billones de dólares y aproximadamente en 40 billones en el mundo entero.*

Si se tiene en cuenta que la producción mundial de agua es aproximadamente 210 millones de barriles por día (33.4 millones m³/d) en comparación con los 75 millones de barriles de petróleo en el mismo tiempo, puede decirse en algún sentido que la producción de muchas compañías es agua. La estimación del costo de los sistemas de manejo de agua oscila entre 5 y 50 centavos de dólar por barril de agua y puede ascender a 4 dólares por barril de petróleo en pozos que producen petróleo con un 80% de corte de agua.

El agua se encuentra presente en todas las etapas de la vida del campo petrolero, desde la exploración hasta el abandono del campo, pasando por el desarrollo y producción del mismo. Cuando se extrae petróleo de un yacimiento, tarde o temprano, el agua proveniente de un acuífero subyacente o de los pozos inyectores se mezcla y es producida junto con el petróleo. El flujo de agua termina por invadir la tubería de producción y las instalaciones de procesamiento en la superficie en la cual se extrae y desecha, o bien se inyecta para mantener la presión en el yacimiento.

El agua que se encuentra en el campo petrolero puede clasificarse de la siguiente manera:

- *Agua de barrido.* Proviene de un pozo inyector o de un acuífero activo que contribuye al barrido del petróleo del yacimiento.
- *Agua buena.* Es el agua producida en el hueco a una tasa inferior al límite económico de la relación agua/petróleo. Es una consecuencia inevitable del flujo de agua a través del yacimiento, y no se puede eliminar sin perder parte de las reservas. La producción de agua buena tiene lugar cuando existe un flujo simultáneo de agua y petróleo en toda la matriz. Dado que el agua buena, por definición, produce petróleo junto con ella, se maximiza su producción.
- *Agua mala.* Puede definirse como el agua producida en el hueco que no produce petróleo, o que produce una tasa de petróleo económicamente insuficiente.

En pozos individuales los problemas con agua mala pueden clasificarse, generalmente, en diez casos dependiendo de varios aspectos; en la mayoría existen maneras de tratarlos [1], pero económicamente suele ser costoso.

No obstante que se tienen maneras de tratar el problema no es posible predecirlo. En el siguiente trabajo se presenta un modelo y resultados parciales de un proyecto que se inició con el fin de resolver el problema y comprender el fenómeno de invasión de agua en pozos productores de aceite.

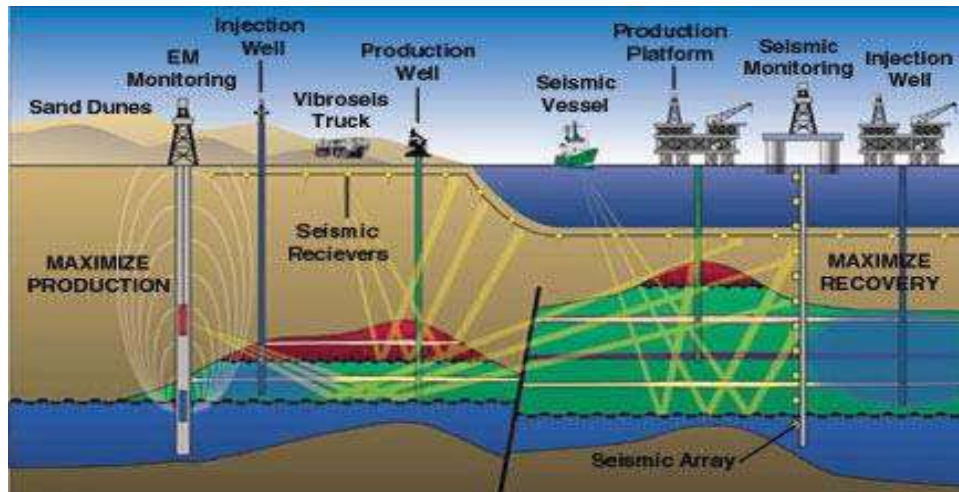


Figura 1.0. Detección y rastreo de cambios de datos durante la producción.

CAPÍTULO 2

DESARROLLO

En este capítulo presento los conceptos necesarios para la creación del modelo que describe el fenómeno. Básicamente son conceptos relacionados con el medio poroso y las propiedades de los fluidos que fluyen a través de él.

2.1 POROSIDAD

El sistema físico, definido por el reservorio, ocupa una región V del espacio. El volumen V es la unión del volumen ocupado por los poros y del volumen del sólido. Cuantitativamente:

$$V = V_{\varphi} + V_s \quad (2.1)$$

V_{φ} comprende el volumen total de los poros y V_s el volumen de sólido. En el sistema se pueden almacenar fluidos en una o más fases. Esta propiedad queda determinada para cualquier pequeño elemento de volumen ΔV con masa Δm por la siguiente definición operativa:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow \delta V} \frac{\Delta V_{\varphi}}{\Delta V} = \frac{dV_{\varphi}}{dV} \quad (2.2)$$

donde ΔV_{φ} es el volumen de los huecos o poros en la muestra de roca ΔV y δV es el volumen representativo más pequeño de roca porosa, de masa δm que sea posible medir en laboratorio. Para motivos prácticos $\delta V \approx 1 \text{ mm}^3$ aproximadamente. Con esta definición, cualquier elemento diferencial de volumen poroso, en una roca de porosidad variable, puede en principio calcularse mediante la relación:

$$dV_{\varphi} = \varphi(\vec{r}, t) dV \quad (2.3)$$

2.2 SATURACIÓN

Si varias fases coexisten como en un fluido bifásico, la saturación de la fase f es determinada por:

$$S_f(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V_\phi \rightarrow \delta V_\phi} \frac{\Delta V_f}{\Delta V_\phi} = \frac{dV_f}{dV_\phi} \quad (2.4)$$

La suma de saturaciones de todas las fases presentes será la unidad.

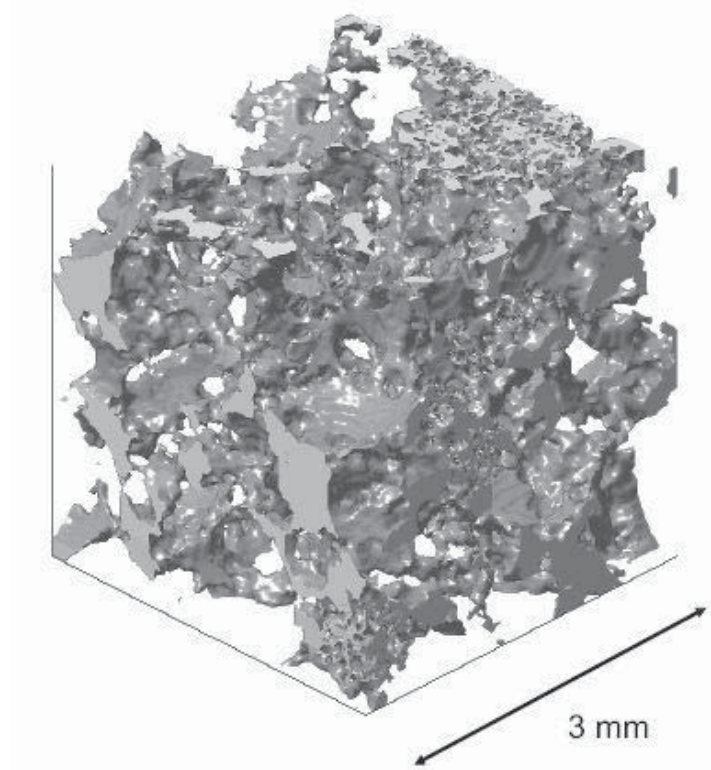


Figura 2.0. Medio Poroso.

2.3 PRESIÓN DE CAPILARIDAD

Cuando dos fluidos inmiscibles están en contacto en la intersección de un medio poroso, existe una discontinuidad en la presión en la interfase de separación de estos. Su magnitud depende de la curvatura de la interfaz. La diferencia en la presión (p_c) es llamada presión de capilaridad:

$$p_c = p_o - p_w \quad (2.5)$$

donde p_o es la presión de la fase de aceite y p_w la del agua.

2.4 PERMEABILIDAD RELATIVA

Cuando el medio poroso contiene más de una fase del fluido (aceite y gas, líquido y vapor) la conductancia del medio a una de las fases se llama permeabilidad efectiva. Ésta depende de la fracción volumétrica de cada fase presente en el espacio poroso (saturación de la fase) y de las características mojantes del fluido. El concepto de permeabilidad relativa se refiere al cociente de la permeabilidad efectiva entre la permeabilidad absoluta y se originó al extender la ley de Darcy para un fluido monofásico, a un flujo de fluido bifásico. Matemáticamente se expresan por:

$$k_{ro} = \frac{K_{ro}}{K} \leq 1 \quad (2.6)$$

$$k_{rw} = \frac{K_{rw}}{K} \leq 1 \quad (2.7)$$

donde K_{ro} y K_{rw} son la permeabilidad efectiva para cada uno de los fluidos y K es la permeabilidad absoluta.

En la práctica se considera que las permeabilidades relativas dependen únicamente de las saturaciones correspondientes.

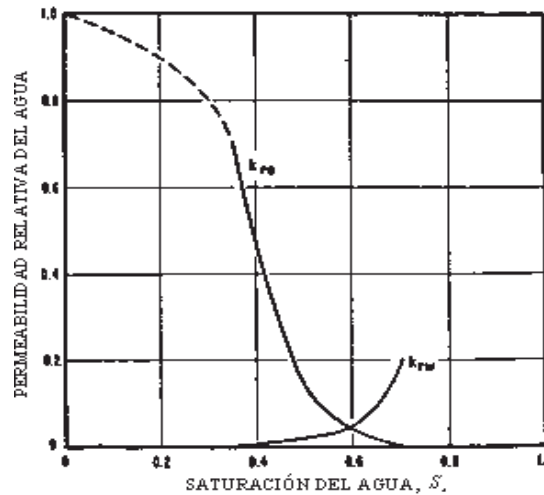


Figura 2.1. Gráfica que muestra una curva típica de la dependencia entre k_{rw} y S_w .

2.5 LEY DE DARCY

La ley de Darcy para un flujo, compuesto por un solo fluido, en un sistema horizontal con una tasa de flujo volumétrico Q , sobre una muestra de material poroso de longitud L y sección de área transversal A , es dado por:

$$Q = \frac{KA}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (2.8)$$

donde Δp es la presión aplicada sobre la muestra, μ es la viscosidad del fluido, y K es la permeabilidad absoluta del medio. Para un flujo en una sola dirección (suponiendo paralelo al eje x) la ley de Darcy se reescribe en forma diferencial:

$$v = \frac{Q}{A} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.9)$$

donde v es la velocidad de flujo superficial. El signo negativo en (2.9) indica que la presión declina en la dirección del flujo.

La ley de Darcy se generaliza en tres dimensiones, incluyendo los efectos de gravitación, como sigue:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\vec{\nabla} p - \rho g \vec{\nabla} D) \quad (2.10)$$

con ρ la densidad del fluido, g la aceleración de la gravedad y D la profundidad.

La ecuación (2.10) involucra a un solo fluido. Como en el problema concerniente a este trabajo intervienen dos fluidos, la ley de Darcy se extiende de la siguiente manera:

$$\vec{v}_w = -\frac{K_w}{\mu_w} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w g \vec{\nabla} D) \quad (2.11)$$

$$\vec{v}_o = -\frac{K_o}{\mu_o} (\vec{\nabla} p_o - \rho_o g \vec{\nabla} D) \quad (2.12)$$

donde w representa la fase del agua y o la de aceite, para este caso.

2.6 CONSERVACIÓN DE MASA

Consideremos un balance de masa de un flujo compuesto de un solo fluido, sobre una pequeña caja con longitud Δx , ancho Δy y altura Δz . El centro de la caja localizado en $x' = x + \frac{1}{2}\Delta x$, $y' = y + \frac{1}{2}\Delta y$ y $z' = z + \frac{1}{2}\Delta z$.

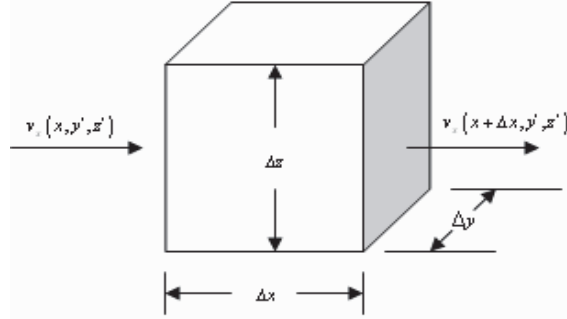


Figura 2.2. Elemento diferencial de volumen.

La tasa de masa que fluye sobre cada uno de los lados de la caja es:

lado izquierdo

$$\rho(x, y, z) v_x(x, y, z) \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x, y, z} \quad (2.13)$$

derecho

$$\rho(x + \Delta x, y, z) v_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x + \Delta x, y, z} \quad (2.14)$$

correspondiente a la cara delantera

$$\rho(x, y, z) v_y(x, y, z) \Delta x \Delta z = \Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x, y, z} \quad (2.15)$$

a la cara posterior

$$\rho(x, y + \Delta y, z) v_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z = \Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x, y + \Delta y, z} \quad (2.16)$$

a la inferior

$$\rho(x, y, z) v_z(x, y, z) \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta y (\rho v_z)_{x, y, z} \quad (2.17)$$

y la superior

$$\rho(x', y', z + \Delta z) v_z(x', y', z + \Delta z) \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta y (\rho v_z)_{x', y', z + \Delta z} \quad (2.18)$$

El volumen de la caja es $\Delta x \Delta y \Delta z$; la tasa de inyección de masa dentro de la caja esta dada por:

$$q \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.19)$$

donde q es la tasa de masa de inyección por unidad de volumen del reservorio. Y la tasa de acumulación de masa dentro de la caja:

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.20)$$

donde ϕ es la porosidad del medio. Dado que la masa se conserva,

$$[tasa\ de\ entrada] - [tasa\ de\ salida] + [tasa\ de\ inyección] = [tasa\ de\ acumulación] \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.13)-(2.19) en (2.21), dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$,

$$-\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) + q = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.22)$$

Cuando el fluido esta compuesto por dos componentes que fluyen simultáneamente en el reservorio, como en el problema que se trata de resolver, se requieren los conceptos de saturación, permeabilidad relativa y presión de capilaridad, introducidos anteriormente. La ley de Darcy se modifica de la siguiente manera:

$$\vec{v}_w = -\frac{K_w}{\mu_w} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w g \vec{\nabla} D) \quad (2.24)$$

$$\vec{v}_o = -\frac{K_o}{\mu_o} (\vec{\nabla} p_o - \rho_o g \vec{\nabla} D) \quad (2.25)$$

Utilizando (2.6) y (2.7), reescribimos (2.24) y (2.25) como,

$$\vec{v}_w = -\frac{K k_{rw}}{\mu_w} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w g \vec{\nabla} D) \quad (2.26)$$

$$\vec{v}_o = -\frac{Kk_{rw}}{\mu_o}(\vec{\nabla}p_o - \rho_o g \vec{\nabla}D) \quad (2.27)$$

La modificación en la deducción de la ecuación (2.22), para el caso bifásico, se realiza solamente en el término de acumulación dado por (2.20). Para la fase de aceite la sustitución es:

$$\frac{\partial(\phi \rho_o S_o)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.28)$$

y para la del agua:

$$\frac{\partial(\phi \rho_w S_w)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.29)$$

La ley de conservación de masa, para ambas fases, es dada por:

$$-\vec{\nabla}(\rho_o \vec{v}_o) + q_o = \frac{\partial(\phi \rho_o S_o)}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$-\vec{\nabla}(\rho_w \vec{v}_w) + q_w = \frac{\partial(\phi \rho_w S_w)}{\partial t} \quad (2.31)$$

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

3.1 INTRODUCCIÓN

El Activo Bellota-Jujo, como muchos otros yacimientos de hidrocarburos en México y en el mundo, esta asociado a un acuífero profundo y, por consiguiente, contiene agua y aceite. Al agua presente en el petróleo se le denomina de varias formas en la literatura internacional: conificada, intersticial, de la formación, salmuera, etc. Éste último parece ser el caso correspondiente al activo, pues el agua de Jujo contiene NaCl y otras sales. En adelante, simplemente llamaré agua a este componente salobre. En algunos casos de pozos en el activo Jujo, el volumen total de agua producida iguala o excede a la producción de aceite. El manejo de esta agua en la formación se convierte entonces en un serio problema. La presencia de agua intersticial en los poros afecta a varios parámetros del reservorio: las saturaciones efectivas de aceite y agua, la mojabilidad de la roca porosa, la permeabilidad relativa de cada fase y hasta la misma química de los aceites producidos.

La meta principal, en la simulación de yacimientos de hidrocarburos, es la predicción del rendimiento futuro del reservorio y la optimización de las recuperaciones primaria, secundaria y terciaria del aceite y del gas.

El proceso de ingreso de agua, conforme el pozo produce aceite, puede ocurrir en forma lateral, desde el fondo de la zona de extracción o en ambas direcciones. Parece ser el caso de que los pozos así invadidos en el Activo Bellota-Jujo tienen un acuífero profundo subyaciendo al yacimiento y, por consiguiente, el flujo de agua es esencialmente vertical. En estas condiciones, el mecanismo principal del flujo de agua es causado por la elasticidad y compresibilidad de la roca y la consiguiente expansión del acuífero que acompaña a la extracción de aceite. Esta produce una disminución de la presión del yacimiento en zonas profundas. Como el volumen inicial del reservorio no cambia, es decir, permanece prácticamente constante, entonces la suma del volumen de aceite y agua más el volumen total de fluido extraído, es también constante en cada tiempo. Dicho de otra forma, la suma algebraica de los cambios de volumen de ambas fases es siempre cero.

$$\Delta V_w + \Delta V_o + \Delta Q_v = 0 \quad (3.1)$$

El efecto de la invasión de agua, sumada a la extracción, produce una disminución paulatina del volumen original del aceite, acompañada del desplazamiento hacia arriba de la frontera de contacto entre el aceite y el agua. El efecto local a mediano o corto plazo es que el pozo irá produciendo cada vez más agua hasta ser totalmente invadido, es decir su gasto será cercano al 100% de agua. El efecto global a largo plazo es que todos los pozos de la zona productora produzcan sólo agua o una mezcla agua-aceite donde el gasto de agua predomine.

La frontera original del contacto entre el aceite y el agua puede ser un plano o una curva suave y continua. Pero al darse el efecto de invasión de agua, esta curva llegará a ser de una gran complejidad, caracterizada por pendientes abruptas en las zonas de pozos con mayor conificación de agua. Otros efectos paralelos son estructurales y provocados por la diferencia de compresibilidades actuantes. La compresibilidad del agua es menor que la del aceite (de 1 a 25 veces menor), mientras más ligero, mayor es esta diferencia. En cambio, las compresibilidades del agua y de la roca son muy similares.

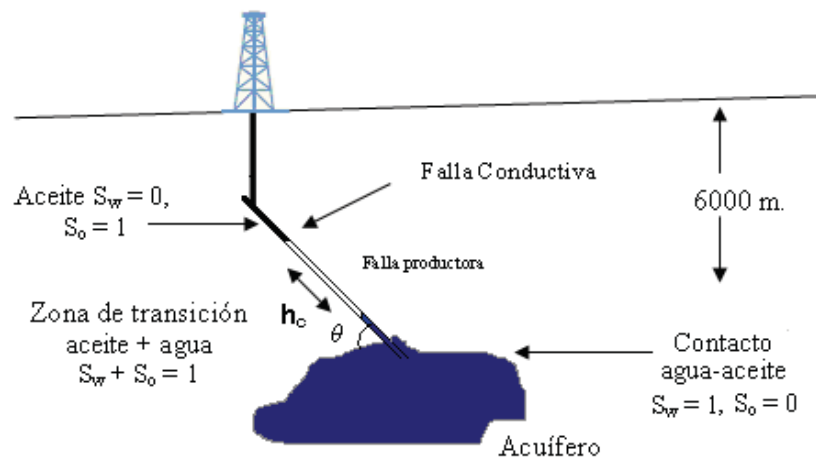


Figura 3.0. Representación esquemática del Acuífero, el Reservorio y la Falla.

3.2 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

Probablemente, debido a tensiones superficiales, una gran cantidad de aceite queda atrapada en los poros, predominando la movilidad del agua de invasión. Mientras más pesado y viscoso sea el aceite, la movilidad del agua dominará más en la mezcla de ambos fluidos inmiscibles. Esto es descrito por el gasto total $q = q_w + q_o$ y por el cociente de gastos: $\frac{q_w}{q_o} = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} > 1$ ($\lambda_i = \frac{k_i}{\mu_i}$ es la movilidad de la fase, k_i su permeabilidad y μ_i su viscosidad dinámica, $i = w, o$). Si el gasto del pozo es muy alto, el fluido producido sería predominantemente agua.

Sea $B_w = \frac{\rho_{ws}}{\rho_{wR}}$ el factor de volumen del agua en la formación (densidad del agua a condiciones estándar entre densidad del agua a condiciones de yacimiento), este factor representa el cambio o expansión que sufre el volumen del agua entre el yacimiento y la superficie del campo. Como esta expansión es pequeña, consideramos que $B_w \approx 1$.

El problema queda determinado de la siguiente manera:

- El agua invade el reservorio de aceite a través de una falla que corta un acuífero, el cual se encuentra a 6000 m. de profundidad y tiene una temperatura de 150 °C.
- El acuífero y el yacimiento de aceite forman un sistema geológico único, acotado en todas sus fronteras por rocas impermeables conformando un volumen profundo cerrado e isotérmico.
- El agua proviene del acuífero profundo, el cual cede agua al yacimiento en respuesta a variaciones de presión en la frontera de contacto agua-aceite.
- El aceite se produce en pozos terminados arriba del acuífero.
- El flujo es en dos fases solamente: agua (w) y aceite (o).
- La Ley de Darcy y la de Continuidad se aplican a ambas fases.
- Se usan fórmulas estándar para las permeabilidades relativas.
- Las permeabilidades relativas y la presión capilar sólo dependen de las saturaciones.
- Se consideran constantes los siguientes parámetros:
 - Permeabilidad de la roca, viscosidades y densidades de ambas fases.
 - En la frontera del contacto agua – aceite para cada pozo, la solución de línea fuente infinita puede permitir el cálculo del abatimiento de la presión del aceite o del agua.

3.3 DATOS DE CAMPO NECESARIOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA

A partir de la formulación del problema, los datos requeridos para el modelo son:

- La presión inicial y la presión promedio del yacimiento medida en varios intervalos de tiempo una vez empezada la extracción de aceite.

- El volumen inicial del agua en el acuífero y el volumen inicial del aceite.
- La profundidad inicial del contacto agua–aceite y la profundidad total del yacimiento.
- La cantidad total de aceite y agua producidos, medida a la presión atmosférica local y en cada intervalo de tiempo con producción continua.
- Datos de temperatura: el acuífero está a 150 °C y a 6000 m. de profundidad.
- La saturación residual del agua S_{wi} y su distribución en el reservorio. Esta puede estimarse de curvas de capilaridad por drenaje. Una fórmula fundamental es:

$$P_c(S_w) = h_c \Delta \rho g \quad (3.2)$$

donde $\Delta \rho = \rho_w - \rho_o$, $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ y h_c es la altura sobre el plano de presión capilar $P_c = 0$.

Este plano o superficie es la frontera de contacto aceite-agua (COW o CAA) donde $S_w = 1$, $S_o = 0$. La zona de transición es donde coexisten ambas fases inmiscibles. La saturación residual del agua S_{wi} se alcanza en el punto del reservorio donde $S_o = 1$.

3.4 POSIBLES EFECTOS DE LA TEMPERATURA

Las viscosidades del agua y del aceite se reducen por el efecto de incremento de temperatura, por consiguiente esta variable puede afectar el desplazamiento de ambos fluidos en procesos de recuperación térmica. En cambio la permeabilidad absoluta de la roca tiene una tendencia clara a disminuir de valor a mayor temperatura. Lo mismo ocurre con la porosidad debido a la expansión de la matriz.

En cuanto a las permeabilidades relativas, hay evidencia experimental de la variación de este parámetro con la temperatura. Por ejemplo, Passmore y Archer (1985) reportan un incremento significativo de la permeabilidad relativa del aceite al aumentar la temperatura. Se acepta comúnmente que la saturación residual del aceite disminuye, sobre todo la de aceites pesados, y que la saturación irreducible del agua aumenta con el incremento de temperatura. Este último efecto desplaza hacia abajo y a la derecha la curva del flujo fraccional del agua en una gráfica (S_w, f_w) al aumentar la temperatura. Los mismos autores (Passmore y Archer, 1985) refieren trabajos previos a 1985 donde se muestra en experimentos de laboratorio que la histéresis entre las curvas de drenaje e imbibición disminuye al aumentar la temperatura.

3.5 MODELO GENERAL TRIDIMENSIONAL CON PARÁMETROS CONSTANTES

En el problema considero el flujo simultáneo de los dos fluidos inmiscibles aceite y agua, en un medio poroso, en tres dimensiones. Para el establecimiento de las ecuaciones se acepta que:

- No existe transferencia de masa entre los dos fluidos.
- La ley de Darcy es aplicable.
- El sistema es isotérmico.
- Los siguientes parámetros son constantes: K , μ_w , μ_o , ρ_w , ρ_o , g , θ .

El modelo queda formado por:

- La Ley de Darcy en tres dimensiones para cada una de las dos fases, (2.26) y (2.27).
- Las ecuaciones de conservación de masa para cada una de las dos fases, (2.30) y (2.31), pero tomando los términos q_o y q_w nulos.
- La ecuación que relaciona ambas saturaciones:

$$S_w + S_o = 1 \quad (3.3)$$

- La ecuación en la definición de la presión de capilaridad (2.5).

El flujo inmisible de aceite y agua ocurre en un plano de falla inclinado del medio poroso, formando un ángulo $\theta \in [0, \pi/2]$ con la vertical X_3 , es decir $\theta = \angle O_z O X_3$. Los fluidos ingresan a la falla desde la formación por P_θ a una distancia h y a velocidad constante $\mathbf{u}_o(x,y,z,0) = \mathbf{u}_o^0$ y $\mathbf{u}_w^0 = \mathbf{u}_w(x,y,z,0)$ respectivamente. Las coordenadas (x, y, z) representan la dirección vectorial del flujo de ambos fluidos en el dominio ocupado por la formación que contiene a la falla productora.

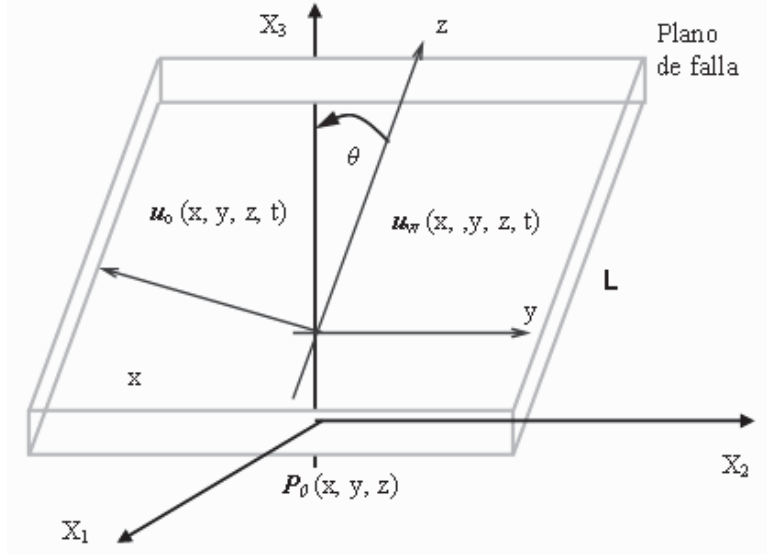


Figura 3.1. Representación esquemática del pozo.

3.6 DESARROLLO DEL MODELO EN TRES DIMENSIONES

Por motivos prácticos de simplificar la escritura de las ecuaciones, defino las siguientes variables:

velocidad darciana del agua

$$\vec{w} = \vec{v}_w$$

velocidad darciana del aceite

$$\vec{v} = \vec{v}_o$$

velocidad total de las fases

$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$$

Considerando (2.30) y (2.31) y como las densidades de las fases son constantes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \phi \frac{\partial(S_o)}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \phi \frac{\partial(S_w)}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

Sumando (3.4) y (3.5)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{w} + \vec{v}) + \phi \frac{\partial(S_w + S_o)}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

De (3.3) se sigue

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{w} + \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.7)$$

La velocidad total es la suma de velocidades de ambas fases, y como la velocidad inicial total es constante se deduce que, al fluir juntos ambos fluidos, $\vec{u} = \text{const}$. En general podemos considerar el medio como anisotrópico y definir el tensor de permeabilidad absoluta como la matriz constante:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en (2.26) y (2.27)

$$\vec{w} = -\frac{k_{rw}}{\mu_w} \mathbf{K} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w g \vec{\nabla} D) = -\lambda_w \begin{pmatrix} k_x \partial_x p_w \\ k_y \partial_y p_w \\ k_z \partial_z p_w - k_z \rho_w g \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\vec{v} = -\frac{k_{ro}}{\mu_o} \mathbf{K} (\vec{\nabla} p_o - \rho_o g \vec{\nabla} D) = -\lambda_o \begin{pmatrix} k_x \partial_x p_o \\ k_y \partial_y p_o \\ k_z \partial_z p_o - k_z \rho_o g \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde ,

$$\begin{aligned} \lambda_w &= \frac{k_{rw}}{\mu_w} \\ \lambda_o &= \frac{k_{ro}}{\mu_o} \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda_w} + \frac{1}{\lambda_o} \end{aligned}$$

A partir de (3.9) y (3.10) se puede despejar los gradientes de la presión para obtener,

$$\vec{\nabla} p_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_w}{\partial x} \\ \frac{\partial p_w}{\partial y} \\ \frac{\partial p_w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{w_x}{\lambda_w k_x} \\ -\frac{w_y}{\lambda_w k_y} \\ \frac{-w_z}{\lambda_w k_z} + \rho_w g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\vec{\nabla} p_o = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_o}{\partial x} \\ \frac{\partial p_o}{\partial y} \\ \frac{\partial p_o}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_x}{\lambda_o k_x} \\ -\frac{v_y}{\lambda_o k_y} \\ \frac{-v_z}{\lambda_o k_z} + \rho_o g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Definiendo las siguientes variables auxiliares, las cuales permiten calcular las seis componentes de las velocidades de cada fase con las velocidades fraccionarias,

$$f_x \equiv \frac{w_x}{u_x}, \quad g_x \equiv \frac{v_x}{u_x}, \quad f_y \equiv \frac{w_y}{u_y}, \quad g_y \equiv \frac{v_y}{u_y}, \quad f_z \equiv \frac{w_z}{u_z} \text{ y } g_z \equiv \frac{v_z}{u_z}. \quad (3.13)$$

En términos de las velocidades fraccionarias se calcula el gradiente de la presión capilar,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} p_c &= \vec{\nabla} p_o - \vec{\nabla} p_w \\ &= \begin{pmatrix} \frac{w_x}{\lambda_w k_x} - \frac{v_x}{\lambda_o k_x} \\ \frac{w_y}{\lambda_w k_y} - \frac{v_y}{\lambda_o k_y} \\ \frac{w_z}{\lambda_w k_z} - \frac{v_z}{\lambda_o k_z} + (\rho_o - \rho_w) g \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_x f_x}{\lambda_w k_x} - \frac{u_x - u_x f_x}{\lambda_o k_x} \\ \frac{u_y f_y}{\lambda_w k_y} - \frac{u_y - u_y f_y}{\lambda_o k_y} \\ \frac{u_z f_z}{\lambda_w k_z} - \frac{u_z - u_z f_z}{\lambda_o k_z} + (\rho_o - \rho_w) g \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Simplificando la anterior expresión,

$$\vec{\nabla} p_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_c}{\partial x} \\ \frac{\partial p_c}{\partial y} \\ \frac{\partial p_c}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_x f_x}{\lambda k_x} - \frac{u_x}{\lambda_o k_x} \\ \frac{u_y f_y}{\lambda k_y} - \frac{u_y}{\lambda_o k_y} \\ \frac{u_z f_z}{\lambda k_z} - \frac{u_z}{\lambda_o k_z} + (\rho_o - \rho_w) g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Arreglando algebraicamente cada componente del anterior vector se pueden despejar las tres componentes de $\mathbf{f}(S_w) = (f_x, f_y, f_z)$. Así se obtiene finalmente una ecuación en derivadas parciales que depende únicamente de la saturación del agua:

$$f_x = \frac{\lambda k_x}{u_x} \left[\frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{u_x}{\lambda_o k_x} \right] = \frac{\lambda k_x}{u_x} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda_o} \quad (3.16)$$

$$f_y = \frac{\lambda k_y}{u_y} \left[\frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial y} + \frac{u_y}{\lambda_o k_y} \right] = \frac{\lambda k_y}{u_y} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda_o} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\lambda k_z}{u_z} \left[\frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} + \frac{u_z}{\lambda_o k_z} + (\rho_w - \rho_o) g \cos \theta \right] = \\ &= \frac{\lambda k_z}{u_z} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} + \frac{\lambda k_z}{u_z} (\rho_w - \rho_o) g \cos \theta + \frac{\lambda}{\lambda_o} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Definiendo las variables:

$$F_x = \frac{\lambda k_x}{u_x} \frac{dp_c}{dS_w}, \quad F_y = \frac{\lambda k_y}{u_y} \frac{dp_c}{dS_w}, \quad F_z = \frac{\lambda k_z}{u_z} \frac{dp_c}{dS_w} \quad \text{y} \quad G_z = \frac{\lambda k_z}{u_z} (\rho_w - \rho_o) g \cos \theta.$$

Las componentes (f_x, f_y, f_z) se reescriben como:

$$f_x = F_x \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda_o}, \quad f_y = F_y \frac{\partial S_w}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda_o}, \quad f_z = F_z \frac{\partial S_w}{\partial z} + G_z + \frac{\lambda}{\lambda_o}. \quad (3.19)$$

Partiendo de la ecuación (3.5) y realizando los siguientes cálculos,

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} =$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x F_x \frac{\partial S_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u_y F_y \frac{\partial S_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u_z F_z \frac{\partial S_w}{\partial z} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\lambda}{\lambda_o} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u_y \frac{\lambda}{\lambda_o} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u_z \frac{\lambda}{\lambda_o} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

En los términos de la ecuación (3.20) se observa que todas las variables involucradas son función de la saturación del agua. Definiendo las partes correspondientes en términos tensoriales se obtiene una sola ecuación más compacta.

Sean,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} u_x F_x & 0 & 0 \\ 0 & u_y F_y & 0 \\ 0 & 0 & u_z F_z \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} u_x \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right) \\ u_y \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right) \\ u_z \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right) + u_z \frac{\partial G_z}{\partial S_w} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$\mathbf{F}$ es el tensor de movilidad de las fases y $\vec{G}$ el vector de la movilidad relativa de ambas fases.

Finalmente, el modelo se reduce a la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w) + \vec{G} \cdot \vec{\nabla} S_w = 0 \tag{3.23}$$

La ecuación (3.23) es una EDP de tipo parabólico no lineal, en función solo de la saturación S_w . Resolver la ecuación (3.23) permite obtener soluciones para ambas saturaciones $S_w(x,y,z,t)$, $S_o(x,y,z,t)$, enseguida deducir $k_{rw}(S_w)$ y $k_{ro}(S_w)$, así como la presión capilar $p_c(S_w)$ en el instante t y en cualquier punto (x,y,z) .

Con (k_{rw}, k_{ro}) calculamos λ_w , λ_o y λ , a partir de su definición . Enseguida se pueden calcular las componentes del tensor $\mathbf{F}(S_w)$ y del vector $\mathbf{G}(S_w)$ y (f_x, f_y, f_z) . La saturación del aceite es simplemente $S_o = 1 - S_w$.

El problema de calcular en que forma se distribuyen y evolucionan ambas saturaciones $S_w(x, y, z, t)$ y $S_o(x, y, z, t)$ en cualquier dirección del plano de la falla, se reduce a la resolución numérica de la Ecuación Vectorial en Derivadas Parciales Parabólica (3.23). Para encontrar esta solución por vía numérica, empleamos el Método del Elemento Finito.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

En su mayoría los modelos de la ciencia y tecnología se expresan en forma de ecuaciones diferenciales. Los más sencillos son expresados principalmente en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias y en los más realistas, las ecuaciones de interés serán ecuaciones diferenciales parciales.

Desafortunadamente estas ecuaciones en muchos casos no tienen solución analítica o si la tienen, esta solución es de una forma bastante complicada como para ser realmente útil (una serie infinita, por ejemplo) en otras palabras, se necesita una solución numérica que nos permita aproximar la solución de la ecuación en determinados puntos dentro del dominio considerado. Con tal fin una diversidad de métodos numéricos se han desarrollados. Uno de estos métodos es, el Método del Elemento Finito (MEF).

Los pioneros en el desarrollo del MEF son Courant (1943), Prager y Synge (1947), Schoenberg (1947), Pólya (1942, 1954), Hersch (1955), y Weinberger (1956). Courant trabajó en el problema de torsión y es considerado un clásico; en él definió los polinomios lineales a trozos sobre una región triangular. Prager y Synge encontraron soluciones aproximadas a problemas de elasticidad plana basados en el concepto de espacio de funciones. Schoenberg también desarrolló la teoría de spline y usó polinomios a trozos para aproximación. Pólya, Hersch y Weinberger usaron una técnica similar que la de Courant y el Método de Diferencias para resolver problemas de eigenvalores. Synge (1952) usó funciones lineales a trozos definidas sobre regiones triangulares y el método variacional de Ritz para resolver problemas planos. Greenstadt (1959) usó una técnica de discretización para dividir el dominio en celdas, asignando una función diferente en cada celda, y aplicó el método variacional. White resolvió un problema de termo-elasticidad en el plano.

Un problema electrostático en tres dimensiones fue resuelto por primera vez por MCMahon (1953) usando tetraedros y funciones de interpolación lineal. El nombre de Método del Elemento Finito fue primeramente usado por Clough (1960). El trabajo de Zienkiewicz y Cheung (1965) extendió el campo del MEF a todos los problemas que pudieron expresar en forma variacional. De mediados de 1960 hasta alrededor de 1980 el método se aplicó a problemas en análisis estructural y en otros campos.

4.1 INTRODUCCIÓN

El método del elemento finito (MEF) es un método general de discretización para la resolución de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales, que se fundamenta en dos principios básicos:

- No considerar la ecuación diferencial originaria tal cual, sino que se multiplica por algún peso y se integra sobre el dominio en cuestión; esto nos conduce a formas llamadas débiles en lugar de la forma fuerte (original).
- El segundo, es una selección de funciones, llamadas base que conforman la aproximación $u_h(\mathbf{r})$ de $u(\mathbf{r})$ escrita como:

$$u_h(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N U_i u_i(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

Una característica de las funciones $u_i(\mathbf{r})$ es que su soporte (la cerradura del dominio donde es diferente de cero) es lo más pequeño posible. Las funciones base, son también llamadas en una gran parte de la literatura de elementos finitos, funciones de forma.

MEF tiene dos características principales:

- Las incógnitas básicas son los valores de la aproximación u_h en ciertos puntos de Ω_h , la discretización de Ω .
- El sistema algebraico final es hueco y muy estructurado.

En el método, la discretización Ω_k del dominio Ω consistirá de un número finito de subdominios con geometría sencilla (triángulos y cuadriláteros en $\mathbb{R}^2$ y tetraedros y paralelepípedos en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo).

Las funciones base $u_i(\mathbf{r})$ serán diferentes de cero solamente sobre un número muy limitado de elementos finitos Ω_e .

4.2 FUNCIONES BASE EN UNA DIMENSIÓN

4.2.1 Interpolación lineal

Supongamos que nuestro dominio es el intervalo $\Omega = [0, L]$ y consideremos la partición $\mathbf{P}$ de Ω dada por ,

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = L$$

la cual divide a Ω en N subdominios Ω_e , los cuales denotamos por $[x_1^e, x_2^e]$, con $e=1, \dots, N$. Los extremos del intervalo son llamados nodos globales del elemento. A su vez etiquetando los elementos del intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ pero ahora tomándolo como si fuera el dominio, obtenemos los llamados nodos locales.

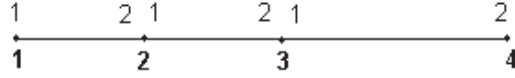


Figura 4.0. Nodos Locales y Globales.

Tomemos un subdominio $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$ y construyamos la ecuación de interpolación que pasa por los dos puntos (x_1^e, u_1^e) y (x_2^e, u_2^e) ,

$$y - u_1^e = \frac{u_2^e - u_1^e}{x_2^e - x_1^e} (x - x_1^e) \quad (4.2)$$

que podemos reescribir como,

$$y = \phi_1^e(x)u_1^e + \phi_2^e(x)u_2^e \quad (4.3)$$

donde,

$$\phi_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e}, \quad \phi_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \quad (4.4)$$

$\phi_1^e(x)$ y $\phi_2^e(x)$ son llamadas las funciones de forma de interpolación lineal local, o simplemente funciones de forma local. Así que a cada nodo local x_i^e le asociamos una función $\phi_i^e(x)$.

Sea,

$$u_a^e(x) = \phi_1^e(x)u_1^e + \phi_2^e(x)u_2^e, \quad x \in [x_1^e, x_2^e] \quad (4.5)$$

la función de interpolación para el intervalo $[x_1^e, x_2^e]$, $\chi^e(x)$ la función característica del dominio (x_1^e, x_2^e) y $U_1 = u_1^1$, $U_2 = u_2^1, \dots, U_{N+1} = u_2^N$. Defino la función

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \chi^e(x) u_a^e(x) & x \notin \{x_1, \dots, x_{N+1}\} \\ U_i & x = x_i \text{ con } i = 1, \dots, N+1 \end{cases} \quad (4.6)$$

Reescribiendo (4.6), para $x \in \Omega$ obtenemos,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \Phi_i(x) U_i \quad (4.7)$$

con

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \phi_2^{i-1}(x) & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \phi_1^i(x) & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.8)$$

(4.8) es llamada la función de forma lineal a trozos global que se muestra a continuación.

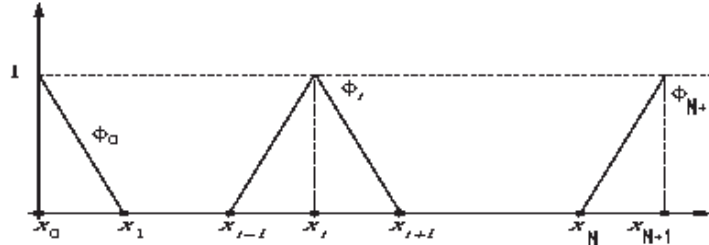


Figura 4.1. Funciones de forma de interpolación lineal.

Las funciones $\Phi_i(x)$ tienen las siguientes propiedades:

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^{N+1} \Phi_i(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in \Omega. \quad (4.9)$$

$$\blacksquare \quad \Phi_i(x) \Phi_{i+1}(x) = \begin{cases} \phi_1^i(x) \phi_2^i(x) & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}. \quad (4.10)$$

$$\blacksquare \quad \Phi_i(x) \Phi_j(x) = 0 \quad \text{si } |i - j| \geq 2. \quad (4.11)$$

$$\blacksquare \quad \Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (4.12)$$

4.2.2 Interpolación de orden mayor que uno

De manera análoga, a la que se procedió en la interpolación lineal de la función en cada uno de los subdominios Ω_e , se puede buscar una interpolación por un polinomio de orden m en los mismos.

Consideremos el subdominio $\Omega_e = [x_1^e, x_{m+1}^e]$ y una partición P^e de éste, dada por:

$$x_1^e < x_2^e < \dots < x_{m+1}^e$$

El polinomio de orden m que pasa por los puntos $(x_1^e, u_1^e), (x_2^e, u_2^e), \dots, (x_{m+1}^e, u_{m+1}^e)$ está dado por $u_a^e(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ tal que sus coeficientes satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} (x_1^e)^m & (x_1^e)^{m-1} & \dots & 1 \\ (x_2^e)^m & (x_2^e)^{m-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{m+1}^e)^m & (x_{m+1}^e)^{m-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ \vdots \\ u_{m+1}^e \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Podemos reescribir este polinomio de la siguiente manera:

$$u_a^e(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \phi_i^e(x) u_i^e \quad (4.14)$$

con

$$\phi_i^e(x) = \frac{(x - x_1^e)(x - x_2^e) \dots (x - x_{i-1}^e)(x - x_{i+1}^e) \dots (x - x_{m+1}^e)}{(x_i^e - x_1^e)(x_i^e - x_2^e) \dots (x_i^e - x_{i-1}^e)(x_i^e - x_{i+1}^e) \dots (x_i^e - x_{m+1}^e)} \quad (4.15)$$

que son los llamados polinomios de Lagrange.

De manera análoga, podemos definir una función global.

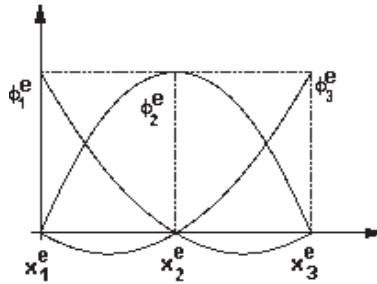


Figura 4.2. Polinomios de Lagrange de orden 2.

4.2.3 Funciones de forma de Hermite.

Estas funciones de forma, son utilizadas generalmente en ecuaciones ordinarias de cuarto orden. Dichas funciones se construyen en un subdominio $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$ a partir del polinomio cúbico que satisface las siguientes condiciones:

$$u(x_1^e) = u_1^e, \quad u'(x_1^e) = -u_2^e, \quad u(x_2^e) = u_3^e, \quad u'(x_2^e) = -u_4^e$$

Siendo $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$ el polinomio, sus coeficientes estarán dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 & (x_1^e)^3 \\ 0 & -1 & -2x_1^e & -3(x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 & (x_2^e)^3 \\ 0 & -1 & -2x_2^e & -3(x_2^e)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Agrupando términos en $p(x)$ obtenemos la siguiente forma:

$$u_a^e(x) = p(x) = \sum_{i=1}^4 \phi_i^e(x) u_i^e \quad (4.17)$$

donde,

$$\phi_1^e(x) = 1 - 3 \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^3, \quad (4.18a)$$

$$\phi_2^e(x) = - \left(x - x_1^e \right) \left(1 - \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^2, \quad (4.18b)$$

$$\phi_3^e(x) = 3 \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^3, \quad (4.18c)$$

$$\phi_4^e(x) = - \left(x - x_1^e \right) \left[\left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right)^2 - \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right]. \quad (4.18d)$$

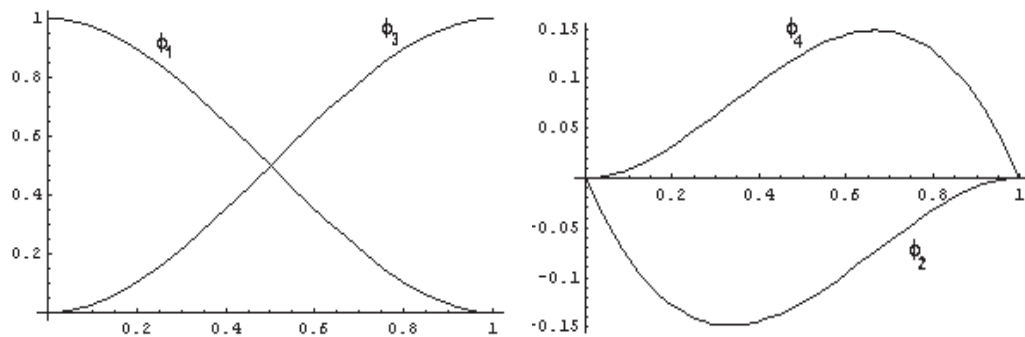


Figura 4.3. Funciones de interpolación de Hermite.

4.3 FUNCIONES BASE EN DOS DIMENSIONES

En $\mathbb{R}^2$ las funciones base, son en esencia, extensiones de las funciones base en una dimensión.

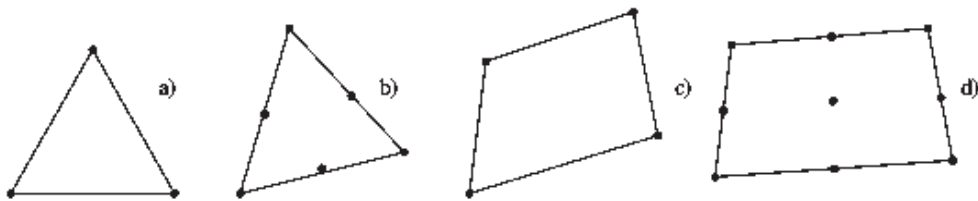


Figura 4.4. Ejemplos de elementos en $\mathbb{R}^2$: a) triángulo lineal, b) triángulo cuadrático, c) cuadrilátero bilineal, d) cuadrilátero bicuadrático.

4.3.1 Elementos triangulares

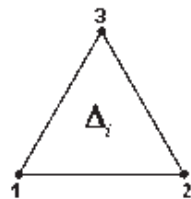


Figura 4.5. Triángulo lineal.

Consideremos la función lineal en dos variables,

$$u = f(x, y) = a + bx + cy \quad (4.19)$$

como función de interpolación en el subdominio triangular Δ_i con coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) . Sean $u_1^i = f(x_1, y_1)$, $u_2^i = f(x_2, y_2)$ y $u_3^i = f(x_3, y_3)$, a partir de estos valores a , b y c quedan únicamente determinadas de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{2\text{Area}(\Delta_i)} [u_1^i(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2^i(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3^i(x_1y_2 - x_2y_1)] \quad (4.20a)$$

$$b = \frac{1}{2\text{Area}(\Delta_i)} [u_1^i(y_2 - y_3) + u_2^i(y_3 - y_1) + u_3^i(y_1 - y_2)] \quad (4.20b)$$

$$c = \frac{1}{2\text{Area}(\Delta_i)} [u_1^i(x_3 - x_2) + u_2^i(x_1 - x_3) + u_3^i(x_2 - x_1)] \quad (4.20c)$$

Reescribiendo a u ,

$$u = \sum_{j=1}^3 u_j^i \phi_j^i \quad (4.21)$$

con

$$\phi_j^i = a_j^i + b_j^i x + c_j^i y \quad (4.22a)$$

$$\left\{ a_j^i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\text{Area}(\Delta_i)}, b_j^i = \frac{y_j - y_k}{2\text{Area}(\Delta_i)}, c_j^i = \frac{x_k - x_j}{2\text{Area}(\Delta_i)} \right\} \quad (4.22b)$$

para

$$\left\{ \{i=1, j=2, k=3\}, \{i=2, j=3, k=1\}, \{i=3, j=1, k=2\} \right\}.$$

Obteniendo de esta manera las funciones de forma ϕ_1^i, ϕ_2^i y ϕ_3^i asociadas a Δ_i .

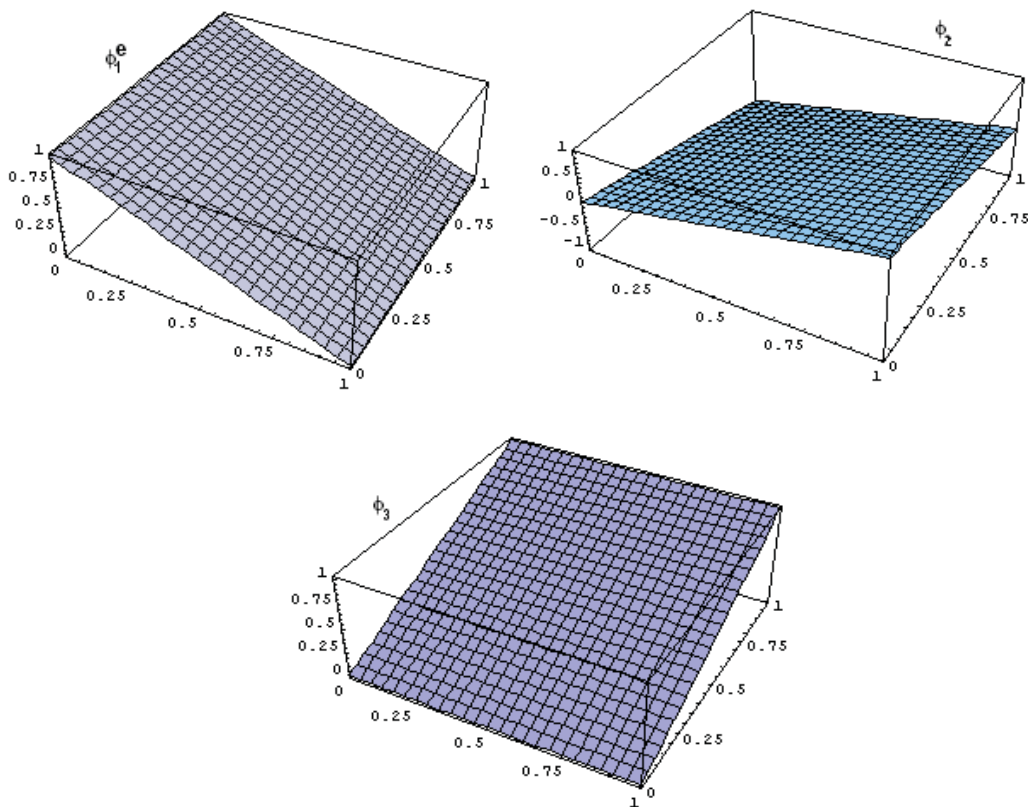


Figura 4.6. Funciones de interpolación para un elemento triangular lineal.

4.3.2 Elementos cuadrilaterales

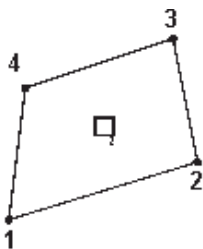


Figura 4.7. Cuadrilátero Lineal.

La única diferencia, a como se considera con los elementos triangulares, es tomar como interpolación una función bilineal

$$u = f(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (4.23)$$

en $\square_i$ con coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) y (x_4, y_4) . Calculando los coeficientes y reescribiendo u ,

$$u = \sum_{j=1}^4 u_j \phi_j^i \quad (4.24)$$

siendo

$$\phi_1^i = \frac{(x_2 - x)(y_3 - y)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}, \quad (4.25a)$$

$$\phi_2^i = \frac{(x_1 - x)(y_3 - y)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2)}, \quad (4.25b)$$

$$\phi_3^i = \frac{(x_1 - x)(y_1 - y)}{(x_1 - x_3)(y_1 - y_3)} \text{ y } \quad (4.25c)$$

$$\phi_4^i = \frac{(x_2 - x)(y_1 - y)}{(x_2 - x_4)(y_1 - y_4)}. \quad (4.25d)$$

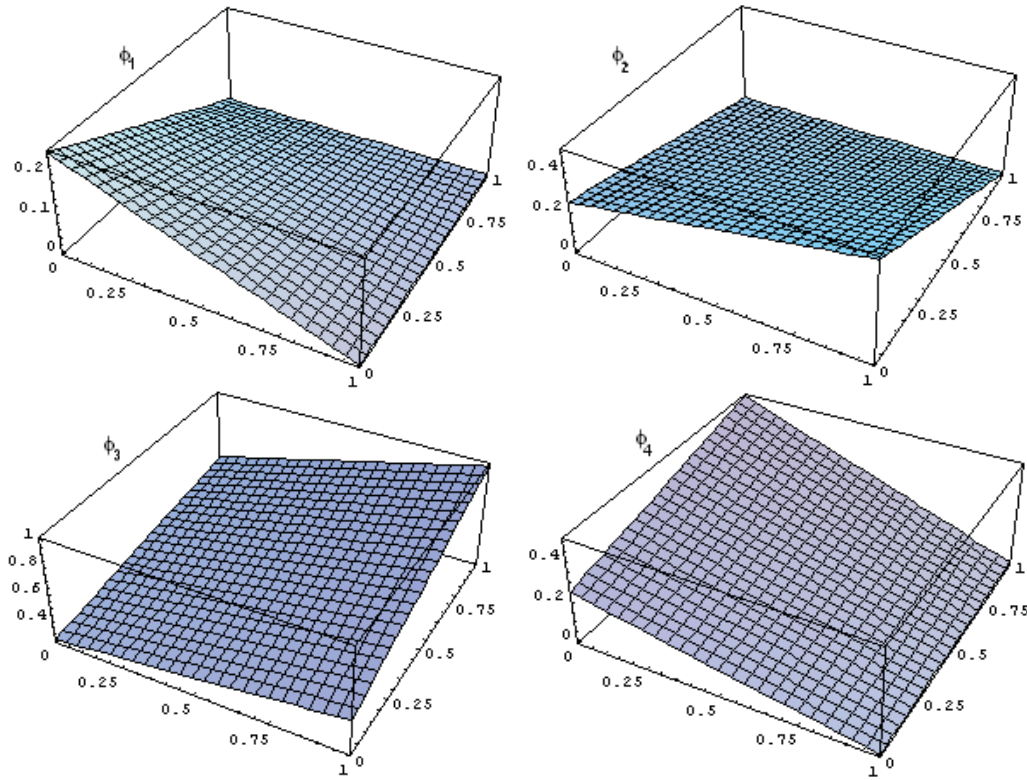


Figura 4.8. Funciones de forma para el cuadrado unitario lineal.

4.3.3 Coordenadas triangulares

Para el caso de un dominio compuesto por subdominios triangulares es más conveniente para el MEF considerar el cambio de coordenadas dado por:

$$\begin{aligned} x &= x_3 + (x_1 - x_3)\varepsilon_1 + (x_2 - x_3)\varepsilon_2 \\ y &= y_3 + (y_1 - y_3)\varepsilon_1 + (y_2 - y_3)\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cuya transformación inversa es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1^i + b_1^i x + c_1^i y \\ \varepsilon_2 &= a_2^i + b_2^i x + c_2^i y \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde los coeficientes son:

$$\left\{ a_1^i = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2 \text{Area}(\Delta_i)}, b_1^i = \frac{y_2 - y_3}{2 \text{Area}(\Delta_i)}, c_1^i = \frac{x_3 - x_2}{2 \text{Area}(\Delta_i)} \right\} \quad (4.28a)$$

$$\left\{ a_2^i = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2 \text{Area}(\Delta_i)}, b_2^i = \frac{y_3 - y_1}{2 \text{Area}(\Delta_i)}, c_2^i = \frac{x_1 - x_3}{2 \text{Area}(\Delta_i)} \right\} \quad (4.28b)$$

Este sistema de coordenadas recibe el nombre de *Coordenadas Triangulares*, debido a su interpretación geométrica que se observa a continuación:

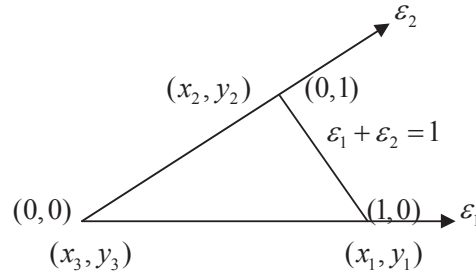


Figura 4.9. Coordenadas Triangulares.

Para este sistema,

$$\iint_{\Delta_i} f(x, y) dx dy = 2 \text{Area}(\Delta_i) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\varepsilon_2} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) d\varepsilon_1 \right] d\varepsilon_2 \quad (4.29)$$

Por último resta calcular las funciones de forma en los lados de un triángulo, para el cálculo de las integrales de línea en el caso de tener una malla triangular.

Sea el sistema de coordenadas (s, t) dado por:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) x_1 - \frac{c}{a} x_2 + x_3 \right] \frac{t}{b} \quad (4.30a)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) y_1 - \frac{c}{a} y_2 + y_3 \right] \frac{t}{b} \quad (4.30b)$$

Realizando los cálculos necesarios, obtenemos los siguientes resultados:

para el lado 1,
$$\left\{ \phi_1^i = 1 - \frac{s}{l_1}, \phi_2^i = \frac{s}{l_1}, \phi_3^i = 0 \right\} \quad (4.31a)$$

para el lado 2,
$$\left\{ \phi_1^i = 0, \phi_2^i = 1 - \frac{s}{l_2}, \phi_3^i = \frac{s}{l_2} \right\} \quad (4.31b)$$

para el lado 3,
$$\left\{ \phi_1^i = \frac{s}{l_3}, \phi_2^i = 0, \phi_3^i = 1 - \frac{s}{l_3} \right\} \quad (4.31c)$$

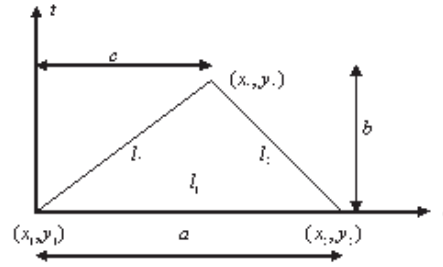


Figura 4.10. Sistema de coordenadas $s-t$.

4.4 PROBLEMAS TRANSIENTES

El manejo de los problemas transientes no difiere mucho de los problemas estacionarios, en vez de llegar a un sistema de ecuaciones lineales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias el cual se resuelve, generalmente, por diferencias finitas.

Para ejemplificar el procedimiento, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y &= q_n & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $c_1 = c_1(x, y)$ y $q_n = q_n(x, y)$. La forma débil semidiscreta de la ecuación (4.32) en un elemento $\Omega^{(e)}$ con una función de prueba w es:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega^{(e)}} \left[c_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] w dx dy \\ &= \iint_{\Omega^{(e)}} \left[c_1 w \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy - \oint_{\partial\Omega^{(e)}} w q_n ds \end{aligned} \quad (4.33)$$

Se aproximará $u(x, y, t)$ en el elemento $\Omega^{(e)}$ por la aproximación semidiscreta,

$$u(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^n u_i^{(e)}(t) \phi_i^{(e)}(x, y) \quad (4.34)$$

donde $\phi_i^{(e)}$ son las funciones de forma. Sustituyendo (4.34) para u y $\phi_j^{(e)}$ para w en (4.33), obtenemos las ecuaciones de elemento finito local,

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{\Omega^{(e)}} \left[c_1 \phi_i^{(e)} \phi_j^{(e)} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial y} \right) u_i \right] dx dy \right\} - \oint_{\partial\Omega^{(e)}} w q_n ds = 0 \quad (4.35)$$

o, en notación matricial

$$\mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (4.36)$$

donde,

$$M_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} c_1 \phi_i^{(e)} \phi_j^{(e)} dx dy \quad (4.37a)$$

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.37b)$$

$$F_j^{(e)} = \oint_{\partial\Omega^{(e)}} w q_n ds \quad (4.37c)$$

Después de ensamblar las matrices locales obtendríamos un sistema de la forma,

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.38)$$

Resolviendo el sistema (4.38) por medio del llamado método- θ ,

$$\mathbf{M} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + \theta \mathbf{K} u^{k+1} + (1 - \theta) \mathbf{K} u^k = \theta \mathbf{F}^{k+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}^k \quad (4.39)$$

con $0 \leq \theta \leq 1$ y los términos $k + 1$ y k indican el nivel de tiempo anterior y presente, respectivamente. Los valores más comunes para θ son:

$$\begin{aligned} \theta &= 0, & \text{Euler Explícito} \\ \theta &= 1, & \text{Euler Implícito} \\ \theta &= \frac{1}{2}, & \text{Crank Nicolson} \end{aligned}$$

El sistema (4.39) ya es un sistema lineal, el cual se puede resolver con gradiente conjugado, por ejemplo.

CAPÍTULO 5

GENERACIÓN DE MALLAS

5.1 INTRODUCCIÓN

La creación de un modelo matemático de un fenómeno físico, o bien de cualquier otra naturaleza, generalmente termina en el planteamiento de una ecuación diferencial ordinaria, en derivadas parciales o en un sistema de estas. Los métodos para resolver dichos modelos suelen ser muy variados (Método del Elemento Finito, Diferencias finitas, Método de Volúmenes Finitos Integrados, etc.), algunos con diversas formulaciones, otros muy dependientes de un modelo en particular. Sin embargo una gran parte de ellos coinciden en un punto, requieren discretizar el dominio que interviene en el modelo, es decir requieren de la creación de una malla.

Cuando se persigue modelar un fenómeno en un dominio físico complejo este se suele transformar de tal manera que el resultado de la transformación sea un cuadrado, para después resolver el modelo (ecuación diferencial) con algún esquema de diferencias finitas. Al proceso de transformar el dominio físico en un cuadrado se le conoce como Generación de Mallas o Redes. La ventaja que presenta esto es el proporcionar una estructura organizada, permitiendo que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija sin importar lo irregular del dominio físico.

Entre los métodos desarrollados para la Generación de Mallas se presenta cierto interés en los que se basan en una formulación variacional de las propiedades de la malla. A ésta rama se le conoce como Generación Variacional de Mallas. Dentro de ella aún se pueden distinguir dos subdivisiones, la que utiliza métodos continuos y la que utiliza métodos discretos.

5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Una malla $X(\varepsilon, \eta) = (x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta))^t$ sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una función continua $X : U_2 \rightarrow \Omega$. Donde U_2 es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

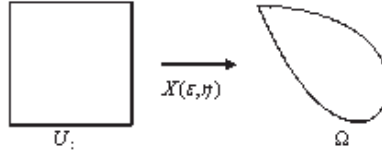


Figura 5.0. Malla sobre Ω .

Una primera restricción a $X(\varepsilon, \eta)$ es exigir que la frontera de U_2 sea mapeada en la frontera de Ω , es decir:

$$X(\partial U_2) = \partial \Omega$$

Si consideramos una línea coordenada $\varepsilon = cte$ o $\eta = cte$ en el cuadrado unitario su imagen será una curva en Ω , de manera que una retícula en U_2 producirá otra retícula en Ω .

Se puede establecer el problema de generación de mallas como sigue:

Dada una función continua y biyectiva de la frontera de U_2 en la frontera de Ω , extenderla a una función continua de U_2 a Ω .

Las mallas de mayor interés serán las que posean las siguientes propiedades:

- La función X sea biyectiva.
- La imagen de una curva suave en U_2 sea una curva suave en Ω .

A las mallas que poseen la primera propiedad se les llama mallas convexas y a las que no la poseen no convexas o dobladas. Si una malla tiene las dos propiedades se denomina difeomorfismo.

5.3 MÉTODO DE INTERPOLACIÓN TRANSFINITA

Los métodos más sencillos de generación de mallas se basan en métodos de interpolación. Estos métodos tienen como cualidad una gran rapidez en comparación con los métodos variacionales tanto continuos como discretos y además son fáciles de implementar. Sin embargo, tienen las desventajas de transmitir la falta de suavidad de la frontera al dominio y, para regiones no convexas, generalmente suelen producir mallas dobladas. Estos métodos son utilizados en los métodos variacionales como generadores de mallas iniciales.

En esta clase de métodos el más utilizado es el llamado Método de Interpolación Transfinita (TFI). Para este método se requieren conocer las imágenes de los lados de U_2 en Ω . Supongamos que la frontera de Ω esta dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x_b(\varepsilon), \quad x_t(\varepsilon) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (5.1a)$$

$$x_l(\eta), \quad x_r(\eta) \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.1b)$$

Los subíndices b, t, l y r son abreviaturas en ingles de bottom, right, top y left. Se debe considerar la misma orientación y que las esquinas coincidan. A partir de los mapeos (5.1a) y (5.1b) la malla esta dada por:

$$x(\varepsilon, \eta) = (1-\eta)x_b(\varepsilon) + \eta x_t(\varepsilon) + (1-\varepsilon)x_l(\eta) + \varepsilon x_r(\eta) - (\varepsilon\eta x_t(1) + \varepsilon(1-\eta)x_b(1) + \eta(1-\varepsilon)x_l(0) + (1-\varepsilon)(1-\eta)x_r(0)) \quad (5.2)$$

Se muestran seis mallas generadas por interpolación transfinita (llamadas Tejamaniles, USA, Pez, Cuad, Cuad1 y Cuad2). Estas mallas se obtuvieron tomando la retícula uniforme de 40 por 40 puntos del cuadrado unitario.

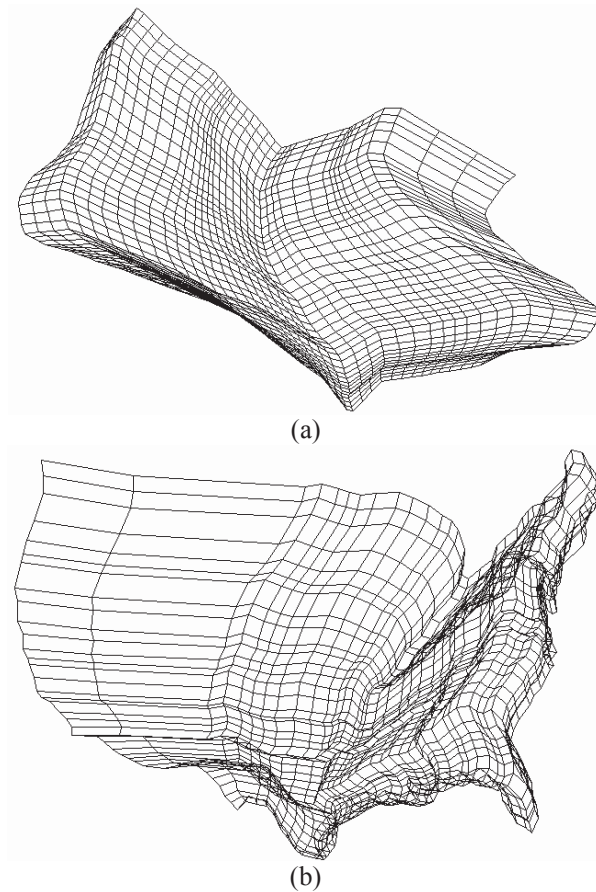
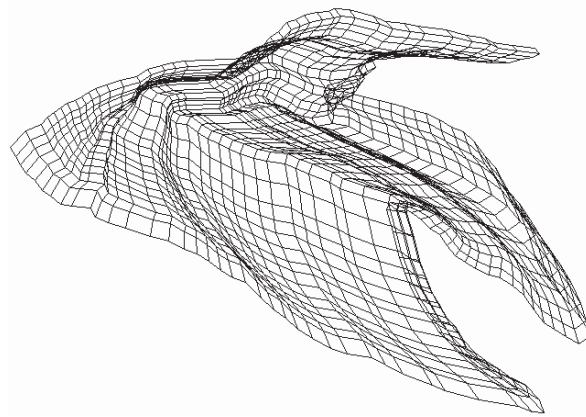
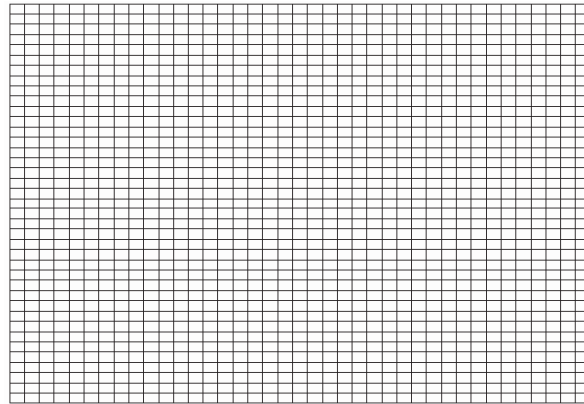


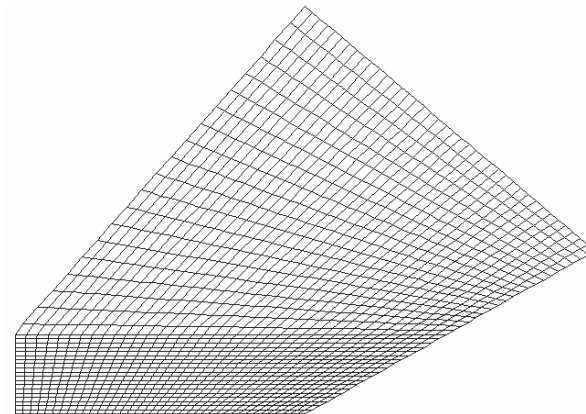
Figura 5.1. Mallas iniciales generadas por TFI sobre las Regiones: (a) Tejamaniles, (b) USA.



(c)

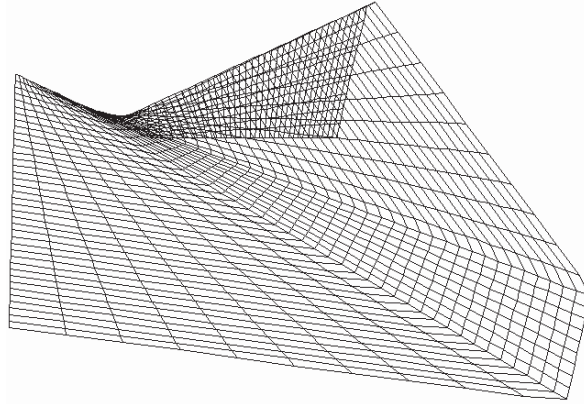


(d)



(e)

Figura 5.2. Mallas iniciales generadas por TFI sobre las Regiones: (c) Pez, (d) Cuad, (e) Cuad.



(f)

Figura 5.3. Malla inicial generada por TFI sobre la Región: (f) Cuad2.

5.4 GENERACIÓN VARIACIONAL DE MALLAS

El camino ha seguir es: a cada malla $X:U_2 \rightarrow \Omega$ le asociamos un valor real considerando alguna propiedad, esto nos produce un funcional de la forma,

$$\int_0^1 \int_0^1 L(x_\varepsilon, x_\eta, y_\varepsilon, y_\eta) = \int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) \quad (5.3)$$

el cual se minimizará.

Las dos áreas en la generación de mallas surgen a partir de aquí, dependiendo en la forma en que se minimiza el funcional. Si la minimización se lleva a cabo resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange nos encontramos con la Generación Variacional Continua. En cambio, si primero se discretiza el funcional para después minimizar la función multivariada se trata de Generación Variacional Discreta.

En lo que respecta a las propiedades de minimizar generalmente, y en cierto sentido, son Longitud, Área, Ortogonalidad y Suavidad en los puntos de la malla.

5.4.1 Discretización de Barrera-Pérez

Una forma de discretizar el funcional es por medio del mapeo bilineal, permitiendo tener un mejor control sobre las propiedades en cada celda en comparación con otros tipos de discretización.

Supongamos que nuestro dominio Ω es un cuadrilátero y el mapeo $X:U_2 \rightarrow \Omega$ dado por

$$X(\varepsilon, \eta) = A + B\varepsilon + C\eta + D\varepsilon\eta \quad (5.4)$$

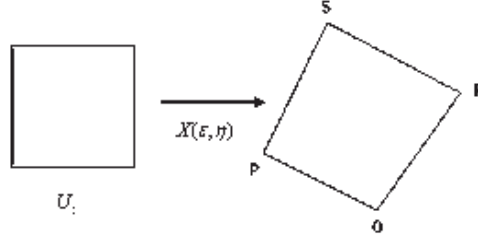


Figura 5.4. Mapeo Bilineal.

con A, B, C y D tales que

$$X(0,0) = P \quad X(1,0) = Q \quad X(1,1) = R \quad X(0,1) = S$$

Por lo tanto,

$$X(\varepsilon, \eta) = P + (Q - P)\varepsilon + (S - P)\eta + (R - Q + P - S)\varepsilon\eta \quad (5.5)$$

Sea ΔPQR un triángulo, definimos los siguientes términos:

$$l(\Delta PQR) \equiv \|P - Q\|^2 + \|R - Q\|^2 \quad (5.6)$$

$$\alpha(\Delta PQR) \equiv 2 \text{Area}(\Delta PQR) \quad (5.7)$$

$$o(\Delta PQR) \equiv (P - Q)^t (R - Q) \quad (5.8)$$

De (5.5) obtenemos:

$$X_\varepsilon(0,0) = X_\varepsilon(1,0) = Q - P, \quad X_\varepsilon(0,1) = X_\varepsilon(1,1) = R - S \quad (5.9a)$$

$$X_\eta(0,0) = X_\eta(0,1) = S - P, \quad X_\eta(1,0) = X_\eta(1,1) = R - Q \quad (5.9b)$$

5.4.2 Discretización de funcionales

El funcional (5.3) puede ser sustituido por una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j} \quad (5.10)$$

donde

$$f_{i,j} = \frac{1}{4} [L(X_{\varepsilon}^{ij}(0,0), X_{\eta}^{ij}(0,0)) + L(X_{\varepsilon}^{ij}(1,0), X_{\eta}^{ij}(1,0)) \\ + L(X_{\varepsilon}^{ij}(0,1), X_{\eta}^{ij}(0,1)) + L(X_{\varepsilon}^{ij}(1,1), X_{\eta}^{ij}(1,1))]]$$

y

$$X^{ij} : U_2 \rightarrow \square_{ij}(P, Q, R, S)$$

es el mapeo bilineal asociado a la celda ij .

De (5.9a) y (5.9b) se observa que tiene sentido denotar:

$$\begin{aligned} f(\Delta_{ij}^1) &= f(\Delta R_{ij} S_{ij} P_{ij}) = L(X_{\varepsilon}^{ij}(0,1), X_{\eta}^{ij}(0,1)) \\ f(\Delta_{ij}^2) &= f(\Delta P_{ij} Q_{ij} R_{ij}) = L(X_{\varepsilon}^{ij}(1,0), X_{\eta}^{ij}(1,0)) \\ f(\Delta_{ij}^3) &= f(\Delta S_{ij} P_{ij} Q_{ij}) = L(X_{\varepsilon}^{ij}(0,0), X_{\eta}^{ij}(0,0)) \\ f(\Delta_{ij}^4) &= f(\Delta Q_{ij} R_{ij} S_{ij}) = L(X_{\varepsilon}^{ij}(1,1), X_{\eta}^{ij}(1,1)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Con esta notación tenemos,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 f(\Delta_{ij}^k) \quad (5.12)$$



Figura 5.5. Subdivisión de la celda ij en los triángulos Δ_{ij}^1 , Δ_{ij}^2 , Δ_{ij}^3 y Δ_{ij}^4 .

Sin embargo, si reescribimos $\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2, \Delta_{ij}^3$ y Δ_{ij}^4 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta_{4(m-1)(j-1)+4j-3} &= \Delta_{ij}^1 \\ \Delta_{4(m-1)(j-1)+4j-2} &= \Delta_{ij}^2 \\ \Delta_{4(m-1)(j-1)+4j-1} &= \Delta_{ij}^3 \\ \Delta_{4(m-1)(j-1)+4j} &= \Delta_{ij}^4 \end{aligned} \quad (5.13)$$

De (5.13) y (5.12) obtenemos la discretización del funcional (5.3)

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j} = \sum_{i=1}^N f(\Delta_i) \quad (5.14)$$

con

$$N = 4(m-1)(n-1) .$$

5.4.4 Normalización de funcionales

Para establecer criterios estándar de convergencia para todos los funcionales, puesto que cada funcional tiene un orden de magnitud diferente dependiendo del tamaño de la malla y del funcional en sí, se buscan maneras de poder comparar los órdenes de magnitud. La manera de lograr tal fin es considerar una malla ideal para cada funcional y expresar este con respecto a la malla ideal, en otras palabras fijamos una malla ideal para cada funcional y la evaluamos en el funcional mismo obteniendo una constante de normalización.

5.5 FUNCIONAL DE LONGITUD

El Funcional Clásico de Longitud, continuo en su forma más simple es dado por,

$$L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) = x_\varepsilon^2 + x_\eta^2 + y_\varepsilon^2 + y_\eta^2 \quad (5.15)$$

Podemos reescribir el funcional en la siguiente forma:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon^2 + x_\eta^2 + y_\varepsilon^2 + y_\eta^2) d\varepsilon d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left((x_\varepsilon - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\varepsilon)^2 \right) d\varepsilon d\eta + 2 \int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon y_\eta - x_\eta y_\varepsilon) d\varepsilon d\eta \quad (5.16)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon^2 + x_\eta^2 + y_\varepsilon^2 + y_\eta^2) d\varepsilon d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left((x_\varepsilon - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\varepsilon)^2 \right) d\varepsilon d\eta + 2 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{J} d\varepsilon d\eta \quad (5.17)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon^2 + x_\eta^2 + y_\varepsilon^2 + y_\eta^2) d\varepsilon d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left((x_\varepsilon - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\varepsilon)^2 \right) d\varepsilon d\eta + 2 \text{Area}(\Omega) \quad (5.18)$$

donde $\mathbf{J}$ es el jacobiano de la transformación.

De (5.18) se observa que minimizar el Funcional Clásico de Longitud es equivalente a minimizar el funcional,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left((x_\varepsilon - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\varepsilon)^2 \right) d\varepsilon d\eta \quad (5.19)$$

La forma discreta del Funcional de Longitud es:

$$\sum_{q=1}^N l(\Delta_q) = \sum_{q=1}^N l_q \quad (5.20)$$

l_q es la suma de los cuadrados de las longitudes del triángulo que forman parte de las líneas coordenadas de la malla sin tener en cuenta el lado correspondiente a la diagonal de la celda.

Al minimizar el Funcional de Longitud se persigue que las longitudes de las líneas coordenadas sean lo más cercanas posibles a un mismo valor. El Funcional Clásico de Longitud en su forma normalizada es:

$$F_l = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l_q \quad (5.21)$$

donde $\bar{\alpha}$ es:

$$\bar{\alpha} = \frac{Area(\Omega)}{(m-1)(n-1)}.$$

En la tabla que sigue se observan los resultados del Funcional de Longitud aplicado a las seis mallas presentadas en la sección 3. En la tabla se muestran los datos correspondientes a:

$Area(\Omega)$	Área del dominio comprendido por el contorno.
$\bar{\alpha}$	Área promedio de la malla.
$\alpha_{\min}$	$\min \{ \alpha_q ; q = 1, 2, \dots, N \}.$
$\alpha_{\max}$	$\max \{ \alpha_q ; q = 1, 2, \dots, N \}.$
F_l	Valor mínimo del Funcional Longitud.

Malla	$Area(\Omega)$	$\bar{\alpha}$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	F_l
Tejamaniles	39.7246	0.0261	-0.0147	0.1984	1.5033
USA	113897	74.8830	-2019.9127	148.3427	1.9093
Pez	41739	27.4418	-233.8728	64.8368	2.0534
Cuad	1	0.0007	0.0007	0.0007	1
Cuad1	5.5	0.0036	0.0013	0.0103	1.7250
Cuad2	37571	24.7015	-278.9169	19.3162	2.4046

Tabla 1. Resultados para el Funcional de Longitud.

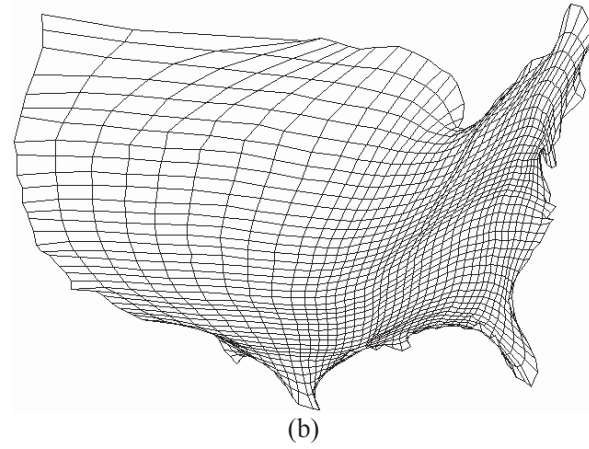
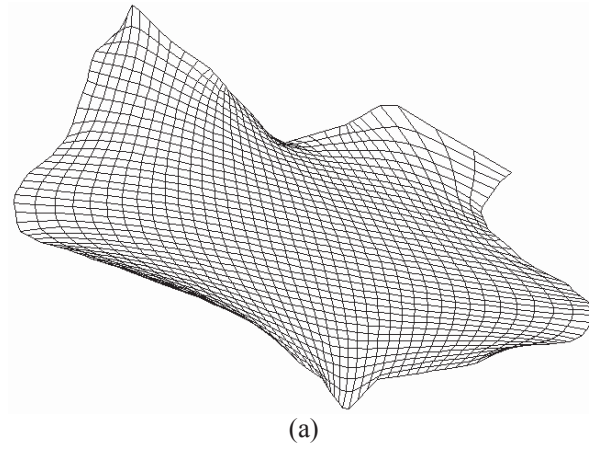
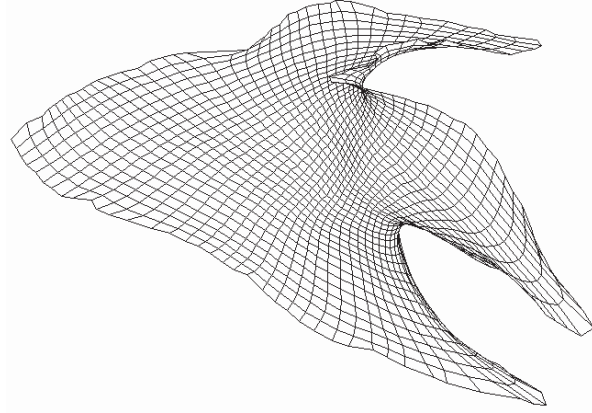
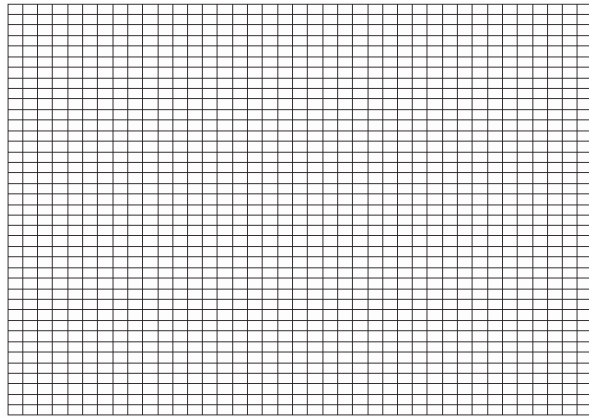


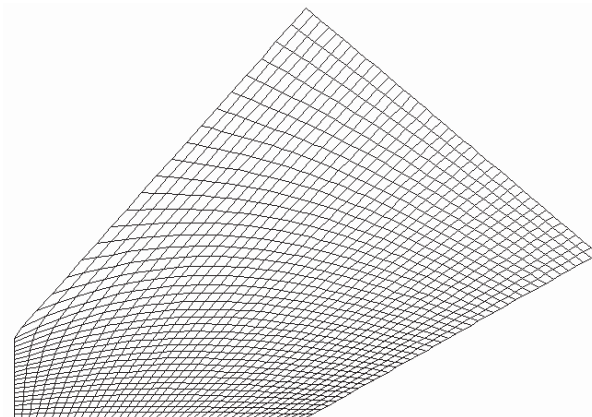
Figura 5.6. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Longitud sobre las Regiones:
(a) Tejamaniles, (b) USA



(c)

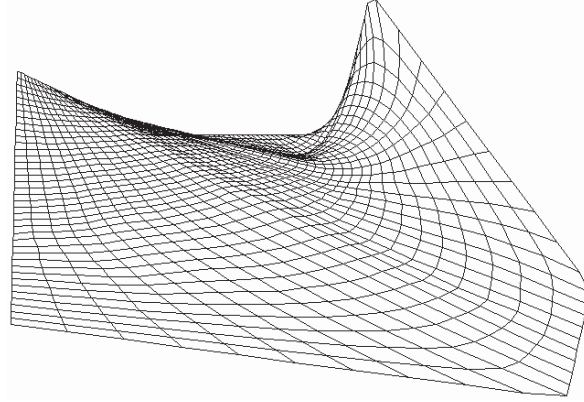


(d)



(e)

*Figura 5.7. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Longitud sobre las Regiones:
(c) Pez, (d) Cuad, (e) Cuad1.*



(f)

Figura 5.8. Malla generada con el Funcional Discreto de Longitud sobre la Región:
(f) Cuad2.

5.6 FUNCIONAL DE ÁREA

En su versión más sencilla el Funcional de Área continuo es dado por:

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon y_\eta - x_\eta y_\varepsilon)^2 d\eta d\varepsilon \quad (5.22)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{J}^2 d\eta d\varepsilon \quad (5.23)$$

El funcional producirá mallas tales que la variación del jacobiano sea la menor posible en el sentido de mínimos cuadrados.

En su forma discreta el Funcional de Área es:

$$\sum_{q=1}^N \alpha_q^2 \quad (5.24)$$

Este funcional tiene las siguientes propiedades:

- Si existe una malla M tal que los triángulos de todas las celdas tienen igual área, entonces M es un punto crítico para el Funcional de Área.
- La Hessiana del Funcional de Área valuada en M es semipositiva definida.

El Funcional de Área normalizado es:

$$F_{A^2} = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N \alpha_q^2 \quad (5.25)$$

La Tabla 2 muestra resultados análogos a los de la Tabla 1 para el Funcional Discreto de Área.

Malla	$Area(\Omega)$	$\bar{\alpha}$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	F_l	F_{A^2}
Tejamaniles	39.7246	0.0261	-0.0305	0.1080	2.0252	1.0105
USA	113897	74.8830	-1087.2721	329.5437	5.2342	1.1079
Pez	41739	27.4418	-92.9093	37.1420	3.2304	1.0684
Cuad	1	0.0007	0.0007	0.0007	1	1
Cuad1	5.5	0.0036	0.0005	0.0092	2.4468	1.0016
Cuad2	37571	24.7015	-102.2774	27.9143	6.3042	1.0179

Tabla 2. Resultados para el Funcional de Área.

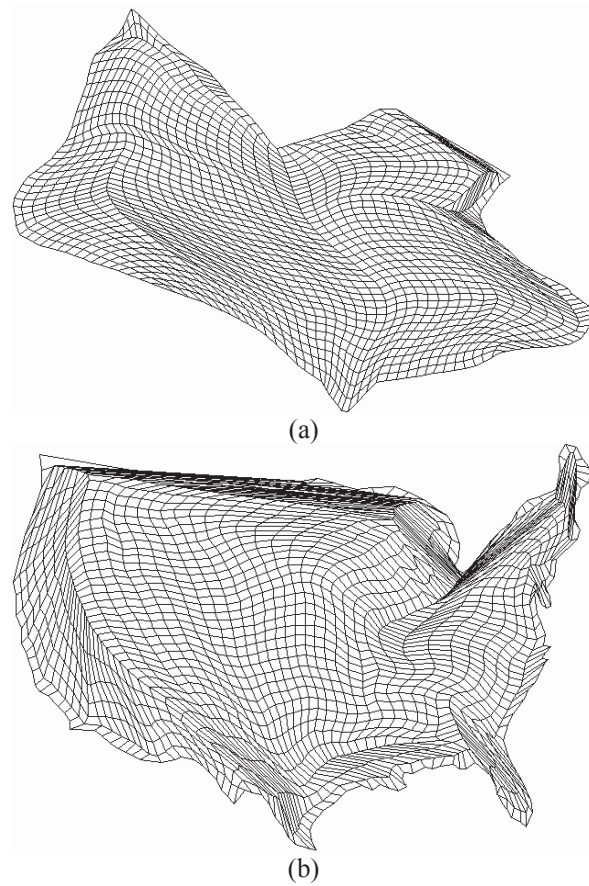
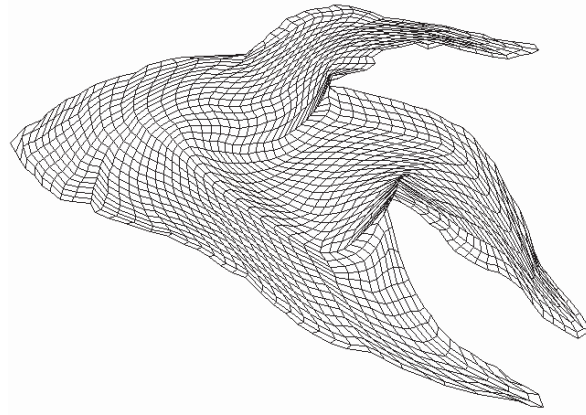
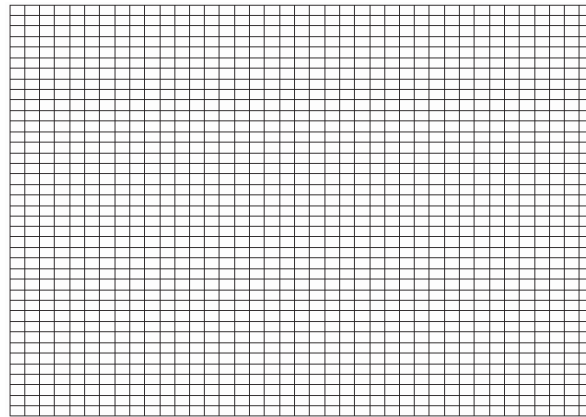


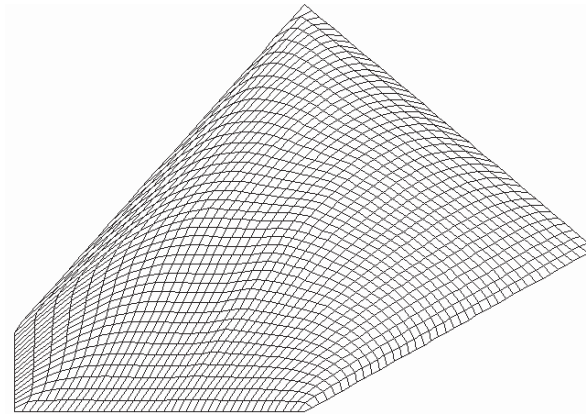
Figura 5.9. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Área sobre las Regiones: (a) Tejamaniles, (b) USA.



(c)

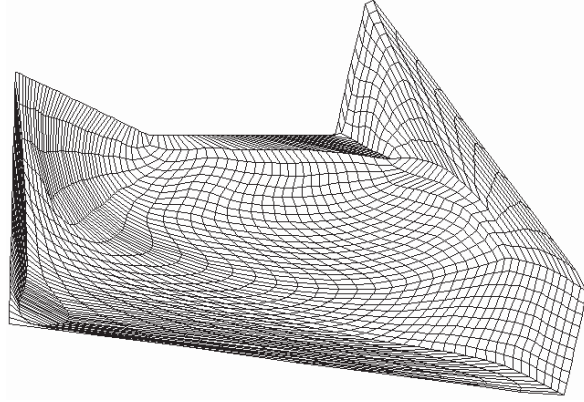


(d)



(e)

*Figura 5.10. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Área sobre las Regiones:
(c) Pez, (d) Cuad, (e) Cuad1.*



(f)

Figura 5.11. Malla generada con el Funcional Discreto de Área sobre la Región:
(f) Cuad2.

5.7 FUNCIONAL DE ORTOGONALIDAD

La finalidad del funcional es el generar mallas con líneas coordenadas ortogonales, en la mayor medida posible. Lo anterior es equivalente a pedir que:

$$\mathbf{x}'_\varepsilon \mathbf{x}_\eta = 0 \quad (5.26)$$

Como esta condición es difícil de cumplir, se trata de conseguir una lo más cercana. Esto se logra en términos de mínimos cuadrados. El funcional a minimizar será, entonces:

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) = \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{x}'_\varepsilon \mathbf{x}_\eta)^2 d\eta d\varepsilon \quad (5.27)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_\eta) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\varepsilon x_\eta + y_\varepsilon y_\eta)^2 d\eta d\varepsilon \quad (5.28)$$

La forma discreta del Funcional de Ortogonalidad y la forma normalizada de este son:

$$\sum_{q=1}^N o(\Delta_q)^2 = \sum_{q=1}^N o_q^2 \quad (5.29)$$

$$F_0 = \frac{1}{N\alpha^{-2}} \sum_{q=1}^N o_q^2 \quad (5.30)$$

Como se observa en las figuras siguientes este funcional no da buenos resultados. Sin embargo, al combinarlo con otros funcionales los resultados mejoran.

Malla	$Area(\Omega)$	$\bar{\alpha}$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	F_l	F_{A^2}	F_0
Tejamaniles	39.7246	0.0261	-0.2186	0.2997	3.0927	6.4977	0.0635
USA	113897	74.8830	-5781.1486	882.7136	4.4369	16.7140	0.2359
Pez	41739	27.4418	-714.4336	387.9084	4.0039	11.8956	0.1984
Cuad	1	0.0007	0.0007	0.0007	1	1	1.23E-29
Cuad1	5.5	0.0036	-0.0204	0.0166	2.7835	3.9354	0.0110
Cuad2	37571	24.7015	-357.7069	190.9754	5.2107	13.1668	0.0661

Tabla 3. Resultados para el Funcional de Ortogonalidad.

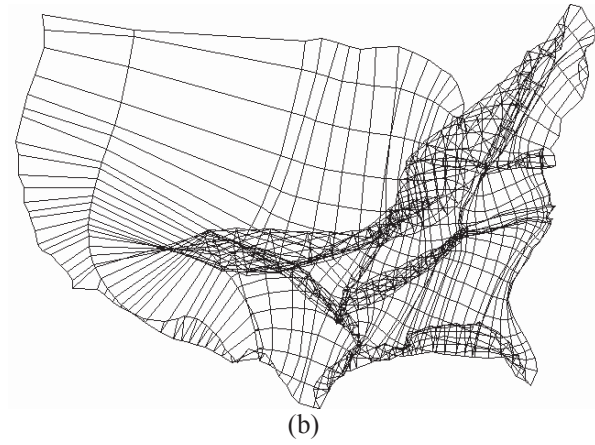
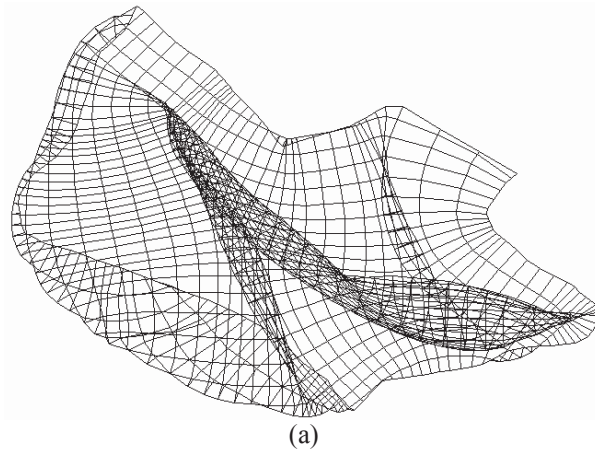
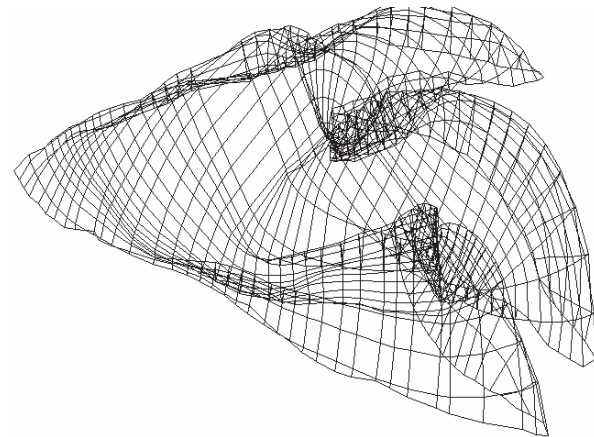
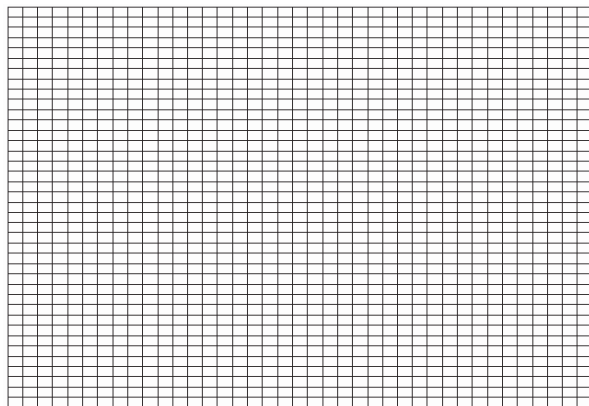


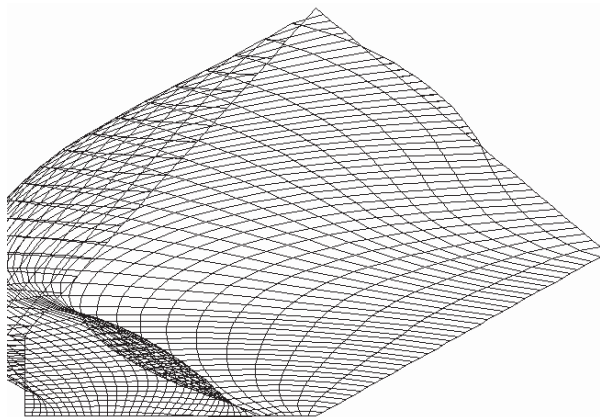
Figura 5.12. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Ortogonalidad sobre las Regiones: (a) Tejamaniles, (b) USA.



(c)

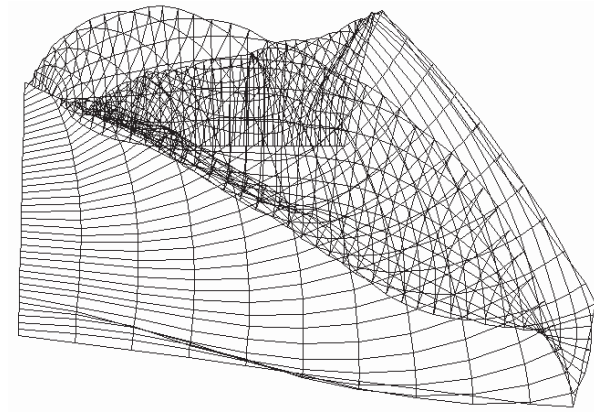


(d)



(e)

Figura 5.13. Mallas generadas con el Funcional Discreto de Ortogonalidad sobre las Regiones: (c) Pez, (d) Cuad, (e) Cuad1.



(f)

Figura 5.14. Malla generada con el Funcional Discreto de Área sobre la Región:
(f) Cuad2.

5.8 FUNCIONAL DE SUAVIDAD

El Funcional de Longitud definido para la transformación inversa:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x, y) \\ \eta(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon : \Omega \rightarrow U_2$$

esta dado por:

$$\iint_{\Omega} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy \quad (5.32)$$

el cual, al hacer el cambio de coordenadas al cuadrado unitario, se escribe como:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\varepsilon^2 + x_\eta^2 + y_\varepsilon^2 + y_\eta^2}{\mathbf{J}} d\eta d\varepsilon \quad (5.33)$$

El funcional (5.33) es el llamado Funcional de Suavidad de Winslow. Su forma discreta es:

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q} \quad (5.34)$$

y su respectiva forma normal:

$$F_s = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q} \quad (5.35)$$

5.9 COMBINACIÓN DE FUNCIONALES

Es común tanto en los métodos continuos como en los discretos utilizar combinaciones de los funcionales para generar mallas con propiedades, en cierto sentido, de los funcionales que se combinan. La forma general de esta combinación es:

$$F = a_1 F_l + a_2 F_{A^2} + a_3 F_o + a_4 F_s \quad (5.36)$$

con

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0 \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

Malla	$Area(\Omega)$	$\bar{\alpha}$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	F_l	F_{A^2}	F_o
Tejamaniles	39.7246	0.0261	-0.0128	0.1080	1.6144	1.0227	1.2974
USA	113897	74.8830	-1596.8740	98.2243	3.0616	1.6705	4.5853
Pez	41739	27.4418	-121.5795	37.1420	3.1115	1.1116	0.8037
Cuad1	5.5	0.0036	0.0013	0.0092	1.9177	1.1214	0.2800
Cuad2	37571	24.7015	-155.0832	19.3162	2.8516	1.4064	11.0395

Tabla 4. Resultados para la combinación de funcionales.

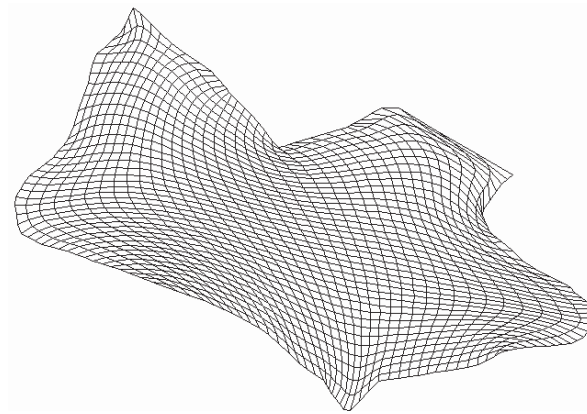


Figura 5.15. Malla generada en combinación del Funcional de Área y de Longitud ($a_1 = 0.2$ y $a_2 = 0.8$) sobre la Región Tejamaniles.

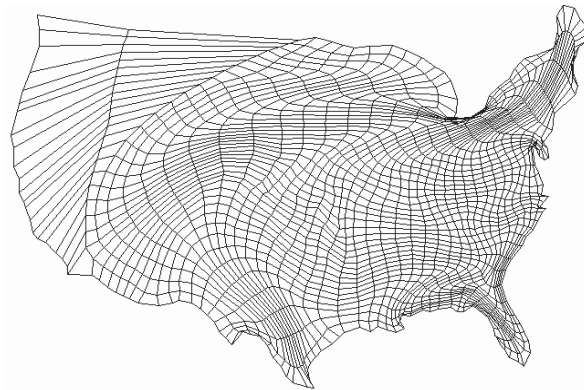


Figura 5.16. Malla generada en combinación del Funcional de Área y de Ortogonalidad ($a_2 = 0.5$ y $a_3 = 0.5$) sobre la Región USA.

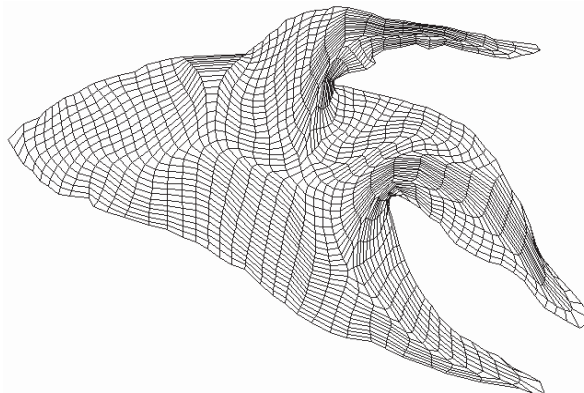


Figura 5.17. Malla generada en combinación del Funcional de Área y de Ortogonalidad ($a_2 = 0.8$ y $a_3 = 0.2$) sobre la Región Pez.

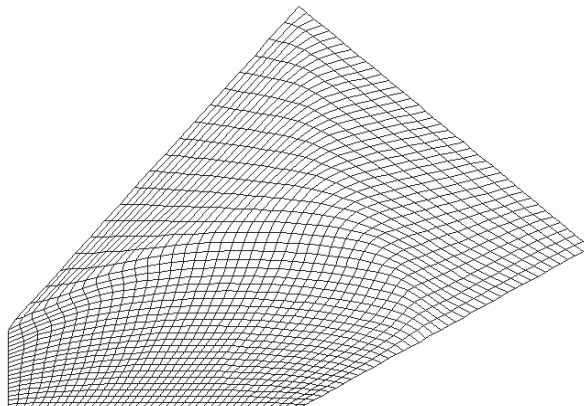


Figura 5.18. Malla generada en combinación del Funcional de Área, de Longitud y de Ortogonalidad ($a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.5$ y $a_3 = 0.25$) sobre la Región Cuad1.

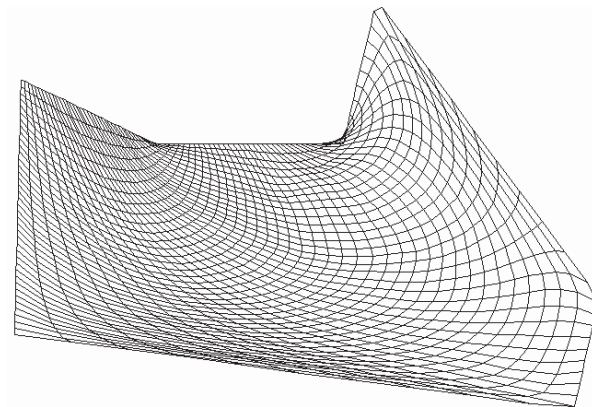


Figura 5.19. Malla generada en combinación del Funcional de Área y de Longitud ($a_1 = 0.5$ y $a_2 = 0.5$) sobre la Región Cuad2.

CAPITULO 6.

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA PAVE.

6.1 INTRODUCCIÓN.

En el presente capítulo describo el funcionamiento de dos programas que diseñé en el transcurso de mi tesis con la finalidad de generar mallas de manera automática, en el sentido de que el usuario requiere proveer a la computadora un mínimo de parámetros en regiones planas con cierto grado de complejidad.

El primer programa es un generador de mallas y el segundo permite obtener coordenadas del contorno de una imagen. Los dos fueron programados en C++ haciendo uso de la Programación Orientada a Objetos.

6.2 PAVE.

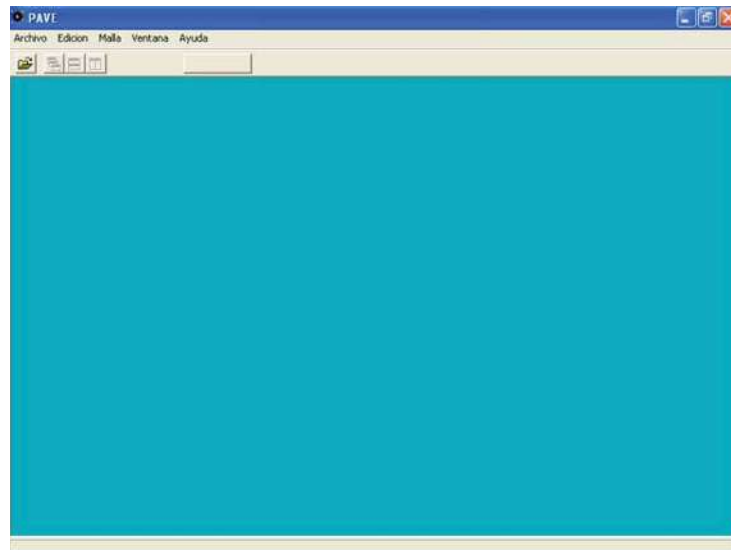


Figura 6.0. Vista del programa PAVE en su modo Gráfico.

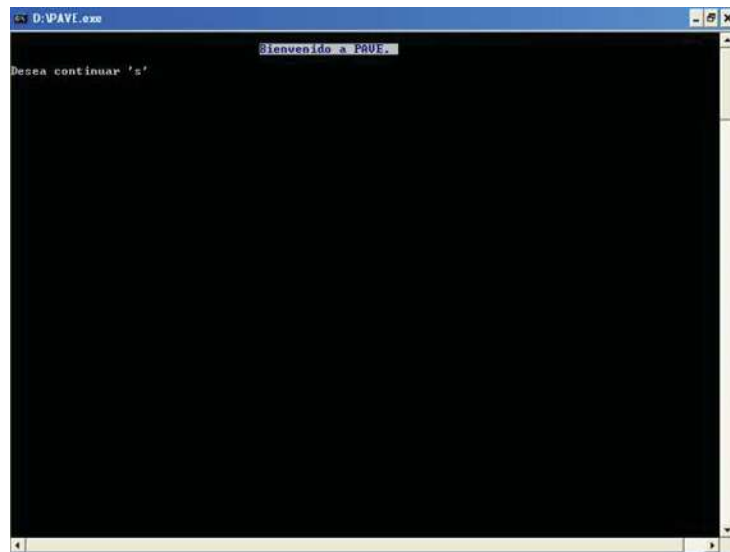


Figura 6.1. Vista del programa PAVE en su modo Consola.

PAVE es un generador de mallas basado en los conceptos de Generación Variacional de Mallas con métodos discretos (Capítulo anterior). Consta de dos modos de presentación uno gráfico y otro no gráfico.

En el desarrollo del modo gráfico se diseñaron, esencialmente, tres clases: Funcional, TAboutBox y TMDIChild. El modo no gráfico consta de una sola clase, Funcional. En los dos modos de PAVE la clase Funcional son básicamente iguales, pero el no gráfico contiene algunas funciones miembro extras.

6.2.1 Estructura de PAVE en modo gráfico.

PAVE tiene una barra de herramientas estándar con los menús principales: Archivo Edición, Malla, Ventana y Ayuda.



Figura 6.2. Barra de herramientas estándar.

En el menú Archivo se muestran las opciones:

- **Abrir.** Abrir un archivo de contorno.
- **Cerrar.** Permite cerrar alguna de las ventanas abiertas.
- **Salir.** Termina la aplicación.



Figura 6.3 Menú Archivo.

El menú edición contiene:

- **Copiar.** Copia algún dato seleccionado.



Figura 6.4. Menú Edición.

En el menú Malla se observan las opciones:

- **TFI.** Genera una malla sobre un contorno por Método de Interpolación Transfinita.
- **F. Área** Produce una malla en un contorno usando el Funcional Clásico de Área discreto.
- **F. Longitud.** Genera mallas por medio del Funcional Clásico de Longitud discreto.
- **F. Ortogonalidad.** Genera una malla sobre un contorno aplicando el Funcional Clásico de Ortogonalidad discreto.
- **F. Suavidad.** Produce mallas por medio del Funcional Clásico de Suavidad discreto.
- **Combinación.** Crea mallas aplicando Combinación de los funcionales anteriores.
- **Existente.** Abre archivos de mallas existentes.



Figura 6.5. Menú Mallas.

En el menú Ventana se muestran las opciones sobre la forma en que se presenta el grupo de ventanas existentes en el programa:

- **Cascada.** Presenta el grupo de ventanas en cascada.
- **Mosaico Horizontal.** Muestra las ventanas en forma de mosaico horizontal.
- **Mosaico Vertical.** Muestra las ventanas en forma de mosaico vertical.
- **Nombre de ventadas.** Aunque esta opción no esta visible en el menú, cada vez que se crea una ventana su nombre es agregado al menú para poder alternar entre las ventanas.

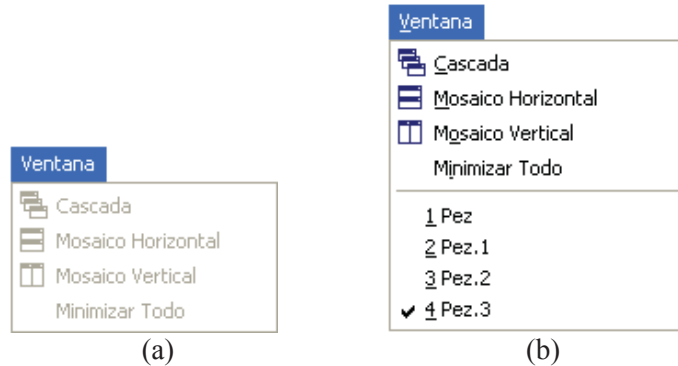


Figura 6.6. Menú Ventana: (a) Cuando no se ha creado ninguna ventana, (b) Cuando se han creado cuatro ventanas.

En el menú Ayuda se muestra la opción:

- **Acerca....** Muestra el nombre del programa y la versión.

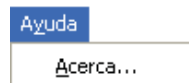


Figura 6.7. Menú Ayuda.

6.2.2 Archivos de Contorno y Malla.

Los archivos de contorno (extensión .con) y archivos malla (extensión .g) son el tipo de archivos que lee y genera, respectivamente PAVE.

Los archivos de contorno contienen las coordenadas del contorno (frontera) del dominio en que se desea generar la malla. Las coordenadas están colocadas de tal modo que el primer renglón contiene las coordenadas x y y de algún punto en la frontera del dominio. Los siguientes renglones en el archivo de contorno contienen las subsecuentes coordenadas al primer punto y que delimitan al dominio encontrándose en la frontera del mismo. *El último renglón en el archivo contiene las coordenadas del punto antes de cerrarse el contorno.*

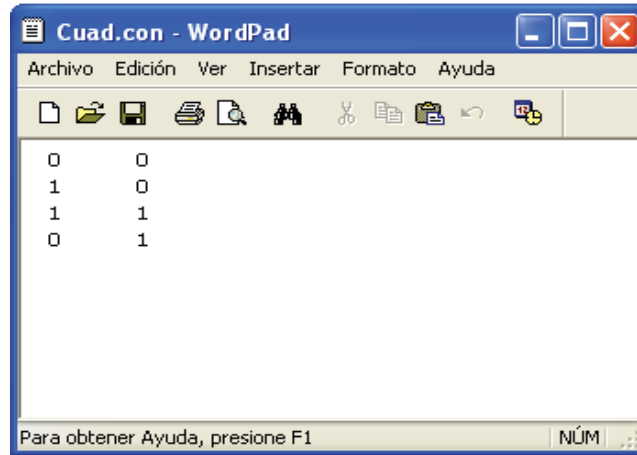


Figura 6.8. Archivo de contorno Cuad.con creado en el editor de Microsoft WordPad. El archivo contiene las coordenadas del cuadrado unitario.

Los archivos de malla contienen las coordenadas de la malla generadas con algún funcional y las propiedades básicas de esta. El primer renglón contiene los siguientes valores:

$Area(\Omega)$	Área del dominio comprendido por el contorno.
$\alpha_{\min}$	$\min\{\alpha_q; q = 1, 2, \dots, N\}$.
$\alpha_{\max}$	$\max\{\alpha_q; q = 1, 2, \dots, N\}$.
$\bar{\alpha}$	Área promedio de la malla.
m	Tamaño horizontal de la malla.
n	Tamaño vertical de la malla.

La malla es considerada como una matriz donde cada entrada contiene las coordenadas de un punto de la retícula del dominio. El orden en que se exponen las coordenadas es teniendo en cuenta que la primera fila en la matriz corresponde a los valores del mapeo del cuadrado unitario al dominio en los puntos ubicados en la línea coordenada $\eta = 0$, y los valores en la última fila de la matriz a los puntos ubicados en la línea coordenada $\eta = 1$. Las filas intermedias en la matriz corresponden a los valores del mapeo valuado en los puntos de las líneas coordenadas comprendidas entre $\eta = 0$ y $\eta = 1$.

La forma en que aparece la matriz correspondiente a la malla en el archivo de malla es: las dos primeras columnas en el archivo corresponden a la primera columna en la matriz, las dos siguientes columnas en el archivo a la segunda columna de la matriz y las dos últimas columnas en el archivo corresponden a la última columna en la matriz.

Después de abrir el archivo se creará una ventana con el contorno graficado.

Después de tener graficado el contorno en la ventana podemos inmediatamente generar una malla. Para generar la malla con el Funcional de Longitud se selecciona la opción *F. Longitud* en el menú Malla. En seguida aparecen tres cuadros de diálogo, los dos primeros solicitan el tamaño de la malla teniendo como valores predeterminados 40 por 40 puntos, el tercer cuadro pide la confirmación para proseguir. Si se hace clic en el botón *Aceptar* los cálculos se realizan, en cambio si se presiona el botón *Cancelar* no se llevan acabo los cálculos y se retorna a la ventana anterior. El valor predeterminado que tiene este último cuadro de diálogo es *Aceptar*.

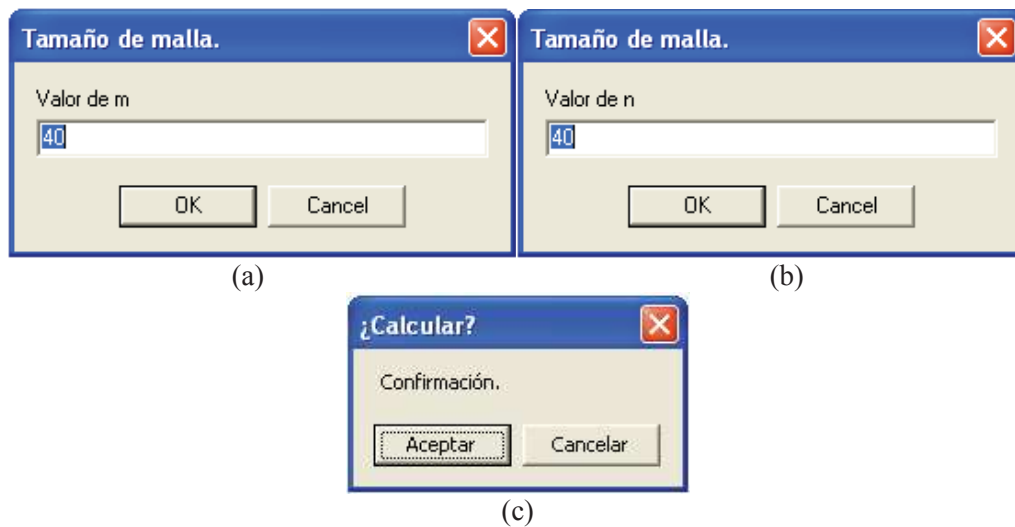


Figura 6.11. Cuadros de diálogo solicitando el tamaño de la malla (a) y (b) y confirmación (c).

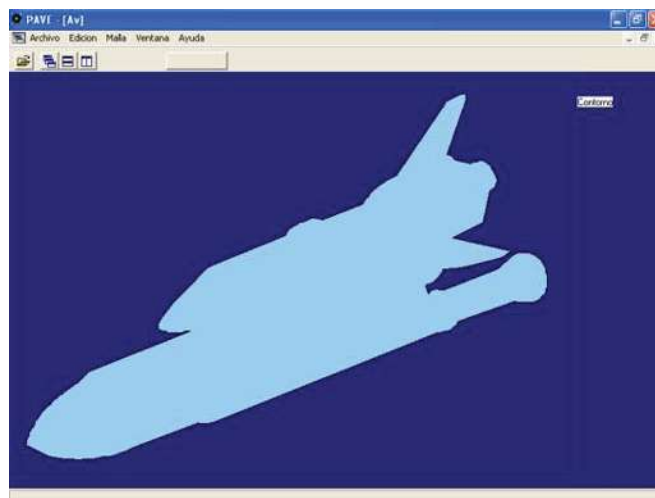


Figura 6.12. Grafico de un archivo de contorno.

Al término de los cálculos se crea un nuevo cuadro de diálogo. En esta ocasión preguntando si se desea utilizar la malla que se acaba de generar como malla inicial en algún calculo futuro. En el caso de presionar el botón *Sí* en el próximo funcional, en vez de utilizar como malla inicial TFI que en general se tiene como predeterminado, se utilizará la malla recién generada junto con su tamaño, evitando de esta manera la aparición de los dos cuadros de diálogo que solicitan el tamaño de la malla. En caso de presionar el botón *No* en la próxima malla que se genere se tomará como malla inicial a TFI.

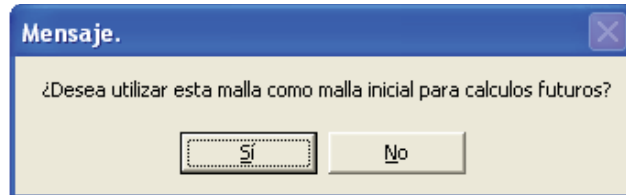


Figura 6.13. Cuadro de diálogo que aparece al terminar los cálculos un funcional.

Finalmente, al cerrarse el último cuadro de dialogo se creará una ventana en donde se encontrará graficada la malla generada a partir del funcional seleccionado. En la parte derecha de la ventana se observarán algunos botones de edición y algunas etiquetas con datos como los funcionales valuados en la malla generada juntos con otras propiedades de la malla.

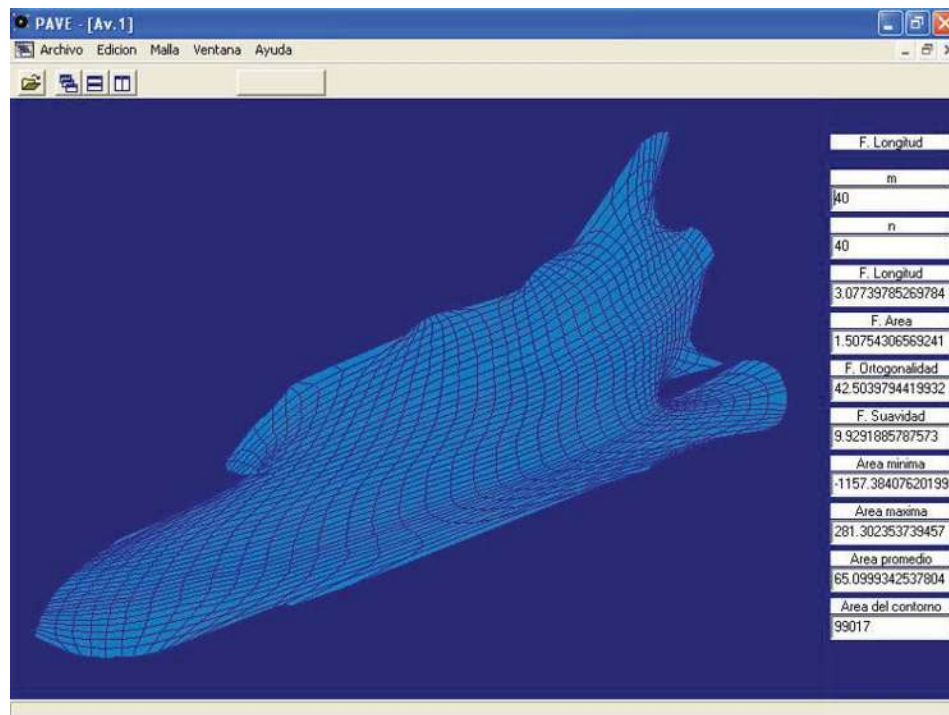


Figura 6.14. Malla generada por el Funcional de Longitud sobre la Región Av.

El procedimiento para generar mallas a partir del funcional de área u ortogonalidad es idéntico al utilizado en el anterior funcional de longitud.

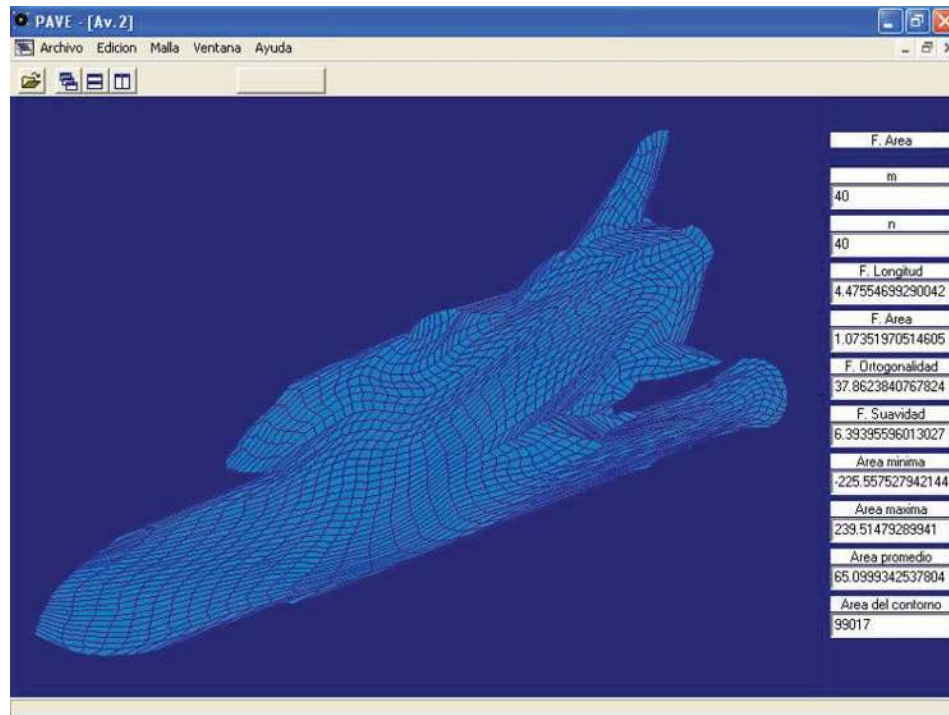


Figura 6.15. Malla generada por el Funcional de Área sobre la Región Av.

Cuando se desea aplicar una combinación de los funcionales el procedimiento difiere únicamente al anterior en que después de que han aparecido los dos cuadros de diálogo solicitando el tamaño de la malla se crean otros cuatro cuadros de diálogo solicitando las cuatro constantes correspondientes para el cálculo de la combinación de los funcionales.

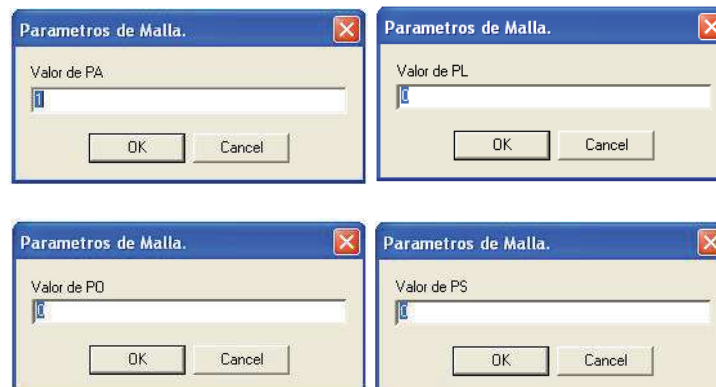


Figura 6.16. Cuadros de diálogo solicitando los valores de los parámetros en la combinación de funcionales.

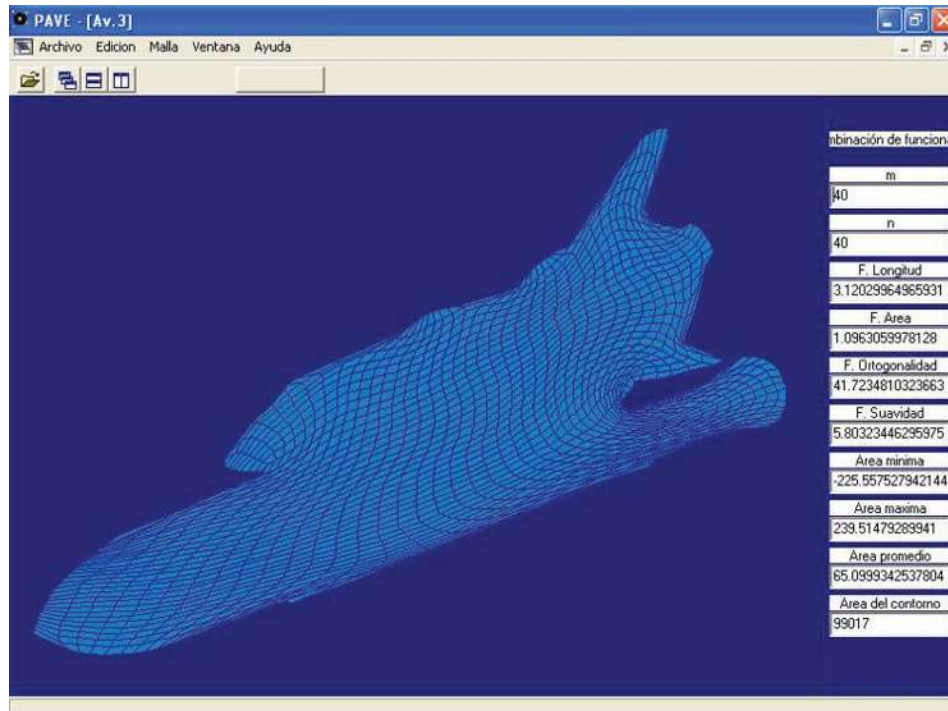


Figura 6.17. Malla generada en combinación del Funcional de Área y de Ortogonalidad ($PA = 0.8$ y $PO = 0.2$) sobre la Región Av.

El funcional de suavidad programado en PAVE no es el Funcional de Suavidad Clásico definido en (5.34) sino el llamado Funcional de Suavidad Adaptiva desarrollado en [1]. Por esta razón cuando se aplica el Funcional de Suavidad ya sea de manera aislada o en combinación con otros funcionales se presenta un cuadro de diálogo solicitando una constante necesaria para el funcional.

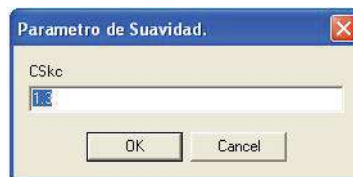


Figura 6.18. Cuadro de diálogo solicitando valor para la constante $CSkc$ necesaria para el Funcional de Suavidad.

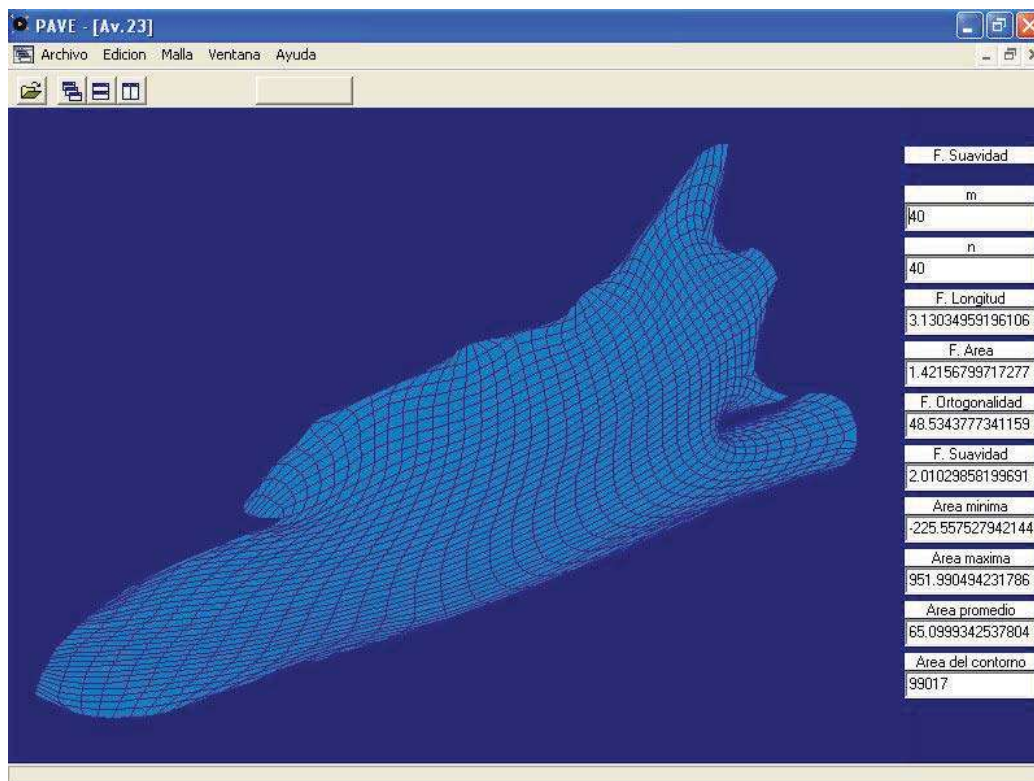


Figura 6.19. Malla generada por el Funcional de Suavidad sobre la Región Av.

Cuando se han generado varias mallas es posible revisar las anteriores seleccionando la que se desea ver en el menú ventana. O bien si se quiere ver al mismo tiempo todas las ventanas se puede seleccionar la opción *Mosaico Horizontal* o *Mosaico Vertical* en el menú *Ventana*.

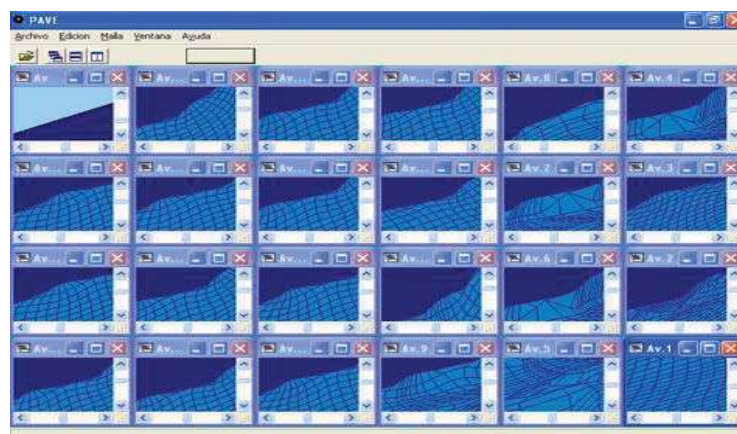


Figura 6.20. Ventanas abiertas en modo de Mosaico Horizontal.

6.2.4 Análisis de la clase Funcional.

La parte fundamental en PAVE, tanto en su modo gráfico como en el no gráfico, es la clase Funcional. En esta sección describo la estructura de esta clase.

Las siguientes líneas forman la definición de la clase Funcional.

```
class Funcional {  
  
public:  
    Funcional();  
    Funcional (double*, double*, int);  
    void Contorno(double *, double *, int);  
    void TFIxb (double);  
    void TFIxr (double);  
    void TFIxt (double);  
    void TFIxl (double);  
    void TFIx (double, double);  
    void malla ();  
  
    double LongitudC();  
    double funcionLX (double );  
    double funcionLY (double );  
    double funciondLX (double );  
    double funciondLY (double );  
    double AlphaL(double );  
    double AlphasL(double );  
  
    void GradienteL();  
  
    double AreaC();  
    double funcionA (double );  
    double funciondA (double );  
    double AlphaA(double );  
    double AlphasA(double );  
  
    void GradienteA();  
  
    double OrtogonalidadC();  
    double funcionO (double );  
    double funciondO (double );  
    double AlphaO(double );  
    double AlphasO(double );  
  
    void GradienteO();  
  
    double SuavidadC();  
    double funcionS(double, double );
```

```
double funciondS(double, double, double, double);
double AlphaS(double );
double AlphasS(double );
```

```
void GradienteS();
```

```
void ParametrosMalla();
void GetValorC(double *, int b = 0);
void GetValorP(double **, double **);
void SetValorC (double);
void SetValorP(double **, double **);
void GradienteC();
void Parametros(double, double, double, double);
void Diferencias();
void Incrementos();
void Gradiente();
```

```
double minimizar();
double norm();
double Funcion(double );
```

```
void Liberar();
void Inicializar(int, int);
void Guardar(char *);
```

```
~Funcional();
```

```
private:
```

```
double *PX, *PY;
double C[2];
int N;
int M;
```

```
double **X, **Y;
double **DHX, **DVX, **DHY, **DXY;
double **IHx, **IVx, **IHy, **IVy;
double **GX, **GY;
double **DX, **DY;
```

```
double PA, PL, PO, PS;
double AreaMinima, AreaMaxima;
double AreaPromedio, CSk, CSkc;
```

```
double AreaContorno;
int m, n;
double p0, p1;
```

```
int h;
```

};

El constructor de la clase esta sobrecargado. La primera función *Funcional()* únicamente la utilizo para reservar espacio. La función *Funcional (double*, double*, int)* inicializa los arreglos *PX* y *PY* con las coordenadas del contorno, también inicializa a *N* con el número de puntos en el contorno. *void Contorno(double *, double *, int)* realiza las mismas acciones que *Funcional (double*, double*, int)* para el caso en que el constructor *Funcional()* hubiera sido llamado.

Las funciones miembro *void TFIxb (double)*, *void TFIxr (double)*, *void TFIxt (double)* y *void TFIxl (double)* representan las funciones que mapean los lados del cuadrado unitario en el dominio. *void TFIx (double, double)* representa la malla generada por TFI.

void malla () genera los valores de las coordenadas de la malla generada por TFI, los arreglos *X* y *Y*.

double LongitudC(), *double AreaC()*, *double OrtogonalidadC()* y *double SuavidadC()* producen los valores de los Funcionales de Longitud, Área, Ortogonalidad y Suavidad, respectivamente. Cada una de las anteriores funciones requiere el uso de funciones auxiliares:

double funcionLX (double), double funcionLY (double); double funcionA (double); double funcionO (double) y double funcionS(double, double).

void GradienteL(), *void GradienteA()*, *void GradienteO()* y *void GradienteS()* calculan el gradiente de cada uno de los funcionales. A su vez estas funciones requieren de algunas funciones auxiliares:

double funciondLX (double), double funciondLY (double); double funciondA (double); double funciondO (double); double funciondS(double, double, double, double);

Con la función *void Gradiente()* organizo el cálculo de los gradientes de los funcionales.

Cuando se discretiza algún funcional se genera una función multivariada que se tiene que minimizar. En PAVE minimizo las funciones con el Método de Gradiente Conjugado en la función *void GradienteC()*. En este método para minimizar la función se requiere minimizar cierta función de valor real, $\alpha(\lambda)$ con respecto a un parámetro λ . La función $\alpha(\lambda)$ en cada uno de los funcionales junto con su función derivada está dada por las funciones;

double AlphaL(double), double AlphasL(double); double AlphaA(double), double AlphasA(double); double AlphaO(double), double AlphasO(double); double AlphaS(double), double AlphasS(double);

Como lo dije anteriormente se requiere minimizar una función de valor real $\alpha(\lambda)$, en PAVE lo hago con el Método de la Secante en la función *double minimizar()*. La

organización de la función $\alpha(\lambda)$ correspondiente a un determinado funcional se realiza en *double Funcion(double)*.

double norm() calcula la norma del gradiente de los funcionales.

void ParametrosMalla() determina los valores del área del contorno, área mínima, área máxima y área promedio.

Los parámetros necesarios para la combinación de funcionales se inicializan en *void Parametros(double, double, double, double)*.

Los valores de los funcionales y propiedades de la malla (área del contorno, área mínima, área máxima y área promedio) se pueden obtener en la función *void GetValorC(double *, int b = 0)*. Y las coordenadas de la malla en *void GetValorP(double **, double **)*.

Las coordenadas de la malla se pueden inicializar con alguna malla ya existente en *void SetValorC (double)*.

*void SetValorP(double **, double **)* inicializa la constante CSkc requerida en el Funcional de Suavidad.

*void Guardar(char *)* guarda las coordenadas de la malla en un archivo.

A partir del tamaño de la malla todas los arreglos y datos requeridos son inicializados en la función *void Inicializar(int, int)*.

Cuando se han generado mallas con un cierto tamaño y luego se quiere trabajar con mallas de diferente tamaño se requiere liberar la memoria reservada por la instrucción new en la función *void Inicializar(int, int)* cuando se llamó por primera vez para posteriormente volverla a llamar con el nuevo tamaño.

En un contexto general lo anterior describe al objeto Funcional.

6.2.5 Estructura de PAVE en modo no gráfico.

En esencia el funcionamiento de PAVE en ambos modos, gráfico y no gráfico es igual. Cuando se abre una terminal del sistema operativo en la carpeta que contiene al programa y se quiere trabajar con algún contorno, por ejemplo Av.con es suficiente escribir en el prompt del sistema

PAVE Av.con

es decir, PAVE y el nombre del archivo de contorno con el cual se va a trabajar. En seguida se empiezan a solicitar los valores de los parámetros para la combinación de funcionales, en caso de querer un funcional en particular damos 1 al parámetro correspondiente y 0 a los

restantes, y los valores del tamaño de la malla. Luego se imprimen los valores de los funcionales, los gradientes de los funcionales y las propiedades de la malla, todo con respecto a la malla inicial. Posteriormente se imprimen dos columnas de datos a medida que se realiza la minimización del funcional. La primera columna es el valor de la minimización de la función $\alpha(\lambda)$ que surge en el Método de Gradiente Conjugado. La segunda columna es el valor del gradiente del funcional que se minimiza. La última columna indica la iteración correspondiente. Esta manera en que se despliegan los datos permite supervisar la convergencia del método. Terminando los cálculos se imprimen nuevamente los valores de los funcionales y propiedades de la mallas pero ahora con respecto a la malla generada y de igual manera que en el modo gráfico se pregunta si se quiere tomar la malla generada como malla inicial para algún cálculo posterior.

```

Seleccionar Símbolo del sistema - Pave HAb.con
Bienvenido a PAUE.
Desea continuar 's' s
PA 0
PL 1
PO 0
PS 0
n 40
n 40
El funcional de Area es 3.55953
El funcional de Longitud es 2.63349
El funcional de Ortogonalidad es 3.54862
El funcional de Suavidad es 0.181712
La norma del gradiente de Area es 2.51775
La norma del gradiente de longitud es: 0.573994
La norma del gradiente de ortogonalidad es: 2.62554
La norma del gradiente de suavidad es: 0.188054
El valor minimo de area es -0.023692
El valor maximo de area es 0.028598
El valor promedio de area es 0.00308232
El area es: 4.68821
CSK 0.0307996
minimo 2.33166      0.573994      0
minimo 3.32365      0.345025      1
minimo 2.41621      0.307272      2
minimo 1.88687      0.29741       3
minimo 2.28785      0.235931      4
minimo 1.83107      0.215316      5
minimo 2.15497      0.172117      6
minimo 1.99163      0.151268      7
minimo 2.52645      0.136104      8
minimo 2.17643      0.14157       9
minimo 2.21617      0.130459     10
minimo 2.12719      0.121191     11
minimo 2.24039      0.112309     12

```

Figura 6.21. PAVE en su modo no gráfico.

6.3 PAVE EDITOR.

Uno de los problemas que se presenta cuando se trata de conseguir alguna malla de un dominio en particular, es la creación del contorno del dominio, más aún cuando el dominio es complejo. Para resolver el problema, diseñé PAVE Editor.

PAVE Editor es un programa sencillo que permite ir obteniendo las coordenadas del contorno de un dominio en una imagen utilizando el mouse. Consta de un solo menú con tres opciones.

El menú *Archivo* consta de las siguientes opciones:

- **Nuevo.** Permite abrir una imagen.
- **Guardar Como....** Guarda las coordenadas en un archivo de contorno.
- **Salir.** Sale de la aplicación.

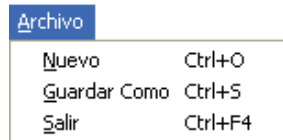


Figura 6.22. Menú Archivo.

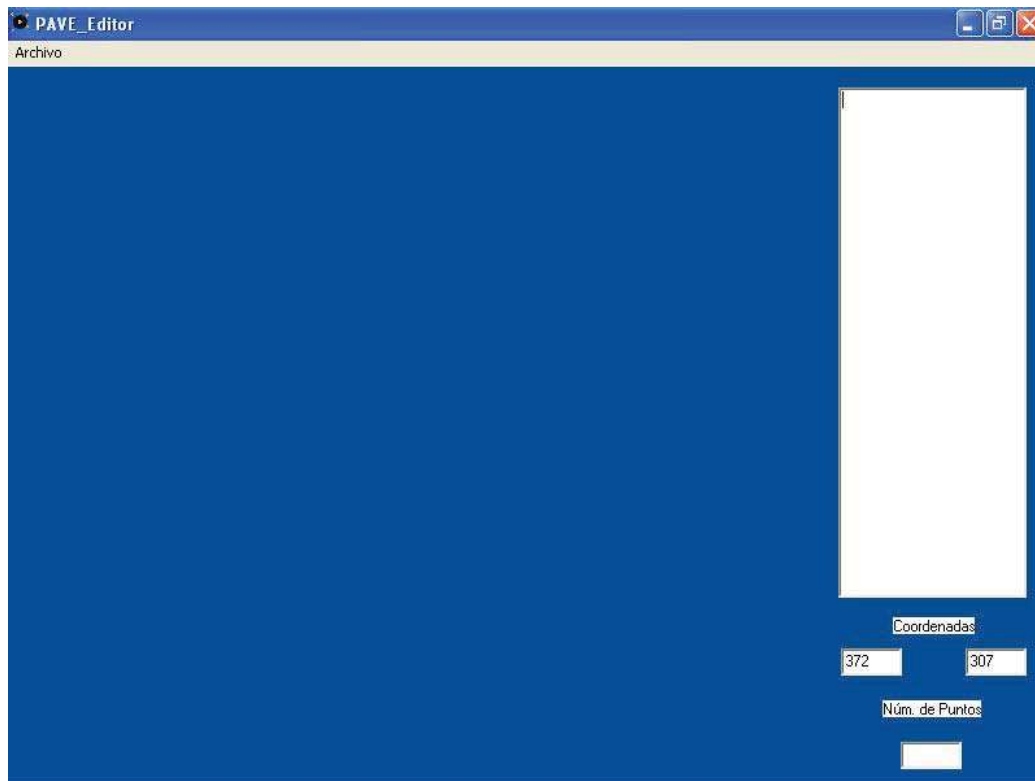


Figura 6.23. PAVE_Editor.

En el programa considero un sistema de coordenadas con origen fijado en la esquina inferior izquierda. La unidad del sistema es el pixel.

El funcionamiento de PAVE_Editor es sencillo. Lo primero es abrir una imagen, que contiene el dominio del cual se obtendrá el contorno, seleccionando la opción *Nuevo* en el menú *Archivo*. En seguida se mostrará un cuadro de diálogo para seleccionar la imagen buscada. Al cerrarse el cuadro de diálogo la imagen aparecerá en la parte izquierda del programa.



Figura 6.24. Cuadro de diálogo que se crea al seleccionar la opción *Nuevo* en el menú *Archivo*.

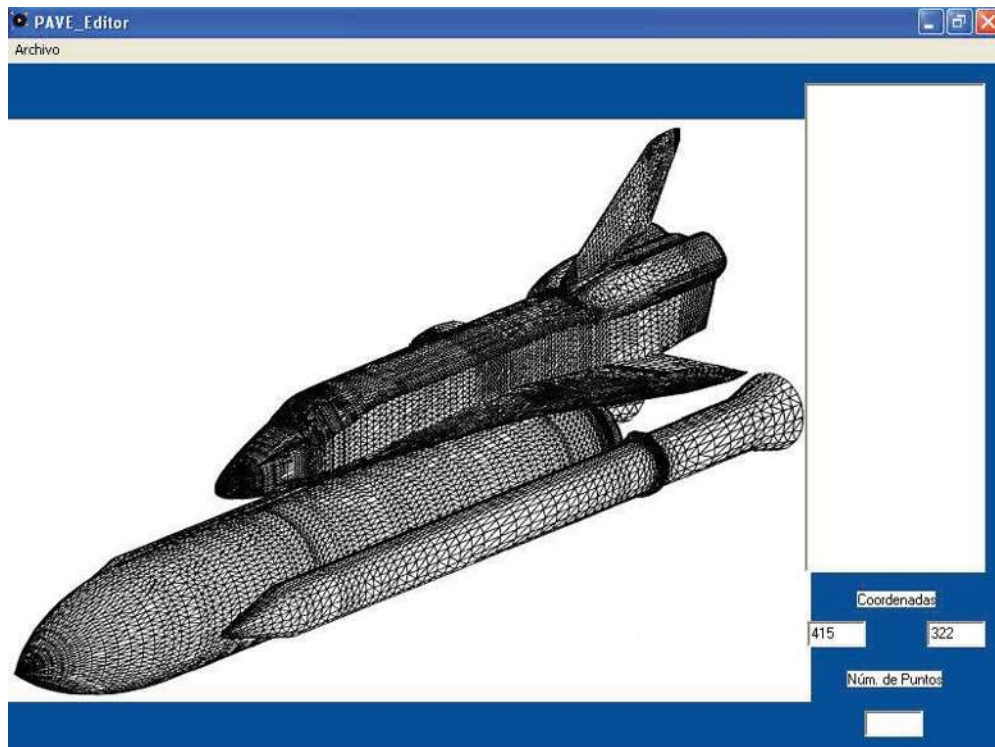


Figura 6.25. PAVE_Editor después de haber abierto una imagen.

En la parte derecha del la pantalla se encuentran varios objetos. El primero es un objeto *Memo* que mostrará las coordenadas seleccionadas en la imagen. También se encuentran tres objetos *Edit*. Los dos primeros representan las coordenadas del puntero en la pantalla y el último el número de puntos seleccionados.

La forma de seleccionar un punto en la pantalla es dando un clic con el botón izquierdo del Mouse o en caso de tener activado la función *MouseKeys* de Windows, que es *lo más recomendable*, en la tecla 5 la parte numérica del teclado (para activar *MouseKeys* dirijase al Panel de Control, presione el ícono de Opciones de Accesibilidad y en el menú Mouse active la casilla Utilizar MouseKeys).

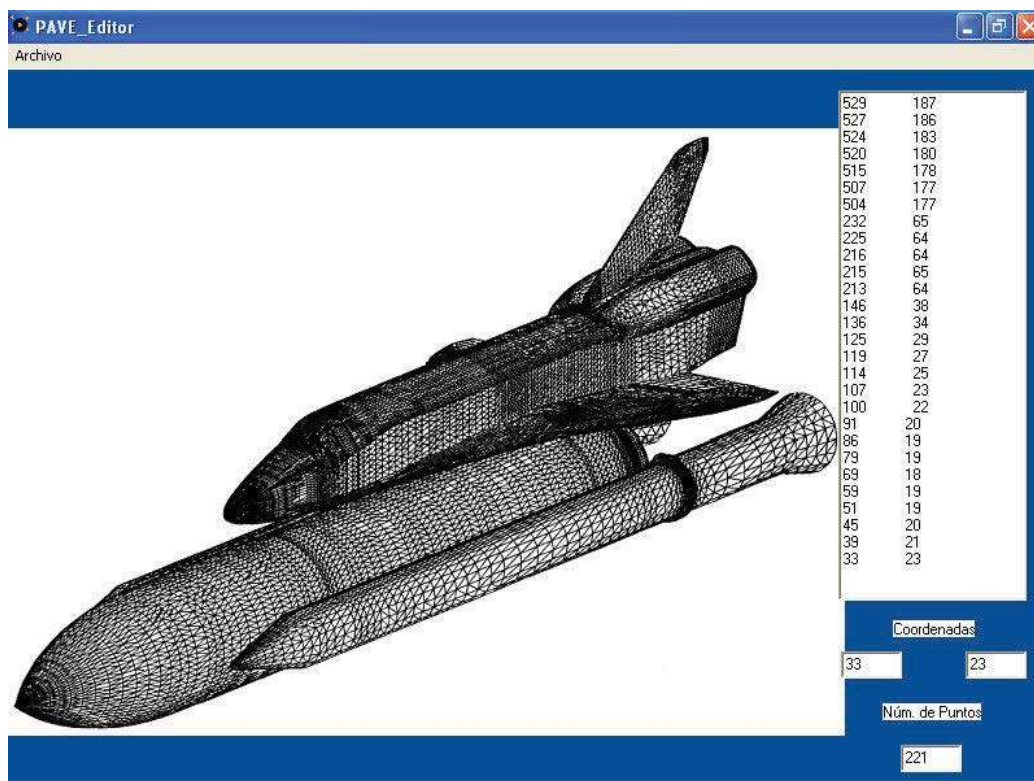


Figura 6.26. Captura de algunas coordenadas.

Ahora se deben guardar las coordenadas en un archivo de contorno. Para ello seleccione la opción *Guardar Como* en el menú *Archivo*. De inmediato aparecerá un cuadro de diálogo en donde se puede proporcionar la ubicación en donde se guardará el archivo y el nombre con el que se guardará. La extensión, de manera predeterminada, es .con. Después de contar con el archivo de contorno podemos recurrir a PAVE para generar algunas mallas sobre el contorno.

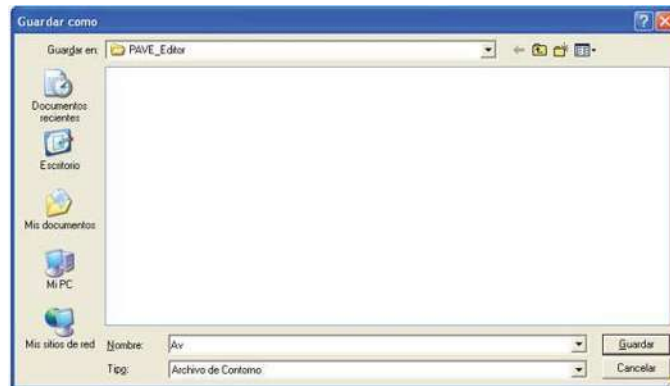


Figura 6.27. Cuadro de diálogo para guardar las coordenadas de un contorno.

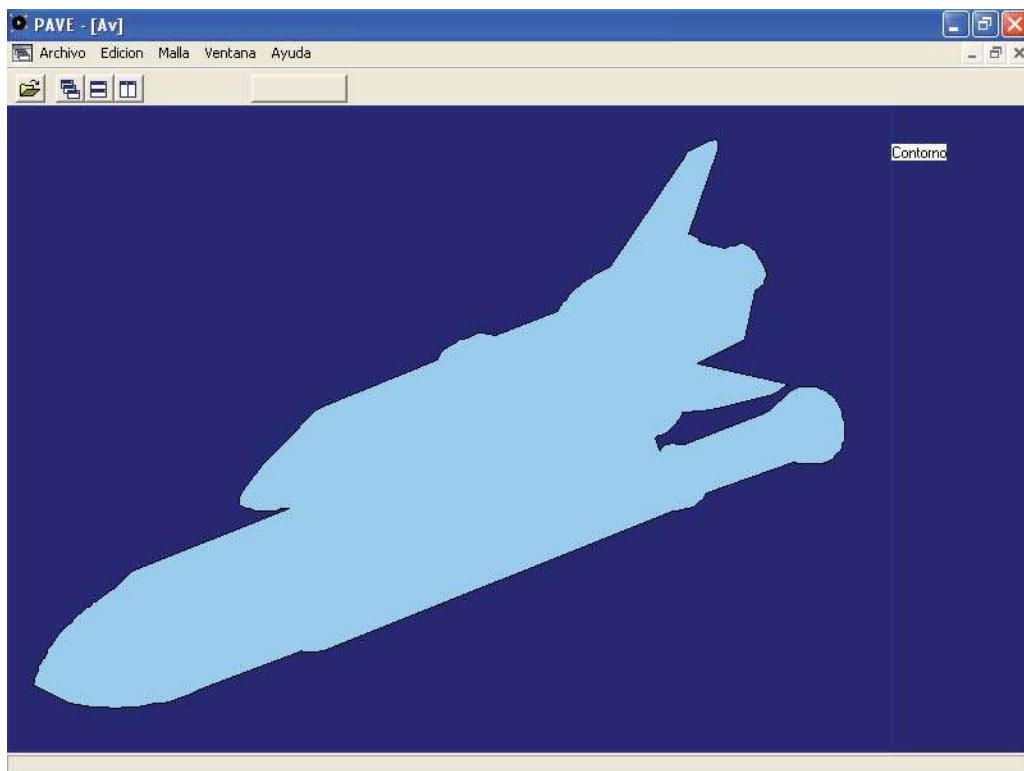


Figura 6.28. Contorno generado en PAVE_Editor visto en el programa PAVE.

Por último muestro la creación de un contorno más.



Figura 6.29. Obtención de las coordenadas de la región de Inglaterra.

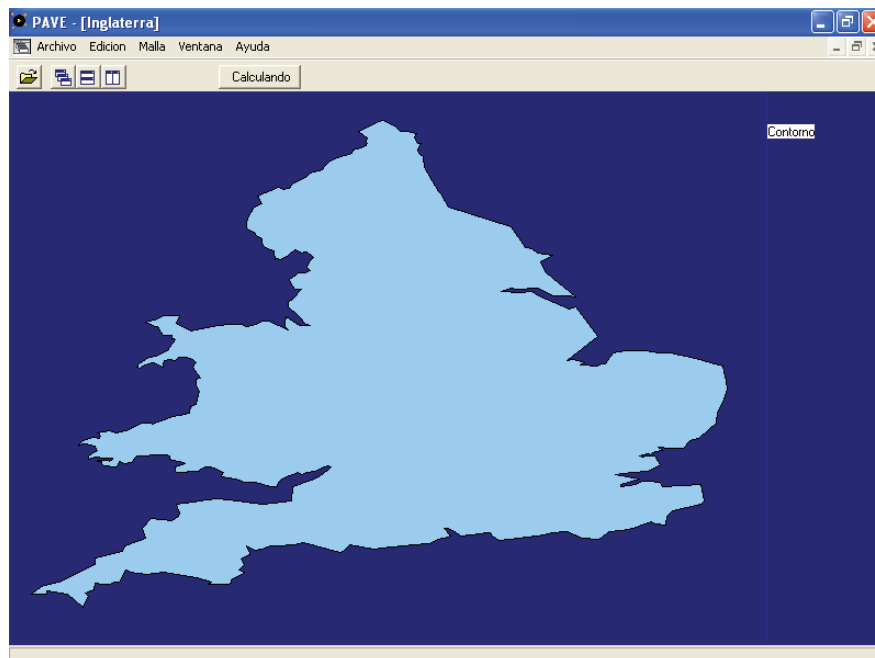


Figura 6.30. Vista de Inglaterra.con en PAVE

CAPITULO 7.

MODELO NÚMÉRICO.

El problema en este trabajo de investigación, es la predicción de la cantidad de agua que invade al pozo productor, en función del gasto a que se somete al pozo. La formulación con Elemento Finitos de la ecuación (3.23) es como sigue: Sea el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el espacio ocupado por el yacimiento y la falla productora. El problema abstracto descrito por la Ecuación en Derivadas Parciales (3.23) se puede transformar en un problema integral mediante el método de Galerkin. Sea v una función auxiliar arbitraria (función *test* o de prueba), definida en el mismo dominio Ω , multiplicando por v la ec. (3.23) e integrando sobre Ω obtenemos:

$$\int_{\Omega} v \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} v \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w) d\Omega - \int_{\Omega} v \vec{G} \cdot \vec{\nabla} S_w d\Omega \quad (7.1)$$

La cual se transforma aplicando el Teorema de Green:

$$\int_{\Omega} v \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w) d\Omega + \int_{\Omega} v \vec{G} \cdot \vec{\nabla} S_w d\Omega = \int_{\Omega} v q_{\alpha} d\Omega \quad (7.2)$$

$$\left\langle \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} v_i \right\rangle + \left\langle \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w \cdot \vec{\nabla} v_i \right\rangle + \left\langle \vec{G} \cdot \vec{\nabla} S_w v_i \right\rangle - \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w \cdot \vec{n} = \langle q_{\alpha} v_i \rangle \quad (7.3)$$

Sea la interpolación de S_w definida por: $S_w(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^N u_i(t) v_i(x, y, z)$, entonces sustituyendo esta aproximación en (7.3) obtenemos:

$$\sum_j \frac{du_j}{dt} \langle \varphi v_j v_i \rangle + \sum_j u_j \langle \vec{G} \cdot \vec{\nabla} v_j v_i \rangle + \sum_j u_j \langle \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} v_j \cdot \vec{\nabla} v_i \rangle = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w \cdot \vec{n} dS + \langle q_{\alpha} v_i \rangle \quad (7.4)$$

Definiendo los coeficientes integrales:

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \langle \varphi v_j v_i \rangle \\
R_i &= \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} S_w \cdot \vec{n} + \langle q_\alpha v_i \rangle \\
K_{ij} &= \langle \vec{G} \cdot \vec{\nabla} v_j v_i \rangle + \langle \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} v_j \cdot \vec{\nabla} v_i \rangle
\end{aligned}$$

Podemos construir el sistema de Elementos Finitos que es totalmente matricial:

$$\mathbf{M} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \mathbf{K} \cdot \vec{u} = \vec{R} \quad (7.4)$$

La ecuación (7.4) es la aproximación matricial por Elementos Finitos de la ecuación (3.23). Falta especificar las condiciones de frontera adecuadas. La existencia de la zona de transición, es el efecto principal producido por las fuerzas capilares en el Activo Bellota-Jujo. En esta zona S_w disminuye en función de h_c desde 1 en el plano de contacto agua-aceite, hasta $S_{wi} = 0.363$ a la altura máxima h_c .

CAPÍTULO 8

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

8.1 RESULTADOS

Para verificar el modelo, se realizaron varias simulaciones, pero se escogió una sola simulación como representativa de los cálculos hechos. El problema y los parámetros que intervienen en el mismo se consideraron de la siguiente manera:

- El flujo de aceite y agua se realiza en manera horizontal.
- Se inyecta agua a una tasa $q_w = 10 \frac{kg}{s}$ en P_I y se extrae aceite en P_E a una tasa $q_o = -10 \frac{kg}{s}$.
- Hay flujo inmisible de ambas fases en la dirección indicada por flechas en *Figura 7.0*.
- El flujo es simétrico en los cuatro cuadrantes, por ello solo se estudia en uno.
- Para las condiciones de contorno, el flujo es considerado nulo en toda la frontera.
- Las condiciones iniciales son dadas por:

$$p_c = p_o - p_w = \text{constante}.$$

$$S_w + S_o = 1$$

- Se utilizó las relaciones de Brooks-Corey para la presión de capilaridad y permeabilidades relativas:

$$P_c(S_w) = p_d S_e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$S_e = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr}} \quad S_{wr} < S_w \leq 1$$

$$K_{rw}(S_w) = S_e^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}$$

$$K_{rn}(S_w) = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{\frac{2+\lambda}{\lambda}}).$$

donde S_e es la saturación efectiva, λ es la distribución del tamaño de poro, S_{wr} la saturación de agua residual y p_d la presión entrante.

- Los restantes parámetros son:

$$\rho_w = \rho_o = 1000 \frac{kg}{m^3}, \quad \mu_w = \mu_o = 10^{-3} \frac{kg}{m^3}, \quad \phi = 0.2 \text{ y } K = 10^{-6} m^2.$$

- El dominio se dividió en 1672 subdominios.
- La simulación se realizó en un lapso de tiempo que va desde 0 hasta 48 hr.
- El modelo fue resuelto en el programa FEMLAB.

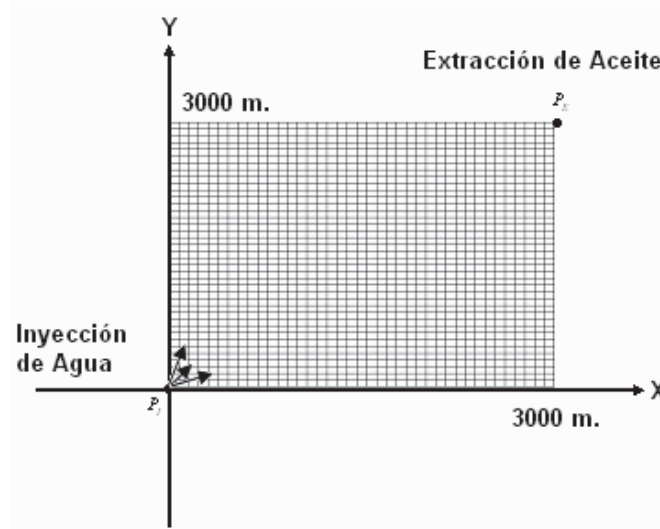


Figura 8.0 Esquema del problema.

Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos. En cada una de ellas se expresa la saturación efectiva del agua cambiando durante el tiempo.

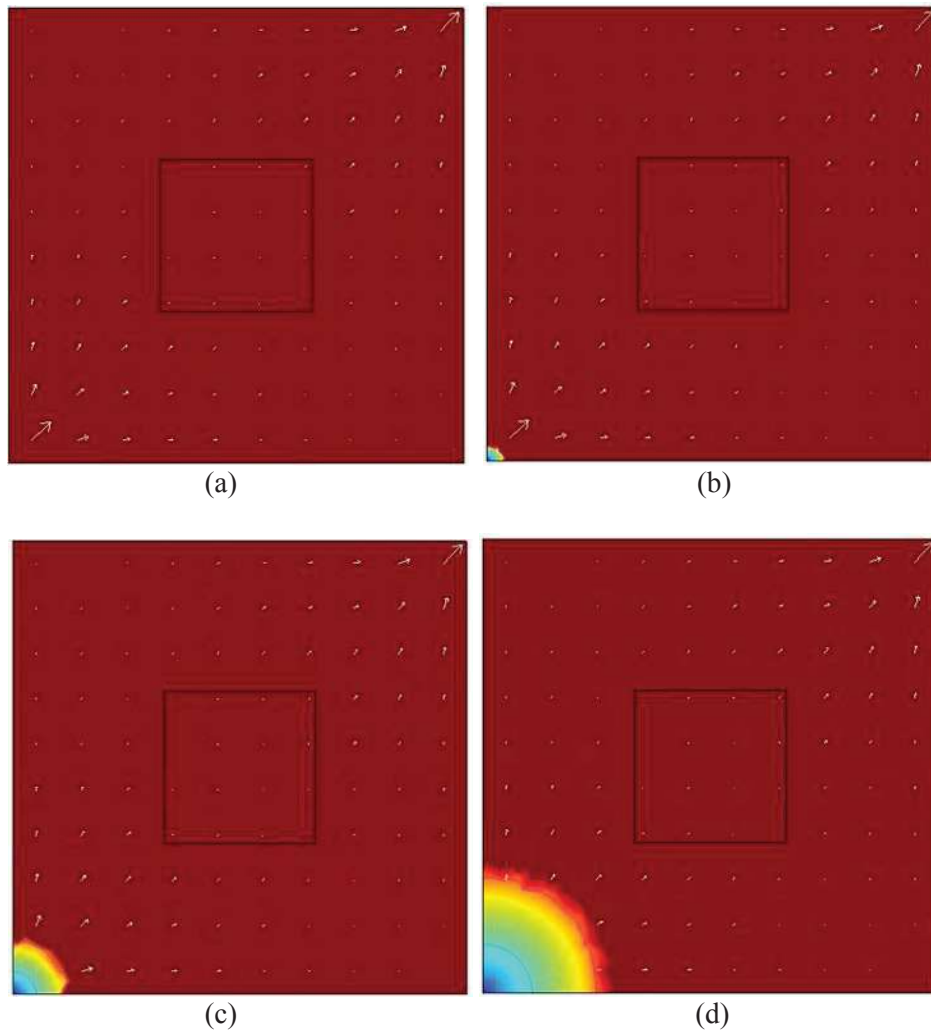


Figura 8.1. Saturación efectiva del agua en: (a) 1 s., (b) 100 s., (c) 1 000 s. y (d) 1.39 hrs.

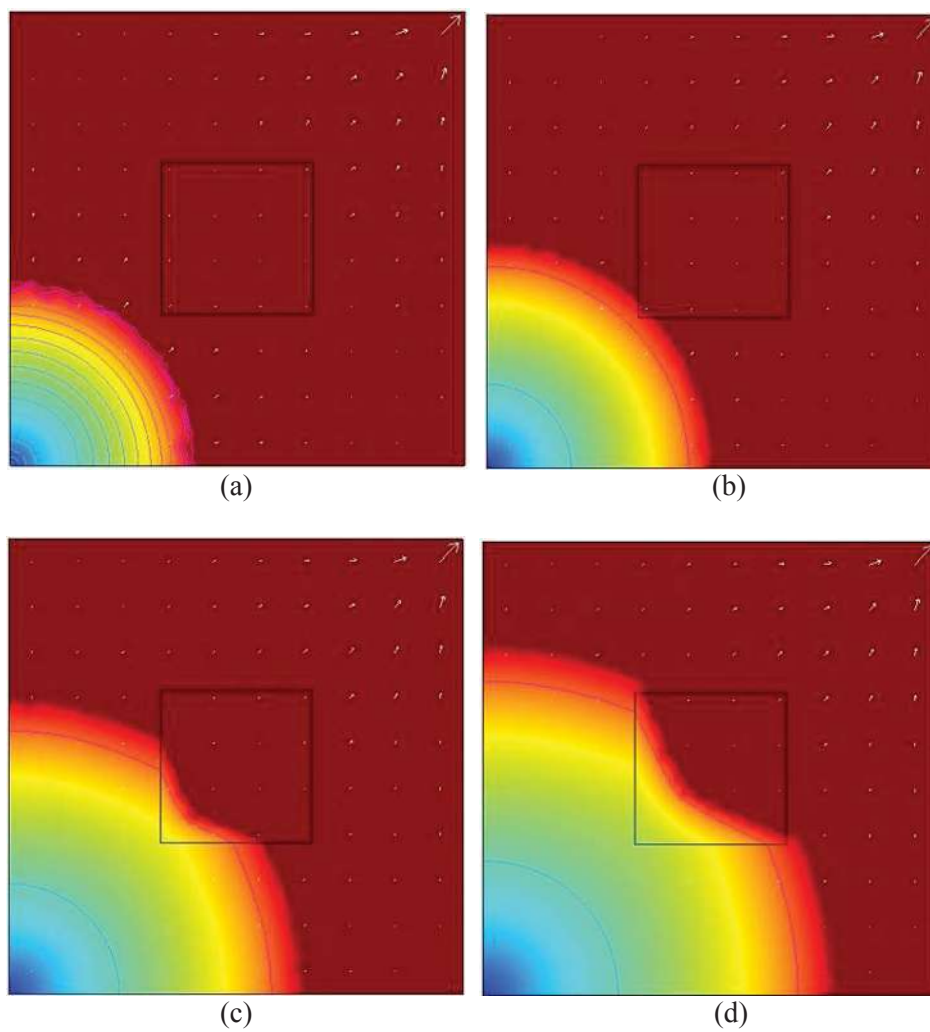


Figura 8.2. Saturación efectiva del agua en: (a) 2.78 hrs., (b) 4.17 hrs., (c) 6.94 hrs. y (d) 9.72 hrs.

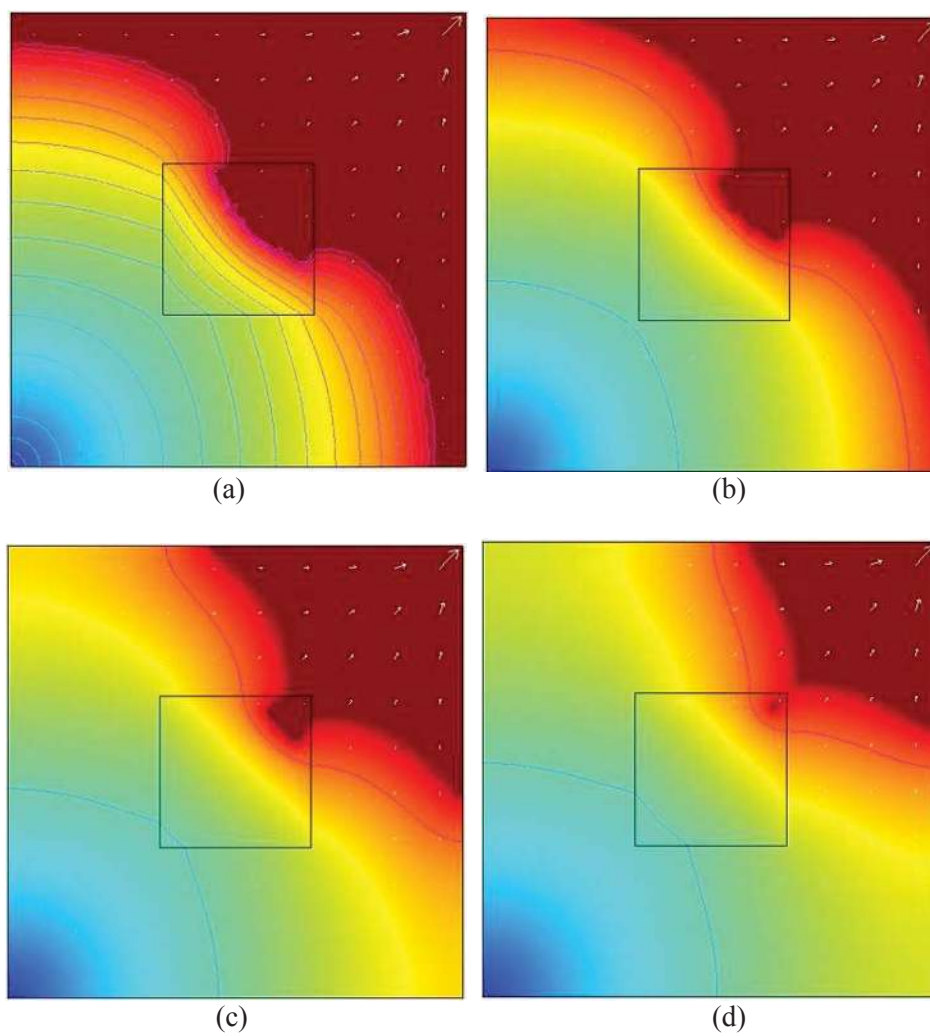


Figura 8.3. Saturación efectiva del agua en: (a) 13.9 hrs., (b) 16.7 hrs., (c) 19.4 hrs. y (d) 22.22 hrs.

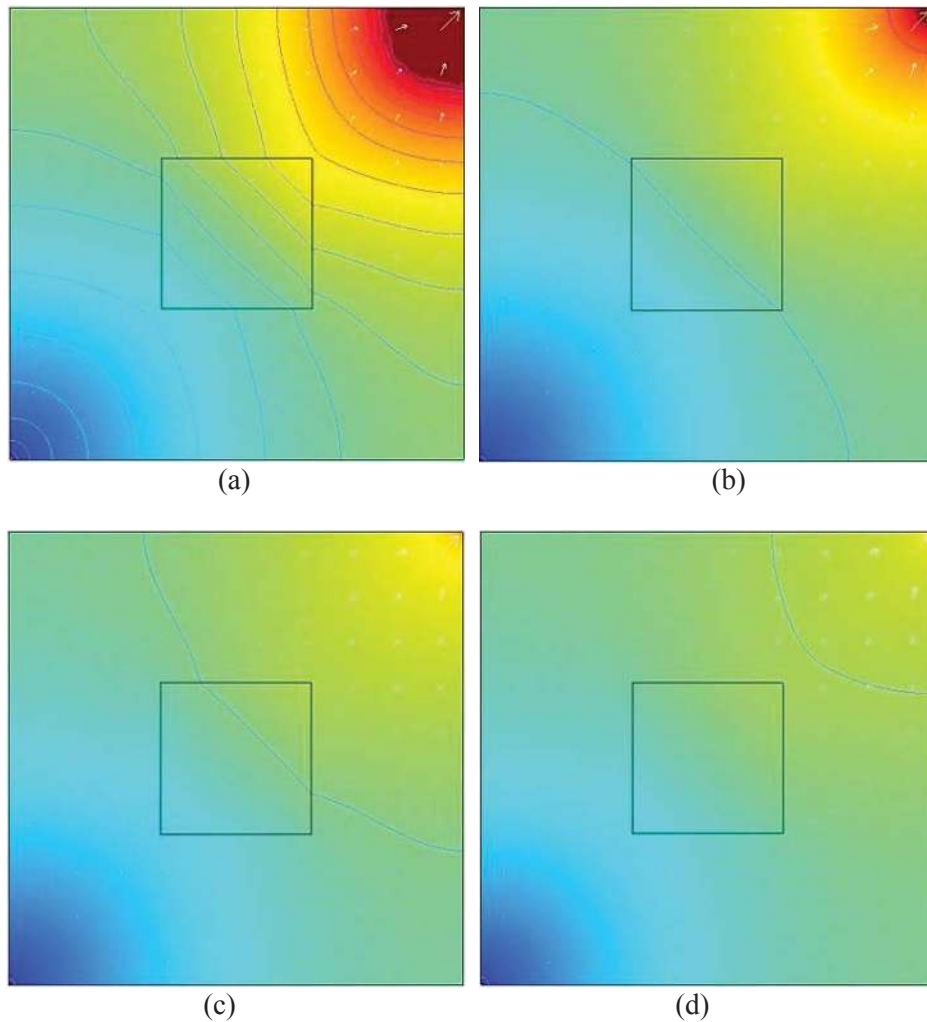


Figura 8.4. Saturación efectiva del agua en: (a) 27.8 hrs., (b) 30.55 hrs., (c) 33.33 hrs. y (d) 36.11 hrs.

8.2 CONCLUSIONES

En cuanto al generador de mallas, PAVE, logré reproducir varias mallas ya creadas por otros autores, comprobando así su buen funcionamiento. Además generé algunos contornos, y varias mallas sobre estos, obteniendo un buen desempeño de ambos programas.

Como se puede observar en la *figura 8.3* a *figura 8.4*, el modelo propuesto para el problema de flujo produce resultados que concuerdan con lo esperado. Además de la anterior simulación, se realizaron otras simulaciones con datos de campo tomados de pozos del Activo Bellota-Jujo.

REFERENCIAS

- Abbaszadeh M. y Cinco-Ley H. (1995). "Pressure-Transient Behavior in a Reservoir Whith a Finite-Conductivity Fault," paper SPE 24704.
- Abbaszadeh, M., Asakawa K., Cinco-Ley H., Arihara N. (2000). "Interferente Testing in Reservoirs UIT Conductive Faults or Fractures," paper SPE 66406.
- Al-Afaleg A. I., Ershaghi I. (1993). "Coning Phenomena in Naturrally Fractured Reservoirs," paper SEP 26083.
- Attila I. Evrenos y Comer A. (1969). "Sensitivity Studies of Gas-Water Relative Permeability and Capillarity in Reservoir Modeling," paper SPE 2668.
- Bear, J. y Bachmat, Y. (1984). "Transport Phenomena in Porous Media - Basic Equations" (3-61), en "Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media". Bear,J. y Corapcioglu, Y.,editores, Vol. 82, 1003 págs. NATO ASI Series E: Applied Sciences, M. Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- Clough, R. (1960). "The Finite Element in Plane Stress Analysis"; Proc. 2nd ASCE, Conf. Elec. Comp., Pittsburg, Pa.
- Cooley, R. (1971). "A Finite Difference Method for Variably Saturated Porous Media: Application to a single pumping Well"; Water Res. Research, Vol.7, No.6 (pp.1607-1625).
- Corey, A.T., (1954). The interrelation Between Gas and Oil Relative Permeability. Producer's Monthly, No. 1, 19.
- Dullien, F.A. (1979). Porous Media, Fluid Transport and Pore Structure. Academic Press, New York.
- Ehling C. A., Chan K. S. (1996). "Production Enhancement Strategies for Strong Botton Water Drive Reservoirs," paper SPE 36613.
- Fayers F., Shfldon J. W. (1956). "The Effect of Capillary Pressure and Gravity on Two-Phase Fluid Flow in a Porous Medium," paper T.P. 8068.
- Gallagher J., Prado L., Pieters J. (1983). "Simulation of Coning in a Thin Oil Rim in a Fractured Reservoir," paper SPE 25613.
- Hui L. y Yong Y. (1998). "Water breakthrough numerical simulation in Fractured Gas Reservoirs," paper SPE 39551.
- Huang C. (1983). "Numerical Simulation of Coning Behavior of a Single Well in a Naturally Fractured Reservoir," paper SPE 10566.
- Seright R. S., R. H. Lane (2003). "A Strategy for Attacking Excess Water Production," SPE 84966.

Suarez M. C., “Flujo de Fluidos No-Isotérmicos en Reservorios Fracturados con Porosidad y Permeabilidad Múltiples”, Tesis PhD., Facultad de Ingeniería División de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México, D.F. , México, 2000.

Tinoco, G., “Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares”, Tesis PhD., Centro de Investigaciones en Matemáticas CIMAT, Guanajuato, México, 1997.

Van Golf T. D. y Sonier F. (1994). “Walter-Coning in a Fractured Reservoir,” paper SPE 28572.