

# UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO Y ELABORACIÓN DE UN ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN  
NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [-\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma}] = F$$

$$-(-\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma}) = \vec{q}$$

POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

Diego Armando Pantoja González

Tutor: Dr. Mario César Suárez Arriaga

Morelia, Michoacán, Julio del 2006

# Contenido

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Agradecimientos y Reconocimientos</b>                         | 4  |
| <b>Nomenclatura</b>                                              | 5  |
| <b>Conceptos</b>                                                 | 8  |
| <b>Resumen</b>                                                   | 10 |
| <b>Capítulo 1. Marco contextual</b>                              | 12 |
| 1.1 Contexto                                                     | 12 |
| 1.2 Objetivo                                                     | 13 |
| 1.3 Metas                                                        | 13 |
| 1.4 Duración del proyecto                                        | 13 |
| 1.5 Tipo de investigación                                        | 14 |
| 1.6 Justificación                                                | 14 |
| <b>Capítulo 2. Desarrollo Histórico de los Elementos Finitos</b> | 16 |
| 2.1 Introducción al capítulo                                     | 16 |

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2 Etapa medieval                                                                                             | 17        |
| 2.3 Etapa renacentista (Los modelos clásicos)                                                                  | 19        |
| 2.4 Etapa barroca                                                                                              | 21        |
| 2.5 Etapa híbrida o post-barroca                                                                               | 22        |
| 2.6 Etapa de los elementos sin malla                                                                           | 22        |
| 2.7 Las matemáticas y la ingeniería en el desarrollo del MEF                                                   | 23        |
| 2.8 Algunas Razones por las que se hizo tan popular el MEF                                                     | 24        |
| 2.9 El MEF, las diferencias finitas (MDF), Superficies finitas integradas (MSFI) y elementos de frontera (BEM) | 24        |
| <b>Capítulo 3. El método del elemento finito</b>                                                               | <b>27</b> |
| 3.1 Introducción                                                                                               | 27        |
| 3.2 Ecuación del modelo                                                                                        | 29        |
| 3.3 Aproximación por elementos finitos modelo estacionario                                                     | 31        |
| 3.4 Integrales de peso y la forma débil                                                                        | 34        |
| 3.5 Modelo en elementos finitos                                                                                | 38        |
| 3.6 Funciones de interpolación.                                                                                | 41        |
| 3.6.1 Lineal 1D                                                                                                | 42        |
| 3.6.2 Lineal 2D                                                                                                | 44        |
| 3.6.3 Bilineal 2D                                                                                              | 47        |
| 3.7 Ensamble de elementos                                                                                      | 50        |
| Importante                                                                                                     | 53        |
| 3.7.1 Condiciones de frontera                                                                                  | 59        |
| 3.8 Problema Transiente                                                                                        | 61        |
| 3.9 Problema Transiente (2D)                                                                                   | 66        |

|                                             |            |
|---------------------------------------------|------------|
| 3.10 Integración numérica                   | 67         |
| Importante                                  | 69         |
| <b>Capítulo 4. Programa DMEF</b>            | <b>82</b>  |
| 4.1 Introducción                            | 82         |
| 4.2 <i>Sistema UNAMALLA v.2.0</i>           | 82         |
| 4.3 Descripción del programa                | 85         |
| 4.4 Matrices y Vectores                     | 90         |
| 4.5 Condiciones de frontera                 | 92         |
| 4.6 Coeficientes de la ecuación diferencial | 95         |
| 4.7 Aplicación del programa                 | 96         |
| 4.7.1 Coeficientes constantes               | 97         |
| 4.7.2 Coeficientes no constantes            | 105        |
| <b>Conclusiones</b>                         | <b>110</b> |
| <b>Problemas abiertos</b>                   | <b>114</b> |
| <b>Bibliografía</b>                         | <b>116</b> |
| <b>Apéndice A</b>                           | <b>118</b> |
| <b>Apéndice B</b>                           | <b>120</b> |
| <b>Apéndice C</b>                           | <b>127</b> |
| <b>Apéndice D</b>                           | <b>138</b> |
| <b>Índice de figuras</b>                    | <b>150</b> |
| <b>Índice de tablas</b>                     | <b>153</b> |

## Agradecimientos y Reconocimientos

A mi padre Dr. Rafael Pantoja Rangel.  
Por su apoyo, comprensión y dedicación que he recibido  
durante el transcurso de mi vida y en especial  
en este momento tan importante.

A mi madre Maria Guadalupe y mis hermanos Rafael y Miriam.  
Por todo su amor y apoyo.

A mi esposa Tzitali.  
Por todo su amor, cariño y comprensión.

A mi bebé Sebastián Amador.  
Por su amor incondicional y por darme más motivación para seguir adelante.

A mi Asesor Dr. Mario César Suárez A.  
Por dedicación, apoyo y darme la  
directriz para seguir con mis estudios.

A Luis Miguel Carreón.  
Por formar un gran equipo de trabajo durante toda la carrera.

A mis Jurados Dr. Gerardo, Dr. Francisco, Dr. Joaquín y L.F.M Lucina.

Un **especial agradecimiento** a la máxima casa de estudios del estado de Michoacán.  
La Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo  
Por la formación recibida durante el transcurso de mis estudios.

## Nomenclatura

|                                                                                                  |                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $C$                                                                                              | Capacidad específica    |
| $h$                                                                                              | Variable dependiente    |
| $F$                                                                                              | Fuente o sumidero       |
| $\vec{q}$                                                                                        | Vector de velocidad     |
| $\vec{\vec{K}}$                                                                                  | Tensor de permeabilidad |
| $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{j}$       | Operador nabla          |
| $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{j}$ | Gradiente               |
| $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$ | Divergencia             |
| $\Omega$                                                                                         | Dominio                 |
| $\Gamma, \partial\Omega$                                                                         | Frontera de dominio     |

|                               |                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | Derivada con respecto a la posición |
| $\frac{\partial}{\partial t}$ | Derivada con respecto al tiempo     |
| $(\vec{x}) = (x, y, z)$       | Coordenadas arbitrarias             |
| $u$                           | Solución ecuación diferencial       |
| $u_j$                         | Nodos                               |
| $\varphi_j$                   | Funciones de interpolación          |
| $\vec{n}$                     | Vector normal                       |
| $\Omega^e$                    | Dominio de elemento                 |
| $\Gamma^e$                    | Frontera del elemento               |
| $\Omega^h$                    | Malla                               |
| $R$                           | Residuo                             |
| $w(\vec{x})$                  | Función de peso                     |
| $B(w, h^e)$                   | Forma bilineal                      |
| $l(w)$                        | Forma lineal                        |
| $M_{ij}$                      | Matriz                              |
| $V_i$                         | Vector                              |
| $ds$                          | Longitud de arco                    |
| $\vec{r}(t)$                  | Vector de Posición                  |
| $\vec{r}'(t)$                 | Vector velocidad                    |

|                    |                               |
|--------------------|-------------------------------|
| $\  \cdot \ $      | Norma o magnitud de un vector |
| $\hat{i}, \hat{j}$ | Vectores unitarios            |

## Conceptos

En este apartado se describen someramente los conceptos incluidos en el trabajo, con la finalidad de que el lector tenga una referencia rápida, que le permitirá leer la tesis con fluidez.

*Modelo físico.* Es una maqueta o un diseño a escala que se puede ver, sentir o tocar y que simula la misma operación que el fenómeno real.

*Modelo matemático* El modelo Matemático es un conjunto de ecuaciones diferenciales o integrales o íntegro - diferenciales o algebraicas con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera.

*Discretizar.* Una porción de materia contiene una infinidad de partículas a las cuales se les puede asignar un punto  $(x, y, z)$ , entonces la porción contiene una infinidad de puntos, Discretizar es tomar solo una cantidad *finita* de puntos que representen lo mas exacto a la porción de materia.

*Fenómeno estacionario.* Es un fenómeno que no transcurre del tiempo solo del espacio que ocupa.

*Fenómeno transciente.* Es un fenómeno que depende del tiempo y del espacio.

*FORTTRAN.* Lenguaje de programación. FORTRAN viene de la unión de FOR – Formula, TRAN – translation. La versión utilizada en este proyecto es *Compaq Visual Fortran Professional edition 6.6.0.*

## Resumen

En este proyecto de investigación, desarrollado en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), se generó una propuesta para solucionar numéricamente la ecuación diferencial parcial

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right] = F$$

$$-\left( -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right) = \vec{q}$$

En el mercado existen programas de cómputo que se pueden utilizar para resolver la ecuación diferencial parcial, pero los altos costos del software (FEMLAB) propician que se opte por desarrollar programas de cómputo propios, que permitan no sólo hallar la solución para un caso específico, sino que al incluir las variables del modelo, para que el usuario pueda manipular las condiciones

iniciales y de frontera, para obtener una simulación más completa del fenómeno físico en cuestión. Lo más importante es que al desarrollar el software, se aprende, se adquiere y se desarrolla tecnología propia.

Otro elemento a favor es que al diseñar el algoritmo de solución de la ecuación diferencial parcial, se llega a conocer la matemática que se usa, lo que conlleva a un aprendizaje paralelo de la solución de sistemas de ecuaciones lineales y de ecuaciones diferenciales parciales.

En esta propuesta el uso de la computadora se hace indispensable, porque del planteamiento de solución de la ecuación diferencial, surge la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones con cientos de elementos que a lápiz y papel se tomaría un tiempo considerable y sería muy tedioso, cálculos que con la computadora y un software adecuado se hacen en muy poco tiempo y con la exactitud que el usuario requiera.

En esta tesis se presenta un algoritmo, desarrollado con el lenguaje de programación FORTRAN. La versión utilizada en este proyecto es *Compaq Visual Fortran Professional edition 6.6.0*, para solucionar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera, que fue resuelto por el Método de los Elementos Finitos (MEF

En resumen, el contenido de la tesis explica la formulación de la solución por elementos finitos de una ecuación diferencial con el programa de cómputo, llamado DMEF elaborado en lenguaje de programación Fortran.

# *Capítulo 1*

## **Marco contextual**

### *1.1 Contexto*

La Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), máxima casa de estudio del estado de Michoacán, ofrece educación de calidad en las distintas áreas del conocimiento, que cubren prácticamente todos los sectores integrantes de la sociedad, con oferta académica de 25 carreras de licenciatura y 19 programas de posgrado, distribuidos en todo el estado.

Una de las instituciones que ha cumplido de una manera amplia y bastante exitosa con los objetivos para los cuales fue fundada en 1968, es la hoy denominada Facultad Ciencias Físico- Matemáticas (FCFM), porque sus egresados han trascendido a nivel estatal, nacional e internacional y se erige en la actualidad como uno de los pilares de la UMSNH, que se encuentra ubicada en el edificio B de ciudad universitaria de Morelia, Michoacán. Uno de los principales factores de éxito de la FCFM es la atención personalizada que reciben sus estudiantes de parte

de la planta docente y de investigación, que culmina con la asesoría para la elaboración de tesis, como única alternativa de titulación de la facultad, tal y como sucede con esta investigación.

Como uno de los objetivos de la FCFM es desarrollar nuevas aplicaciones para el campo de la tecnología e investigación científica, se presenta este trabajo de investigación relacionado con la elaboración del programa de cómputo SEBMEF, con el que se soluciona numéricamente una ecuación diferencial parcial, con el conocido método del Elemento Finito.

### ***1.2 Objetivo***

Determinar la solución numérica de la ecuación diferencial parcial

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right] = F$$

$$-\left( -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right) = \vec{q}$$

por el método del Elemento Finito a través de un programa de cómputo.

### ***1.3 Metas***

- Aprender el Método del Elemento Finito.
- Desarrollar el algoritmo para aplicar el MEF a la solución de las ecuaciones diferenciales parciales.
- Elaborar el programa de cómputo en lenguaje FORTRAN, del algoritmo de la solución de la ecuación diferencial parcial.

### ***1.4 Duración del proyecto.*** 1 año.

### **1.5 Tipo de investigación**

Es una investigación de Desarrollo, porque como resultado se ha elaborado un algoritmo desarrollado en computadora para solucionar una ecuación diferencial parcial por el método de elementos finitos.

### **1.6 Justificación**

La distancia abismal entre la matemática que se enseña en las instituciones educativas y la aplicación de la matemática en las distintas áreas del conocimiento es preocupante, sobre todo porque en los curso de ecuaciones diferenciales, el aprendizaje se orienta a métodos terminados, y se omite la modelación matemática de un fenómeno natural y otras formas de solución, como son los métodos gráficos y numéricos.

La forma de enseñar las ecuaciones diferenciales tradicionales, por lo general se basan en métodos analíticos exactos, que no llegan a aterrizar en alguna aplicación. Este método genera en el alumno la idea de que todo problema tiene una solución en términos de alguna función conocida, lo que en parte es cierto, pero en la mayoría de las aplicaciones de la ciencia, no tiene cabida esta idea, como se plantea en esta investigación de desarrollo.

En este trabajo de investigación se plantea solucionar numéricamente, mediante un programa de cómputo la ecuación diferencial parcial, obtenida de una modelación matemática de un fenómeno físico.

Sin embargo, es mucho más difícil entender un fenómeno en una ecuación matemática que observándolo directamente de la naturaleza. Así, la solución de

ecuaciones diferenciales de todo tipo se ha visto beneficiada por la modelación matemática y la aproximación numérica con la computadora, como señala Carl Sagan en la película Cosmos “con tan solo un clic en la computadora y en unos cuantos minutos se puede observar un fenómeno que a la naturaleza le ha tomado horas, días, meses e incluso millones de años”.

# *Capítulo 2*

## **Desarrollo Histórico de los Elementos Finitos**

### ***2.1 Introducción a los elementos finitos***

Este trabajo primordialmente se ha enfocado más hacia la comprensión y solución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales mediante el MEF, para lo que se ha tomado como directriz las notas del curso de Suárez (2002), para elaborar la introducción e historia de los elementos finitos.

La necesidad es la madre de la invención, reza el viejo y adecuado adagio para explicar los innumerables inventos humanos en cualquier área de la creatividad humana. Esta situación se extrapola hacia los métodos numéricos, que permitieron resolver una gran cantidad de problemas de matemáticas y física. Desde la técnica de exhaustividad de Arquímedes, los algoritmos árabes, los métodos intuitivos de Newton, las cuadraturas de Gauss y los algoritmos de Runge-Kutta, siempre hubo la necesidad de resolver problemas matemáticos difíciles, lo que procrea a los métodos numéricos que se usan hoy en día.

Las nociones para aproximar derivadas que ya habían empleado Newton y Euler, fueron puestas bajo una nueva luz por el calculista Southwell, a principios de 1940, bajo la terminología general de método de Diferencias finitas (MDF), el cual devino popular rápidamente y fue muy usado con el surgimiento de las primeras computadoras electrónicas de gran tamaño.

El elemento finito fue descubierto por un grupo de ingenieros que trabajaban en problemas de cálculos de la deformación de estructuras a mediados de la década de los años 50. El experto galés en el MEF, Zienkiewicz, divide cronológicamente el progreso gradual del MEF en tres eras evolutivas:

- 1) Era medieval (la fe mueve montañas).
- 2) Era renacentista (se reconocen los modelos clásicos).
- 3) Etapa barroca (se agrega decoración y se buscan nuevas bases; 1973).

A estas tres eras de Zienkiewicz, habrá que agregarles, al menos otras dos:

- 4) La era de los elementos híbridos (1990).
- 5) La era de los MEF sin malla (2000).

## ***2.2 Etapa medieval***

Los problemas que requieren aplicación de las matemáticas a las ciencias y a las ingenierías, frecuentemente son muy difíciles, y no precisamente a causa del nivel matemático requerido, sino simplemente porque el número de componentes individuales involucrados es enorme. Para ello basta imaginar simplemente todos los componentes de una nave espacial o todas las partes que forman la catedral de Morelia, o los elementos del estadio Morelos, o los de una placa tectónica.

En esta etapa primaria del MEF, se observa la naturaleza de cada componente individual, se especifican sus variables y los puntos de conexión entre cada elemento con los demás elementos de la estructura global. Este proceso constituye el ensamblado del MEF.

Es natural entonces, que un medio continuo (estructura o sistema) sea modelado como un ensamblaje discreto (finito) de cierto número de componentes individuales, llamados por lo mismo *Elementos Finitos* que representan de manera aproximada a la estructura original. Este modelo es aproximado debido a que el medio continuo tiene, por definición matemática, un número infinito de componentes (puntos  $(x, y, z)$ ), o bien por que físicamente contiene una cantidad excesivamente grande de partículas materiales (de moléculas por ejemplo). Como es prácticamente imposible modelar todas y cada una de las moléculas del medio, la representación finita o discreta es necesaria, que por lo general arroja muy buenos resultados.

En esta primera etapa del desarrollo histórico del MEF, la intuición física predomina. Turner (1956) al parecer fue de los primeros en emplear el concepto de “Elemento Finito” porque notaron que, al separar un elemento de una estructura y suponiendo patrones de tensión y de desplazamiento simples ligados, las relaciones entre desplazamientos y fuerzas nodales pueden lograrse en forma adecuada. Esos pioneros e ingenieros aeronáuticos y mecánicos, guiados por el sentido común y la intuición, derivaron varios elementos finitos simples: el famoso Triángulo de Turner, el rectángulo de Clough y la placa doblada o curvada de Melosh.

### 2.3 *Etapla renacentista (Los modelos clásicos)*

Después de agotar las primeras intuiciones brevemente descritas en los párrafos anteriores, se descubrió que una perspectiva claramente intuitiva basada en el sentido común, fallaba cuando se intentaban nuevas aplicaciones con elementos más complejos. Entonces surgió el principio del “Trabajo Virtual” como una herramienta auxiliar del MEF, más general y poderosa en el análisis estructural. Este principio consiste en un teorema clásico que asegura que si un conjunto de tensiones está en equilibrio, en todos los puntos, con un conjunto de tracciones externas, entonces la suma de trabajos virtuales internos y externos a la estructura, hechos durante cualquier desplazamiento virtual, debe de ser igual a cero. Tal uso del trabajo virtual en el MEF, permitió asegurar que el proceso del desplazamiento virtual puede también representarse como la minimización aproximada de un potencial de energía.

Esta representación con la minimización de un funcional como la energía potencial de la estructura, permitió introducir otro concepto clásico, el principio variacional de Hellinger-Reissner. Tal principio resulta muy poderoso, pues entonces cualquier modelo de un proceso físico en el cual se puede definir un funcional con algún valor estacionario, puede ser modelado inmediatamente por el MEF. Como ejemplo general, la técnica variacional se ilustra mediante una funcional  $X(\mu)$  definida como:

$$X(\mu) = \int_{\Omega} F(\vec{\mu}) d\Omega$$

donde  $\Omega$  representa el dominio espacial de la estructura. Entonces una aproximación para  $\bar{\mu} = M\bar{a}$ , donde  $M$  es una matriz de la estructura y  $\bar{a}$  es la deformación a desplazamientos, conduce por minimización con respecto a  $\bar{a}$ , hacia un conjunto de ecuaciones aproximadas:  $\frac{\partial X}{\partial \bar{a}} = 0$  (Proceso de Rayleigh-Ritz).

La extensión variacional del MEF condujo en 1965 a Zienkiewicz y Cheng, a formular y resolver problemas no estructurales. Después de este trabajo se desarrollaron un buen número de investigaciones y se publicaron varios artículos sobre la aplicación del MEF a diferentes procesos físicos. Es importante hacer aquí un breve resumen de la situación del MEF hasta mediados de la década de 1960:

- 1) Se comprendió que la formulación mediante el principio del trabajo virtual (PTV) en elasticidad lineal, da resultados idénticos que el principio de minimización de la energía potencial, si la función de peso virtual es idéntica a la función forma del elemento finito.
- 2) El PTV establece la relación elástica en forma más simple y directa que el principio variacional, cuando ambos conduzcan a la misma aproximación.
- 3) Si se empleaban otras funciones de ponderación, esto conducía a una formulación alternativa que no podía ser derivada del principio variacional.
- 4) Si existen propiedades no-lineales de la estructura, entonces el PTV tiene validez y conduce a un conjunto de ecuaciones no lineales discretizadas. En este caso el principio variacional se hace más complicado y, de existir el funcional, éste deja de tener un sentido físico claramente definido.

- 5) En las aplicaciones no estructurales del MEF, las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan y describen el problema físico, pueden ser formuladas correctamente, pero el funcional a minimizar puede no formularse en forma simple, o bien, puede no existir.

En estos casos importantes se descubrió que el PTV clásico podía ser reemplazado por métodos clásicos de Residuos Ponderados (MRP o Weighted Residual Methods) ya usados en otros problemas antes de 1956. A partir de este descubrimiento se reencontró otro proceso clásico de formulación especial del MRP llamado de Galerkin, que databa de 1951 y que devino muy popular a partir de entonces.

A partir de 1969 se reconoció ante la comunidad internacional usuaria del MEF, que el método de Galerkin, que consiste en procedimientos especiales de residuos ponderados, es muy ventajoso y general en la formulación del MEF y tal vez sea también el más sencillo.

#### ***2.4 Etapa barroca***

La etapa barroca tanto en el arte como en la ciencia, se ha caracterizado por la búsqueda de nuevas formas o nuevos territorios, por lo tanto, de un alejamiento de los modelos clásicos. Hacia el exterior, lo barroco se hace evidente por una elaboración creciente en el refinamiento de las formas y de la decoración. A partir de 1970, el MEF entró a una fase barroca de mucha elaboración de los detalles matemáticos.

Enseguida enfrentó la yuxtaposición de varios detalles físicos y buscó nuevas bases científicas, nuevos campos de aplicación y rigurosos fundamentos matemáticos.

A esta era corresponde el reemplazo de las formas iniciales simples de los elementos (triángulos, rectángulos, etc.) por otras formas más complejas y con más grados de libertad. Como ejemplo surgieron los elementos isoparamétricos con numerosos nodos, elementos curvos y elementos tipo concha con varios nodos. También en esta etapa surgieron los principios variacionales mixtos, en la solución de problemas de elasticidad.

### ***2.5 Etapa híbrida o post-barroca***

Es la etapa actual del MEF, que se caracteriza por una proliferación impresionante de trabajos originales en el modelado de una enorme cantidad de problemas físicos y en la ingeniería, ya no solo civil o estructural, sino en la mecánica de fluidos, en el flujo en medios porosos, el flujo en fronteras, la transferencia de calor y en aplicaciones a la biomecánica, a la biofísica y a la ingeniería espacial. También se generaliza el uso del MEF a diversos problemas de fisuras, rupturas y fracturas, la bibliografía sobre MEF prolifera y se calculan 9,000 artículos al año publicados en todo el planeta.

### ***2.6 Etapa de los elementos sin malla***

Al aumentar la complejidad de los problemas tratados con el MEF, se han hecho cada vez más evidentes algunas limitaciones del método, por ello, desde principios de este siglo, una nueva y más poderosa clase de técnicas numéricas

emerge. Se les ha dado el nombre genérico de Métodos Numéricos Sin Malla (MNSM) o “Meshless Methods”, aunque se trata más bien de varias técnicas y no de una sola. Con los MNSM se han solucionado complejos problemas de mecánica de sólidos y de fluidos, con una reducción de tiempo en pre-procesamiento muy significativa.

## ***2.7 Las matemáticas y la ingeniería en el desarrollo del MEF***

Es importante y justo mencionar que el trabajo del gran matemático alemán Richard Courant, contenía ya algunos componentes y fases teórico-prácticas del MEF desde 1943.

Lo mismo puede decirse del trabajo de Prager y Synge (1947), con una aproximación de elasticidad basada en el concepto de espacio de función. Lo mismo podrá decirse del método de exhaustividad de Arquímedes, quien dividía una figura compleja en figuras más simples elementales para calcular su área. Estos trabajos pioneros, sin embargo, no tuvieron ninguna influencia directa en las invenciones ingenieriles originales del MEF; ni tampoco influyeron en los años subsiguientes en otros matemáticos para proseguir en esa línea de investigación.

Está bien documentado que no fue sino hasta que se comprendió la relación del MEF con los principios variacionales y los residuos ponderados, que algunos miembros de la comunidad matemática empezaron a interesarse seriamente en el MEF. Esto ocurrió aproximadamente entre los años 1969 y 1970, hasta entonces se comprendió que en realidad el MEF es una herramienta de aproximación numérica

general, pero que no puede equipararse exactamente con ninguna de las técnicas matemáticas que lo sustentan. Esto se comprenderá mejor en el capítulo 3.

El tema común es el proceso general de ensamblado de los elementos. El MEF también ha servido, epistemológicamente hablando, para adecuar más al ingeniero y al físico en su soporte matemático (la infraestructura matemática de la realidad), pero sobretodo, a educar al matemático a pensar en términos de la ingeniería práctica y de las aplicaciones de su ciencia a la realidad física.

### ***2.8 Algunas razones por las que se hizo tan popular el MEF***

Son tres al menos, las principales razones por las cuales el MEF se ha transformado en una herramienta de cálculo tan popular internacionalmente:

- a) Tiene una gran analogía física con el ensamblado de partes que es típico de la ingeniería (estructural, mecánica, biofísica, etc.), y por tanto es conceptualmente muy intuitivo.
- b) Tiene una gran capacidad para trabajar con formas geométricas complejas mediante el empleo de elementos simples de forma arbitraria.
- c) Debido a la naturaleza de las interconexiones entre los elementos directos del MEF, en el proceso terminal de ensamblado, se forma un conjunto de ecuaciones cuya matriz tiene una “estructura de bandas” la cual facilita su solución.

### ***2.9 El MEF, las diferencias finitas (MDF), superficies finitas integradas (MSFI) y elementos de frontera (BEM)***

Hoy en día se puede visualizar al MEF como una variante o caso especial de varios procesos clásicos de aproximación numérica, tal y como se mencionó en las

etapas históricas del MEF, pero ¿que pasa con el MDF? que también es capaz de resolver muchos problemas.

Las diferencias finitas surgieron desde 1666 con el invento del cálculo diferencial, pero se desarrollaron extensamente hacia el contexto físico de solución de problemas prácticos, con el trabajo de R. Southwell en 1946.

El MDF es una aproximación directa de las EDP y EDO que gobiernan el fenómeno con condiciones de frontera, en puntos (nodos) discretos de una malla, mediante el valor de la función en otros puntos de la misma, calculados previamente. En el sistema inicial de ecuaciones a resolver, cada ecuación aparece ensamblada inmediatamente.

Debido a la aproximación de las condiciones de frontera, las matrices resultantes son frecuentemente no simétricas. La principal ventaja del MEF sobre el MDF es, la representación de geometrías complejas curvadas, en los cuales el proceso de ensamblado de elementos con distintas propiedades físicas no representa ninguna dificultad. En cambio con MDF esto se hace muy difícil.

Con respecto a los otros dos métodos, llamados MSFI Y BEM, no se puede establecer una respuesta general a la pregunta: para la misma cantidad de trabajo y esfuerzo en un problema dado, ¿Cuál es mejor, más rápido y más preciso? Dependerá siempre de cada problema particular.

Suárez (2000) ha trabajado con el MSFI y ha notado que el método es mucho más sencillo de implementar y más rápido, e igual de potente que el MEF en

problemas de transferencia de calor en sólidos, y en los flujos de masa y energía en medios porosos.

Sin embargo al resolver un problema de Dirichlet con una malla regular de un dominio rectangular, los cuatro métodos mencionados dan resultados numéricamente idénticos con el mismo trabajo de cómputo.

Para terminar este capítulo, se describen el tipo de problemas donde el MEF falla o es muy impreciso o muy difícil de implementar y que son:

- 1) Simulación de singularidades por carga concentrada.
- 2) Dislocaciones, esquinas y “craks” o micro fisuras (en estos casos las soluciones numéricas convergen mal).
- 3) Los problemas que requieren un refinamiento continuo muy intenso de las mallas, porque demandan un consumo de tiempo y de creación muy alto.
- 4) Es muy difícil simular el comportamiento de una fisura con trayectos complejos y arbitrarios que generan discontinuidades.
- 5) Es casi imposible simular el rompimiento de un material en muchos fragmentos, pues la hipótesis básica es el continuo.

# Capítulo 3

## El método del elemento finito

### 3.1 Introducción al MEF

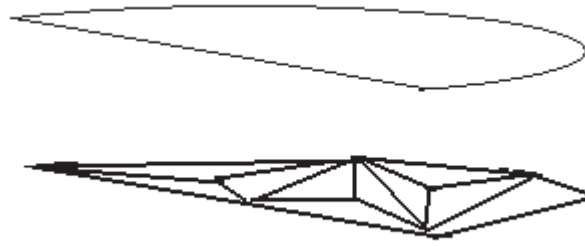
El método del elemento finito (MEF) es una de las técnicas numéricas más poderosas para la solución de ecuaciones diferenciales, resultantes del modelaje matemático de problemas de los diversos campos de la ingeniería y ciencias aplicadas.

El método es una generalización de los métodos variacionales o método de Ritz y método de residuos ponderados o de Galerkin, los que se basan en la idea de que la solución  $u$  de una ecuación diferencial puede ser representada como una combinación lineal de unos parámetros desconocidos  $u_j$  y una selección apropiada de funciones  $\varphi_j$  dentro de todo el dominio del problema, es decir  $u = \sum_j u_j \varphi_j$ . Los parámetros  $u_j$  se determinan de manera que la solución de la ecuación diferencial

sea satisfecha, frecuentemente en sentido integral. Las funciones  $\varphi_j$ , llamadas funciones de forma o de interpolación o de aproximación, se seleccionan de tal forma que satisfagan las condiciones de frontera del problema.

La mayoría de los problemas reales son definidos en regiones que son geométricamente complejas y por esta razón, es muy difícil construir funciones de interpolación que cumplan las diferentes condiciones de frontera en diferentes porciones de la región. Los métodos tradicionales variacionales y de residuos ponderados tienen defectos en la construcción de las funciones de aproximación, el que satisfagan las condiciones de frontera complicadas del problema a resolver. Sin embargo si el dominio puede ser representado por *subdominios* que permitan generar las funciones de interpolación para cualquier condición de frontera, entonces los métodos variacionales y de residuos ponderados pueden resolver prácticamente cualquier problema de ingeniería.

La idea básica del método de los elementos finitos es observar a un dominio dado, ([Ver Figura 1](#)), como una geometría de formas simples ensambladas, *Elementos Finitos*, para los cuales es posible generar sistemáticamente las funciones de interpolación, que se necesitan para solucionar la ecuación mediante cualquier método ya sea variacional o de residuos ponderados.



*Figura 1.* Dominio discretizado

La habilidad para representar geometrías bastante complejas por una colección de elementos finitos, hace que el método de los elementos finitos sea una de las herramientas numéricas más valoradas para la solución de problemas de frontera, inicial o de eigenvalores, que aparecen al modelar matemáticamente, problemas en los campos de la ingeniería y ciencias exactas.

Para una ecuación diferencial dada, es posible desarrollar diferentes aproximaciones en elementos finitos (o modelo de elementos finitos), que depende de la elección de un método variacional o de residuos ponderados. En el siguiente apartado se analizan los pasos a seguir para plantear una ecuación diferencial en elementos finitos.

### **3.2 Ecuación del modelo**

La ecuación 3-1

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right] = F \quad (3-1)$$
$$-\left( -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right) = \vec{q}$$

Puede representar un sin número de fenómenos de la naturaleza, por ejemplo: flujo de fluidos, flujo de calor, conductividad eléctrica, electroestática, etc.

Para propósitos particulares se considerara un problema de flujo de fluidos en un medio poroso. La ecuación 3-1 se considerará lineal y es pues la ecuación de Richards. La ecuación de Richards es equivalente a la ecuación de Darcy.

Por la importancia que tiene la ecuación de Darcy vale la pena conocer más acerca de esta y para profundizar más, ver apéndice D.

En la ecuación 3-1 los términos involucrados son:

$C$  Capacidad específica de humedad

$F$  Generación o extracción interna de fluido

$\vec{q}$  Vector de velocidad o velocidad de Darcy

$\vec{K}$  Tensor de permeabilidad

$\vec{\gamma}$  Parámetro que depende de la dirección del movimiento.

Mediante el MEF se solucionará la ecuación 3- 1 con las siguientes características:

- en un dominio bidimensional  $\Omega$  con frontera  $\partial\Omega$  (  $\Gamma$  ),
- un medio anisotrópico diagonal,  $\vec{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{pmatrix}$

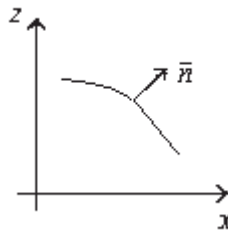
Con las condiciones iniciales y de frontera, vienen dadas por:

$$h(\vec{x}, t = 0) = h_0$$

$$h(t, \vec{x}_1) = h_1 \text{ en } \Gamma_1 \tag{3-2}$$

$$q_{\vec{n}} = -(-K \cdot \nabla h(t, \vec{x}_2) + \vec{\gamma}) \cdot \vec{n} \text{ en } \Gamma_2$$

donde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , y  $\vec{n}$  vector normal unitario que apunta hacia fuera, como se indica en la [Figura 2](#)

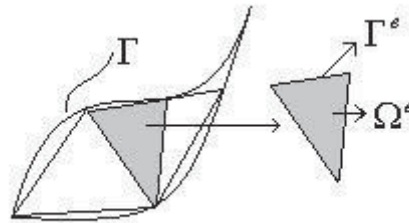


*Figura 2.* Vector unitario normal  $\vec{n}$

### 3.3 Aproximación por elementos finitos. El modelo estacionario

La idea principal del MEF, es generar las funciones de interpolación requeridas para solucionar la ecuación diferencial por cualquiera de los métodos variacional o por residuos ponderados. En el MEF, esto se realiza dividiendo el dominio dado  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  en un conjunto de subdominios, llamados *elementos finitos*. La frase elementos finitos frecuentemente se refiere a la geometría y al orden de la aproximación usada para la variable del problema sobre el elemento. Para mantener la formulación muy general, *i.e.*, no confinar la formulación a un solo elemento, se denota el subdominio de un típico elemento como  $\Omega^e$  y a su frontera como  $\Gamma^e$ , que puede ser triangular o cuadrangular, entre otros. La suma o unión de todos los elementos, los cuales no se deben traslapar unos a otros, que será usada

para representar todo el dominio y se denota  $\Omega^h$  y se le llama malla de elementos finitos del dominio  $\Omega$ . En general  $\Omega^h$  no es exactamente el dominio dado  $\Omega$  debido a la complejidad del dominio, como se puede ver en la [Figura 3](#), en la que hay partes por las orillas que no se rellenan. Se hace notar que para simples geometrías (por ejemplo, dominios cuadrados, triangulares y en general poligonales), la malla de elementos finitos duplica exactamente el dominio dado.



*Figura 3.* Discretización de un dominio

***Importante:***

*De un inicio se supondrá que es posible generar sistemáticamente las funciones de interpolación  $\varphi_j^e$  para el elemento  $\Omega^e$ .*

Como un primer caso, el fenómeno a considerar es *estacionario* (no depende del tiempo). La variable dependiente del problema es  $h$  y es aproximada sobre un típico elemento  $\Omega^e$  por la expresión:

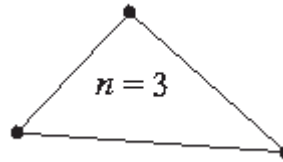
$$h(\vec{x}) \approx h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \quad (3-3)$$

donde:

- $h^e(\vec{x})$  representa la aproximación de  $h(\vec{x})$  sobre el elemento  $\Omega^e$ ,

- $h_j^e$ , representa los valores de la función  $h^e(\vec{x})$  en  $(\vec{x}_j)$  en un selecto número de puntos llamados *nodos del elemento*, en el elemento  $\Omega^e$ ,
- $\varphi_j^e(\vec{x})$  son las funciones de aproximación asociadas al elemento  $\Omega^e$ ,
- $\vec{x} = (x)$  o  $\vec{x} = (x, z)$  según se considere en una o dos dimensiones (1D o 2D), respectivamente.

Las funciones de aproximación no solo dependen del número de nodos sino de la forma del elemento. La forma del elemento debe de ser tal que el conjunto de nodos definan de manera única dicha forma. Por ejemplo, un triángulo con  $n = 3$  queda bien definido y es la forma más simple en un dominio bidimensional. Ver [Figura 4](#).



[Figura 4](#). Elemento definido con tres nodos

La ecuación 3-3 es la misma forma usada en los métodos tradicionales variacionales y de residuos ponderados, excepto por el hecho de que para el método de los elementos finitos, las funciones de interpolación  $\varphi_j^e(\vec{x})$  frecuentemente son polinomios y los parámetros indeterminados  $h_j^e$  denotan los valores de la función a ser aproximada.

La elección de polinomios es principalmente debido a:

- (1) La teoría de la interpolación puede ser usada para derivar las funciones de aproximación (la función  $h^e(\bar{x})$  debe pasar por los nodos) y,
- (2) las integrales de polinomios pueden ser evaluadas exactamente por los métodos numéricos (cuadraturas de Gauss).

### ***3.4 Integrales con peso o ponderadas y la forma débil***

Los  $n$  parámetros  $h_j^e$  (pues  $j=1,n$ ) deben ser determinados de forma tal que la aproximación de  $h^e(\bar{x})$  satisfaga la ecuación gobernante 3-1, con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera 3-2.

En el caso de métodos variacionales y de residuos ponderados, se trata de buscar que las ecuaciones gobernantes sean satisfechas en un sentido de integrales con peso, que se explicará a continuación.

El dominio de trabajo es sobre un elemento  $\Omega^e$ , porque en el dominio  $\Omega$  los métodos variacionales o de residuos ponderados no se ajustan a las fronteras, que pueden ser bastante complejas. Este proceso de integrales con peso conduce a un sistema de  $n$  ecuaciones con las  $n$  incógnitas  $(h_1^e, h_2^e, \dots, h_n^e)$  mencionadas al principio de párrafo, donde  $n$  es el numero de nodos en el elemento. El sistema de ecuaciones algebraicas resultante es llamado *modelo en elementos finitos* de la ecuación diferencial original. El modelo en elementos finitos depende de la forma de integrales con peso que se utilicen.

La forma débil de una ecuación diferencial es una ecuación integral, que es equivalente a la ecuación diferencial gobernante, así como a sus respectivas

condiciones naturales de frontera. Se desarrollará la forma débil de la ecuación diferencial 3-1 y 3-2 sobre un elemento  $\Omega^e$ .

Por definición, la variable  $h$  satisface la ecuación 3-1 en todo su dominio de definición, es decir  $\vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right] - F = 0$ , para un problema estacionario.

Sin embargo como es de esperarse, la aproximación  $h^e$  no es exacta y no satisface por completo la ecuación 3-1 y por ende se define un residuo,  $R$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \equiv R \quad (3-4)$$

que generalmente no es cero. El residuo  $R$  depende de la elección de las funciones de interpolación  $\phi_j^e(\vec{x})$  y de los coeficientes  $h_j^e$ . De acuerdo al supuesto inicial sobre las funciones de interpolación, se enfocará a que el residuo  $R$  tienda a cero, por medio de la selección adecuada de los parámetros  $h_j^e$ .

Una manera de formalizar esta idea, es a través del método de los residuos ponderados, que  $R$  tiende a disminuir en sentido de integrales ponderadas, esto es:

$$\int_{\Omega^e} w R d\Omega = 0 \quad (3-5a)$$

Una forma equivalente a la ecuación 3-5a se obtiene al sustituirla en la ecuación 3-4

$$\int_{\Omega^e} w \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \right] d\Omega = 0 \quad (3-5b)$$

donde  $w(\vec{x})$  es una función de peso.

Para cada elección de  $w(\vec{x})$  se determina una ecuación algebraica entre los parámetros  $h_j^e$ , es decir, si se dan  $n$  funciones de peso  $w(\vec{x})$  independientes, se encuentra un sistema de ecuaciones algebraicas de  $n$  ecuaciones linealmente independientes con  $n$  incógnitas.

La desventaja de este modelo para ecuaciones diferenciales de segundo orden y mayores, es que las funciones de aproximación  $\phi_j^e(\vec{x})$  deben de ser diferenciables tantas veces como la variable  $h$  lo sea, que para este caso, es dos veces diferenciable. En la forma débil, como su nombre lo refleja, estos requerimientos de continuidad o de debilidad, reducen un orden a las diferenciales de las funciones.

Para obtener la forma débil se opera de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega^e} w \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \right] d\Omega = 0 \quad (3-6)$$

Si se acota a dos dimensiones la integral de la ecuación 3-6, se tiene:

$$\int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ -k_x \frac{\partial h^e}{\partial x} + \gamma_x \right] w + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -k_z \frac{\partial h^e}{\partial z} + \gamma_z \right] w \right\} d\Omega = \int_{\Omega^e} F w d\Omega \quad (3-7)$$

ahora mediante la propiedad del producto de la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uw) &= \frac{\partial u}{\partial x} w + u \frac{\partial w}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} w &= \frac{\partial}{\partial x}(uw) - u \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-8)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( -k_x \frac{\partial h^e}{\partial x} + \gamma_x \right) w \right] - \left[ -k_x \frac{\partial h^e}{\partial x} + \gamma_x \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( -k_z \frac{\partial h^e}{\partial z} + \gamma_z \right) w \right] - \left[ -k_z \frac{\partial h^e}{\partial z} + \gamma_z \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right\} d\Omega - \int_{\Omega^e} F w d\Omega = \\
& = \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( -k_x \frac{\partial h^e}{\partial x} + \gamma_x \right) w \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( -k_z \frac{\partial h^e}{\partial z} + \gamma_z \right) w \right] \right\} d\Omega - \\
& - \int_{\Omega^e} \left\{ \left[ -k_x \frac{\partial h^e}{\partial x} + \gamma_x \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[ -k_z \frac{\partial h^e}{\partial z} + \gamma_z \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right\} d\Omega - \int_{\Omega^e} F w d\Omega = \\
& = \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left[ \left( -K \nabla h^e + \vec{\gamma} \right) w \right] d\Omega - \int_{\Omega^e} \left( -K \nabla h^e + \vec{\gamma} \right) \cdot \nabla w d\Omega - \int_{\Omega^e} F w d\Omega
\end{aligned} \tag{3-9}$$

Del teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} ds \tag{3-10}$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal hacia fuera de  $\partial\Omega$  o de  $\Omega$ .

Finalmente la forma débil de la ecuación 3-6 tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} w \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \cdot \nabla h^e + \vec{\gamma} \right] - F \right] d\Omega \\
& = \int_{\partial\Omega^e} \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] \cdot \vec{n} w ds - \int_{\Omega^e} \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\Omega^e} F w d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3-11}$$

pero  $\vec{q}_{\vec{n}} = - \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] \cdot \vec{n}$  denota el flujo normal que sale sobre la frontera del

elemento, y finalmente:

$$\int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} h^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{\vec{n}} w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \tag{3-12}$$

o de manera equivalente:

$$B(w, h^e) = l(w) \quad (3-13)$$

donde  $B(w, h^e)$  es una forma bilineal y  $l(w)$  es una forma lineal, y están definidas como:

$$B(w, h^e) = \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \quad (3-14)$$

$$l(w) = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega$$

La forma débil (ecuaciones 3-12 o 3-13) es la base del *modelo en elementos finitos* de la ecuación 3-1.

Por sustitución de  $h^e$  por  $h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \phi_j^e(\vec{x})$  y  $w$  por cada una de  $h_1^e, h_2^e, \dots, h_n^e$

(modelo de Ritz-Galerkin), se encuentra un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

La ecuación 3-13 representa el *problema variacional* asociado a la ecuación 3-1. Como la forma bilineal es simétrica  $B(w, h^e) = B(h^e, w)$  es posible construir la funcional

$$f(h^e) = \frac{1}{2} B(h^e, h^e) - l(h^e) \quad (3-15)$$

con el que se establece una equivalencia y se utiliza para determinar que la solución por elementos finitos existe y es única (Ver apéndice A).

### 3.5 Modelo en elementos finitos

La forma débil (ecuación 3-12) requiere que las funciones de interpolación sean al menos lineales en  $x, z$  para no tener términos nulos en las integrales

(recordar que son integrales de derivadas en  $x, z$ ). Como ya se señaló,  $h$  se aproxima sobre un típico elemento por la expresión

$$h(\vec{x}) \approx h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \quad (3-16)$$

donde:

- $h^e(\vec{x})$  representa la aproximación de  $h(\vec{x})$  sobre el elemento  $\Omega^e$ ,
- $h_j^e$  representa los valores de la función  $h^e(\vec{x})$  en  $(\vec{x}_j)$ , un selecto número de puntos llamados *nodos del elemento*, en el elemento  $\Omega^e$ ,
- $\varphi_j^e(\vec{x})$  son las funciones de aproximación asociadas al elemento y,
- $\vec{x} = (x, z)$ .

En la siguiente sección se especifica la forma en cómo se obtienen las funciones de interpolación  $\varphi_j^e(\vec{x})$  supuestas.

Continuando con el modelo en elementos finitos, se sustituye la ecuación 3-16 en la forma débil para obtener:

$$\int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \left( \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \right) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \quad (3-17)$$

y como el gradiente es lineal,

$$\vec{\nabla} (\alpha A(\vec{x}) + \beta B(\vec{x})) = \alpha \vec{\nabla} A(\vec{x}) + \beta \vec{\nabla} B(\vec{x}) \quad (3-18)$$

y el integrando es continuo, se puede sacar la suma del gradiente y sacarla de la integral respectivamente, para obtener:

$$\sum_{j=1}^n h_j^e \int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \quad (3-19)$$

luego, se elige  $w = \varphi_i^e(\vec{x})$ , con lo que se obtiene el modelo en elementos finitos

$$\sum_{j=1}^n h_j^e \int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \varphi_j^e \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e d\Omega = \int_{\Omega^e} F \varphi_i^e d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n \varphi_i^e ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e d\Omega \quad (3-20)$$

o de manera compacta:

$$\sum_{j=1}^n h_j^e K_{ij}^e = F_i^e + q_i^e + d_i^e \quad (3-21)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e d\Omega \\ d_i^e &= \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e d\Omega \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} F \varphi_i^e d\Omega$$

$$q_i^e = \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n \varphi_i^e ds$$

Se desarrolla más explícitamente la ecuación 3-21:

$$h_1^e K_{i1}^e + h_2^e K_{i2}^e + h_3^e K_{i3}^e + \dots + h_n^e K_{in}^e = F_i^e + q_i^e + d_i^e \quad (3-23)$$

en donde se observa que es una ecuación con  $n$  incógnitas ( $h_1^e, h_2^e, h_3^e, \dots, h_n^e$ ), pero si

se eligen  $n$  funciones  $w$  linealmente independientes, las cuales Galerkin propone

sean las mismas funciones de interpolación, se determina un sistema de  $n$

ecuaciones con  $n$  incógnitas:

$$h_1^e K_{11}^e + h_2^e K_{12}^e + h_3^e K_{13}^e + \dots + h_n^e K_{1n}^e = l_1^e$$

$$h_1^e K_{21}^e + h_2^e K_{22}^e + h_3^e K_{23}^e + \dots + h_n^e K_{2n}^e = l_2^e$$

$$h_1^e K_{31}^e + h_2^e K_{32}^e + h_3^e K_{33}^e + \dots + h_n^e K_{3n}^e = l_3^e \quad (3-24)$$

$$\vdots$$

$$h_1^e K_{n1}^e + h_2^e K_{n2}^e + h_3^e K_{n3}^e + \dots + h_n^e K_{nn}^e = l_n^e$$

$$l_i^e = F_i^e + q_i^e + d_i^e$$

En forma matricial

$$\left[ K^e \right] \cdot \{ h^e \} = \{ l^e \} \quad (3-25)$$

La matriz  $\left[ K^e \right]$  es llamada la *matriz de coeficientes o de rigidez o de conductividad*, que además que  $K_{ij}^e = K_{ji}^e$ , porque la forma bilineal es simétrica, lo que es de gran interés a la hora de programar, dado que se ahorra memoria a la hora de calcular la matriz  $\left[ K^e \right]$ .

### 3.6 Funciones de interpolación

En esta sección se formularán las funciones de interpolación  $\varphi_j^e(\bar{x})$ .

La aproximación  $h^e(\bar{x})$  de  $h(\bar{x})$  sobre un elemento  $\Omega^e$  debe satisfacer las siguientes condiciones para que la solución aproximada converja a la solución real:

- (1)  $h^e(\bar{x})$  debe ser continua como lo requiere la forma débil

- (2) El polinomio usado para representar  $h^e(\bar{x})$  debe ser completo. Desde el término constante hasta el mayor orden que se desee el polinomio.
- (3) Todos los términos del polinomio deben ser linealmente independientes.

El número de términos independientes está relacionado con la forma del elemento. Se examinarán para propósitos de esta tesis, únicamente elementos de orden lineal en 1D y 2D, porque de acuerdo a Suárez (2005) “la experiencia internacional muestra que los elementos lineales arrojan resultados tan precisos como si se trabajaran con elementos de grado mayor en muchos problemas prácticos”.

### ***3.6.1 Funciones de interpolación lineal. 1D***

Considérese la siguiente aproximación lineal en 1D:

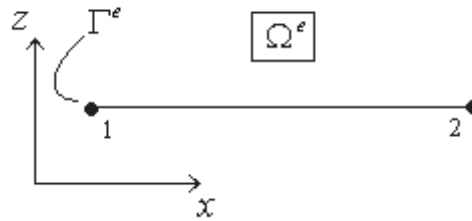
$$h^e(\bar{x}) = \alpha_0 + x\alpha_1 = (1, x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

donde

- $(1, x)$  es la base del polinomio
- $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$  son los coeficientes y primeras incógnitas.

La aproximación cumple los tres requisitos de la sección 3-6: las derivadas son no nulas, el polinomio está completo y los términos del polinomio son linealmente independientes.

Son dos los términos independientes, entonces un segmento de recta queda bien definido, por lo tanto, el elemento finito requerido será un segmento de recta como se muestra en la [Figura 5](#).



*Figura 5.* Elemento finito lineal 1D

Ahora se calcula  $h^e(\vec{x})$  en los nodos, es decir en los puntos 1 y 2. ([Ver Figura](#)

5)

$$h^e(x_1) = h_1^e = \alpha_0 + x_1 \alpha_1 = (1, x_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

$$h^e(x_2) = h_2^e = \alpha_0 + x_2 \alpha_1 = (1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

Se despeja el vector de coeficientes por medio de la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

que se sustituyen en la ecuación 3-26 para obtener

$$h^e(\vec{x}) = \frac{1}{x_2 - x_1} (1, x) \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

$$h^e(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1 + x}{x_2 - x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix}$$

En detalle, las funciones de interpolación para un elemento lineal en 1D son:

$$h^e(\vec{x}) = h_1^e \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + h_2^e \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$h^e(\vec{x}) = h_1^e \varphi_1^e(x) + h_2^e \varphi_2^e(x) \quad (3-31)$$

$$h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^2 h_j^e \varphi_j^e(x)$$

### 3.6.2 Funciones de interpolación lineal. 2D

Para un elemento de orden lineal en 2D se tiene la aproximación siguiente:

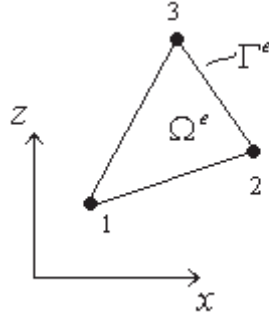
$$h^e(\vec{x}) = \alpha_0 + x\alpha_1 + z\alpha_2 = (1, x, z) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

donde

- $(1, x, z)$  es la base del polinomio
- $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$  son los coeficientes y primeras incógnitas.

Esta aproximación cumple los 3 requisitos de la sección 3-6.

Como son tres los términos independientes entonces un triángulo queda bien definido, por lo tanto nuestro elemento finito será como se muestra en la [figura 6](#).



*Figura 6.* Elemento lineal 2D

Se calculan los  $h^e(\bar{x})$  en los nodos, es decir, en los puntos 1, 2 y 3. Ver [Figura](#)

6.

$$\begin{aligned}
 h^e(x_1, z_1) &= h_1^e = \alpha_0 + x_1\alpha_1 + z_1\alpha_2 = (1, x_1, z_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\
 h^e(x_2, z_2) &= h_2^e = \alpha_0 + x_2\alpha_1 + z_2\alpha_2 = (1, x_2, z_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\
 h^e(x_3, z_3) &= h_3^e = \alpha_0 + x_3\alpha_1 + z_3\alpha_2 = (1, x_3, z_3) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{3-34}$$

Se despeja el vector de coeficientes por medio de la matriz inversa para obtener:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{pmatrix} x_2 z_3 - x_3 z_2 & x_3 z_1 - x_1 z_3 & x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

donde  $A^e$  es el área del elemento triangular.

Se sustituye la ecuación 3-35 en la ecuación 3-32 para obtener

$$h^e(\vec{x}) = \frac{1}{2A^e} (1, x, z) \cdot \begin{pmatrix} x_2 z_3 - x_3 z_2 & x_3 z_1 - x_1 z_3 & x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \end{pmatrix} \quad (3-36)$$

o más explícitamente para obtener las funciones de interpolación

$$h^e(\vec{x}) = \frac{1}{2A^e} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 z \quad \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 z \quad \alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 z) \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (x_j z_k - x_k z_j) \\ \beta_i &= (z_j - z_k) \\ \gamma_i &= -(x_j - x_k) \end{aligned} \quad (3-38)$$

Nótese que los índices son cíclicos, es decir, es  $(i, j, k), (j, k, i), (k, i, j)$ ,

entonces se obtienen las funciones de interpolación en 2D:

$$\begin{aligned} h^e(\vec{x}) &= h_1^e \left( \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 z}{2A^e} \right) + h_2^e \left( \frac{\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 z}{2A^e} \right) + h_3^e \left( \frac{\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 z}{2A^e} \right) \\ h^e(\vec{x}) &= h_1^e \phi_1^e(x, z) + h_2^e \phi_2^e(x, z) + h_3^e \phi_3^e(x, z) \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^3 h_j^e \phi_j^e(x, z)$$

### 3.6.3 Funciones de interpolación bilineal. 2D

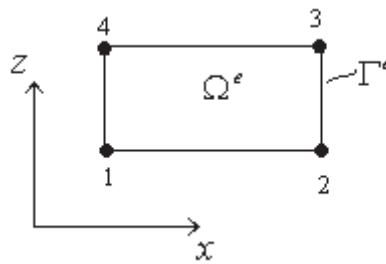
Para un elemento de orden bilineal en 2D se tiene la aproximación siguiente:

$$h^e(\vec{x}) = \alpha_0 + x\alpha_1 + z\alpha_2 + xz\alpha_3 = (1, x, z, xz) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3-40)$$

- $(1, x, z, xz)$  es la base del polinomio
- $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  son los coeficientes y primeras incógnitas.

La aproximación de la ecuación cumple los tres requisitos del apartado 3-6.

Para este caso son 4 los términos independientes, entonces un cuadrilátero queda bien definido, por lo tanto el elemento finito será como se muestra en la [Figura 7](#), que por simplicidad en las coordenadas se ha considerado paralelo a los ejes de referencia.



*Figura 7.* Elemento lineal 2D

Se calcula  $h^e(\vec{x})$  en los nodos, es decir en los puntos 1, 2, 3 y 4. Ver [Figura 7](#).

$$h^e(x_1, z_1) = h_1^e = \alpha_0 + x_1\alpha_1 + z_1\alpha_2 + x_1z_1\alpha_3 = (1, x_1, z_1, x_1z_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$h^e(x_2, z_1) = h_2^e = \alpha_0 + x_2\alpha_1 + z_1\alpha_2 + x_2z_1\alpha_3 = (1, x_2, z_1, x_2z_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$h^e(x_2, z_2) = h_3^e = \alpha_0 + x_2\alpha_1 + z_2\alpha_2 + x_2z_2\alpha_3 = (1, x_2, z_2, x_2z_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$h^e(x_1, z_2) = h_4^e = \alpha_0 + x_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + x_1z_2\alpha_3 = (1, x_1, z_2, x_1z_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3-41)$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 & x_1z_1 \\ 1 & x_2 & z_1 & x_2z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 & x_2z_2 \\ 1 & x_1 & z_2 & x_1z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3-42)$$

se aplica la matriz inversa para hallar el vector de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2 z_2}{\Delta 1} & \frac{x_1 z_2}{\Delta 2} & \frac{x_1 z_1}{\Delta 1} & \frac{x_2 z_1}{\Delta 2} \\ \frac{z_2}{\Delta 2} & \frac{z_2}{\Delta 1} & \frac{z_1}{\Delta 2} & \frac{z_1}{\Delta 1} \\ \frac{x_2}{\Delta 2} & \frac{x_1}{\Delta 1} & \frac{x_1}{\Delta 2} & \frac{x_2}{\Delta 1} \\ \frac{1}{\Delta 1} & \frac{1}{\Delta 2} & \frac{1}{\Delta 1} & \frac{1}{\Delta 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

donde

$$\Delta 1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\Delta 2 = (x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

Se sustituye la ecuación 3-43 en la ecuación 3-40

$$h^e(\vec{x}) = (1, x, z, xz) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2 z_2}{\Delta 1} & \frac{x_1 z_2}{\Delta 2} & \frac{x_1 z_1}{\Delta 1} & \frac{x_2 z_1}{\Delta 2} \\ \frac{z_2}{\Delta 2} & \frac{z_2}{\Delta 1} & \frac{z_1}{\Delta 2} & \frac{z_1}{\Delta 1} \\ \frac{x_2}{\Delta 2} & \frac{x_1}{\Delta 1} & \frac{x_1}{\Delta 2} & \frac{x_2}{\Delta 1} \\ \frac{1}{\Delta 1} & \frac{1}{\Delta 2} & \frac{1}{\Delta 1} & \frac{1}{\Delta 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} \quad (3-44)$$

En forma explícita se obtienen las funciones de interpolación para un elemento bilineal en 2D:

$$\begin{aligned}
 h^e(\vec{x}) = & h_1^e \left( \frac{x_2 z_2}{\Delta 1} + x \frac{z_2}{\Delta 2} + z \frac{x_2}{\Delta 2} + xz \frac{1}{\Delta 1} \right) + h_2^e \left( \frac{x_1 z_2}{\Delta 2} + x \frac{z_2}{\Delta 1} + z \frac{x_1}{\Delta 1} + xz \frac{1}{\Delta 2} \right) + \\
 & + h_3^e \left( \frac{x_1 z_1}{\Delta 1} + x \frac{z_1}{\Delta 2} + z \frac{x_1}{\Delta 2} + xz \frac{1}{\Delta 1} \right) + h_4^e \left( \frac{x_2 z_1}{\Delta 2} + x \frac{z_1}{\Delta 1} + z \frac{x_2}{\Delta 1} + xz \frac{1}{\Delta 2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3-45}$$

$$h^e(\vec{x}) = h_1^e \phi_1^e(x, z) + h_2^e \phi_2^e(x, z) + h_3^e \phi_3^e(x, z) + h_4^e \phi_4^e(x, z)$$

$$h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^4 h_j^e \phi_j^e(x, z)$$

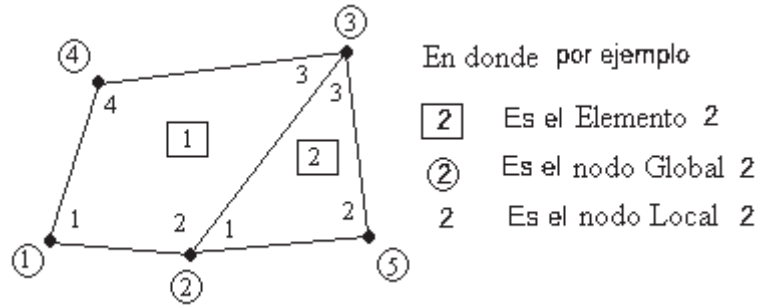
### 3.7 Ensamblado de elementos

Uno de los elementos importantes en el planteamiento del MEF es el ensamblado de elementos finitos el cual se describe a continuación:

El ensamblado de los elementos finitos tiene su soporte en las dos siguientes reglas:

- (1) Continuidad de la variable primaria (es decir,  $h(x, z)$ )
- (2) Balance de la variable secundaria (es decir  $\vec{q}$ )

Sea pues una malla simple como la que se muestra en la [Figura 8](#), en la que aparecen dos elementos uno triangular y otro cuadrilátero, así también aparece una correspondencia entre nodos locales y globales. Los nodos locales son los correspondientes a uno de los elementos, mientras que los nodos globales corresponden al sistema completo.



**Figura 8.** Correspondencia local – global en el ensamblaje

Sea  $K_{ij}^1$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) la matriz correspondiente al elemento cuadrangular, elemento 1, y sea  $K_{ij}^2$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) la matriz correspondiente al elemento triangular, elemento 2.

De la correspondencia entre nodos locales y globales se tienen las siguientes relaciones para  $h$ :

$$h_1 = h_1^1, h_2 = h_2^1 = h_1^2, h_3 = h_3^1 = h_3^2, h_4 = h_4^1, h_5 = h_2^2 \quad (3-46)$$

Se hace notar que el subíndice  $j$  de  $h_j^e$  indica el nodo local y el superíndice  $e$  señala el elemento al que hace referencia. Aquí se ha impuesto la continuidad de la variable primaria.

Para cada elemento cuadrangular se tiene una matriz de  $4 \times 4$ , mientras que para un elemento triangular una matriz de  $3 \times 3$ , es decir:

$$h_1^e K_{i1}^e + h_2^e K_{i2}^e + h_3^e K_{i3}^e + \dots + h_n^e K_{in}^e = l_i^e$$

con  $n = 4$  ó  $3$ , respectivamente

Corriendo el índice  $i$ :

$$h_1^1 K_{11}^1 + h_2^1 K_{12}^1 + h_3^1 K_{13}^1 + h_4^1 K_{14}^1 = l_1^1 \dots \dots (1)$$

$$h_1^1 K_{21}^1 + h_2^1 K_{22}^1 + h_3^1 K_{23}^1 + h_4^1 K_{24}^1 = l_2^1 \dots \dots (2)$$

**(3-47)**

$$h_1^1 K_{31}^1 + h_2^1 K_{32}^1 + h_3^1 K_{33}^1 + h_4^1 K_{34}^1 = l_3^1 \dots \dots (3)$$

$$h_1^1 K_{41}^1 + h_2^1 K_{42}^1 + h_3^1 K_{43}^1 + h_4^1 K_{44}^1 = l_4^1 \dots \dots (4)$$

$$h_1^2 K_{11}^2 + h_2^2 K_{12}^2 + h_3^2 K_{13}^2 = l_1^2 \dots \dots (2)$$

$$h_1^2 K_{21}^2 + h_2^2 K_{22}^2 + h_3^2 K_{23}^2 = l_2^2 \dots \dots (5)$$

**(3-48)**

$$h_1^2 K_{31}^2 + h_2^2 K_{32}^2 + h_3^2 K_{33}^2 = l_3^2 \dots \dots (3)$$

donde el número que aparece a la derecha entre paréntesis (#) corresponde a la posición global.

Ahora con las relaciones de la ecuación 3-46 se tiene:

$$h_1 K_{11}^1 + h_2 K_{12}^1 + h_3 K_{13}^1 + h_4 K_{14}^1 = l_1^1 \dots \dots (1)$$

$$h_1 K_{21}^1 + h_2 K_{22}^1 + h_3 K_{23}^1 + h_4 K_{24}^1 = l_2^1 \dots \dots (2)$$

**(3-49)**

$$h_1 K_{31}^1 + h_2 K_{32}^1 + h_3 K_{33}^1 + h_4 K_{34}^1 = l_3^1 \dots \dots (3)$$

$$h_1 K_{41}^1 + h_2 K_{42}^1 + h_3 K_{43}^1 + h_4 K_{44}^1 = l_4^1 \dots \dots (4)$$

y

$$h_2 K_{11}^2 + h_5 K_{12}^2 + h_3 K_{13}^2 = l_1^2 \dots \dots (2)$$

$$h_2 K_{21}^2 + h_5 K_{22}^2 + h_3 K_{23}^2 = l_2^2 \dots \dots (5)$$

**(3-50)**

$$h_2 K_{31}^2 + h_5 K_{32}^2 + h_3 K_{33}^2 = l_3^2 \dots \dots (3)$$

Para cumplir con el balance de la variable secundaria, se deben sumar las ecuaciones que tienen el mismo nodo global, lo que arroja como resultado:

$$h_1 K_{11}^1 + h_2 K_{12}^1 + h_3 K_{13}^1 + h_4 K_{14}^1 = l_1^1 \dots\dots (1)$$

$$h_1 K_{21}^1 + h_2 (K_{22}^1 + K_{11}^2) + h_3 (K_{23}^1 + K_{13}^2) + h_4 K_{24}^1 + h_5 K_{12}^2 = (l_2^1 + l_1^2) \dots\dots (2)$$

$$h_1 K_{31}^1 + h_2 (K_{32}^1 + K_{31}^2) + h_3 (K_{33}^1 + K_{33}^2) + h_4 K_{34}^1 + h_5 K_{32}^2 = (l_3^1 + l_3^2) \dots\dots (3) \quad (3-51)$$

$$h_1 K_{41}^1 + h_2 K_{42}^1 + h_3 K_{43}^1 + h_4 K_{44}^1 = l_4^1 \dots\dots (4)$$

$$h_2 K_{21}^2 + h_3 K_{22}^2 + h_3 K_{23}^2 = l_2^2 \dots\dots (5)$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & (K_{23}^1 + K_{13}^2) & K_{24}^1 & K_{12}^2 \\ K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{31}^2) & (K_{33}^1 + K_{33}^2) & K_{34}^1 & K_{32}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{22}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 \\ l_2^1 + l_1^2 \\ l_3^1 + l_3^2 \\ l_4^1 \\ l_2^2 \end{pmatrix} \quad (3-52)$$

Con la solución del sistema de ecuaciones 3-52, se obtiene la solución de la ecuación 3-1 por el método de elementos finitos para un problema estacionario.

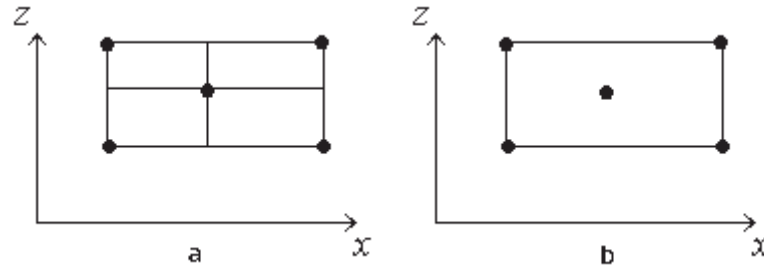
**Importante:** Una vez obtenidos los valores nodales (los valores de la función en los nodos), lo que procede es hacer una interpolación de dichos valores, y **no**

sustituirlos en la aproximación  $h(\vec{x}) \approx h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \phi_j^e(\vec{x})$  y luego graficar esta

función en cada elemento.

Este proceso lleva consigo que si se pretende hacer una buena aproximación por elementos finitos, primero se propone hacer un refinamiento de la malla que

consiste en hacer elementos más pequeños (*refinamiento h*) o poner más nodos (*refinamiento p*). Ver Figura 9.



*Figura 9.* a) Más elementos, b) Más nodos

El ensamblado de elementos es tedioso, porque las operaciones a ejecutar para llegar a la matriz ensamblada son demasiadas *i. e.* sacar la matriz para cada elemento, relacionar los nodos locales con los nodos globales, así como ubicar nodos globales en donde se da el balance de la variable secundaria, para luego sumar y resolver el sistema.

Un algoritmo para ensamblar directamente los elementos se describe a continuación:

La matriz  $K_{ij}$  global será de tamaño  $5 \times 5$  pues hay 5 nodos globales. Nótese que la matriz  $K_{ij}$  no lleva supra índice. Para ensamblar se utilizarán *direccionamientos*, es decir, la entrada de una matriz de algún elemento se enviará directamente a la matriz global.

Como matriz inicial  $K_{ij}$  se elige la matriz nula de orden  $5 \times 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-53)$$

Los nodos globales que le corresponden al elemento cuadrangular son:

1,2,3,4 y se harán corresponder con el vector  $CUA = \{1,2,3,4\}$ . La matriz  $K_{ij}^1$  ( $i, j = 1,2,3,4$ ) será direccionada de la siguiente forma,  $K(ii, jj) = K_{ij}^1$ , ( $i, j$  entradas de la matriz del elemento,  $ii, jj$  entradas de la matriz global). El direccionamiento será el siguiente:

$$K(CUA\{i\}, CUA\{j\}) = K_{ij}^1 \quad (3-54)$$

al correr los índices se obtiene

$$\begin{aligned} K(CUA\{1\}, CUA\{1\}) &= K_{11}^1 \\ K(CUA\{1\}, CUA\{2\}) &= K_{12}^1 \\ K(CUA\{1\}, CUA\{3\}) &= K_{13}^1 \\ &\vdots \\ K(CUA\{4\}, CUA\{4\}) &= K_{44}^1 \end{aligned} \quad (3-55)$$

se sustituyen los valores de CUA

$$K(1,1) = K_{11}^1$$

$$K(1,2) = K_{12}^1$$

$$K(1,3) = K_{13}^1$$

$$\vdots$$

$$K(4,4) = K_{44}^1$$

**(3-56)**

y la matriz global queda en la forma

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-57)$$

Los nodos globales que le corresponden a elemento triangular son: 2,5,3.

(nótese el orden de los nodos). Estos nodos se ubican en el vector  $TRI = \{2,5,3\}$ . La

matriz  $K_{ij}^2$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) será direccionada en la siguiente forma  $K(ii, jj) = K_{ij}^2$ ,

( $i, j$  entradas de la matriz del elemento,  $ii, jj$  entradas de la matriz global) que es:

$$K(TRI\{i\}, TRI\{j\}) = K_{ij}^2 \quad (3-58)$$

De nuevo se corren los índices

$$K(TRI\{1\}, TRI\{1\}) = K_{11}^2$$

$$K(TRI\{1\}, TRI\{2\}) = K_{12}^2$$

**(3-59)**

$$K(TRI\{1\}, TRI\{3\}) = K_{13}^2$$

$$\vdots$$

$$K(TRI\{3\}, TRI\{3\}) = K_{33}^2$$

y se sustituyen los valores de TRI

$$\begin{aligned}
 K(2,2) &= K_{11}^2 \\
 K(2,5) &= K_{12}^2 \\
 K(2,3) &= K_{13}^2 \\
 &\vdots \\
 K(3,3) &= K_{33}^2
 \end{aligned}
 \tag{3-60}$$

y la matriz global quedaría

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{12}^2 \\
 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 & 0 & K_{32}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{22}^2
 \end{pmatrix}
 \tag{3-61}$$

que al sumar las matrices de 3-57 y 3 - 61 se obtiene la misma forma que la ecuación 3-52.

Para los vectores el ensamblado es de la misma manera, también se pueden direccionar de la misma manera:

Se utiliza el vector  $CUA = \{1, 2, 3, 4\}$ , el vector  $l_i^1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) será direccionado a la forma  $l(ii) = l_i^1$ , ( $i$  entradas del vector local,  $ii$  entradas del vector global). El direccionamiento es:

$$l(CUA\{i\}) = l_i^1
 \tag{3-62}$$

de nuevo se corren los índices

$$l(CUA\{1\}) = l_1^1$$

$$l(CUA\{2\}) = l_2^1$$

$$l(CUA\{3\}) = l_3^1$$

$$l(CUA\{4\}) = l_4^1$$

**(3-63)**

se sustituyen los valores de CUA

$$l(1) = l_1^1$$

$$l(2) = l_2^1$$

$$l(3) = l_3^1$$

$$l(4) = l_4^1$$

**(3-64)**

y el vector global quedaría

$$\begin{pmatrix} l_1^1 \\ l_2^1 \\ l_3^1 \\ l_4^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(3-65)**

Se utiliza el vector  $TRI = \{2, 5, 3\}$ , el vector  $l_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) será direccionada a la forma  $l(ii, ) = l_i^2$ , ( $i$  entradas de el vector local,  $ii$  entradas de el vector global ) con direccionamiento:

$$l(TRI\{i\}) = l_i^2$$

**(3-66)**

Al correr los índices

$$l(TRI\{1\}) = l_1^2$$

$$l(TRI\{2\}) = l_2^2 \quad (3-67)$$

$$l(TRI\{3\}) = l_3^2$$

se sustituyen los valores de TRI

$$l(2) = l_1^2$$

$$l(5) = l_2^2 \quad (3-68)$$

$$l(3) = l_3^2$$

y la matriz global quedaría

$$\begin{pmatrix} 0 \\ l_1^2 \\ l_3^2 \\ 0 \\ l_2^2 \end{pmatrix} \quad (3-69)$$

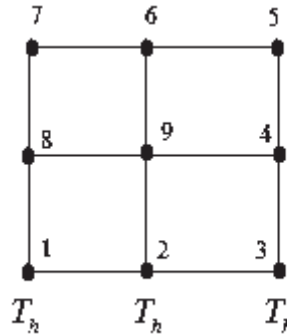
Al sumar 3-65 y 3-69 se obtiene la misma forma de la ecuación 3-52.

Todas las matrices y vectores, ya sean de problemas estacionarios, transientes, de ondas, que aparecen en elementos finitos se tratan de la misma manera.

### **3.7.1 Condiciones de frontera**

Suponga que se tiene una placa rectangular, y un lado de la placa descansa sobre un bloque de hielo que tiene una temperatura  $T_h$  y los demás lados están a la

intemperie y se desconoce la temperatura en esos lados. Ya se discretizó el dominio,  
(Ver figura 10),



*Figura 10.* Placa con condiciones de frontera.  $T_h$  en los nodos 1,2,3

y ya se ha ensamblado, resultando un sistema de 9 ecuaciones

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{11} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ k_{11} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ k_{11} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ k_{11} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\ k_{11} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ k_{11} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{11} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ k_{11} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix}$$

pero ya se conoce el valor de tres incógnitas  $T_1 = T_2 = T_3 = T_h$  y restan seis incógnitas por conocer. Entonces como ya se conoce el valor en los nodos 1, 2, 3 se eliminan los 3 primeros renglones porque representa la ecuación correspondiente a cada nodo 1, 2, 3 respectivamente, y también se eliminan las 3 primeras columnas correspondientes a los coeficientes del nodo 1, 2, 3 respectivamente, para obtener el sistema

$$\begin{pmatrix} k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\ k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix}$$

que esta listo para ser resuelto.

### 3.8 Problema Transiente

Considérese de nuevo el mismo problema pero ahora transiente, que se representa con la ecuación 3-1:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right] = F$$

**(3-70)**

$$-\left( -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h + \vec{\gamma} \right) = \vec{q}$$

La única variante para resolverla por elementos finitos, es considerar la aproximación  $h^e(\vec{x}, t)$  dependiente de las variables espaciales y temporales como se muestra a continuación:

$$h(\vec{x}, t) \approx h^e(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \varphi_j^e(\vec{x})$$

**(3-71)**

Se define el residuo como:

$$C \frac{\partial h^e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \equiv R$$

**(3-72)**

Entonces, como ya se ha supuesto que se dieron las funciones de interpolación, el proceso se enfocará a hacer  $R$  muy pequeño mediante, la elección adecuada de los parámetros  $h_j^e(t)$ .

Una opción de formalizar esta idea, es utilizar el método de los residuos ponderados, con el que  $R$  tiende a disminuir en el sentido de integrales con peso, esto es:

$$\int_{\Omega^e} w R d\Omega = 0 \quad (3-73)$$

o al sustituir la ecuación 3-72 en la ecuación 3-73

$$\int_{\Omega^e} w \left[ C \frac{\partial h^e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \right] d\Omega = 0 \quad (3-74)$$

donde  $w(\vec{x})$  es una función de peso.

Para cada elección de  $w(\vec{x})$  se encuentra una ecuación diferencial entre los parámetros  $h_j^e(t)$ , es decir, si se dan  $n$  funciones de peso  $w(\vec{x})$  independientes se puede encontrar un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales con  $n$  incógnitas.

Para obtener la forma débil se procede como sigue:

Se separa la ecuación 3-74:

$$\int_{\Omega^e} C \frac{\partial h^e}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} w \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e + \vec{\gamma} \right] - F \right] d\Omega = 0 \quad (3-75)$$

Nótese que la forma débil del segundo término de la ecuación 3-75 ya se ha desarrollado en la sección 3.4 y únicamente falta la forma débil del primer término, que entonces queda como

$$C \int_{\Omega^e} w \frac{\partial h^e}{\partial t} d\Omega \quad (3-76)$$

La forma débil de la ecuación 3-75 queda

$$\int_{\Omega^e} C \frac{\partial h^e}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \quad (3-77)$$

o de manera equivalente:

$$B(w, h^e) = l(w) \quad (3-78)$$

donde  $B(w, h^e)$  es una forma bilineal transiente y  $l(w)$  es una forma lineal, y están definidas como:

$$\begin{aligned} B(w, h^e) &= \int_{\Omega^e} C \frac{\partial h^e}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} h^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \\ l(w) &= \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \end{aligned} \quad (3-79)$$

La ecuación 3-78 modela el *problema variacional* asociado a la ecuación 3-1.

El modelo en elementos finito de la ecuación 3-77 se obtiene al sustituir la aproximación

$$h^e(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \phi_j^e(\vec{x}) \quad (3-81)$$

para obtener:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} C \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \phi_j^e(\vec{x}) \right)}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\bar{K}} \cdot \vec{\nabla} \left( \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \phi_j^e(\vec{x}) \right) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \\ = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} q_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \end{aligned} \quad (3-82)$$

como el gradiente es lineal

$$\vec{\nabla} (\alpha(t) A(\vec{x}) + \beta(t) B(\vec{x})) = \alpha(t) \vec{\nabla} A(\vec{x}) + \beta(t) \vec{\nabla} B(\vec{x}) \quad (3-83)$$

y el integrando es continuo, se reorganiza la ecuación 3-83 mediante las propiedades de integración y sumatorias para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{dh_j^e(t)}{dt} \int_{\Omega^e} C \phi_j^e(\vec{x}) w d\Omega + \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \phi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \\ = \int_{\Omega^e} F w d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n w ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \end{aligned} \quad (3-84)$$

luego se elige  $w = \phi_i^e(\vec{x})$  para obtener el modelo en elementos finitos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{dh_j^e(t)}{dt} \int_{\Omega^e} C \phi_j^e \phi_i^e d\Omega + \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \int_{\Omega^e} \vec{K} \cdot \vec{\nabla} \phi_j^e \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega = \\ = \int_{\Omega^e} F \phi_i^e d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n \phi_i^e ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega \end{aligned} \quad (3-85)$$

o en forma compacta:

$$\sum_{j=1}^n \frac{dh_j^e(t)}{dt} M_{ij}^e + \sum_{j=1}^n h_j^e K_{ij}^e = l_i^e \quad (3-86)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} C \phi_j^e(\vec{x}) \phi_i^e(\vec{x}) d\Omega \\ K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} K \nabla \phi_j^e(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_i^e d\Omega \end{aligned} \quad (3-87)$$

$$l_i^e = \int_{\Omega^e} F \phi_i^e d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} q_n \phi_i^e ds + \int_{\Omega^e} \vec{\gamma} \cdot \nabla \phi_i^e d\Omega$$

que en forma matricial, tiene la forma

$$[M^e] \cdot \left\{ \frac{dh^e}{dt} \right\} + [K^e] \cdot \{h^e\} = \{l^e\} \quad (3-88)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la ecuación

3-88 y por cuestiones prácticas, los métodos de solución más utilizados son los

pertenecientes a la familia  $\theta$ :

$$\{h\}_{n+1} = \{h\}_n + \Delta t \left[ (1-\theta) \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_n + \theta \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_{n+1} \right] \quad (3-89)$$

con  $0 \leq \theta \leq 1$

Para diferentes valores de  $\theta$ , las siguientes aproximaciones son las más comunes

a) Método de Euler hacia delante (condicional estable)

$$\theta = 0 \quad (3-90)$$

$$\{h\}_{n+1} = \{h\}_n + \Delta t \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_n$$

b) Método de Crack - Nicolson (incondicional estable)

$$\theta = \frac{1}{2} \quad (3-91)$$

$$\{h\}_{n+1} = \{h\}_n + \frac{\Delta t}{2} \left[ \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_n + \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_{n+1} \right]$$

c) Método de Galerkin (incondicional estable)

$$\theta = \frac{2}{3} \quad (3-92)$$

$$\{h\}_{n+1} = \{h\}_n + \frac{\Delta t}{3} \left[ \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_n + 2 \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_{n+1} \right]$$

d) Método de Euler hacia atrás (incondicional estable)

$$\theta = 1 \quad (3-93)$$

$$\{h\}_{n+1} = \{h\}_n + \Delta t \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_{n+1}$$

Más si se cuentan con otros algoritmos como los conocidos Runge – Kutta también son una muy buena opción para aplicarlos.

### 3.9 Problema Transiente en 2D

Se desarrolla la ecuación 3-85 en 2D para obtener:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \frac{dh_j^e(t)}{dt} \int_{\Omega^e} C \varphi_j^e \varphi_i^e d\Omega + \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \int_{\Omega^e} k_x \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} d\Omega + \\
 & + \sum_{j=1}^n h_j^e(t) \int_{\Omega^e} k_z \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} d\Omega = \quad (3-94) \\
 & = \int_{\Omega^e} F \varphi_i^e d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} q_n \varphi_i^e ds + \int_{\Omega^e} \gamma_x \cdot \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \gamma_z \cdot \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} d\Omega
 \end{aligned}$$

o en la forma compacta:

$$\sum_{j=1}^n \frac{dh_j^e}{dt} M_{ij}^e + \sum_{j=1}^n h_j^e K1_{ij}^e + \sum_{j=1}^n h_j^e K2_{ij}^e = F_i^e + q_i^e + d1_i^e + d2_i^e \quad (3-95)$$

donde:

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} C \varphi_j^e(\vec{x}) \varphi_i^e(\vec{x}) dx dz$$

$$K1_{ij}^e = \int_{\Omega^e} k_x \frac{\partial \varphi_j^e(\vec{x})}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e(\vec{x})}{\partial x} dx dz$$

$$K2_{ij}^e = \int_{\Omega^e} k_z \frac{\partial \varphi_j^e(\vec{x})}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e(\vec{x})}{\partial z} dx dz$$

$$d1_i^e = \int_{\Omega^e} \gamma_x \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} d\Omega$$

$$d2_i^e = \int_{\Omega^e} \gamma_z \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} d\Omega$$

$$q_i^e = \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n \varphi_i^e ds$$

$$F_i^e = \int_{\partial\Omega^e} F \varphi_i^e ds \tag{3-96}$$

En forma matricial la ecuación 3-95 se escribe como

$$\left[ M^e \right] \cdot \left\{ \frac{dh^e}{dt} \right\} + \left[ K1^e + K2^e \right] \cdot \{ h^e \} = \{ F^e \} + \{ q^e \} + \{ d1^e \} + \{ d2^e \} \tag{3-97}$$

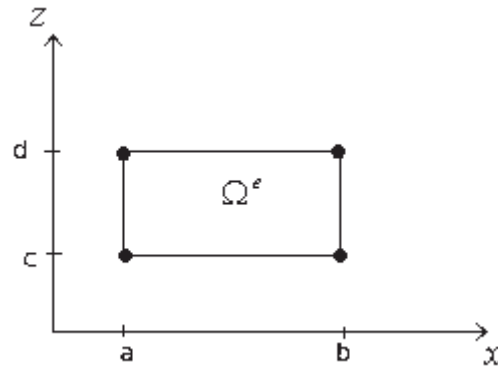
### 3.10 Integración numérica

La elección de polinomios para las funciones de interpolación  $\varphi_i^e(\vec{x})$  se basó en que:

- 1) La teoría de la interpolación puede ser usada para derivar las funciones de aproximación (la función  $h^e(\vec{x})$  debe pasar por los nodos) y
- 2) las integrales de polinomios pueden ser evaluadas exactamente por los métodos numéricos (cuadraturas de Gauss).

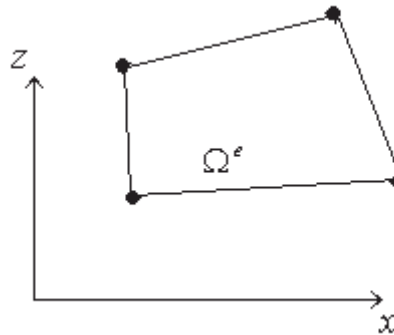
El punto (1) ya se trató en la sección 3.6.

A lo largo del escrito se ha hablado de integrales pero sin mencionar nada sobre la región a integrar, por ejemplo, sobre un rectángulo la integral sería de  $[a,b] \in x$  y  $[c,d] \in z$  como se muestra en la [Figura 11](#)



[Figura 11](#). Límites de integración

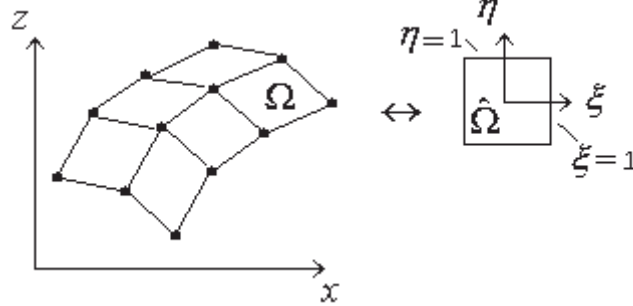
En otros elementos, como puede ser el cuadrilátero de [la Figura 12](#), no se tiene control sobre los límites de integración



[Figura 12](#). Un cuadrilátero como región de integración

En este caso, lo que se sugiere es transformar el elemento cuadrilátero  $\Omega^e$  en un elemento rectangular  $\hat{\Omega}$  mediante un mapeo lineal.

Lo que se hará será mapear toda la malla rectangular sobre un *elemento maestro* cuyas coordenadas serán  $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ , como se muestra en la [Figura 13](#)



*Figura 13.* Mapeo entre  $\Omega$  y  $\hat{\Omega}$

**Importante:** No se ha cambiado el dominio físicamente, lo que hace es manipular el dominio para facilitar la integración.

La transformación de coordenadas se basa en las ecuaciones:

$$x = \sum_{j=1}^4 x_j^e \phi_j^e(\xi, \eta) \quad (3-98)$$

$$z = \sum_{j=1}^4 z_j^e \phi_j^e(\xi, \eta)$$

donde  $\phi_j^e$  denotan las funciones de interpolación del elemento maestro, las que se obtienen como se indica en la sección 3.6 y que se deducen a continuación .

Para un elemento bilineal en 2D se tiene la aproximación

$$h^e(\xi, \eta) = \alpha_0 + \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \xi\eta\alpha_3 = (1, \xi, \eta, \xi\eta) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3-99)$$

Se calcula  $h^e(\xi, \eta)$  en los nodos, es decir, en los puntos  $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ .

$$\begin{aligned}
 h_1^e(-1,-1) &= \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = (1, -1, -1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 h_2^e(1,-1) &= \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = (1, 1, -1, -1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 h_3^e(1,1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 h_4^e(-1,1) &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = (1, -1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-100}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{3-101}$$

se aplica la matriz inversa para obtener el vector de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} \tag{3-102}$$

la ecuación 3-102 se sustituye en la ecuación 3-99

$$h^e(\xi, \eta) = \frac{(1, \xi, \eta, \xi\eta)}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ h_3^e \\ h_4^e \end{pmatrix} \quad (3-103)$$

Las funciones de interpolación en forma explícita en función de las variables independientes  $(\xi, \eta)$  para el elemento maestro son:

$$\begin{aligned} h^e(\xi, \eta) = & h_1^e \left( \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \right) + h_2^e \left( \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right) + \\ & + h_3^e \left( \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \right) + h_4^e \left( \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \right) \end{aligned} \quad (3-104)$$

$$h^e(\xi, \eta) = h_1^e \phi_1^e(\xi, \eta) + h_2^e \phi_2^e(\xi, \eta) + h_3^e \phi_3^e(\xi, \eta) + h_4^e \phi_4^e(\xi, \eta)$$

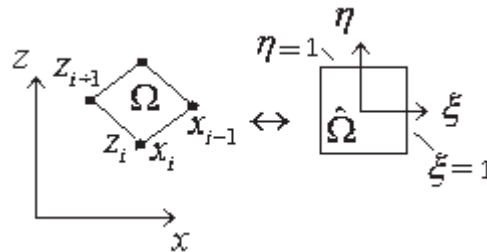
$$h^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 h_j^e \phi_j^e(\xi, \eta)$$

La relación entre las variables  $(\xi, \eta)$  y  $(x, z)$  son:

$$x = m_x \xi + b_x = (\xi \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} m_x \\ b_x \end{pmatrix} \quad (3-105)$$

$$z = m_z \eta + b_z = (\eta \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} m_z \\ b_z \end{pmatrix}$$

y de la [Figura 14](#)



*Figura 14.* Mapeo de coordenadas

Entonces

$$\begin{aligned}x_i &= m_x(-1) + b_x \\x_{i+1} &= m_x(1) + b_x\end{aligned}\tag{3-106}$$

$$z_i = m_z(-1) + b_z$$

$$z_{i+1} = m_z(1) + b_z$$

En forma matricial

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_x \\ b_x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_i \\ z_{i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_z \\ b_z \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3-107}$$

Se sustituyen las ecuaciones 3-107 en la ecuación 3-105

$$\begin{aligned}x &= m_x \xi + b_x = \frac{(\xi \quad 1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \xi + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \\ z &= m_z \eta + b_z = \frac{(\eta \quad 1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_i \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{z_{i+1} - z_i}{2} \eta + \frac{z_{i+1} + z_i}{2}\end{aligned}\tag{3-108}$$

de donde se determina la relación de las variables  $(\xi, \eta)$  y  $(x, z)$

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2x - (x_{i+1} + x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ \eta &= \frac{2z - (z_{i+1} + z_i)}{z_{i+1} - z_i}\end{aligned}\tag{3-109}$$

Ahora se transforman las integrales de la matriz  $K$ , así que sea la matriz

$$K1_{ij}^e = \int_{\Omega^e} k_x \frac{\partial \varphi_j^e(\vec{x})}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e(\vec{x})}{\partial x} dx dz \quad (3-110)$$

entonces el objetivo es relacionar las ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi_i^e(x, z)}{\partial x} \text{ con } \frac{\partial \varphi_i^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} \text{ y} \quad (3-111)$$

$$dx dz \text{ con } d\xi d\eta \quad (3-112)$$

Por regla de la cadena se tienen las ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi_i^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i^e(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i^e(\xi, \eta)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3-113)$$

$$\frac{\partial \varphi_j^e(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_j^e(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_j^e(\xi, \eta)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

que en forma matricial se escriben como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3-114)$$

De la ecuación 3-114 se define la matriz jacobiana (Ecuación 3-115), que en caso de ser no singular, es condición necesaria para relacionar las ecuaciones 3-111 y 3-112.

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3-115)$$

Se reacomoda el sistema de la ecuación 3-114 por medio de la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3-116)$$

La condición para que el jacobiano sea no singular es que su determinante sea diferente de cero:

$$|J| \equiv \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \neq 0 \quad (3-117)$$

De la ecuación 3-98 se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^4 x_j^e \phi_j^e(\xi, \eta) \right)}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^4 x_j^e \phi_j^e(\xi, \eta) \right)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 x_j^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^4 z_j^e \phi_j^e(\xi, \eta) \right)}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 z_j^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^4 z_j^e \phi_j^e(\xi, \eta) \right)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 z_j^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3-118)$$

Para obtener  $d\xi d\eta$  se recurre a las formas diferenciales, que tienen dos propiedades que se muestran en la ecuación 3-119:

$$\begin{aligned} dx dz &= dx \wedge dz = -dz \wedge dx = -dz dx \\ dz dz &= dz \wedge dz = 0 \end{aligned} \quad (3-119)$$

Las diferenciales totales de  $dx$  y de  $dz$  son

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad (3-120)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$$

De las propiedades de formas diferenciales se obtiene la relación entre los diferenciales  $d\xi d\eta$ ,  $dx dz$  y el jacobiano

$$\begin{aligned} dx dz &= dx \wedge dz = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \right) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \wedge \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \wedge \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \wedge \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \wedge \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \wedge \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \wedge \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} d\xi d\eta - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ dx dz &= |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3-121)$$

Finalmente la transformación de la integral

$$K1_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_x \frac{\partial \varphi_j^e(\bar{x})}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e(\bar{x})}{\partial x} |J| d\xi d\eta \quad (3-122)$$

donde

$$\frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left[ H1 \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \eta} - H2 \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \xi} \right] \quad (3-123)$$

con

$$H1 = \left( z_1^e \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \eta} + z_2^e \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \eta} + z_3^e \frac{\partial \phi_3^e}{\partial \eta} + z_4^e \frac{\partial \phi_4^e}{\partial \eta} \right) \quad (3-124)$$

$$H2 = \left( z_1^e \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} + z_2^e \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} + z_3^e \frac{\partial \phi_3^e}{\partial \xi} + z_4^e \frac{\partial \phi_4^e}{\partial \xi} \right)$$

De las cuadraturas de Gauss – Legendre, ver [9], [10]

$$K1_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N G(\xi_I, \eta_J) W_I W_J \quad (3-125)$$

con

$$G = \frac{k_x}{|J|} \left[ H1 \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \eta} - H2 \frac{\partial \phi_j^e}{\partial \xi} \right] \left[ H1 \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \eta} - H2 \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \right] \quad (3-126)$$

y las definiciones para  $H1, H2$ .

donde

| I,J | $\xi, \eta$           | $W$ |
|-----|-----------------------|-----|
| 1   | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | 1   |
| 2   | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1   |

es decir

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 F(\xi_I, \eta_J) W_I W_J = F(\xi_1, \eta_1) + F(\xi_1, \eta_2) + \\ &+ F(\xi_2, \eta_1) + F(\xi_2, \eta_2) = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \\ &+ F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned} \quad (3-127)$$

Las matrices restantes del modelo de elementos finitos (excepto para las integrales sobre la frontera) quedarían como se indican en las ecuaciones siguientes:

$$M_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C \phi_j^e(\bar{x}) \phi_i^e(\bar{x}) |J| d\xi d\eta \quad (3-128)$$

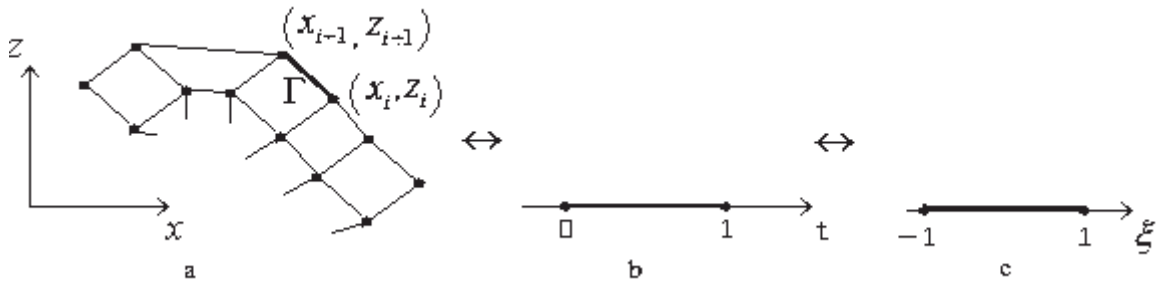
$$d1_i^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_x \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} |J| d\xi d\eta \quad (3-129)$$

$$d2_i^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_z \frac{\partial \phi_i^e}{\partial z} |J| d\xi d\eta \quad (3-130)$$

$$F_i^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F \phi_i^e |J| d\xi d\eta \quad (3-131)$$

Para las integrales sobre la frontera (las que contienen  $ds$ ), se procede de la siguiente manera:

Una parte de la frontera se puede ver como en la [Figura 15a](#),



[Figura 15.](#) Mapeo de la frontera

La frontera se representa con funciones paramétricas  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$  de una línea recta, (Ver [Figura 15b](#)):

$$x(t) = (x_{i+1} - x_i)t + x_i \quad (3-132)$$

$$z(t) = (z_{i+1} - z_i)t + z_i$$

Así que cualquier punto sobre la frontera se representa como

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + z(t)\hat{j} = \\ &= ((x_{i+1} - x_i)t + x_i)\hat{i} + ((z_{i+1} - z_i)t + z_i)\hat{j}\end{aligned}\tag{3-133}$$

Ahora se define la longitud de arco  $ds$  como

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt \tag{3-134}$$

donde

$$\vec{r}'(t) = (x_{i+1} - x_i)\hat{i} + (z_{i+1} - z_i)\hat{j} \tag{3-135}$$

sacando la norma

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} = l_e \tag{3-136}$$

Con estos nuevos resultados, la integral sobre el contorno se transforma en

$$\int_{\partial\Omega} Q(x, z) ds = \int_0^1 Q(t) l_e dt \tag{3-137}$$

Luego la transformación de  $t$  a  $\xi$  esta dada por, (Ver [Figura 15c](#)):

$$t = \sum_{j=1}^2 t_j^e \phi_j^e(\xi) \tag{3-138}$$

donde  $\phi_j^e$  denotan las funciones de interpolación del elemento maestro, que se

obtuvieron en la sección 4.6.

Para un elemento lineal en 1D se tiene la aproximación siguiente

$$h^e(\xi) = \alpha_0 + \xi\alpha_1 = (1, \xi) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{3-139}$$

se calculan los  $h^e(\xi)$  en los nodos, que para el ejemplo planteado, son los puntos

-1, 1.

$$h^e(-1) = h_1^e = \alpha_0 - \alpha_1 = (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3-140)$$

$$h^e(1) = h_2^e = \alpha_0 + \alpha_1 = (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3-141)$$

Al multiplicar por la matriz inversa ambos lados de la ecuación 3-141, se despeja el vector de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} \quad (3-142)$$

al sustituir la ecuación 3-142 en la ecuación 3-139, se obtienen las funciones de interpolación en forma explícita para el elemento maestro (Ver ecuaciones 3-143 y 3-144)

$$h^e(\xi, \eta) = \frac{(1, \xi)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{pmatrix} \quad (3-143)$$

$$h^e(\bar{x}) = h_1^e \frac{(1 - \xi)}{2} + h_2^e \frac{(1 + \xi)}{2}$$

$$h^e(\xi, \eta) = h_1^e \phi_1^e(\xi, \eta) + h_2^e \phi_2^e(\xi, \eta) \quad (3-144)$$

$$h^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^2 h_j^e \phi_j^e(\xi, \eta)$$

entonces

$$t(\xi) = t_1 \frac{(1-\xi)}{2} + t_2 \frac{(1+\xi)}{2} = \frac{(1+\xi)}{2} \quad (3-145)$$

pues como  $t \in [0,1]$  entonces  $t_1 = 0$  y  $t_2 = 1$

Luego derivando con respecto a  $t$ :

$$dt(\xi) = \frac{d\xi}{2} \quad (3-146)$$

y así

$$\int_{\partial\Omega} Q(x, z) ds = \int_0^1 Q(t) l_e dt = \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi) l_e}{2} d\xi \quad (3-147)$$

Con las cuadraturas de Gauss – Legendre se calcula la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi) l_e}{2} d\xi = \sum_{l=1}^2 G(\xi_l) W_l \quad (3-148)$$

con

$$G(\xi) = \frac{Q(\xi) l_e}{2} \quad (3-149)$$

Con base en este sustento teórico sobre los elementos finitos, en el capítulo cuatro de esta tesis, se describe el algoritmo para solucionar la ecuación 3-1, con las condiciones iniciales y de frontera, parte medular de este trabajo. También se describen los pormenores del programa DMEF desarrollado en el lenguaje de programación Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0, aplicado a la solución de problemas estacionarios y transientes sobre cualquier región convexa. Se discuten los resultados obtenidos con el algoritmo y se comparan con los presentados por el programa FEMLAB, de donde se concluye que el programa

DMEF desarrollado para solucionar la ecuación 3-1, con menos recursos que el programa FEMLAB, arroja datos aceptables para la ecuación diferencial.

# *Capítulo 4*

## **Programa DMEF**

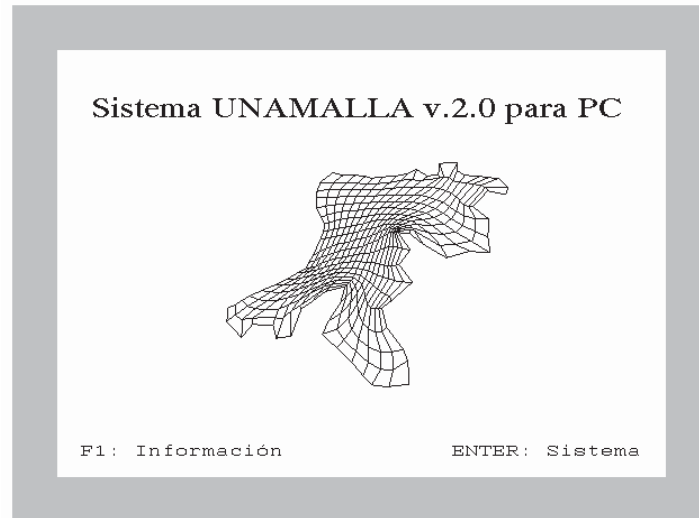
### ***4.1 Introducción***

En este capítulo se describe el algoritmo desarrollado y la programación en el lenguaje de programación Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0, para solucionar la ecuación diferencial 3-1, resultados de esta investigación desarrollada en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez” de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

### ***4.2 Sistema UNAMALLA v.2.0***

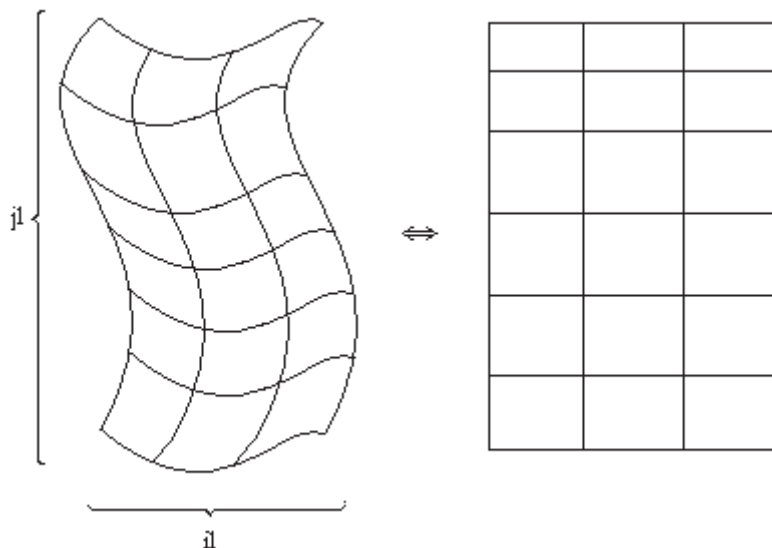
Como un paso inicial para solucionar la ecuación diferencial 3.1, se debe crear una malla, que consiste en dividir la región en subregiones. El programa de cómputo que se utilizó para crear esta malla de manera automática, se conoce como Sistema UNAMALLA v.2.0 , Ver [13], cuya portada principal se presenta en la [Figura 16](#). Con este software de acceso libre en Internet, se crea un

mallado sobre la región y como resultado de la operación, provee al usuario las coordenadas de ubicación de los nodos.



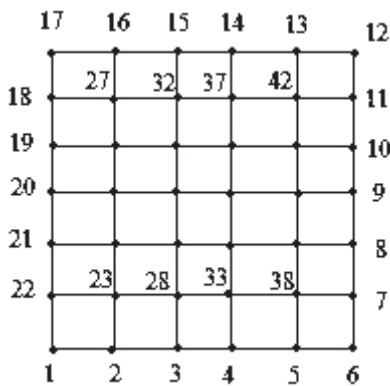
*Figura 16.* Sistema Unamalla

El sistema UNAMALLA mapea la región que se desea sobre un cuadro, es decir, la región se puede ver como un cuadro deformado: jalado, comprimido, hueco, etc. Ver [Figura 17](#)



*Figura 17.* Región mapeada

Si la región se observa como el cuadro a la derecha en la [Figura 17](#), el retorno de las coordenadas se da de la siguiente manera: parte inferior, parte derecha, parte de arriba, parte izquierda; luego desde el primer nodo que se encuentra en la izquierda y continua hacia arriba hasta el ultimo de la columna, luego se pasa a otra columna, y así hasta que llegar al ultimo nodo en la parte superior derecha, los nodos o las coordenadas son numeradas de esta forma, Ver [Figura 18](#).



[Figura 18](#). Numeración de las coordenadas

Es necesario calcular algunas cifras como el total de nodos, los nodos en la frontera y el número total de elementos. El sistema UNAMALLA para crear la malla requiere que el usuario introduzca el número de nodos en la parte inferior del cuadro, denotándolo por  $il$ , y el número de nodos en la parte derecha del cuadro, denotándolo por  $jl$  y forma la malla, Ver [Figura 17](#), entonces de manera automática se generan los datos del enmallado:

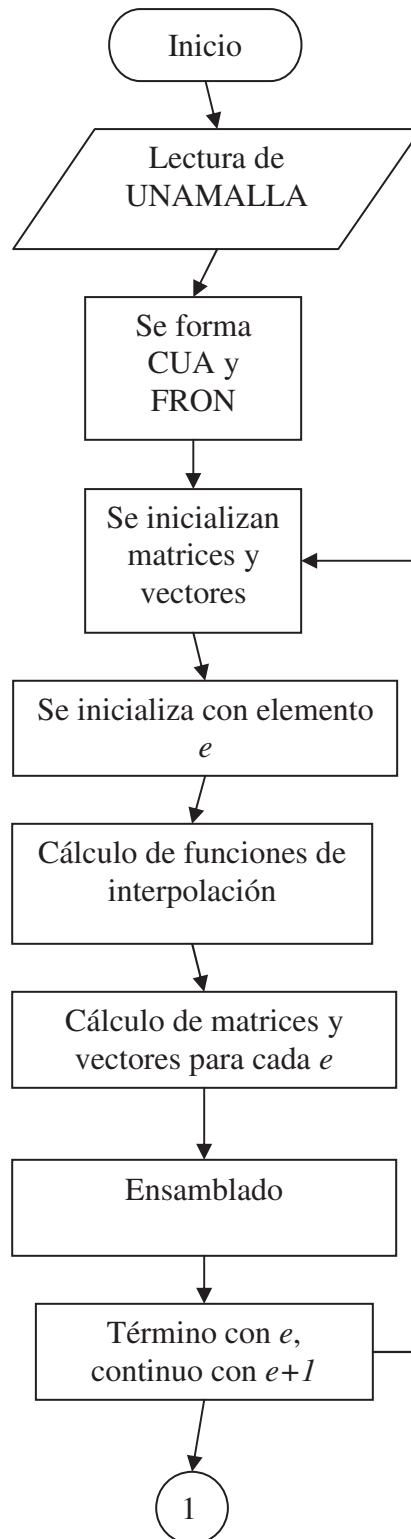
- El número total de nodos es  **$nm$  (nodos malla)**  $= il * jl$

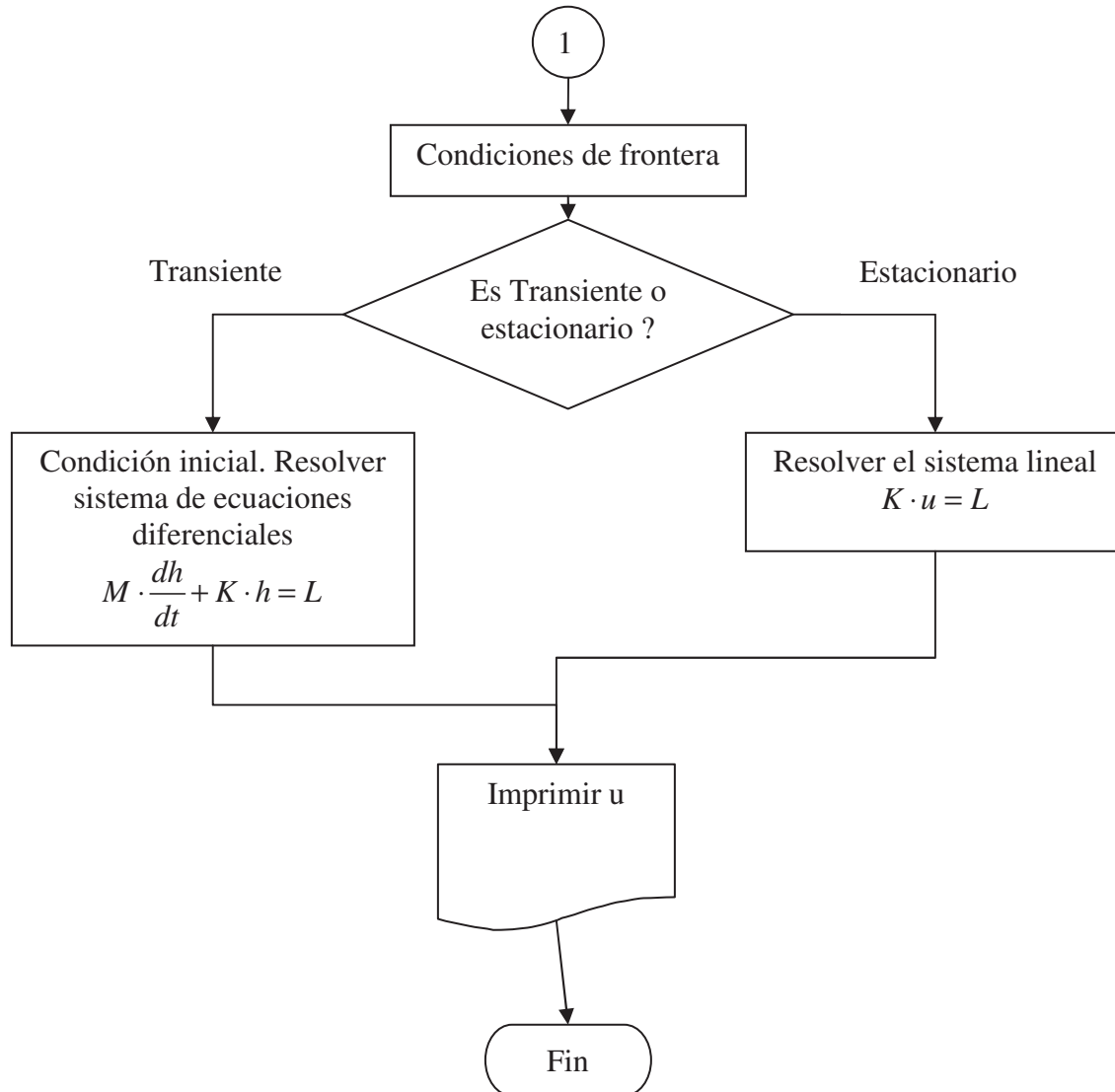
- El número de nodos en la frontera es ***pf*** (**p**untos **f**rontera) =  $i l + (j l - 1) + (i l - 1) + (j l - 2)$
- El número de elementos es ***ne*** (**n**úmero **e**lementos) =  $(i l - 1) * (j l - 1)$

Para el caso del enmallado de la Figura 18:  $i l = 6, j l = 7$ , entonces  $nm = 42$ ,  $pf = 22, ne = 30$ .

### 4.3 Descripción del programa

En la [Figura 19](#), se presenta, a grandes rasgos, el algoritmo sobre como trabaja el programa DMEF, en forma de diagrama de flujo.





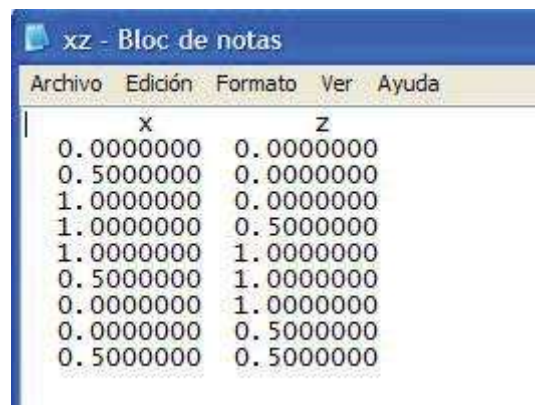
*Figura 19.* Diagrama de flujo del programa

El programa elaborado, eje central de esta propuesta, esta constituido por el programa principal y subprogramas. Los subprogramas son de tres clases:

- Funciones, que se refieren a las funciones a integrar, las transformaciones de coordenadas y los coeficientes de las ecuaciones diferenciales,
- Subrutinas propias de FORTRAN y,

- Subrutinas creadas especialmente para elementos finitos, que son aportación de esta investigación.

La subrutina para leer las coordenadas, inicia su función con la masa de datos que arroja UNAMALLA y la guarda en un archivo llamado *datos.txt*, para luego ubicarlos en los vectores  $x(i)$ ,  $z(i)$ , como se muestra en la [Figura 20](#), parte de los datos del programa que se muestran en la pantalla de la computadora.



The screenshot shows a Windows Notepad window with the title 'xz - Bloc de notas'. The menu bar includes 'Archivo', 'Edición', 'Formato', 'Ver', and 'Ayuda'. The text content is as follows:

| x         | z         |
|-----------|-----------|
| 0.0000000 | 0.0000000 |
| 0.5000000 | 0.0000000 |
| 1.0000000 | 0.0000000 |
| 1.0000000 | 0.5000000 |
| 1.0000000 | 1.0000000 |
| 0.5000000 | 1.0000000 |
| 0.0000000 | 1.0000000 |
| 0.0000000 | 0.5000000 |
| 0.5000000 | 0.5000000 |

*Figura 20.* Lectura de UNAMALLA

Parte esencial de los elementos finitos es tener numerados los elementos y sus correspondientes nodos, función que realiza la subrutina que se integra de los subprogramas CUA y FRON, donde “CUA” es de cuadro que representa al elemento y “FRON” es de la frontera del elemento.

La forma del arreglo CUA se muestra en la siguiente [Figura 21](#)

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |
| 15 | 22 | 26 | 30 | 9  |
| 16 | 21 | 25 | 29 | 8  |
| 17 | 20 | 24 | 28 | 7  |
| 18 | 19 | 23 | 27 | 6  |
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |

*Figura 21.* Inicio – Fin de la numeración de los elementos.

El primer elemento es el formado en la esquina inferior izquierda correspondiéndole los nodos 1, 2,  $(pf + 1)$ ,  $pf$ , la numeración de los nodos es en sentido contrario a las manecillas del reloj; el segundo elemento será el que está a la derecha, correspondiéndole los nodos 2, 3,  $(pf + 1) + (jl - 3) + 1$ ,  $(pf + 1)$  y se continua como se muestra en la [Figura 21](#).

La rutina FRON se realiza de la misma manera solo que únicamente toma los elementos de la frontera y los dos nodos de la frontera.

La [Figura 22](#) muestra los datos calculados por CUA para los nodos de la [Figura 18](#).

| CUA - Bloc de notas |         |         |           |
|---------------------|---------|---------|-----------|
| Archivo             | Edición | Formato | Ver Ayuda |
| Nodo_1              | Nodo_2  | Nodo_3  | Nodo_4    |
| 1                   | 2       | 17      | 16        |
| 2                   | 3       | 20      | 17        |
| 3                   | 4       | 23      | 20        |
| 4                   | 5       | 6       | 23        |
| 23                  | 6       | 7       | 24        |
| 24                  | 7       | 8       | 25        |
| 25                  | 8       | 9       | 10        |
| 22                  | 25      | 10      | 11        |
| 19                  | 22      | 11      | 12        |
| 14                  | 19      | 12      | 13        |
| 15                  | 18      | 19      | 14        |
| 16                  | 17      | 18      | 15        |
| 17                  | 20      | 21      | 18        |
| 18                  | 21      | 22      | 19        |
| 20                  | 23      | 24      | 21        |
| 21                  | 24      | 25      | 22        |

*Figura 22.* Arreglo CUA de una malla de 6 x 7

El primer renglón corresponde al elemento 1, el segundo al elemento 2 y así sucesivamente.

El arreglo CUA es la base de la programación, ya que mediante CUA se realizan los direccionamientos para ensamblar todos los elementos.

#### 4.4 Matrices y Vectores

El sistema a resolver tiene la forma general

$$M \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + K \cdot h = L \quad (5-1)$$

donde:

- $M$  y  $K$  son matrices
- $L$  es vector
- $h$  es el vector solución

Si el problema es estacionario no se calcula la matriz  $M$  y para un problema transiente si se calcula.

Los elementos de las matrices  $M$  y  $K$  son integrales de las funciones de interpolación o las derivadas de cada elemento finito, así el programa realiza un ciclo que va desde el elemento 1 al último elemento  $ne$ , calculando primero las funciones de interpolación para luego calcular todas las matrices y vectores (Ver Figura 19).

Las funciones de interpolación, por ejemplo  $\varphi_1 = b_{11} + xb_{21} + yb_{31} + xyb_{41}$  se incluyen en el programa como una función, cuya expresión se muestra en la [Figura 23](#).

```
Fi1=invm(1,1)+xt(zeta,eta)*invm(2,1)+zt(zeta,eta)*invm(3,1)+  
+ xt(zeta,eta)*zt(zeta,eta)*invm(4,1)
```

*Figura 23.* Función de interpolación

Donde:

- $invm$  es la inversa de la matriz de interpolación. Ver sección 3.6,
- $x, z$  dependen de  $zeta$  y  $eta$  por el cambio de coordenadas para utilizar las cuadraturas de Gauss para realizar la integración. Ver sección 3.10.

Una entrada típica de matriz,  $A_{12} = A_{21} = \int_{\Omega^e} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega^e$  en el programa se presenta en la [Figura 24](#).

```
call IM(F12,p)  
matA(CUA(e,1),CUA(e,2))=p  
matA(CUA(e,2),CUA(e,1))=p
```

*Figura 24.* Entrada de una matriz

donde la subrutina *IM* calcula la integral de  $F_{12} = F_{i1} * F_{i2}$  por medio de cuadraturas de Gauss devolviendo el valor en  $p$ , se calcula la entrada (1,2) de la matriz *matA* y por ser simétrica la matriz también se calcula la entrada (2,1). La matriz *matA* es una matriz temporal que es utilizada únicamente para realizar el ensamblado. Con la instrucción CUA(e,2) de la Figura 24, y de acuerdo con lo visto en la sección 3.7, se utiliza el arreglo CUA para dar direccionamientos a las entradas de la matriz.

El mecanismo de ensamblado se describe para la matriz A: Antes de entrar al ciclo donde se hacen los cálculos para cada elemento, la matriz *MA* es nula, como se explicó en la sección 3.7; Ya dentro del ciclo, se calcula la matriz *matA* que es la correspondiente al elemento  $e$  y en seguida es sumada a la matriz *MA*, como se muestra en la Figura 25. Una vez que la computadora termina de calcular todas las matrices y vectores para el elemento  $e$ , la matriz *matA* se vuelve a declarar nula para no queden valores del elemento ya calculado, proceso que se repite hasta cubrir todos los elementos del arreglo. Ver Figura 19.

```
*****  
      ENSAMBLADO DE MATRICES MA  
*****  
  
      do 151 ii=1,nm  
        do 161 jj=1,nm  
          MA(ii,jj)=MA(ii,jj)+matA(ii,jj)  
        continue  
      continue
```

*Figura 25.* Ensamblado

Todas las matrices y vectores son tratados de la misma manera, excepto el vector de flujos, que esta *limitado* a entrar únicamente por la parte superior del

cuadro. Este vector de flujos es calculado en otra rutina pero el mecanismo de ensamblado es el mismo. En la [Figura 26](#), se muestra el ciclo para calcular los flujos que entrarán desde el elemento que se encuentra en la parte superior derecha hasta el que se encuentra en la parte superior izquierda.

```
DO 453 e=(il-1)+(jl-2), (il-1)+(jl-2)+(il-2)
      !DESDE EL CUADRO QUE ESTÁ EN LA ESQUINA SUPERIOR DERECHA
      !HASTA EL QUE ESTÁ EN LA ESQUINA SUPERIOR IZQUIERDA
```

*Figura 26.* Flujos

Una vez calculadas las matrices y vectores que ya se han ensamblado lo que sigue es aplicar las condiciones de frontera.

#### 4.5 Condiciones de frontera

Las condiciones del tipo Neumann ya están tomadas en cuenta de manera implícita en la formulación de elementos finitos en el vector de flujos  $\vec{q}_n$ .

Lo que sigue es aplicar las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, es decir, eliminar renglones y columnas de las matrices ensambladas. (Ver Sección 3.7). Este proceso lo realiza el programa y para ello se pide al usuario el número total de las condiciones de frontera del tipo Dirichlet *cf*, (Ver [Figura 27](#)).

```
!CUANTAS CONDICIONES DE FRONTERA SON
cf=5
```

*Figura 27.* Número de las condiciones de frontera del tipo Dirichlet.

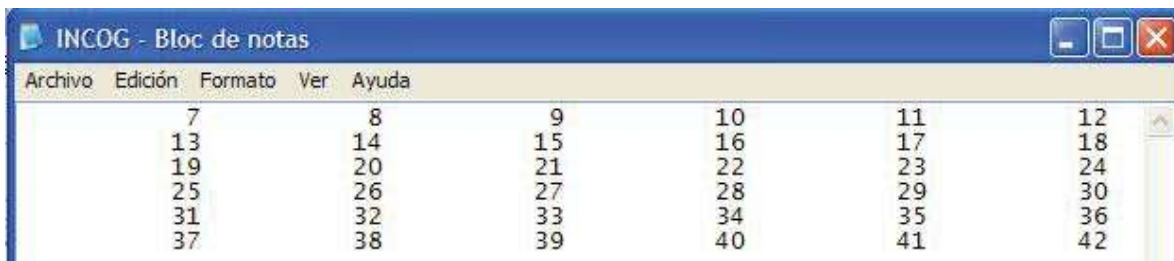
En un archivo de texto llamado *dirichlet.txt* son escritos por el usuario, los nodos donde existen condiciones de frontera, por ejemplo si en la [figura 18](#), en la

parte de abajo, la variable del problema  $u = -100$ , entonces en el archivo de texto se escriben los nodos como se muestra en la [Figura 28](#).



*Figura 28.* Nodos donde existen condiciones de frontera del tipo Dirichlet

Ahora mediante algunas operaciones que realiza el programa se obtiene el vector llamado *INCOG*, que contiene los nodos restantes que son incógnitas. Ver [figura 29](#).



*Figura 29.* Incógnitas del problema

Con el direccionamientos del vector *INCOG*, lo que se hace es eliminar los renglones y columnas donde se encuentran las condiciones de frontera del tipo Dirichlet. La rutina se presenta en la [Figura 30](#).

```
do 640 i=1,nm-cf
do 650 j=1,nm-cf
MMM(i,j)=MM(INCOG(i),INCOG(j))
continue
continue
```

*Figura 30.* Direccionamientos para eliminar renglones y columnas

Una vez aplicadas las condiciones de frontera, por medio de las subrutinas propias de Fortran ([Figura 31](#)) se resuelve el sistema de ecuaciones lineales para un problema estacionario.

La matriz MMM de la [figura 30](#), ya no tiene los renglones y columnas.

```
!RESUELVO EL SISTEMA LINEAL!  
CALL LSARG (dim,MMM,dim,BBB, 1, deltaH)
```

*Figura 31.* Subrutina de Fortran para resolver sistema lineal.

Para un problema transiente, la rutina de solución se muestra en la [Figura 32](#),

```
! SOLUCION DE SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
CALL IVMRK (IDO, dim, FCN, t, TEND, H1, HPRIME)
```

*Figura 32.* Subrutina Fortran para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

Finalmente se imprime la solución del problema estacionario o transiente, según sea el caso.

En la [Figura 33](#) se muestran los datos calculados y mostrado por el programa de computo para un problema estacionario.



The screenshot shows the output of a Fortran program for a stationary problem. The title is 'Solucion final problema estacionario'. Below it, there are three columns of data. The first column is labeled 'x', the second 'y', and the third 'z'. The data is organized into three rows of values, likely representing different spatial points or elements.

*Figura 33.* Impresión de resultados.

#### 4.6 Coeficientes de la ecuación diferencial

Otras funciones que se incluyen en el programa son los coeficientes de la ecuación diferencial a resolver (Ecuación 5-2) y que son  $C, \bar{K}, \bar{\gamma}, F, Q$ , En el

programa estos coeficientes se definen como las funciones FORTRAN (CXZ, KX, KZ, GAMAX, GAMAZ, FXZ y QXZ).

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \cdot \vec{\nabla} u + \vec{\gamma} \right] = F \quad (5-2)$$

$$-(-\vec{K} \cdot \vec{\nabla} u + \vec{\gamma}) = \vec{q}$$

En la [Figura 34](#) siguiente se define la función  $F = 35 * x * z$  en lenguaje FORTRAN.

```
function FXZ(zeta,eta)
real zeta,eta
EXTERNAL xt,zt
FXZ=35*xt(zeta,eta)*zt(zeta,eta)
return
end
```

*Figura 34.* Ejemplo de función

Donde la diferencia entre la función original y la escrita en el programa radica en que se tuvo que hacer un cambio de coordenadas para poder hacer la integración.

#### 4.7 Aplicación del programa

La ecuación diferencial que modela la infiltración de agua en suelos no saturados es la ecuación de Richards, ver sección 3.1:

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \cdot (\vec{\nabla} u + 1\hat{j}) \right] = 0 \quad (5-3)$$

$$-\left[ -\vec{K} \cdot (\vec{\nabla} u + 1\hat{j}) \right] = \vec{q}$$

donde:

$C$  es la capacidad específica de humedad

$\vec{\vec{K}}$  es el tensor de permeabilidad

$1\hat{j}$  indica la dirección  $z$ ,  $\vec{\gamma}$  únicamente tiene una componente.

#### 4.7.1 Coeficientes constantes

Considérese la ecuación de Richards lineal y con coeficientes constantes, es decir

$$C = 0.000546197$$

$$\vec{\vec{K}} = \begin{pmatrix} 0.00259406 & 0 \\ 0 & 0.00259406 \end{pmatrix}$$

La región a considerar será un cuadro con las siguientes condiciones iniciales y de frontera, Ver [Figura 35](#).

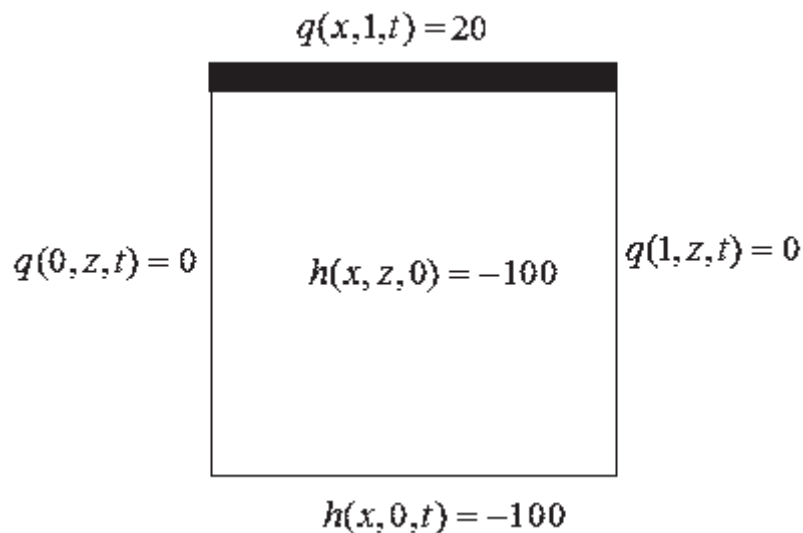
$$h(x, z, 0) = -100$$

$$h(x, 0, t) = -100$$

$$q(0, z, t) = 0$$

$$q(1, z, t) = 0$$

$$q(x, 1, t) = 20$$



*Figura 35.* Condiciones iniciales y de frontera

Los coeficientes son introducidos al programa como se muestra a continuación, Ver [Figura 36](#).

```
function CX(zeta,eta)    function CZ(zeta,eta)
real zeta,eta            real zeta,eta

EXTERNAL xt              EXTERNAL zt

CX=0.0025946             CZ=0.0025946 |

return                   return
end                       end

function DXZ(zeta,eta)   function GAMAZ(zeta,eta)
real zeta,eta            real zeta,eta

EXTERNAL xt,zt           EXTERNAL zt

DXZ=0.000546197 |       GAMAZ=-0.0025946

return                   return
end                       end

function QXZ(zeta,eta)
real zeta,eta

EXTERNAL xt,zt

QXZ=20.0

return
end

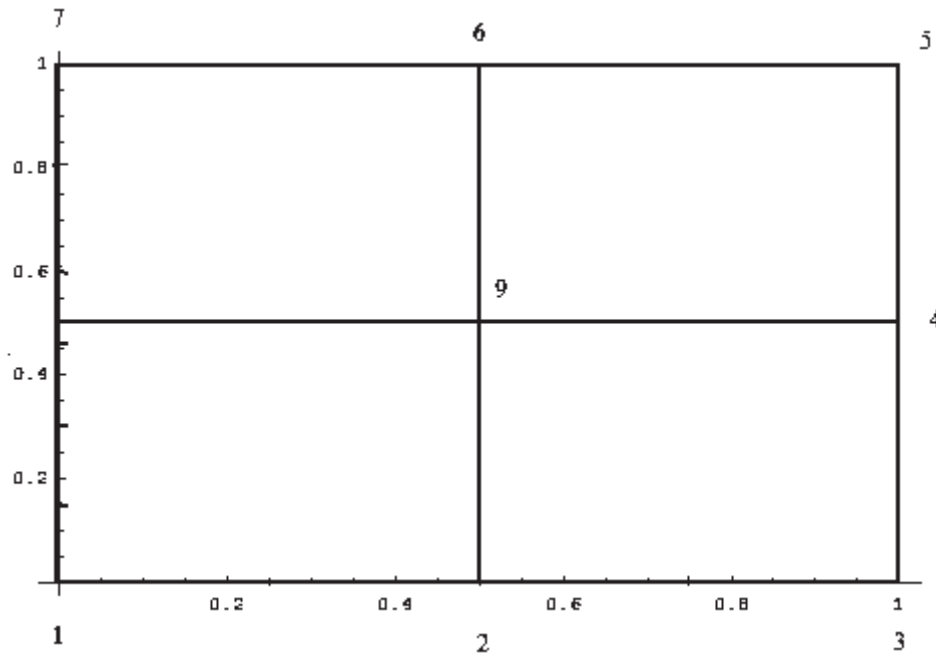
do 99 i=1,nm
H0(i)=-100.0
continue
```

*Figura 36.* Funciones FORTRAN

Se presenta a continuación el análisis para varias mallas.

### ***Malla 1***

Se plantea resolver la ecuación diferencial para la región mostrada en la [Figura 37](#) y que consiste en un cuadro de 1 x 1, discretizado en 4 elementos, 9 nodos.



*Figura 37.* Malla 1. 4 elementos. 9 Nodos

En las [Tablas 1 y 2](#) se presentan resultados arrojadas por el programa DMEF para el caso estacionario y transiente, respectivamente. También se hace una comparación con los datos obtenidos por el software FEMLAB en distintos puntos de la malla.

**Tabla 1**

*Problema estacionario:*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 3753.659 | 3753.658637        |
| (0.5, 1)   | 7607.317 | 7607.317274        |
| (1, 1)     | 7607.317 | 7607.317274        |

**Tabla 2**

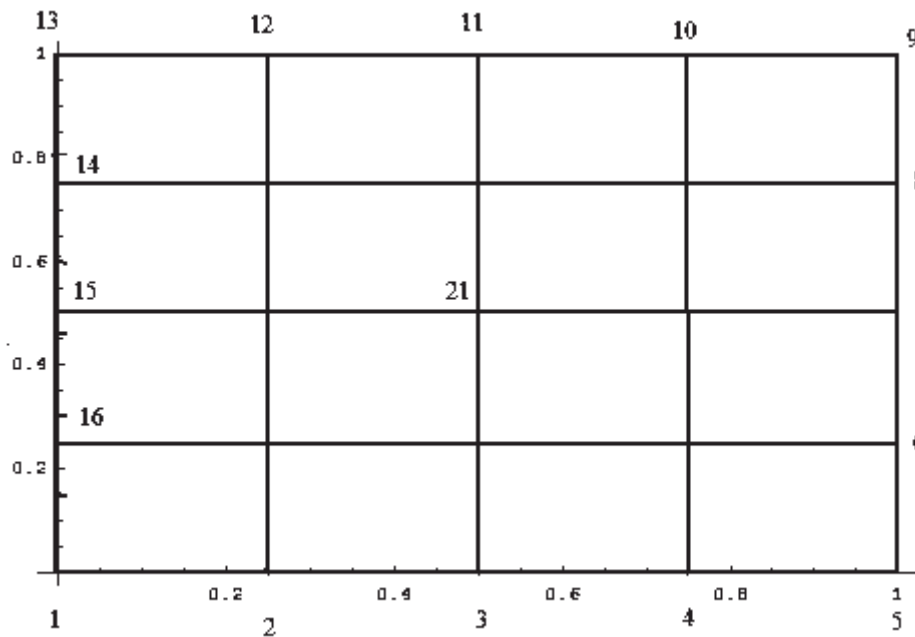
*Problema Transiente:*

| $t = 0.1$  |          |                    | $t = 1$    |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 2473.933 | 2385.367629        | (0.5, 0.5) | 3353.636 | 3753.416263        |
| (0.5, 1)   | 5756.339 | 5672.173114        | (0.5, 1)   | 7707.296 | 7606.974505,       |
| (1, 1)     | 5756.336 | 5672.172586        | (1, 1)     | 7707.296 | 7606.974505,       |

**Fe de Erratas:** al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

### Malla 2

A continuación se muestra la misma región con 16 elementos. Ver [Figura 38](#).



*Figura 38.* Malla 2. 16 elementos. 25 Nodos

En las [Tablas 3 y 4](#) se muestran los resultados para la malla de la [Figura 38](#):

### Tabla 3

*Problema estacionario:*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 3753.657 | 3753.658637        |
| (0.5, 1)   | 7607.315 | 7607.317274        |
| (1, 1)     | 7607.316 | 7607.317274        |

Tabla 4

Problema Transiente:

| t = 0.1    |          |                    | t = 1      |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 2461.795 | 2385.367629        | (0.5, 0.5) | 3553.993 | 3753.416263        |
| (0.5, 1)   | 5735.914 | 5672.173114        | (0.5, 1)   | 7707.791 | 7606.974505        |
| (1, 1)     | 5735.915 | 5672.172586        | (1, 1)     | 7707.792 | 7606.974505        |

**Fe de Erratas:** al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

### Malla 3

Aunque se han mejorado los resultados, se muestran a continuación resultados con una malla más refinada. Ver figura 39.

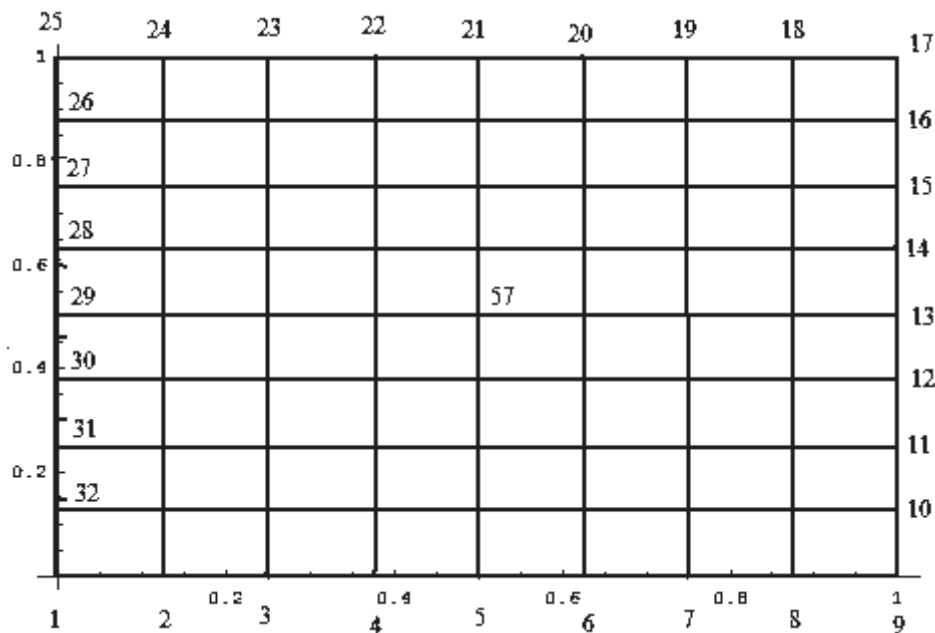


Figura 39. Malla 3. 64 elementos. 81 Nodos

En las Tablas 5 y 6 se muestran los resultados para la malla de la Figura 35:

Tabla 5

*Problema estacionario:*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 3753.657 | 3753.658637        |
| (0.5, 1)   | 7607.316 | 7607.317274        |
| (1, 1)     | 7607.316 | 7607.317274        |

Tabla 6

*Problema Transiente:*

| t = 0.1    |          |                    | t = 1      |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 2455.541 | 2385.367629        | (0.5, 0.5) | 3853.632 | 3753.416263        |
| (0.5, 1)   | 5734.297 | 5672.173114        | (0.5, 1)   | 7707.281 | 7606.974505        |
| (1, 1)     | 5734.302 | 5672.172586        | (1, 1)     | 7707.283 | 7606.974505        |

*Fe de Erratas:* al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

Se hace notar que con los 64 elementos la solución no es tan exacta más sin embargo para efectos prácticos es buena.

## Malla 4

En la Figura 40, se presenta una región irregular, se resuelve el mismo problema

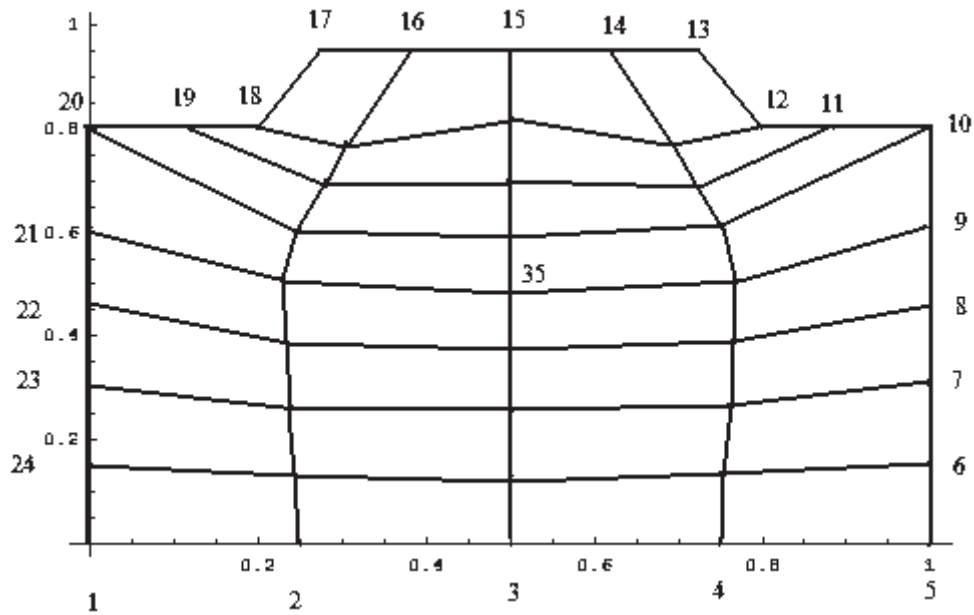


Figura 40. Malla 4. 32 elementos. 45 Nodos

Los resultados con el programa y con el software comercial se muestran en las Tablas 7 y 8.

Tabla 7

Problema estacionario

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1435.386 | 1514.951776        |
| (0.5, 1)   | 4021.080 | 4080.735817        |
| (0.2, 0.8) | 2416.604 | 2272.967158        |
| (0.8, 0.8) | 2429.620 | 2272.749105        |

Tabla 8

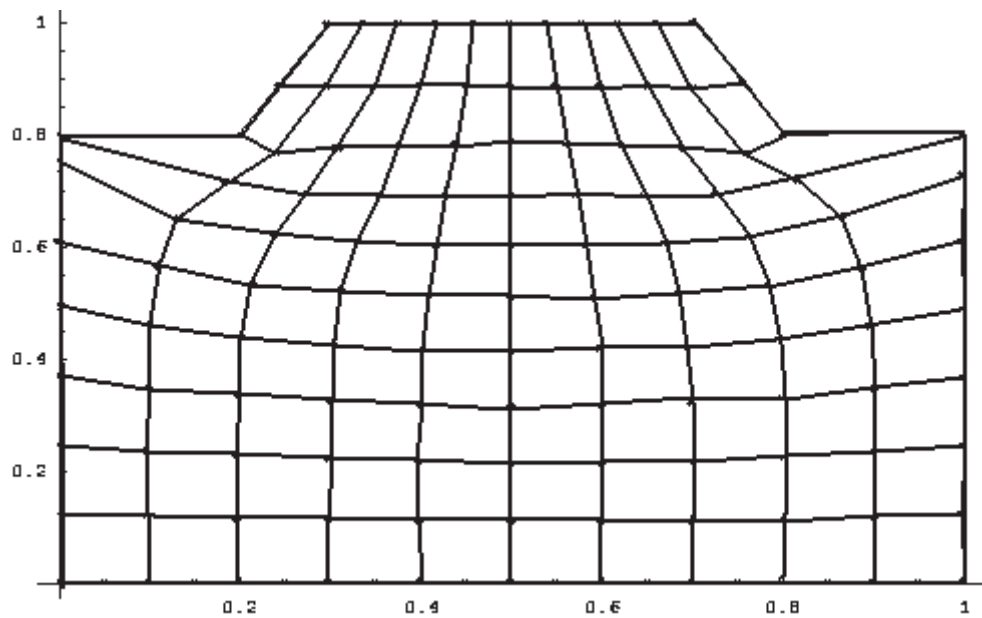
Problema Transiente

| t=0.1      |                                                                                     |                    | t=1        |                                                                                       |                    |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
|            | Programa                                                                            | Software Comercial |            | Programa                                                                              | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) |  | 1072.37279,        | (0.5, 0.5) |  | 1514.940783        |
| (0.5, 1)   |  | 3462.496138        | (0.5, 1)   |  | 4080.720464        |
| (0.2, 0.8) |  | 1712.493355        | (0.2, 0.8) |  | 2272.953238,       |
| (0.8, 0.8) |  | 1712.286662        | (0.8, 0.8) |  | 2272.735185        |

**Fe de Erratas:** al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

### Malla 5

En la [Figura 41](#), se presenta la misma región irregular, se resuelve el mismo problema, pero ahora con 100 elementos



*Figura 41.* Malla 5. 100 elementos. 121 Nodos

Los resultados con el programa y con el software comercial se muestran en las [Tablas 9 y 10](#).

**Tabla 9**

*Problema estacionario*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1550.599 | 1514.951776        |
| (0.5, 1)   | 4083.049 | 4080.735817.       |
| (0.2, 0.8) | 2332.351 | 2272.967158        |
| (0.8, 0.8) | 2316.511 | 2272.749105        |

Tabla 10

Problema Transiente

| t = 0.1    |          |                    | t = 1      |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 1177.559 | 1072.37279,        | (0.5, 0.5) | 1650.555 | 1514.940783        |
| (0.5, 1)   | 3205.727 | 3462.496138        | (0.5, 1)   | 4153.031 | 4080.720464        |
| (0.2, 0.8) | 1345.305 | 1712.493355        | (0.2, 0.8) | 1901.550 | 2272.953238,       |
| (0.8, 0.8) | 1343.014 | 1712.286662        | (0.8, 0.8) | 1999.522 | 2272.735185        |

**Fe de Erratas:** al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

El error entre los datos obtenidos con el programa y el software comercial es del 7%, para el problema estacionario y del transiente al tiempo 0.1, mientras que existe un error del 11% en el tiempo 1.0.

Se presume que el error es debido a que la región es irregular y principalmente a que el número de elementos seleccionados para hacer la comparación para la malla 4 es relativamente pequeño, comparado con los 885 elementos que el software comercial utiliza por un lado, mientras que por otro, se debe a que los polinomios de interpolación son de segundo grado.

#### 4.7.2 Coeficientes no constantes

En este apartado se describe cuando el coeficiente no es constante y la ecuación varía según la región, lo que tiene como consecuencia que el resultado numérico por el MEF, dependa fuertemente del número de nodos de la malla. Por ejemplo, se ha cambiado el flujo  $q = 20$  por  $q = 20 * x * y$ . Ver [Figura 42](#).

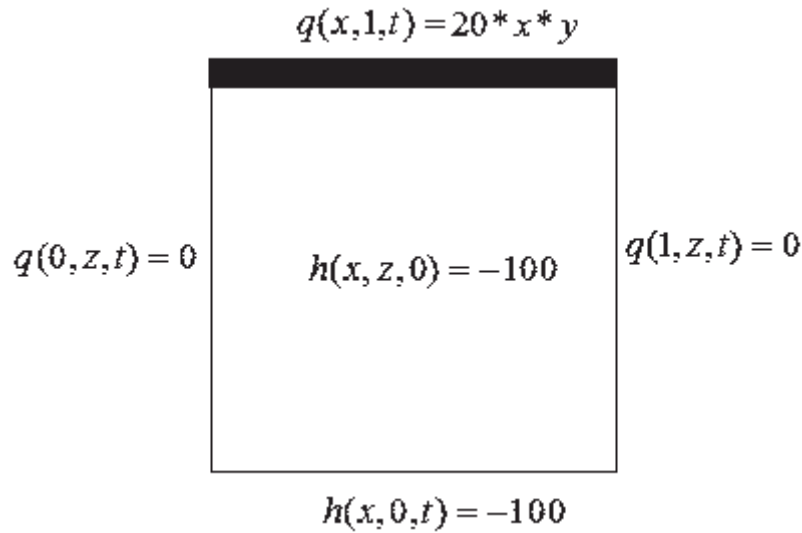


Figura 42. Condiciones iniciales y de frontera para un problema no lineal

### Malla 6

Considérese la región de la figura 42. Se calcula con las siguientes mallas rectangulares.

Con 4 elementos

Tabla 11

Problema estacionario

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1844.509 | 1826.575868        |
| (0.5, 1)   | 2789.609 | 3753.167131        |
| (1, 1)     | 3262.602 | 4795.386178        |

Tabla 12

Problema Transiente

| t = 0.1    |          |                    | t = 1      |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 912.0404 | 1142.566824        | (0.5, 0.5) | 1444.506 | 1826.545971        |
| (0.5, 1)   | 2136.169 | 2785.86174         | (0.5, 1)   | 2889.608 | 3753.124878        |
| (1, 1)     | 2509.000 | 3826.742249        | (1, 1)     | 3262.597 | 4795.345425        |

**Fe de Erratas:** al resultado del programa le falto sumarle -100 que es la condición de frontera.

Se nota que para este número (4 elementos) la solución numérica no es muy exacta.

Ahora se hacen los cálculos para 16 elementos y en las [Tablas 13 y 14](#) se muestran los resultados.

**Tabla 13**

*Problema estacionario*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1555.694 | 1826.575868        |
| (0.5, 1)   | 3271.555 | 3753.167131        |
| (1, 1)     | 4034.262 | 4795.386178        |

**Tabla 14**

*Problema Transiente*

| t = 0.1    |          |                    | t = 1      |          |                    |
|------------|----------|--------------------|------------|----------|--------------------|
|            | Programa | Software Comercial |            | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5) | 1061.615 | 1142.566824        | (0.5, 0.5) | 1655.723 | 1826.545971        |
| (0.5, 1)   | 2455.503 | 2785.86174         | (0.5, 1)   | 3371.429 | 3753.124878        |
| (1, 1)     | 3250.750 | 3826.742249        | (1, 1)     | 4134.305 | 4795.345425        |

Sin mucho esfuerzo, se nota la mejoría al incrementar el número de elementos. Ahora se realizan los cálculos para 64 elementos. Ver las [Tablas 15 y 16](#)

**Tabla 15**

*Problema estacionario*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1706.136 | 1826.575868        |
| (0.5, 1)   | 3512.273 | 3753.167131        |
| (1, 1)     | 4441.235 | 4795.386178        |
| (0, 1)     | 2553.305 | 2710.936543        |

Tabla 16

*Problema Transiente*

| <b>t = 0.1</b> |          |                    | <b>t = 1</b> |          |                    |
|----------------|----------|--------------------|--------------|----------|--------------------|
|                | Programa | Software Comercial |              | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5)     | 1137.571 | 1142.566824        | (0.5, 0.5)   | 1506.947 | 1826.545971        |
| (0.5, 1)       | 2666.763 | 2785.86174         | (0.5, 1)     | 3613.421 | 3753.124878        |
| (1, 1)         | 3594.490 | 3826.742249        | (1, 1)       | 4542.337 | 4795.345425        |
| (0, 1)         | 1739.043 | 1744.969137        | (0, 1)       | 2634.454 | 2710.892791        |

Ahora se realizan los cálculos para 100 elementos. Ver las [Tablas 17 y 18](#)

Tabla 17

*Problema estacionario*

|            | Programa | Software Comercial |
|------------|----------|--------------------|
| (0.5, 0.5) | 1730.224 | 1826.575868        |
| (0.5, 1)   | 3560.443 | 3753.167131        |
| (1, 1)     | 4517.633 | 4795.386178        |
| (0, 1)     | 2603.263 | 2710.936543        |

Tabla 18

*Problema Transiente*

| <b>t = 0.1</b> |          |                    | <b>t = 1</b> |          |                    |
|----------------|----------|--------------------|--------------|----------|--------------------|
|                | Programa | Software Comercial |              | Programa | Software Comercial |
| (0.5, 0.5)     | 1152.907 | 1142.566824        | (0.5, 0.5)   | 1529.310 | 1826.545971        |
| (0.5, 1)       | 2702.567 | 2785.86174         | (0.5, 1)     | 3661.717 | 3753.124878        |
| (1, 1)         | 3653.454 | 3826.742249        | (1, 1)       | 4616.342 | 4795.345425        |
| (0, 1)         | 1746.633 | 1744.969137        | (0, 1)       | 2701.976 | 2710.892791        |

Aunque mejoró la solución, el error aún es muy alto, alrededor del 5%, pero se vislumbra que hay convergencia, pero muy lenta, que se espera que acelere al aumentar el número de elementos. Así pues se observa de los problemas anteriores

que cuanto más complicado sea el problema ya sea por ser sobre una región irregular o con coeficientes no constantes, se necesita refinar más la malla para obtener una buena aproximación a la solución exacta.

## Conclusiones

- El objetivo planteado se cumplió, porque se desarrolló el programa alternativo en lenguaje de programación Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0 para solucionar numéricamente una ecuación diferencial soportado con el método del elemento finito.
- Se elaboró el programa de cómputo en lenguaje Fortran, que utiliza como subrutinas programas de libre acceso en Internet, programas del Fortran y los programas elaborados por el autor de esta tesis.
- El método de los elementos finitos es una opción viable para aproximar numéricamente una ecuación diferencial ordinaria o parcial, cuya solución no es posible obtener por métodos analíticos.
- Las herramientas de cómputo libre existente en Internet son una buena opción de que se dispone para apoyar el aprendizaje de matemáticas o en su caso como una

herramienta para solucionar problemas, por ejemplo, el programa UNAMALLA, ver [13] que facilitó la construcción de mallas para una región convexa.

### *Sugerencias*

- Dada la importancia del método de los elementos finitos para la solución de ecuaciones diferenciales, se propone integrar un curso corto, y donde con este trabajo de investigación, el Capítulo 3, el apéndice B y el C pueden ser tomados como una especie de tutorial introductorio para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales por el método de elementos finitos.
- La elaboración de material didáctico se debe promover como una parte integral de la formación de los alumnos, porque en ocasiones sucede, como este caso, que la biblioteca no cuenta con el libro o su nivel es muy avanzado para llevarlo como texto de licenciatura, por ejemplo el texto de Zienkiewicz (1982) que si no se tienen conocimientos previos sobre el MEF, los contenidos son inaccesibles o difíciles de entender.
- Si bien es cierto lo que dice Suárez (2004) que si sabes derivar, integrar, invertir matrices y resolver ecuaciones diferenciales, entonces desde el quinto semestre de licenciatura puedes modelar matemáticamente cualquier fenómeno de la naturaleza que pueda ser representado por medio de ecuaciones diferenciales, hace falta que los cursos de ecuaciones diferenciales y los relacionados con esta área se orienten a propiciar el modelaje de fenómenos físicos y naturales.
- Existe software en el mercado que soluciona ecuaciones diferenciales, pero para las instituciones es muy caro y en ocasiones no se apega a lo buscado en la solución de un problema particular, motivo por el que se desarrolló el programa DMEF, para resolver numéricamente la ecuación 3-1, pero se requiere hacerle

mejoras y correcciones al programa para que se desarrolle un potente software de elementos finitos.

## Problemas abiertos

En este apartado se plantean varios problemas de los conocidos como abiertos:

- Cuando se requiere de más precisión en los resultados, provoca que la región se subdivida en un refinamiento de la malla, lo que propicia un aumento considerable en la cantidad de cálculos a realizar, que para procesarlos requieren de una computadora con capacidades muy superiores a una PC comercial, porque la programación del algoritmo sería en paralelo o la construcción de “Clusters”.
- Encontrar en la naturaleza problemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales que se reduzcan a lineales es bastante complicado, así que lo complicado es desarrollar el MEF para problemas no lineales, (en el apéndice C desarrollo el MEF para un problema no lineal).

- La programación que se aprende en la universidad es restringida, así que se requiere capacitación para realizar programas en el ambiente Windows, es decir, con ventanas, con cuadros de dialogo, con un área donde se pueda visualizar la región a resolver y principalmente, plasmar en una gráfica los resultados.
- Por último, se deben perfeccionar los algoritmos de programación para optimizar el cálculo de datos.

## Bibliografía

- [1] Suárez, M. C. (2004). *Notas de elementos finitos*. (Cursos Especiales de matemáticas de la FCFM, 48 paginas)
- [2] Suárez, M. C. (2004). *Curso Taller del MEF I*. (Cursos Especiales de matemáticas de la FCFM, semestre Marzo – Agosto, 57 paginas)
- [3] Suárez, M. C. (2004 - 2005). *Curso Taller del MEF II*. (Cursos Especiales de matemáticas de la FCFM, semestre Agosto (2004) – Junio (2005), 57 paginas)
- [4] Suárez, M. C. (1981). *Introducción a los métodos variacionales*. (Notas del cursos de la FCFM, 33 paginas)
- [5] Reddy, J. N, Gartling, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluids Dynamics*. Second Edition. CRC PRESS.
- [6] Celia, Michael A., Philip Binning. *Two – phases unsaturated flow: two dimensional simulation an air phase velocities*. Water resources Research. Chapter two.1992
- [7] Zienkiewicz. O. C., *El método de los elementos finitos*. Edición en español. Editorial reverté, s. a. 1982.
- [8] Boyce. William. E., DiPrima. Richards. C., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cuarta edición . Editorial Limusa Welley.

- [9] McCracken. D. D., Dorn. W. S., *Métodos numéricos y programación FORTRAN*. Editorial Limusa.
- [10] Chapra. S.C., Canale. R. P., *Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales*. Editorial Mc. Graw Hill.
- [11] Arfken G., *Métodos matemáticos para físicos*. Editorial Diana México.
- [12] Smith. I. M, Griffiths. D. V., *Programming the finite element methods*. Editorial Wiley. Cuarta edición.
- [13] Sistema UNAMALLA, <http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla>.

## Apéndice A

Este teorema es importante para el trabajo porque es donde la parte matemática toma sentido, este teorema demuestra la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial por el MEF. La demostración se omite porque se requieren elementos de matemáticas que requieren de un nivel elevado de especialización en matemáticas avanzadas, pero su demostración se encuentra esbozada a grandes rasgos en Suárez (1981).

### Teorema de Minimización de funcionales

Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $a$  una forma bilineal sobre  $H \times H$ ,  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $a$  es continua, simétrica, definida positiva (es decir  $a(v, v) \geq 0$ ) y coerciva. Sea  $L$  una forma bilineal continua sobre  $H$  y  $K$  un conjunto convexo cerrado de  $H$ .

Se define la funcional:

$$f(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in H.$$

Bajo estas condiciones se tiene la equivalencia entre los dos problemas siguientes:

Minimizar la funcional  $f$

(1) --- Encontrar  $u \in K$  tal que:

$$f(u) \leq f(v), \forall v \in K$$

$\Leftrightarrow$

Minimizar la forma  $a(u, v-u) - L(v-u)$

(2)--- encontrar  $u \in K$  tal que

$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K$$

Además  $u$  existe y es el único elemento de  $K$  solución de los problemas (1) y (2).

## ***Apéndice B***

### ***Problema Transiente. Otra manera***

En el capítulo 3, se describe que para solucionar el problema transiente se siguen 4 pasos a saber:

1. Obtener la ecuación diferencial
2. Integrar para obtener la forma débil
3. Sustituir la aproximación para obtener el modelo en elementos finitos
4. Obtener un sistema de ecuaciones diferenciales

Esta técnica fue desarrollada por Celia y Binning (1992) en su trabajo de tesis y plantea cinco pasos para solucionarlo:

1. Obtener la ecuación diferencial
2. Aplicar el método de Euler hacia atrás únicamente para la parte temporal
3. Integrar para obtener la forma débil
4. Sustituir la aproximación para obtener el modelo en elementos finitos

## 5. Obtener un sistema algebraico

Se aplicará este método a la ecuación diferencial:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (h + z) \right] = 0 \quad (1)$$

Se aplica el método de Euler hacia atrás

$$h_{m+1} = h_m + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t}_{m+1} \quad (2)$$

para obtener

$$C \frac{h_{m+1} - h_m}{\Delta t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (h_{m+1} + z) \right] = 0 \quad (3)$$

si se define el incremento de la siguiente manera

$$\delta h_{m+1} = h_{m+1} - h_m \quad (4)$$

y se sustituye en la ecuación 3

$$C \frac{\delta h_{m+1}}{\Delta t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1} + h_m + z) \right] = 0 \quad (5)$$

se reordenan los términos

$$C \frac{\delta h_{m+1}}{\Delta t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}) \right] = -\vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (h_m + z) \right] \quad (6)$$

Ahora se define el residuo como:

$$C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}^e) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{K} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \right] \equiv R \quad (7)$$

con la aproximación

$$h(\vec{x}) \approx h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \quad (8)$$

Se hace notar que la aproximación de la ecuación 8 no depende del tiempo, porque ya se aplicó el método de Euler para la parte temporal (en el subíndice  $m$ ).

Ahora se tiende a disminuir  $R$  en sentido de integrales con peso, esto es:

$$\int_{\Omega^e} w R d\Omega = 0 \quad (9)$$

o sustituyendo la ecuación 7 en la ecuación 9

$$\int_{\Omega^e} w \left[ C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}^e) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \right] \right] d\Omega = 0 \quad (10)$$

donde  $w(\vec{x})$  es una función de peso.

Para cada elección de  $w(\vec{x})$  se obtiene una ecuación algebraica entre los parámetros  $\delta h_{m+1,j}^e$  y si se seleccionan  $n$  funciones de peso  $w(\vec{x})$  independientes entonces se puede encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales de  $n$  ecuaciones diferenciales con  $n$  incógnitas.

Para obtener la forma débil, se escribe la ecuación 10 como se indica en la ecuación 11:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w \left[ C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} \right] d\Omega + \int_{\Omega^e} w \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}^e) \right] \right] d\Omega = \\ = - \int_{\Omega^e} w \vec{\nabla} \cdot \left[ -\vec{\bar{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

Como el segundo miembro del primer término y el segundo término ya son conocidos, la forma débil de la ecuación 11 queda así:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \delta h_{m+1}^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \left[ -\vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}^e) \right] \cdot \vec{n} w ds = \\
 & = - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \left[ -\vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \right] \cdot \vec{n} w ds
 \end{aligned} \tag{12}$$

o

$$\int_{\Omega^e} C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \delta h_{m+1}^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{\vec{n},m}^e w ds \tag{13}$$

en donde se consideró que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega^e} \left[ -\vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (\delta h_{m+1}^e) \right] \cdot \vec{n} w ds \rightarrow 0 \\
 & \int_{\partial\Omega^e} \left[ -\vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \right] \cdot \vec{n} w ds = \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{\vec{n},m}^e w ds
 \end{aligned} \tag{14}$$

puesto que  $(\delta h_{m+1}^e) \rightarrow 0$  en la frontera, porque  $h^e$  cumple las condiciones de frontera,

o de manera equivalente:

$$B(w, \delta h^e) = l(w) \tag{15}$$

donde  $B(w, \delta h^e)$  es una forma bilineal y  $l(w)$  es una forma lineal, y están definidas como:

$$\begin{aligned}
 B(w, \delta h^e) &= \int_{\Omega^e} C \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \delta h_{m+1}^e \cdot \vec{\nabla} w d\Omega \\
 l(w) &= - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (h_m^e + z) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{\vec{n},m}^e w ds
 \end{aligned} \tag{16}$$

La ecuación 15 representa el llamado *problema variacional* asociado a la ecuación 1. Como la forma bilineal es simétrica,  $B(w, \delta h^e) = B(\delta h^e, w)$ , es posible construir el funcional

$$f(h^e) = \frac{1}{2} B(\delta h^e, \delta h^e) - l(\delta h^e) \quad (17)$$

con la que se establece una equivalencia, base para demostrar que la solución por elementos finitos existe y es única, de acuerdo al Teorema de Minimización de Funcionales. (Ver apéndice A).

El modelo de elementos finitos se obtiene al sustituir la aproximación

$$h^e(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \quad (18)$$

en la ecuación 13 para obtener:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} C \frac{\delta \left( \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \right)_{m+1}}{\Delta t} w d\Omega + \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \delta \left( \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \right)_{m+1} \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \left( \left( \sum_{j=1}^n h_j^e \varphi_j^e(\vec{x}) \right)_m + z \right) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{n,m}^e w ds \end{aligned} \quad (19)$$

se reorganiza la ecuación 19 para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\delta h_{j,m+1}^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} C \varphi_j^e(\vec{x}) w d\Omega + \sum_{j=1}^n \delta h_{j,m+1}^e \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega = \\ & = - \sum_{j=1}^n h_{j,m}^e \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (z) \cdot \vec{\nabla} w d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{n,m}^e w ds \end{aligned} \quad (20)$$

luego, se elige  $w = \varphi_i^e(\vec{x})$ , y al final se obtiene el modelo en elementos finitos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\delta h_{j,m+1}^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} C \varphi_j^e(\vec{x}) \varphi_i^e(\vec{x}) d\Omega + \sum_{j=1}^n \delta h_{j,m+1}^e \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e(\vec{x}) d\Omega = \\ & = - \sum_{j=1}^n h_{j,m}^e \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} \varphi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e(\vec{x}) d\Omega - \int_{\Omega^e} \vec{\vec{K}} \vec{\nabla} (z) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^e(\vec{x}) d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_{n,m}^e \varphi_i^e(\vec{x}) ds \end{aligned} \quad (21)$$

o en forma compacta

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta h_{j,m+1}^e}{\Delta t} M_{ij}^e + \sum_{j=1}^n \delta h_{j,m+1}^e K_{ij}^e = - \sum_{j=1}^n h_{j,m}^e K_{ij}^e + q_i^e - d_i^e \quad (22)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} C \phi_j^e(\vec{x}) \phi_i^e(\vec{x}) d\Omega \\ K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \vec{\bar{K}} \vec{\nabla} \phi_j^e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

$$d_i^e = \int_{\Omega^e} \vec{\bar{K}} \vec{\nabla}(\vec{z}) \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega$$

$$q_i^e = - \int_{\partial\Omega^e} \vec{q}_n \phi_i^e ds$$

Se hace notar que son las mismas matrices que se plantean en un problema transiente.

En forma matricial

$$\left[ M^e \right] \cdot \left\{ \frac{\delta h_{m+1}^e}{\Delta t} \right\} + \left[ K^e \right] \cdot \{ \delta h_{m+1}^e \} = - \left[ K^e \right] \cdot \{ h_m^e \} + \{ q^e \} - \{ d^e \} \quad (24)$$

se agrupan términos

$$\left( \left[ \frac{M^e}{\Delta t} \right] + \left[ K^e \right] \right) \cdot \{ \delta h_{m+1}^e \} = - \left[ K^e \right] \cdot \{ h_m^e \} + \{ q^e \} - \{ d^e \} \quad (25)$$

de donde resulta un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve para  $\delta h_{m+1}^e$ .

A partir de la condición inicial  $h_0^e = h^e(\vec{x}, t=0)$ , se empieza a resolver la

ecuación 25 para encontrar  $\delta h_1^e = h_1^e - h_0^e$ . Se despeja  $h_1^e$  para obtener

$h_1^e = \delta h_1^e + h_0^e$ , valor que se requiere para encontrar  $\delta h_2^e = h_2^e - h_1^e$ . Se despeja  $\delta h_2^e$

para obtener  $h_2^e = \delta h_2^e + h_1^e$ . Este proceso se continúa indefinidamente.

***Nota:** Aunque es más práctico, resolver un sistema algebraico que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, el inconveniente de este algoritmo es que para cada tiempo, el programa tendría que calcular todas las matrices y vectores para todos los elementos, situación que no sucede con lo planteado en el capítulo 3 de la tesis.*

## Apéndice C

Considérese el siguiente problema no lineal, i.e.  $K$ ,  $\theta$  no lineales

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot [\vec{K} \vec{\nabla} (h + z)] = 0 \quad (1)$$

La ecuación se desarrolla en el tiempo mediante el método de Euler implícito, que tiene la característica de ser más estable. Entonces para la parte temporal de la ecuación 1 se tiene:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = \dot{\theta}^{n+1} \quad (2)$$

Con el método de Picard se linealiza la ecuación y se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\theta^{n+1,m+1} - \theta^n}{\Delta t} - \nabla \cdot [K^{n+1,m} \nabla (h^{n+1,m+1} + z)] = 0 \quad (3)$$

En la ecuación anterior el superíndice  $n$  denota el nivel en el tiempo, y  $m$  el nivel en las iteraciones y  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  es el tamaño de paso en el tiempo. Para cada

paso del tiempo la solución es iterada hasta que el potencial de presión converja. Los coeficientes no lineales son evaluados con el potencial de presión del nivel de la iteración anterior  $h^n$ , con lo que se linealiza la ecuación. Puesto que las ecuaciones serán resueltas para el nuevo nivel de iteración, el contenido de humedad debe ser escrito en términos del potencial de presión al nuevo nivel de iteración, lo que se consigue con aplicación de la expansión en serie de Taylor, así se tiene:

$$\theta^{n+1,m+1} \approx \theta^{n+1,m} + \left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)^{n+1,m} (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) \quad (4)$$

La ecuación 4 se denotará a  $\left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)^{n+1,m}$  como la derivada del contenido de humedad, con respecto al potencial de presión ( $h$ ), como una función  $C = \left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)$ , conocida como la función de capacidad específica de la humedad.

Es útil rescribir las ecuaciones 3 y 4 en términos del incremento de la presión a cada nivel de iteración.

$$\delta h_{\alpha}^{n+1,m} = h_{\alpha}^{n+1,m+1} - h_{\alpha}^{n+1,m} \quad (5)$$

Con la expansión en serie de Taylor (Ecuación 4) y la ecuación 5, la ecuación 3 queda escrita como:

$$\frac{\theta^{n+1,m} + C^{n+1,m} \delta h^{n+1,m} - \theta^n}{\Delta t} - \nabla \cdot [K^{n+1,m} \nabla (\delta h^{n+1,m} + h^{n+1,m} + z)] = 0 \quad (6)$$

se reordena la ecuación

$$C^{n+1,m} \frac{\delta h^{n+1,m}}{\Delta t} - \nabla \cdot [K^{n+1,m} (\nabla \delta h^{n+1,m})] = -\frac{\theta^{n+1,m} - \theta^n}{\Delta t} + \nabla \cdot [K^{n+1,m} \nabla (h^{n+1,m} + z)] \quad (7)$$

En cada iteración  $m$ , las ecuaciones 7 son resueltas para el incremento de la presión durante la iteración  $\delta h^{n+1,m}$ , que se vuelve lineal en  $\delta h^{n+1,m}$ . La convergencia de las iteraciones se comprueba mediante dos pruebas: En la primera prueba, el incremento en la presión  $\delta h^{n+1,m}$  para cada paso en la iteración, tiende a cero, mientras que para la segunda, el lado derecho de la ecuación 7 tiende a cero.

Ahora, la ecuación 7 se multiplica por una función de peso  $w$  y se integra sobre todo el dominio, para encontrar la forma débil:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left[ (C^{n+1,m})^e \frac{(\delta h^{n+1,m})^e}{\Delta t} \right] w^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left[ (K^{n+1,m})^e \left( \nabla (\delta h^{n+1,m})^e \right) \right] w^e d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega^e} \frac{(\theta^{n+1,m})^e - (\theta^n)^e}{\Delta t} w^e d\Omega + \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left[ (K^{n+1,m})^e \nabla \left( (h^{n+1,m})^e + z \right) \right] w^e d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\Omega^e$  es la región que ocupa el elemento finito  $e$  y  $d\Omega = dx dz$ .

El proceso que sigue ya se ha realizado en el apartado 3.4 de esta tesis:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left[ \left( C^{n+1,m} \right)^e \frac{\left( \delta h^{n+1,m} \right)^e}{\Delta t} \right] w^e d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( K^{n+1,m} \right)^e \nabla \left( \delta h^{n+1,m} \right)^e \cdot \nabla w^e d\Omega = \\ & - \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\left( \theta^{n+1,m} \right)^e - \left( \theta^n \right)^e}{\Delta t} \right] w^e d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \left( \vec{q}^{n+1} \right)_{\vec{n}}^e w^e ds - \\ & - \int_{\Omega^e} \left( K^{n+1,m} \right)^e \nabla \left( \left( h^{n+1,m} \right)^e + z \right) \cdot \nabla w^e d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

donde el término  $\int_{\partial\Omega^e} (K^{n+1,m})^e \left( \nabla (\delta h^{n+1,m})^e \right) \cdot \vec{n} w^e ds$  es despreciado pues

$$\delta h^{n+1,m} \rightarrow 0 \text{ en cada iteraci3n.}$$

Las variables son aproximadas mediante las funciones de interpolación

$\varphi_j(x, z)$  y con los valores calculados en los nodos, que para este caso las

aproximaciones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h^e(x, z) &\approx \sum_{j=1}^N h_j^e \varphi_j^e(x, z) \\
 K^e(h) &\approx \sum_{j=1}^N K_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z) \\
 C^e(h) &\approx \sum_{j=1}^N C_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z) \\
 \theta^e(h) &\approx \sum_{j=1}^N \theta_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z) \\
 w_i^e(x, z) &= \varphi_i^e(x, z)
 \end{aligned} \tag{10}$$

**Importante:**

*Las aproximaciones para  $K^e, C^e, \theta^e$ , son funciones interpoladas de las funciones no lineales originales.*

Con estas aproximaciones, el sistema de ecuaciones en cada elemento es:

$$\begin{aligned}
 &\sum_k \sum_j \int_{\Omega^e} \left( (C_k \varphi_k)^{n+1, m} \right)^e \frac{\left( \delta(h_j \varphi_j)^{n+1, m} \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega + \\
 &+ \sum_k \sum_j \int_{\Omega^e} \left( (K_k \varphi_k)^{n+1, m} \right)^e \nabla \left( \delta(h_j \varphi_j)^{n+1, m} \right)^e \cdot \nabla \varphi_i^e d\Omega = \\
 &- \sum_j \int_{\Omega^e} \frac{\left( (\theta_j \varphi_j)^{n+1, m} \right)^e - \left( (\theta_j \varphi_j)^n \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega - \\
 &- \int_{\partial\Omega^e} \left( \vec{q}^{n+1} \right)_{\vec{n}}^e \varphi_i^e ds - \\
 &- \sum_k \sum_j \int_{\Omega^e} \left( (K_k \varphi_k)^{n+1, m} \right)^e \nabla \left( \left( (h_j \varphi_j)^{n+1, m} \right)^e + z \right) \cdot \nabla \varphi_i^e d\Omega
 \end{aligned} \tag{11}$$

o simplificada

$$\begin{aligned}
 & \sum_k \sum_j (C_k^{n+1,m})^e \frac{(\delta h_j^{n+1,m})^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \phi_k^e \phi_j^e \phi_i^e d\Omega + \\
 & + \sum_k \sum_j (K_k^{n+1,m})^e (\delta h_j^{n+1,m})^e \int_{\Omega^e} \phi_k^e \vec{\nabla} \phi_j^e \cdot \nabla \phi_i^e d\Omega = \\
 & - \sum_j \frac{(\theta_j^{n+1,m})^e - (\theta_j^n)^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \phi_j^e \phi_i^e d\Omega - \\
 & - \int_{\partial\Omega^e} (\vec{q}^{n+1})_{\vec{n}}^e \phi_i^e ds - \sum_k \sum_j (K_k^{n+1,m})^e (h_j^{n+1,m})^e \int_{\Omega^e} \phi_k^e \nabla \phi_j^e \cdot \nabla \phi_i^e d\Omega - \\
 & - \sum_k (K_k^{n+1,m})^e \int_{\Omega^e} \phi_k^e \nabla(z) \cdot \nabla \phi_i^e d\Omega
 \end{aligned} \tag{12}$$

En forma compacta, las ecuaciones se escriben como:

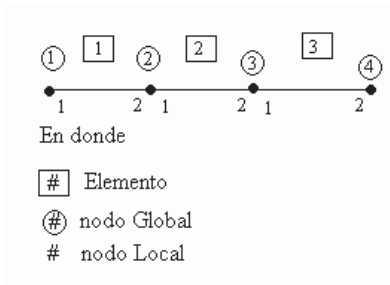
$$\begin{aligned}
 & \left( C_k^{n+1,m} \right)^e \frac{(\delta h_j^{n+1,m})^e}{\Delta t} A_{ijk} + \left( K_k^{n+1,m} \right)^e (\delta h_j^{n+1,m})^e B_{ijk} = \\
 & = - \frac{(\theta_j^{n+1,m})^e - (\theta_j^n)^e}{\Delta t} D_{ij} - \int_{\partial\Omega^e} (\vec{q}^{n+1})_{\vec{n}}^e \phi_i^e ds - \\
 & - \left( K_k^{n+1,m} \right)^e (h_j^{n+1,m})^e B_{ijk} - \left( K_k^{n+1,m} \right)^e E_{ik}
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde los índices repetidos indican suma

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^e &= \int_{\Omega_e} \phi_k^e \phi_j^e \phi_i^e d\Omega \\
 B_{ijk}^e &= \int_{\Omega_e} \phi_k^e \vec{\nabla} \phi_j^e \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega \\
 D_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \phi_j^e \phi_i^e d\Omega \\
 E_{ik}^e &= \int_{\Omega_e} \phi_k^e \vec{\nabla}(z) \cdot \vec{\nabla} \phi_i^e d\Omega
 \end{aligned} \tag{14}$$

**Observación:** Antes de continuar con la solución final, se va a considerar un problema en 1D y únicamente el primer término del lado izquierdo de la ecuación 13 en donde el término  $(C^{n+1,m})^e$  se considerará, por lo pronto, dentro de  $A_{ijk}^e$  y se omitirá por comodidad en la notación los superíndices  $n+1,m$ , y sólo se tomará en cuenta el superíndice  $e$ .

En la [Figura 43](#) se muestra el arreglo ya discretizado para una dimensión:



*Figura 43.* Elemento lineal

De la ecuación 13 ya modificada se tiene

$$\sum_k \sum_j \frac{\delta h_j^e}{\Delta t} A_{ijk}^e + B_i^e = Q_i^e \quad (14)$$

en donde  $B_i^e, Q_i^e$  son los términos sobrantes del lado izquierdo y del lado derecho, respectivamente. Luego de desarrollar las sumas de la ecuación 14 se tiene:

$$\frac{\delta h_1^e}{\Delta t} A_{i11}^e + \frac{\delta h_2^e}{\Delta t} A_{i21}^e + \frac{\delta h_1^e}{\Delta t} A_{i12}^e + \frac{\delta h_2^e}{\Delta t} A_{i22}^e + B_i^e = Q_i^e$$

reagrupando

$$\left( A_{i11}^e + A_{i12}^e \right) \frac{\delta h_1^e}{\Delta t} + \left( A_{i21}^e + A_{i22}^e \right) \frac{\delta h_2^e}{\Delta t} + B_i^e = Q_i^e \quad (15)$$

renombrando

$$M_{i1}^e \frac{\delta h_1^e}{\Delta t} + M_{i2}^e \frac{\delta h_2^e}{\Delta t} + B_i^e = Q_i^e$$

en donde

$$M_{i1}^e = A_{i11}^e + A_{i12}^e \quad (16)$$

$$M_{i2}^e = A_{i21}^e + A_{i22}^e$$

En la [Tabla 19](#) se presentan las ecuaciones para los elementos 1, 2 y 3.

[Tabla 19.](#)

Ecuaciones para los elementos 1, 2 y 2.

|     |                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| e=1 | $\frac{\delta h_1^1}{\Delta t} M_{11}^1 + \frac{\delta h_2^1}{\Delta t} M_{12}^1 + B_1^1 = Q_1^1, \rightarrow 1$ $\frac{\delta h_1^1}{\Delta t} M_{21}^1 + \frac{\delta h_2^1}{\Delta t} M_{22}^1 + B_2^1 = Q_2^1, \rightarrow 2$ |
| e=2 | $\frac{\delta h_1^2}{\Delta t} M_{11}^2 + \frac{\delta h_2^2}{\Delta t} M_{12}^2 + B_1^2 = Q_1^2, \rightarrow 2$ $\frac{\delta h_1^2}{\Delta t} M_{21}^2 + \frac{\delta h_2^2}{\Delta t} M_{22}^2 + B_2^2 = Q_2^2, \rightarrow 3$ |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| e=3 | $\frac{\delta h_1^3}{\Delta t} M_{11}^3 + \frac{\delta h_2^3}{\Delta t} M_{12}^3 + B_1^3 = Q_1^3, \quad \rightarrow 3$<br>$\frac{\delta h_1^3}{\Delta t} M_{21}^3 + \frac{\delta h_2^3}{\Delta t} M_{22}^3 + B_2^3 = Q_2^3, \quad \rightarrow 4$ |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Las relaciones entre los nodos locales y globales son:

$$\delta h_1^1 = \delta h_1$$

$$\delta h_2^1 = \delta h_1^2 = \delta h_2$$

$$\delta h_2^2 = \delta h_1^3 = \delta h_3$$

$$\delta h_2^3 = \delta h_4$$

y por la propiedad de continuidad (sumar los números iguales) se tiene el siguiente sistema

$$\frac{\delta h_1}{\Delta t} M_{11}^1 + \frac{\delta h_2}{\Delta t} M_{12}^1 + B_1^1 = Q_1^1$$

$$\frac{\delta h_1}{\Delta t} M_{21}^1 + \frac{\delta h_2}{\Delta t} (M_{22}^1 + M_{11}^2) + \frac{\delta h_3}{\Delta t} M_{12}^2 + (B_2^1 + B_1^2) = (Q_2^1 + Q_1^2)$$

$$\frac{\delta h_2}{\Delta t} M_{21}^2 + \frac{\delta h_3}{\Delta t} (M_{22}^2 + M_{11}^3) + \frac{\delta h_4}{\Delta t} M_{12}^3 + (B_2^2 + B_1^3) = (Q_2^2 + Q_1^3)$$

$$\frac{\delta h_3}{\Delta t} M_{21}^3 + \frac{\delta h_4}{\Delta t} M_{22}^3 + B_2^3 = Q_2^3$$

que escrito en notación matricial queda como

$$\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & (M_{22}^1 + M_{11}^2) & M_{12}^2 & 0 \\ 0 & M_{21}^2 & (M_{22}^2 + M_{11}^3) & M_{12}^3 \\ 0 & 0 & M_{21}^3 & M_{22}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta h_1}{\Delta t} \\ \frac{\delta h_2}{\Delta t} \\ \frac{\delta h_3}{\Delta t} \\ \frac{\delta h_4}{\Delta t} \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} B_1^1 \\ (B_2^1 + B_1^2) \\ (B_2^2 + B_1^3) \\ B_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^1 \\ (Q_2^1 + Q_1^2) \\ (Q_2^2 + Q_1^3) \\ Q_2^3 \end{pmatrix}$$

para el nodo  $i$  ( $i$  diferente de 1 y el ultimo nodo) el primer término quedaría así

$$M_{21}^{i-1} \frac{\delta h_{i-1}}{\Delta t} + (M_{22}^{i-1} + M_{11}^i) \frac{\delta h_i}{\Delta t} + M_{12}^i \frac{\delta h_{i+1}}{\Delta t}$$

Este término (temporal) depende de 3 nodos  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ , y a causa de esto

Boulotas, *et. al.*(1990), descubrieron que la solución oscilaba.

La solución de Boulotas *et. al.* (1990), se basa en un esquema de agrupamiento utilizado ya por Milly (), que se describe a continuación.

Las oscilaciones en la solución pueden ser reducidas eficazmente o llegar hasta eliminarlas, a través de un esquema de agrupamiento, sin embargo, para este sistema de ecuaciones no lineales, si bien las oscilaciones son reducidas, no necesariamente son eliminadas.

En el planteamiento de Milly, los términos temporales de la ecuación son

$$\sum_k \sum_j \int_{\Omega^e} \left( (C_k \varphi_k)^{n+1,m} \right)^e \frac{\left( \delta(h_j \varphi_j)^{n+1,m} \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega$$

$$\sum_j \int_{\Omega^e} \frac{\left( (\theta_j \varphi_j)^{n+1,m} \right)^e - \left( (\theta_j \varphi_j)^n \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega$$

(18)

Ahora de las aproximaciones

$$h^e(x, z) \approx \sum_{j=1}^N h_j^e \varphi_j^e(x, z)$$

$$K^e(h) \approx \sum_{j=1}^N K_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z)$$

$$C^e(h) \approx \sum_{j=1}^N C_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z)$$

$$\theta^e(h) \approx \sum_{j=1}^N \theta_j^e(h^e) \varphi_j^e(x, z)$$

$$w_i^e(x, z) = \varphi_i^e(x, z)$$

(19)

y de las integrales

$$\int_{\Omega^e} \left( C^{n+1,m} \right)^e \frac{\left( \delta h^{n+1,m} \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{\left( \theta^{n+1,m} \right)^e - \left( \theta^n \right)^e}{\Delta t} \varphi_i^e d\Omega$$

(20)

El esquema de agrupamiento significa sustituir las ecuaciones 20 por

$$\left( C_i^{n+1,m} \right)^e \frac{\left( \delta h_i^{n+1,m} \right)^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \varphi_i^e d\Omega$$

$$\frac{\left( \theta_i^{n+1,m} \right)^e - \left( \theta_i^n \right)^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \varphi_i^e d\Omega$$

(21)

Finalmente, **el sistema de ecuaciones para elementos finitos** para el sistema de ecuaciones 13 será

$$\begin{aligned}
 & \left( C_i^{n+1,m} \right)^e \frac{(\delta h_i^{n+1,m})^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \varphi_i^e d\Omega + \left( K_k^{n+1,m} \right)^e (\delta h_j^{n+1,m})^e B_{ijk} = \\
 & = - \frac{(\theta_i^{n+1,m})^e - (\theta_i^n)^e}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \varphi_i^e d\Omega - \\
 & - \int_{\partial\Omega^e} (\vec{q}^{n+1})_{\vec{n}}^e \varphi_i^e ds - \left( K_k^{n+1,m} \right)^e (h_j^{n+1,m})^e B_{ijk} - \left( K_k^{n+1,m} \right)^e E_{ik}
 \end{aligned} \tag{22}$$

## Apéndice D

### Ley de Darcy

#### *1 Introducción*

La simulación de un fenómeno físico es el proceso con el cual se predice el comportamiento de un sistema físico real, mediante el desarrollo de un *modelo* físico o matemático de tal sistema. Un modelo matemático de un sistema físico, como es el caso del presente trabajo, se puede representar por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con las condiciones iniciales y de frontera.

Una de las áreas de fenómenos físicos relacionados con los fluidos, es la agricultura. El proceso que ocurre en la agricultura es básicamente flujo de fluidos en suelos con saturación variable. La saturación variable es por definición un sistema multifásico, es decir, puede haber aire, agua o aceite, entre otros. Para propósitos de esta tesis se consideró un sistema con dos fases: Agua-Aire.

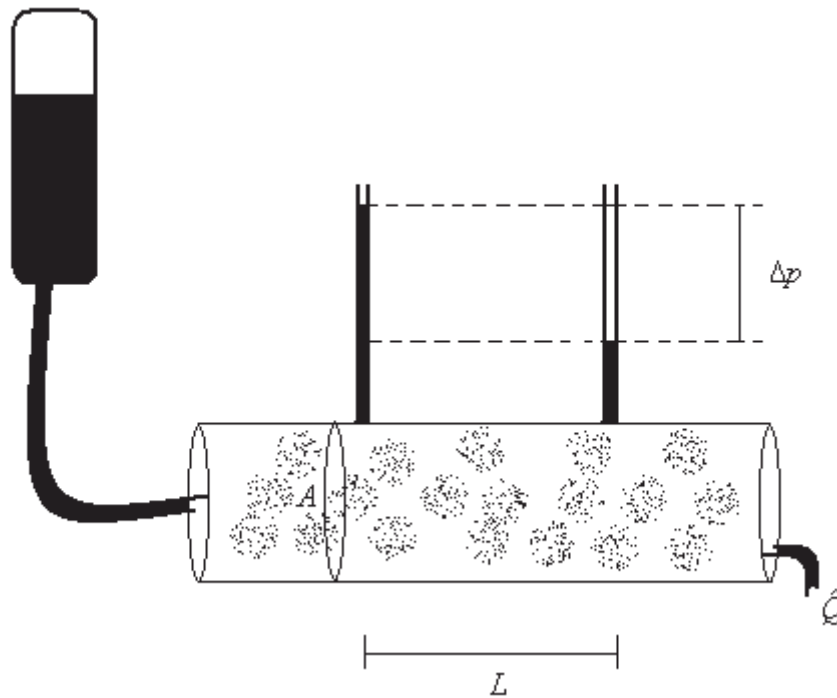
Otras variables que integraron las ecuaciones diferenciales del modelo matemático son la fuerza de gravedad, la capilaridad y la viscosidad, que deben ser válidas para cualquier dominio o región. Las ecuaciones diferenciales parciales se

obtuvieron mediante la combinación de la ley de Darcy para cada fase y la ecuación de balance de masa para cada fase.

## 2 Ley de Darcy

La ley de Darcy es una relación experimental entre el flujo del fluido y la presión. La ley de Darcy postula que para una fase en un sistema horizontal, la razón de flujo volumétrico  $\hat{Q}$ , a través de una porción de material poroso de longitud  $L$  [l], y una sección transversal de área  $A$  [l]<sup>2</sup>, [ver figura 44](#), es dada por:

$$\hat{Q} = \frac{KA}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \quad (1)$$



*Figura 44.* Experimento de Darcy

donde:

- $\Delta p$  es la presión aplicada a través del material  $[m][l]^{-1}[t]^{-2}$ ,

- $\mu$  es la viscosidad del fluido  $[m][l]^{-1}[t]^{-1}$  y,
- $K$  es la permeabilidad absoluta del medio  $[l]^2$ .

Para un flujo solo en una dirección (por ejemplo, sobre el eje  $x$ ), podemos escribir la ley de Darcy en la siguiente forma diferencial:

$$v = \frac{\hat{Q}}{A} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

donde:

- $v = \frac{\hat{Q}}{A}$  es la velocidad superficial del fluido  $[l][t]^{-1}$  y,
- $\frac{\partial p}{\partial x}$  es el gradiente de la presión en la dirección  $x$ .

Nótese que el signo de la ecuación 2, indica que la presión desciende en la dirección en la que el fluido avanza.

La forma diferencial de la ley de Darcy generalizada para tres dimensiones como sigue:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

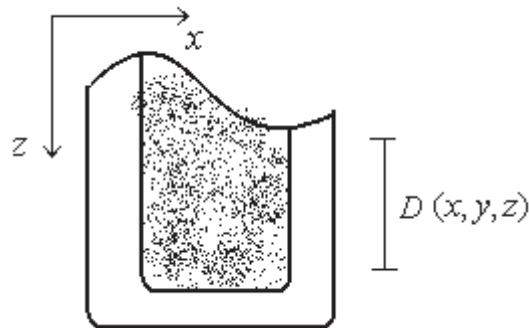
donde  $v_x, v_y, v_z$  son las componentes del vector velocidad,  $\vec{v}$ , sobre los ejes coordenados, o en forma más compacta:

$$v = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad (4)$$

donde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$  es el operador diferencial llamado gradiente

### 3 Ecuación General de Darcy

Las ecuaciones 3 no toman en cuenta la gravedad, debido a esto deben ser modificadas para incluirla en el análisis. Por generalidad, se eligió a la profundidad  $D$  (depth = profundidad del ingles) como una función arbitraria de las coordenadas  $(x, y, z)$ , ver figura 45.



*Figura 45.* profundidad

Para los propósitos de este trabajo se identificó a una de las coordenadas (frecuentemente  $z$ ) con la profundidad. Con base en esta consideración, la forma diferencial de la ley de Darcy se transforma en:

$$\begin{aligned}
 v_x &= -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \\
 v_y &= -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial D}{\partial y} \right) \\
 v_z &= -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial D}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

donde:

- $\rho$  es la densidad del fluido  $[m][l]^{-3}$  y
- $g$  es la aceleración debido a la gravedad  $[l][t]^{-2}$ .

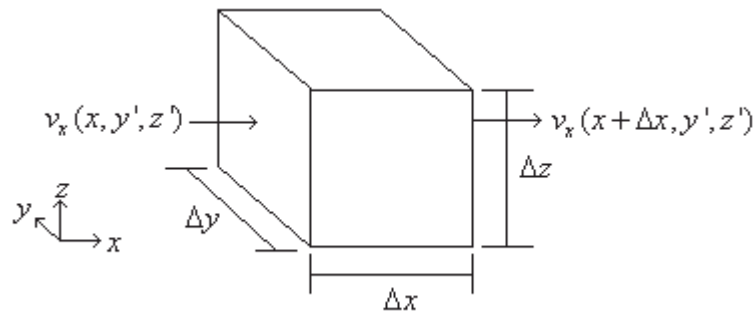
En forma compacta:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D)$$

#### 4 Ecuación de balance de masa

Sea el elemento diferencial de volumen, como la pequeña caja mostrada en la

Figura 46:



*Figura 46.* Elemento diferencial de volumen.

La caja tiene dimensiones:  $\Delta x$  de largo,  $\Delta y$  de ancho y  $\Delta z$  de altura. La razón a la cual el fluido de masa entra en la caja por la cara izquierda ( $\Delta y \Delta z$ ) es:

$$\rho(x, y', z') \cdot v_x(x, y', z') \cdot \Delta y \Delta z = (\rho v_x)_{x, y', z'} \Delta y \Delta z$$

La razón a la cual el fluido abandona la caja por el lado derecho (área  $\Delta y \Delta z$ ) es:

$$\rho(x + \Delta x, y', z') \cdot v_x(x + \Delta x, y', z') \cdot \Delta y \Delta z = (\rho v_x)_{x + \Delta x, y', z'} \Delta y \Delta z$$

Así mismo, la razón a la cual el fluido de masa entra en la caja por la cara de frente es:

$$\rho(x', y, z') \cdot v_y(x', y, z') \cdot \Delta x \Delta z = (\rho v_y)_{x', y, z'} \Delta x \Delta z$$

La razón a la cual el fluido abandona la caja por el lado de atrás es:

$$\rho(x', y + \Delta y, z') \cdot v_y(x', y + \Delta y, z') \cdot \Delta x \Delta z = (\rho v_y)_{x', y + \Delta y, z'} \Delta x \Delta z$$

La razón a la cual el fluido de masa entra en la caja por la cara de abajo es:

$$\rho(x', y', z) \cdot v_z(x', y', z) \cdot \Delta x \Delta y = (\rho v_z)_{x', y', z} \Delta x \Delta y$$

La razón a la cual el fluido abandona la caja por el lado de arriba es:

$$\rho(x', y' + \Delta y, z + \Delta z) \cdot v_z(x', y', z + \Delta z) \cdot \Delta x \Delta y = (\rho v_z)_{x', y', z + \Delta z} \Delta x \Delta y$$

El volumen de la caja es  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Entonces la razón en la cual el fluido de masa es inyectado en la caja es:

$$\bar{q} \Delta x \Delta y \Delta z$$

La masa contenida en la caja es  $\phi \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , entonces la razón de acumulación de la masa en la caja es:

$$\frac{\partial(\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ya que la masa se debe conservar, se tiene que:

$$[\text{razón de entrada}] - [\text{razón de salida}] + [\text{Razón inyectada}] = [\text{razón de acumulación}]$$

Así:

$$\begin{aligned} & (\rho v_x)_{x,y',z'} \Delta y \Delta z - (\rho v_x)_{x+\Delta x,y',z'} \Delta y \Delta z + (\rho v_y)_{x',y,z'} \Delta x \Delta z - \\ & - (\rho v_y)_{x',y+\Delta y,z'} \Delta x \Delta z + (\rho v_z)_{x',y',z} \Delta x \Delta y - (\rho v_z)_{x',y',z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \\ & + \bar{q} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial(\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Se reordena, se divide entre  $\Delta x \Delta y \Delta z$  y se calcula el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ , de donde se obtiene que:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (6)$$

En la ecuación 6, como  $\rho$  es una función escalar, entonces  $(\rho v_x), (\rho v_y), (\rho v_z)$  son las coordenadas de  $(\rho \vec{v})$ . En el lado izquierdo de la ecuación 6 tres de los términos se identifican con la divergencia de la función  $(\rho \vec{v})$ , con lo se reescribe en forma compacta como:

$$-\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (7)$$

Finalmente, se sustituye la ecuación 5 en ecuación 7 para obtener la ecuación general para una fase:

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right) + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (8)$$

## 5 Flujo en dos fases

El flujo en dos fases se considera como el flujo de dos fluidos inmiscibles (que no se pueden mezclar) dentro del medio poroso. A un fluido se le considerará más húmedo que el otro, denotándose con el subíndice  $w$  (wet, húmedo en ingles), mientras que el otro se denota con el subíndice  $nw$  (no wet, no húmedo).

Varios conceptos nuevos vienen de la mano del un proceso multifásico como son: saturación, presión capilar y permeabilidad relativa, los cuales se explican a continuación.

La saturación de una fase se define como la fracción de volumen vacío del medio poroso que es llenado por esa fase. Como las dos fases llenan el medio poroso se tiene que:

$$S_{nw} + S_w = 1 \quad (9)$$

Debido a la tensión superficial y a la curvatura de las interfases entre los dos fluidos dentro de pequeños poros, la presión fluido no húmedo es mayor que a presión del fluido húmedo. La diferencia entre estas dos presiones es llamada presión capilar  $p_c$  :

$$p_c = p_{nw} - p_w \quad (10)$$

Se acepta empíricamente que la presión capilar es una función única de la saturación:

$$p_c(S_w) = p_{nw} - p_w \quad (11)$$

## 6 Ley de Darcy (multifásica)

La ley de Darcy puede extenderse a flujos multifásicos postulando que cada velocidad del fluido o flujo en cada fase, es causada por la respectiva presión de cada fase, es decir:

$$\vec{v}_\alpha = -\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla D) \quad (12)$$

Donde:

- $\vec{v}_\alpha$  es la velocidad superficial del fluido de la fase  $\alpha$ ,
- $\mu_\alpha$  es la viscosidad de la fase  $\alpha$ ,
- $\rho_\alpha$  densidad de la fase  $\alpha$  y,
- $K_\alpha$  es la permeabilidad efectiva de la fase  $\alpha$ .

Debido a la simultaneidad de flujos de los 2 fluidos, entre ellos se desarrolla una especie de interferencia (formando una permeabilidad  $K$  del medio), estas permeabilidades efectivas  $K_\alpha$  son menores o iguales que una permeabilidad  $K$  del medio. Entonces las permeabilidades relativas  $k_{r\alpha}$ , pueden definirse como :

$$k_{r\alpha} = \frac{K_\alpha}{K} \leq 1 \quad (13)$$

Se acepta como empíricamente que estas permeabilidades relativas son funciones únicas de la saturación.

Con la ecuación 13, la ley de Darcy se reescribe:

$$\vec{v}_\alpha = -\frac{K k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla D) \quad (14)$$

## 7 Conservación para cada fase

Excepto para el término de acumulación (la derivada temporal), las mismas consideraciones hechas para una fase llevan a la ecuación de balance de masas (ecuación 7).

Para obtener el término de acumulación nótese que la masa total en un elemento diferencial (pequeña caja), es el producto del volumen del elemento diferencial, la densidad de cada fase, la porosidad y la saturación de cada fase. Así la razón de acumulación es:

$$\frac{\partial(\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} \quad (15)$$

Al sustituir la ecuación 15 en la ecuación 7 se obtiene:

$$-\nabla \cdot (\rho_{\alpha} \bar{v}_{\alpha}) + q_{\alpha} = \frac{\partial(\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} \quad (16)$$

## 8 Ecuación diferencial

De la combinación de las ecuaciones ec. 3-14 y ec. 3-16 se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan de flujo de fluido en un medio poroso multifásico:

$$-\nabla \cdot \left[ -\rho_{\alpha} \frac{K k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} (\nabla p_{\alpha} - \rho_{\alpha} g \nabla D) \right] + q_{\alpha} = \frac{\partial(\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} \quad (17)$$

Las ecuaciones 17 son bastante generales en sus aplicaciones, sin embargo, para cuestiones hidrológicas es necesario hacer algunas acotaciones.

Se define la permeabilidad de saturación  $k_{s\alpha}$  como:

$$k_{s\alpha} = \frac{K \rho_{0w} g}{\mu_{\alpha}} \quad (18)$$

donde:

- $\rho_{0w}$  es la densidad del agua a condiciones normales de temperatura y presión  $[m][l]^{-3}$ ,
- $g$  magnitud debida a la fuerza de gravedad  $[l][t]^{-2}$
- $k_{s\alpha}$  permeabilidad de saturación  $[l][t]$
- $\mu_{\alpha}$  es la viscosidad de la fase  $\alpha$   $[m][l]^{-1}[t]^{-1}$ .

Al sustituir la ec. 18 en la ecuación ec. 17 se obtiene:

$$-\nabla \cdot \left[ -\rho_{\alpha} \frac{k_{s\alpha} k_{r\alpha}}{\rho_{0w} g} (\nabla p_{\alpha} - \rho_{\alpha} g \nabla D) \right] + q_{\alpha} = \frac{\partial(\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} \quad (19)$$

Ahora, si se define  $h_{\alpha}$  como la altura de agua equivalente a la presión  $p_{\alpha}$ , es

decir

$$h_{\alpha} = \frac{p_{\alpha}}{\rho_{ow} g} \quad (20)$$

y se sustituye en la ec. 19, se obtiene la ecuación:

$$-\nabla \cdot \left[ -\rho_{\alpha} k_{s\alpha} k_{r\alpha} \left( \nabla h_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_{0w}} \nabla D \right) \right] + q_{\alpha} = \frac{\partial(\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} \quad (21)$$

Se define además el contenido de fluido volumétrico de la fase  $\alpha$  como  $\theta_{\alpha}$ :

$$\theta_{\alpha} = \phi S_{\alpha} \quad (22)$$

entonces finalmente se llega a la ecuación:

$$-\nabla \cdot \left[ -\rho_{\alpha} k_{s\alpha} k_{r\alpha} \left( \nabla h_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_{0w}} \nabla D \right) \right] + q_{\alpha} = \frac{\partial(\rho_{\alpha} \theta_{\alpha})}{\partial t} \quad (23)$$

Es objetivo de este trabajo de tesis resolver la ecuación 23 mediante el método de elementos finitos, para una fase (agua), incomprensible, es decir, densidad constante, en un medio isotrópico (permeabilidades constantes) y no flujos internos, entonces:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} + \nabla \cdot [-K (\nabla h_w - \nabla D)] = 0 \quad (24)$$

El sistema de referencia será  $(x, z)$ , y será positivo hacia la derecha y abajo, denotando la profundidad  $D = z$ , por lo que la ecuación 24 se simplifica a:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} + \nabla \cdot [-K \nabla (h_w + z)] = 0 \quad (25)$$

Finalmente:

$$C_w \frac{\partial h_w}{\partial t} + \nabla \cdot [-K \nabla (h_w + z)] = 0 \quad (26)$$

con  $C_w = \frac{\partial \theta_w}{\partial h_w}$  capacidad específica de humedad.

La ecuación 26 es la que se solucionará numéricamente, con el algoritmo computacional diseñado especialmente, y que es el eje central de este trabajo.

## Índice de figuras

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figura 1.</i> Dominio discretizado                                         | 29 |
| <i>Figura 2.</i> Vector unitario normal $\vec{n}$                             | 31 |
| <i>Figura 3.</i> Discretización de un dominio                                 | 32 |
| <i>Figura 4.</i> Elemento definido con tres nodos                             | 33 |
| <i>Figura 5.</i> Elemento finito lineal 1D                                    | 43 |
| <i>Figura 6.</i> Elemento lineal 2D                                           | 45 |
| <i>Figura 7.</i> Elemento lineal 2D                                           | 47 |
| <i>Figura 8.</i> Correspondencia local – global en el ensamble                | 51 |
| <i>Figura 9.</i> a) Más elementos, b) Más nodos                               | 54 |
| <i>Figura 10.</i> Placa con condiciones de frontera. $T_h$ en los nodos 1,2,3 | 60 |
| <i>Figura 11.</i> Límites de integración                                      | 68 |
| <i>Figura 12.</i> Un cuadrilátero como región de integración                  | 68 |
| <i>Figura 13.</i> Mapeo                                                       | 69 |

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figura 14.</i> Mapeo de coordenadas                                                   | 71 |
| <i>Figura 15.</i> Mapeo de la frontera                                                   | 77 |
| <i>Figura 16.</i> Sistema UNAMALLA                                                       | 83 |
| <i>Figura 17.</i> Región mapeada                                                         | 83 |
| <i>Figura 18.</i> Numeración de las coordenadas                                          | 84 |
| <i>Figura 19.</i> Diagrama de flujo del programa                                         | 86 |
| <i>Figura 20.</i> Lectura de UNAMALLA                                                    | 88 |
| <i>Figura 21.</i> Inicio – Fin de la numeración de los elementos.                        | 89 |
| <i>Figura 22.</i> Arreglo CUA de una malla de 6 x 7                                      | 90 |
| <i>Figura 23.</i> Función de interpolación                                               | 91 |
| <i>Figura 24.</i> Entrada de una matriz                                                  | 91 |
| <i>Figura 25.</i> Ensamblado                                                             | 92 |
| <i>Figura 26.</i> Flujos                                                                 | 93 |
| <i>Figura 27.</i> Número de las condiciones de frontera del tipo Dirichlet.              | 96 |
| <i>Figura 28.</i> Nodos donde existen condiciones de frontera del tipo Dirichlet         | 94 |
| <i>Figura 29.</i> Incógnitas del problema                                                | 94 |
| <i>Figura 30.</i> Direccionamientos para eliminar renglones y columnas                   | 94 |
| <i>Figura 31.</i> Subrutina de Fortran para resolver sistema lineal                      | 95 |
| <i>Figura 32.</i> Subrutina Fortran para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales | 95 |
| <i>Figura 33.</i> Impresión de resultados, número de elementos, número de nodos.         | 95 |
| <i>Figura 34.</i> Ejemplo de función                                                     | 96 |
| <i>Figura 35.</i> Condiciones iniciales y de frontera                                    | 97 |

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Figura 36. Funciones FORTRAN</i>                                           | 98  |
| <i>Figura 37. Malla 1. 4 elementos. 9 Nodos</i>                               | 99  |
| <i>Figura 38. Malla 2. 16 elementos. 25 Nodos</i>                             | 100 |
| <i>Figura 39. Malla 3. 64 elementos. 81 Nodos</i>                             | 101 |
| <i>Figura 40. Malla 4. 32 elementos. 45 Nodos</i>                             | 103 |
| <i>Figura 41. Malla 4. 32 elementos. 45 Nodos</i>                             | 104 |
| <i>Figura 42. Condiciones iniciales y de frontera para problema no lineal</i> | 106 |
| <i>Figura 43. Agrupamiento</i>                                                | 132 |
| <i>Figura 44. Experimento de Darcy</i>                                        | 134 |
| <i>Figura 45. Profundidad</i>                                                 | 141 |
| <i>Figura 46. Elemento diferencial de volumen</i>                             | 142 |

## Índice de tablas

|                 |     |
|-----------------|-----|
| <i>Tabla 1</i>  | 99  |
| <i>Tabla 2</i>  | 99  |
| <i>Tabla 3</i>  | 101 |
| <i>Tabla 4</i>  | 101 |
| <i>Tabla 5</i>  | 102 |
| <i>Tabla 6</i>  | 102 |
| <i>Tabla 7</i>  | 103 |
| <i>Tabla 8</i>  | 103 |
| <i>Tabla 9</i>  | 104 |
| <i>Tabla 10</i> | 105 |
| <i>Tabla 11</i> | 106 |
| <i>Tabla 12</i> | 106 |
| <i>Tabla 13</i> | 107 |

*Tabla 14*     *107*

*Tabla 15*     *107*

*Tabla 16*     *108*

*Tabla 17*     *108*

*Tabla 18*     *108*

*Tabla 19*     *133*

*Tabla 20*     *133*