

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“EL HAMILTONIANO EN SISTEMAS DISIPATIVOS”

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS PRESENTA

SARAI MENDOZA ARMENTA

ASESORES

M.C. VICTOR MANUEL YÉPEZ GARCÍA.
Dr. JOAQUÍN ESTEVEZ DELGADO.
Dr. CARLOS A. MARTINEZ PALACIOS

Morelia, Mich., septiembre de 2006.

Índice general

1. INTRODUCCION	5
2. INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINAMICOS	7
3. TEORIA PARA EL CALCULO DE FUNCIONALES	15
3.1. Ecuaciones de Lagrange (El Problema del Calculo Variacional)	15
3.2. Funciones de Lyapunov	21
3.3. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON (SOLUCIONES PERIODICAS)	22
3.4. Teoria de Catastrofes	24
4. APLICACIONES	27
4.1. Sistema Conservativo	27
4.2. Sistema Disipativo	30
4.3. conclusiones	36

Agradecimientos

A Dios por todo

A mis pápas Amalia y Pablo (los dos son igualmente de importantes para mi), a mi hermano Sanzon por apoyarme siempre.

A mis grandes cuates Susana y Antonio (ellos saben que los dos son igualmente de importantes para mi, así que el orden no importa).

A mis asesores por su paciencia y enseñanzas.

Al profesor por todo su apoyo.

A mi familia y a todas las personas tanto de la escuela como aquellas que he conocido a lo largo de mi corta vida.

A todos muchas GRACIAS por todo.

Capítulo 1

INTRODUCCION

El tratar de entender como evolucionan los procesos de la naturaleza nos lleva a estudiar los sistemas dinámicos, los cuales son sistemas complejos que presentan un cambio o evolución de su estado en el tiempo.

Si el tiempo se mide en pequeños lapsos estamos hablando de sistemas dinámicos discretos; los cuales son modelados como relaciones recursivas, tal como la ecuación logística, como lo es el crecimiento de una población de ballenas. En cambio si el tiempo es medido en forma continua se tratara de un sistema dinámico continuo, el cual es modelado mediante una ecuación diferencial ordinaria; un ejemplo de este tipo de sistemas es el oscilador armónico.

Una vez dado el modelo de un sistema dinámico continuo, el análisis se puede realizar de dos formas diferentes. La primera y mas antigua se caracteriza por una búsqueda de soluciones explícitas de la ecuacion diferencial que representa nuestro modelo ya sea en formulas exactas (lo que rara vez resulta factible) o bien en términos de series de potencias. La segunda se centra mas bien en obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones.

El conjunto de ecuaciones que se pueden resolver explícitamente es muy pequeño comparado con el universo de sistemas dinamicos, que actualmente se estan modelando en todas las areas del conocimiento.

En la actualidad en física las teorías que buscan obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones estan desarrolladas en su mayoría para aplicarse a sistemas conservativos, una de estas teorías es el problema inverso del cálculo variacional, el cual aplicado a mecánica clásica

nos permite que una vez dada la ecuación de movimiento podamos encontrar el Lagrangiano asociado a dicha ecuación y en consecuencia su hamiltoniano, el cual contiene toda la información del sistema que se esta analizando. Otro caso es la teoría de Lyapunov la cual busca la función de Lyapunov asociada a nuestro sistema y apartir de su analisis describe el comportamiento general de las soluciones. A estos objetos (Hamiltoniano, Función de Lyapunov, entre otros) que contienen toda la información del sistema les llamaremos funcionales.

El propósito de este trabajo es aplicar un poco de estas teorías a algunos ejemplos clásicos, así como plantear algunas preguntas sobre estos enfoques.

Como una forma complementaria en el siguiente capítulo damos algo de teoría sobre analisis cualitativo en sistemas lineales así como bajo que condiciones un sistema no lineal se puede analizar apartir de un sistema lineal.

En el capitulo 3 desarrollamos un poco algunas de las teorías que buscan obtener la funcional asociada a un sistema.

En el capitulo 4 aplicamos la teoría que vimos en los otros capítulos, así como planteamos una serie de preguntas sobre dichos enfoques.

Capítulo 2

INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINAMICOS

Como nos interesa el análisis cualitativo de las soluciones de los sistemas dinámicos continuos, abordaremos la teoría de las ecuaciones diferenciales sobre todo la que trata los sistemas no lineales, los cuales juegan un papel importantísimo dentro de diversas áreas y en particular de la física ya que muchos de los sistemas físicos, y las ecuaciones que los describen son no lineales por la misma naturaleza del fenómeno en cuestión. En la teoría no lineal se presentan muchos fenómenos que no aparecen en la teoría lineal, lo más sorprendente de esto es que el análisis de muchos de ellos se pueden tratar de forma elemental, sin recurrir a técnicas matemáticas sofisticadas, como veremos más adelante. Para el propósito antes mencionado es conveniente iniciar con algunos conceptos que nos serán de utilidad para el planteamiento del problema que abordaremos.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lo llamaremos autónomo si no depende explícitamente del tiempo, es decir $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ y no-autónomo si depende explícitamente del tiempo $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t)$.

Como mencionamos en un principio, no estamos interesados en encontrar las soluciones exactas a las ecuaciones que definen un sistema dinámico (lo cual suele ser imposible), sino más bien en poder contestar preguntas como ¿en qué región o bajo qué condiciones el sistema es estable?, una vez que es estable ¿cuando es asintóticamente estable?, ¿tendrá trayectorias cerradas?. El análisis alrededor de los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones nos ayuda a tratar de responder esas preguntas por lo cual definiremos lo que es

un punto de equilibrio.

Definición 2.1 *Dado un sistema $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un punto \mathbf{x}_e para el cual $f(\mathbf{x}_e) = 0$ es llamado un punto de equilibrio del sistema, un punto de equilibrio corresponde a una solución constante.*

Así para poder analizar alrededor del punto de equilibrio, muchas veces se recurre a las linealizaciones, las cuales son solo aproximaciones al problema no lineal, que si bien es cierto en muchos de los casos resultan ser adecuadas y validas, no hay que dejar de lado el hecho de que en la gran mayoría de los casos las linealizaciones están fuera de lugar.

Así dado un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ podríamos preguntarnos bajo que condiciones podemos linealizar alrededor de \mathbf{x}_e , para lo cual recordaremos algunos conceptos de cálculo vectorial.

El teorema de Taylor proporciona aproximaciones de orden superior a una función y generaliza la aproximación lineal basada en la primera derivada, si $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable de clase $C^1(\Omega)$ y sea $\mathbf{x}_e \in \Omega$ definimos:

$$R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_e) - [Df(\mathbf{x}_e)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_e), \quad (2.1)$$

de modo que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_e) + [Df](\mathbf{x}_e)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e),$$

pero como sabemos $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_e por lo cual se cumple que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_e) - [Df(\mathbf{x}_e)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|} = 0,$$

entonces tendremos que en (2.1)

$$\frac{R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e, \quad (2.2)$$

esto es, $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e)$ tiende a cero más rápido que la norma de \mathbf{x} menos \mathbf{x}_e .

Como el término no lineal de $f(\mathbf{x})$ es decir $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e)$ es pequeño en la vecindad de \mathbf{x}_e en comparación con la parte lineal $Df(\mathbf{x})$ podemos obtener

algo de información del comportamiento de las soluciones del sistema no lineal en una vecindad del punto crítico, a partir del sistema lineal.

Una vez encontrada la solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ esta será estable si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$, tal que

$$|\psi_i(t) - \varphi_i(t)| < \epsilon \quad \text{si } |\psi_i(0) - \varphi_i(0)| < \delta,$$

$$\text{con } i = 1, 2, \dots, n \forall \varphi(t) \text{ de } \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}),$$

o tendremos que una solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ es asintóticamente estable si es estable y si toda solución $\varphi(t)$ que empiece suficientemente cercana de $\mathbf{x} = \psi(t)$ tiende a $\mathbf{x} = \psi(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Así la estabilidad de las soluciones del sistema $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ en una vecindad del punto crítico \mathbf{x}_e , está determinada por los valores propios de la matriz $Df(\mathbf{x}_e)$, como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 a) *Toda solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es estable si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.*

b) *Toda solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es inestable si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva.*

c) *Suponga que todos los valores propios de A tienen parte real menor o igual a cero y $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_k = i\sigma_k$ tienen parte real igual a cero, es decir*

$$P(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{r_1} (\lambda - i\sigma_2)^{r_2} \dots (\lambda - i\sigma_k)^{r_k} q(\lambda),$$

donde todas las raíces de $q(\lambda)$ tienen parte real negativa. Entonces toda solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es estable si A tiene r_j vectores propios linealmente independientes para cada valor propio $\lambda_j = i\sigma_j$. De otro modo todas las soluciones $\psi(t)$ son inestables.

En particular una solución de equilibrio es asintóticamente estable si toda solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ que empieza suficientemente cerca a \mathbf{x}_0 en el instante $t = 0$ no solo permanece cercana a \mathbf{x}_0 para todo $t > 0$ si no que tiende a x_0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso de matrices de 2×2 . Podemos expresar su polinomio característico como:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A,$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tra}(A) \pm \sqrt{(\text{Tra}(A))^2 - 4\text{Det}(A)}).$$

Como sabemos los valores propios de A nos dan información del tipo de comportamiento del sistema. Empezamos suponiendo que los dos valores propios λ_1, λ_2 de A son reales, de lo cual surgen tres posibles casos:

CASO I) A tiene valores propios de signo opuesto $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, en este caso el origen es un punto silla.

CASO II) Todos los valores propios de A son negativos $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. En este caso el origen es un sumidero. Si los valores propios son iguales entonces se tiene un nodo.

CASO III) Todos los valores propios de A son positivos $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. El origen es una fuente. Si los valores propios son iguales entonces se tiene un nodo.

Ahora si consideramos que los valores propios de A son complejos tendríamos:

CASO IV) Los valores propios λ_1 y λ_2 de A son complejos conjugados pero no imaginarios puros. En este caso se tienen espirales.

CASO V) Los valores propios λ_1 y λ_2 de A son imaginarios puros. Aquí el origen es llamado centro, caracterizado por que las soluciones son periódicas con el mismo período.

Todos los casos anteriores se presentan en el siguiente diagrama.

Así un sistema de ecuaciones que nos puede ayudar a aclarar lo antes mencionado son los que representan dos especies compitiendo por alimento. Suponga que en un ambiente cerrado hay dos especies semejantes que compiten por un suministro de alimento. Por ejemplo caballos y vacas, que compiten por el pasto disponible en una región aislada. Sea x la población de vacas y y la población de caballos en el instante t . Supongamos que la población de cada especie en ausencia de la otra, se rige por una ecuación logística. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 x - \alpha_2 y) \quad (2.4)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son los índices de crecimiento de las poblaciones y α_1 y α_2 es una medida del grado en el que cada una de las especies interfiere con la otra, además x, y son variables que solo toman valores positivos, ya que representan el número de individuos de cada especie. ¿QUE REPRESENTACION TIENE EXACTAMENTE SIGMA?

En la practica los valores de las constantes positivas $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1$ y α_2 dependen de cada especie que se este considerando. Dando un valor a cada constante podemos obtener un sistema particular,

$$\frac{dx}{dt} = x(1/2 - x/2 - y) \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(3/4 - x - y) \quad (2.6)$$

Primero que nada encontremos los puntos criticos.

$$x(1/2 - x/2 - y) = 0$$

$$y(3/4 - x - y) = 0.$$

Los cuales son $(0, 0), (0, 3/4), (1, 0), (1/2, 1/4)$, los tres primeros puntos incluyen la extinción de una o las dos especies; solamente el ultimo corresponde a la supervivencia a largo plazo de las dos.

Ahora veamos si podemos analizar al sistema no-lineal a partir del sistema lineal, primero que nada las partes no lineales de cada ecuación son continuas para todo (x, y) , además cuando $(x, y) \rightarrow (\mathbf{x}_e)$ se tiene

$$\lim (x, y) \rightarrow (\mathbf{x}_e) \frac{\frac{-x^2}{2} - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\lim (x, y) \rightarrow (\mathbf{x}_e) \frac{-y^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

para cada punto critico, por lo cual el analisis del sistema lineal nos dara buena información del sistema lineal. Calculemos los valores propios de $Df(\mathbf{x})$, ya que ellos nos diran que tipo de dinamica se presenta.

Para $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ tenemos que $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 3/4$ por lo cual se trata de una fuente.

Para $\mathbf{x}_e = (0, 3/4)$ tenemos que $\lambda_1 = -1/4, \lambda_2 = -3/4$ por lo cual se trata de un sumidero.

Para $\mathbf{x}_e = (1, 0)$ tenemos que $\lambda_1 = -1/2, \lambda_2 = 1/4$ por lo cual se trata de un punto silla.

Para $\mathbf{x}_e = (1/2, 1/4)$ tenemos que $\lambda_1 = (-1), \lambda_2 =$ por lo cual se trata de un punto silla.

EJEMPLO SOLO PARA ILUSTRAR LOS DIFERENTES TIPOS DE PUNTOS CRITICOS

Una ecuacion diferencial no lineal muy importante es la ecuacion de Van Der Pool, la cual describe el comportamiento de Circuitos electronicos no-lineales como los que fueron usados en los primeros aparatos de radio. Este tipo de aparatos se usaban en los días de los tubos de vacio.

$$x'' - \epsilon(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (2.7)$$

Para transformar la ecuacion (2.7) en un sistema de dos ecuaciones de primer orden, se hace $x' = y$

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \epsilon(1 - x^2)x' - x \end{aligned}$$

pero como $x' = y$

$$x' = yy' = \epsilon(1 - x^2)y - x \quad (2.8)$$

El unico punto de equilibrio es el $(0,0)$, ahora revisemos si satisface la condicion (2.2) para poder analizar (2.8) apartir del sistema lineal asociado.

Usemos coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sen \theta$
 $\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^2 \cos \theta^2 r \sen \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} -r^2 \cos \theta^2 \sen \theta \rightarrow 0$

Teorema 2.2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en $|t - t_0| \leq a$, $x \in (a', b') = I$, $f(x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas entonces el problema de valores iniciales tiene solución única en una región $|t - t_0|$ y en la región I .

Definición 2.2 Un HOMEOMORFISMO es simplemente un mapeo continuo, que tiene inversa continua. Tal homeomorfismo establece una correspondencia uno-a-uno entre equilibrio de dos flujos, órbitas cerradas, ...

Teorema 2.3 (Hartman-Grobman). Si $Df(x_e)$ no tiene valores propios ceros o puramente imaginarios, entonces hay un HOMEOMORFISMO h definido sobre una vecindad u de x_e en \mathbb{R}^n que manda localmente orbitas del flujo no lineal a las del flujo lineal.

Este homeomorfismo preserva el sentido de la órbita, y puede ser elegido para la parametrización del tiempo.

Ahora si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(\mathbf{x}_e)$ tiene parte real igual a cero, \mathbf{x}_e es llamado PUNTO HIPERBOLICO o no degenerado y por el teorema de Hartman-Grobman el comportamiento asintotico de la solución cerca de \mathbf{x}_e queda determinado por la linealización, pero si cualquiera de los valores propios tiene parte real cero, entonces la estabilidad no puede determinarse por la linealización, todo esto se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 2.4 Si la parte no lineal de nuestro sistema tiende a cero en la vecindad de cada punto crtítico podemos concluir que

a) La solución de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ es asintoticamente estable si la solución de equilibrio $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = 0$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es asintoticamente estable.

b) La solución de equilibrio $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = 0$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ es inestable si al menos un valor característico de A tiene parte real positiva.

c) La estabilidad de la solución de equilibrio \vec{x} de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ no se puede determinar a partir de la estabilidad de la solución de equilibrio de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ si todos los valores propios de A tienen parte real ≤ 0 pero al menos un valor propio de A tiene parte real igual a cero.

Capítulo 3

TEORIA PARA EL CALCULO DE FUNCIONALES

3.1. Ecuaciones de Lagrange (El Problema del Calculo Variacional)

Recordemos que uno de nuestros objetivos es analizar ecuaciones diferenciales sin resolverlas, en la actualidad la gran mayoría de las teorías que nos permiten hacer esto están desarrolladas para aplicarse a los llamados sistemas conservativos, y de manera muy restringida a sistemas disipativos. Pero antes de empezar a analizar dichos sistemas, daremos una semblanza del problema de cálculo variacional, para así introducir las ecuaciones de Euler-Lagrange y de ahí, al representarlas en variables de estado, proponer las ecuaciones de Hamilton. empezar a analizar dichos sistemas, daremos una pequeña semblanza del problema del cálculo variacional, para así introducir las ecuaciones de Euler-Lagrange y de ahí, al representarlas en variables de estado, proponer las ecuaciones de Hamilton.

Para motivar los conceptos básicos del cálculo de variaciones, primero revisaremos algunas nociones elementales del cálculo diferencial. uno de los problemas centrales en el cálculo es maximizar o minimizar una función de valor real de una variable. Si $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función definida en un intervalo $I \subset \mathfrak{R}$, entonces f tiene un mínimo local (o relativo) en $x_0 \in I$ si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x , satisfaciendo $|x - x_0| < \delta$ para algún δ . Si f tiene

un mínimo local en $x_0 \in I$ y f es diferenciable en I , entonces sabemos que

$$f'(x_0) = 0. \tag{3.1}$$

La condición (3.1) es llamada condición necesaria para un mínimo local, ya que si f tiene un mínimo local, dicho mínimo satisface (3.1) pero no toda x que cumple la condición necesariamente provee de un mínimo a f . Las condiciones suficientes para que f tenga un mínimo local en x_0 son

$$f'(x_0) = 0, \text{ que } f''(x) \text{ exista y que } f''(x_0) > 0.$$

De manera similar se formulan las condiciones para un máximo local.

El cálculo de variaciones trata la generalización de este problema de cálculo. Más que encontrar las condiciones bajo las cuales una función tiene valores extremos, el cálculo de variaciones está relacionado con la optimización de cantidades variables llamadas funcionales. Es un área de investigación activa en todas las ciencias aplicadas, ya que los principios naturales incluso los sociales y económicos así como los elementos fabricados usando la más sofisticada tecnología obedecen al principio común de la optimalidad de su diseño.

Una funcional es una regla que asigna números reales a cada función dentro de una clase bien definida, es decir, consideremos el conjunto A de funciones R, S, Y, Z, \dots ; entonces la funcional \mathbf{J} sobre A es la regla que asocia a cada $y \in A$ un número real denotado por $\mathbf{J}(y)$.

Así el problema fundamental del cálculo de variaciones se puede establecer como: dada una funcional \mathbf{J} y un conjunto de funciones bien definido A , el problema es determinar que funciones de A ofrecen un valor extremo (máximo o mínimo) de \mathbf{J} . El conjunto de funciones A es llamado el conjunto de funciones admisibles (es decir las funciones que compiten para optimizar \mathbf{J}).

Al imponer algunas condiciones generales sobre A , y tratar de encontrar las condiciones necesarias y suficientes para optimizar la funcional \mathbf{J} sobre el conjunto A , es lo que llamamos el **problema variacional**.

Uno de los problemas del cálculo de Variaciones, es el de encontrar un

3.1. ECUACIONES DE LAGRANGE (EL PROBLEMA DEL CALCULO VARIACIONAL)17

mínimo local para la funcional

$$\mathbf{J}(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad (3.2)$$

donde y es una función doblemente continua diferenciable en el intervalo $[a, b]$, así como la funcional $L(x, y, y')$. La solución a este problema queda establecido por el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *Si una función y provee un mínimo local a la funcional 3.2, donde y es una función doblemente continua-diferenciable en el intervalo $[a, b]$, y $y(a) = y_1$, y $y(b) = y_2$, entonces y debe satisfacer la ecuación*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Recordemos que (3.3) son las ecuaciones de movimiento de un sistema conservativo y la funcional $L(x, y, y')$ recibe el nombre de Lagrangeano. Dicha ecuación describe un sistema de segundo orden que en general es no-lineal. Dada la ecuación diferencial estamos interesados en encontrar el Hamiltoniano asociado al sistema. Para lo cual deduciremos las ecuaciones de Hamilton. Supongamos que conocemos $L(x, y, y')$, mediante una transformada de Legendre definimos el Hamiltoniano como

$$H(x, p, t) = (x')(p) - L(x, x', t). \quad (3.4)$$

Donde p es el momento generalizado, llamado así por que en el formalismo Lagrangiano se puede usar diferentes tipos de coordenadas, dicho momento se define como $p = \frac{\partial L}{\partial x'}$

La Lagrangiana depende de x, x' y t . Pedimos que el Hamiltoniano dependa de x, p, t , por lo cual tenemos $H = H(x, p, t)$, entonces el diferencial del hamiltoniano es

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (3.5)$$

Por otro lado, a partir de (3.4) se tiene que

$$dH = \frac{\partial(x'p)}{\partial x'} dx' + \frac{\partial(x'p)}{\partial p} dp - dL(x, x', t)$$

$$dH = p dx' + x' dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial x'} dx' - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Pero sabemos que el momento generalizado se expresa como

$$p = \frac{\partial L}{\partial x'},$$

por lo cual tenemos que

$$p dx' + x' dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx - p dx' - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial x} dx + x' dp - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.6)$$

Igualando (3.5) y (3.6)

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial t} dt = dH = -\frac{\partial L}{\partial x} dx + x' dp - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Reagrupando términos resulta

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - x'\right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}\right) dt = 0,$$

Ya que las variaciones de dx , dp y dt son todas independientes tenemos

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = -p'$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3.7)$$

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Ahora si normalizamos las ecuaciones (3.7) respecto a "m" para llegar directamente a las variables de estado, tendríamos $p = x' = y$

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y} = H_y \quad (3.9)$$

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -H_x, \quad (3.10)$$

ademas se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

donde $H(x_1, x_2, t)$ representa la función de energía del sistema.

las variables x_1, x_2 , son llamadas variables de estado.

Si se tiene un sistema descrito por la ecuación

$$x'' = F(t, x, x') \quad (3.11)$$

El cual al representarlo en variables de estado es tal que existe $H(x_1, x_2, t)$ que satisface (4.6) y ademas

$$\frac{d}{dt} H(t, x_1, x_2) = 0, \quad (3.12)$$

entonces el sistema sera conservativo.

Pero si (3.12) resulta diferente de cero, entonces el sistema sera disipativo.

Hasta aqui solo hemos tratado con sistemas conservativos, dada la ecuación diferencial asociada a dicho sistema, pasamos a variables de estado y encontramos $H(x, y, t)$, la cual no es única ya que sabemos que un sistema puede tener asociado mas de un Lagrangiano y en consecuencia mas de un Hamiltoniano. Pero ¿que pasa cuando la ecuación que estamos trabajando es la ecuación diferencial asociada a un sistema no-conservativo?, en este caso no se pueden usar directamente las ecuaciones de Hamilton, por lo cual haremos uso del problema inverso del calculo variacional.

Retomando (3.3), desarrollemos la derivada total involucrada en la ecuacion de movimiento, ademas supondremos que $L(y, y', t)$ es una funcion suave con terceras derivadas parciales continuas, es decir, que sus parciales pueden conmutar

$$y' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} + y'' \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (3.13)$$

si nuestro sistema a analizar tiene la una ecuacion diferencial asociada de la forma $y'' = F(t, y, y')$, al sustituir esta igualdad en la ecuación anterior tendremos

$$y' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} + F \frac{\partial^2 L}{\partial y' y'} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

derivando con respecto a y' esta última expresión

$$y' \frac{\partial^3 L}{\partial y' \partial y \partial y'} + \frac{\partial L}{\partial y \partial y'} + F'_y \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y'} + F \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y' \partial y'} + \frac{\partial L}{\partial y' \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}. \quad (3.15)$$

Recordemos que supusimos que las derivadas parciales de L podian conmutar, por lo cual la expresión anterior se reduce a

$$y' \frac{\partial^3 L}{\partial y' \partial y' \partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y'} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \right) + F \frac{\partial^3 L}{\partial y'^3} + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial t}, \quad (3.16)$$

para simplificar tomemos

$$u(t, y, y') = L_{y'y'}. \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en (3.16) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y' \frac{\partial u}{\partial y} + F \frac{\partial u}{\partial y'} + u \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (3.18)$$

la cual es una ecuación diferencial parcial para u . Si resolvemos esta ecuación para u , entonces el Lagrangeano L puede ser determinado de 3.17 por una doble integración con respecto de y' , claramente hay una infinidad de soluciones de la ecuación diferencial, puesto que cada SOLUCION DE DICHO SISTEMA DEBE SATISFACER LA ECUACION DE MOVIMIENTO de las integraciones implicara funciones arbitrarias.

3.2. Funciones de Lyapunov

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad estan presentes en la vida cotidiana. Es de uso comun decir: el peso mexicano es inestable, el euro es estable. Incluso en muchas areas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva, es comun oír a un ingeniero decir que una estructura es estable o no lo es, un químico dice que una reacción se ha estabilizado, en física si se tiene que la energía total de un sistema físico tiene un mínimo local en un cierto punto de equilibrio, es intuitivo que este punto es estable. esta idea fue generalizada por Lyapunov en un metodo sencillo y potente a la vez, que acontinuación presentaremos.

Sea $V(X)$ una función escalar real de vector X (invariante en el tiempo), y sea S una región cerrada y acotada en el espacio X , conteniendo al origen y al punto de interés X_e

Definición 3.1 $V(X)$ es definida positiva en S si $\forall X \in S$

i) $V(X)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a las componentes del vector X

ii) $V(X_e) = 0$

iii) $V(X) > 0$, si $X \neq X_e$

Definición 3.2 La función $V(X)$ es semidefinida positiva en S , si para toda $X \in S$

i) $V(X)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a las componentes del vector \mathbf{x}

$$ii) V(X_e) = 0$$

$$iii) V(X) \geq 0$$

Teorema 3.2 *Suponga que el sistema autónomo $X = f(X)$ tiene un punto crítico aislado X_e . si existe una función $V(X)$ definida positiva y $(-V'(X))$ es definida negativa sobre el dominio S , entonces X_e es un punto asintóticamente estable. Si $V'(X)$ es semidefinida negativa entonces el origen es un punto crítico estable.*

Teorema 3.3 *Sea $V(X)$ una función continua con primeras derivadas parciales continuas. Suponga que $V(X_e) = 0$ y que en toda vecindad de X_e existe por lo menos un punto en el que $V(X)$ es positiva (negativa). Entonces si existe S que contenga a X_e tal que la función $V'(X)$ es definida positiva (definida negativa) sobre S , entonces el origen es un punto crítico inestable.*

Teorema 3.4 *Considere el sistema autónomo $X' = f(X)$ y suponga que la función $V(X)$ es continua y sus primeras derivadas son continuas. Si existe un dominio acotado S_k que contenga X_e y en donde $V(X) < k V(X)$ es definida positiva y $V'(X)$ es definida negativa entonces toda solución de $X' = f(X)$ que inicie en un punto en S_k tiende al origen cuando t tiende a infinito.*

3.3. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON (SOLUCIONES PERIÓDICAS)

Consideremos un sistema autónomo no lineal

$$x'_1 = F(X) \qquad x'_2 = G(X) \qquad (3.19)$$

donde las funciones F y G , así como sus primeras derivadas parciales, son continuas en el plano fase. Lo que hemos dicho hasta ahora solo nos da información sobre las trayectorias de 3.19, en el entorno de ciertos puntos críticos. Pero en muchos problemas estamos más interesados en las propiedades globales de las trayectorias que en esas propiedades locales. Son *propiedades globales* de las trayectorias aquellas que describen su comportamiento sobre grandes regiones del plano de fases, y en general resultan muy difíciles de establecer.

3.3. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON (SOLUCIONES PERIÓDICAS) 23

El problema central de la teoría global es determinar si 3.19 tiene o no trayectorias cerradas. Esta cuestión es importante porque guarda estrecha relación con la existencia o no de soluciones periódicas de (3.19).

Una solución $x_1(t), x_2(t)$ de (3.19) se llama *periódica* si ninguna de esas dos funciones es constante, están ambas definidas para todo t y existe un número $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ e $y(t + T) = y(t)$ para todo t . El T más pequeño con esa propiedad se conoce como *período* de la solución.

Es claro que cada solución periódica de (3.19) define una trayectoria cerrada que se recorre una vez por completo cuando t crece desde t_0 hasta $t_0 + T$, sea cual sea t_0 . Recíprocamente es fácil ver que si $C = [x_1(t), x_2(t)]$ es una trayectoria cerrada de 3.19, entonces $x_1(t), x_2(t)$ definen una solución periódica. De acuerdo con eso, la búsqueda de soluciones periódicas de 3.19 se reduce a la de trayectorias cerradas.

Teorema 3.5 Sean $F(X)$ y $G(X)$ funciones que admiten primeras derivadas parciales continuas en una región S del plano $x_1 - x_2$. Una trayectoria cerrada del sistema

$$x'_1 = F(X) \quad x'_2 = G(X)$$

necesariamente debe contener al menos un punto crítico. Si solo encierra un punto crítico entonces este no debe ser un punto silla.

Teorema 3.6 Suponga que las funciones $F(X)$ y $G(X)$ admiten primeras derivadas parciales continuas en una región S simplemente conexa. Si $F_{x_1} + G_{x_2}$ tienen el mismo signo en todo S , entonces no existen trayectorias cerradas del sistema (1) que se encuentren por completo en S .

Teorema 3.7 (POINCARÉ-BENDIXON) supongase que las funciones $F(X)$ y $G(X)$ admiten primeras derivadas parciales continuas en un dominio S del plano $x_1 - x_2$. Sea S_1 un subdominio acotado en S y $R = D_1 \cup \text{fro}D_1$ supongase que R no contiene ningún punto crítico del sistema (1) si existe una constante t_0 tal que $x_1 = \psi, x_2 = \varphi$ es una solución de (1) que permanece en $R \forall t \geq t_0$ entonces $x_1 = \psi, x_2 = \varphi$ es una solución periódica (trayectoria cerrada cuando $t \rightarrow \infty$). En cualquiera de los dos casos el sistema tiene una solución periódica en R .

3.4. Teoria de Catastrofes

La gran mayoría de los fenomenos de la naturaleza involucran discontinuidades, por ejemplo la division de una celula o el colapso de un puente. Una parte de las matematicas que trata directamente con las singularidades de un sistema sin tener referencias del mecanismo del sistema es la teoria de catastrofes. Asi tomaremos algunos conceptos de la teoria de catastrofes que nos serviran.

consideremos un sistema dinamico cuyo comportamiento es usualmente suave pero que en algunas regiones presenta discontinuidades. Nosotros podemos suponer que el sistema en todo tiempo esta completamente especificado por n variables (x_1, x_2, \dots, x_n) , donde n es finito pero puede ser muy grande, a este conjunto de variables se les llama variables de estado.

Tambien podemos suponer que el sistema esta bajo el control de m variables independientes (u_1, u_2, \dots, u_m) , es decir, los valores de estas variables independientes determinan los valores de las variables de estado, aunque no necesariamente de manera unica. Este conjunto de variables independientes recibe el nombre de variables de control o parametros.

Sea dicho sistema el siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_j(x_i, u_\alpha) \quad (3.20)$$

Supondremos ademas, que la dinamica del sistema es derivable de una funcion suave, es decir que (3.20) es un sistema gradiente.

$$f_j = -\frac{\partial V(x_i, u_\alpha)}{\partial x_i} = -\nabla_x V \quad (3.21)$$

Dadas estas condiciones, la teoria de catastrofes es el estudio de como el equilibrio $x_i(u_\alpha)$ de $V(x_i, u_\alpha)$ definido por

$$\frac{\partial V(x_i, u_\alpha)}{\partial x_i} = 0$$

cambia conforme cambian los valores de los parametros de control u_α . Dicho de otra manera, la teoria de catastrofes nos dice el numero de configuraciones cualitativas diferentes que pueden ocurrir, dependiendo del numero

de parametros de control. En particular si el numero de parametros de control es menor o igual a cuatro, entonces hay tan solo siete tipos distintos de catastrofes.

Asi los siete diferentes tipos de Catastrofes son:

$$x^3 + ux \quad \text{fold}$$

$$x^4 + ux^2 + vx \quad \text{cusp}$$

$$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx \quad \text{swallowtail}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux + vy \quad \text{elliptic umbilic}$$

$$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy \quad \text{hyperbolic umbilic}$$

$$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx \quad \text{butterfly}$$

$$y^4 + x^2y + wx^2 + ty^2 - ux - vy \quad \text{parabolic umbilic}$$

A la función representativa de cada tipo de catastrofe se le llama funcion generica, ya que es la que usa el mínimo de parametros y de terminos para reproducir dicha dinamica.

La teoría de catastrofes puede predecir mucho del comportamiento cualitativo de un sistema, sin saber cual es su ecuación diferencial asociada ni tampoco resolverla.

Una vez que se tiene la función de catastrofe una de las características basicas de su gráfica son sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor. Acontinuación deduciremos un método para determinar estos puntos. Comencemos definiendo los términos usados.

Definición 3.3 *Los puntos de equilibrio, o puntos críticos x_0 de una función escalar suave $V(x)$ (continua C^k diferenciable) son los puntos tales que*

$$\nabla_x V = 0$$

donde el subíndice x indica que el gradiente es respecto a la variable de estado x .

Los puntos críticos en los cuales $\det[V_{ij}] \neq 0$ son llamados aislados, no degenerados, o puntos críticos Morse. Donde $[V_{ij}]$ es la Hessiana de V .

Los puntos críticos de $V(x)$, en los cuales se tiene que $\det[V_{ij}] = 0$, son llamados no aislados, degenerados, o puntos críticos No-Morse.

Ahora tendremos que una funcion $f(x, y)$ tendra:

$$\text{maximo} \quad \text{si} : \quad \Delta > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,$$

$$\text{mnimo} \quad \text{si} : \quad \Delta > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0,$$

$$\text{silla} \quad \text{si} : \quad \Delta < 0,$$

por conveniencia escribimos:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Dado un potencial V , se define la superficie de equilibrio, M , por la ecuación

$$\nabla_x V = 0.$$

Esta superficie M , contiene todos los puntos de equilibrio (estables u otro tipo) del sistema $x' = f(t, x)$; donde M es una variedad, una superficie bien comportada.

Después, se encuentra el conjunto de singularidades, S , el cual es un subconjunto de M , y consiste de todos los puntos críticos degenerados de $V(x)$. Estos son los puntos en los cuales $\nabla_x V = 0$ y también $\det[V_{ij}] = 0$

Si proyectamos S en el espacio de control C , eliminando las variables de estado de las ecuaciones que lo definen, se obtiene el conjunto de bifurcaciones B , el cual es el conjunto de todos los puntos en C , los cuales cambian en la forma que V ocurre. Finalmente se determina la forma de V , para cada punto en C .

Capítulo 4

APLICACIONES

Ahora aplicaremos la teoría de los capítulos anteriores a varios problemas

4.1. Sistema Conservativo

Empecemos con un sistema conservativo clásico como lo es el oscilador armónico.

Consideremos una carreta de masa M sujeta por un resorte a una pared cercana. El resorte no ejerce fuerza cuando la carreta se encuentra en su posición de equilibrio $x = 0$, pero si se le desplaza una distancia x , el resorte ejerce una fuerza restauradora $F_r = -kx$, siendo k una constante positiva cuya magnitud mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley de Newton, la fuerza total es igual a la masa de la carreta por su aceleración, luego

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_r. \quad (4.1)$$

Normalizando respecto a la masa "M"

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0,$$

llamemos $\omega = \frac{k}{M}$

$$x'' + \omega^2 x = 0. \quad (4.2)$$

Expresemos a (4.2) en variables de estado, tomando

$$x = x(t)$$

$$y = x'$$

$$x' = y \quad y' = -w^2x. \quad (4.3)$$

Ahora como nuestro sistema es conservativo e invariante en el tiempo podemos aplicar las ecuaciones de Hamilton.

$$x' = y = \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$y' = -w^2x = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Integrando cada ecuacion obtenemos

de la primera

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + h(x). \quad (4.4)$$

Donde $h(x)$ es la función que se pierde al derivar $H(x, y)$ con respecto a y

de la segunda

$$H(x, y) = \omega^2 \frac{x^2}{2} + g(y). \quad (4.5)$$

Donde $g(y)$ es la funcion que se pierde al derivar $H(x, y)$ con respecto a x

Comparando (4.4) con (4.5) obtenemos que

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}. \quad (4.6)$$

Retomando el sistema (4.3), este es lineal por lo cual tiene un solo punto crítico, analicemos que tipo de dinamica se presenta en este punto de equilibrio por medio de sus valores propios.

El polinomio caracteristico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$(\lambda - \omega i)(\lambda + \omega i).$$

Los valores propios son:

$$\lambda_1 = \omega i$$

$$\lambda_2 = -\omega i$$

Como los valores propios son puramente imaginarios, el punto critico es un centro, para averiguar que tipo de centro se tiene, calculemos

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Calculando las derivadas de (4.6) y sustituyendolas en la expresion anterior obtenemos:

$$\frac{d}{dt}H = (\omega^2 x)(y) + (y)(-\omega^2) + 0 = 0$$

$\Rightarrow H = C$, donde C es una constante.

Los sistemas que satisfacen $\frac{d}{dt}H = 0$, les llamamos sistemas conservativos por lo cual $C = E$, donde E es la energía mecánica del sistema, es decir la energía mecánica se conserva, lo cual debía ocurrir ya que supusimos que no había fuerzas disipativas actuando en nuestro sistema.

$$H(x, y, t) = \frac{y^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = E.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{1}{E}$, obtenemos

$$\frac{y^2}{2E} + \frac{\omega^2}{2E}x^2 = 1 \quad (4.7)$$

La cual corresponde a la ecuación de una elipse, con semieje mayor $a = \frac{\omega^2}{2E}$ y semieje menor $b = \frac{1}{2E}$

4.2. Sistema Disipativo

Nuestro siguiente paso es considerar un sistema lineal pero que es no conservativo, ejemplo de ello es el oscilador amortiguado.

Si al ejemplo anterior le añadimos el efecto de una fuerza disipativa F_a debido a la viscosidad del medio en el que la carreta se mueve (aire, agua, aceite, etc.), estaremos hablando de un oscilador amortiguado. Hacemos la hipótesis específica de que esta fuerza se opone al movimiento y es de magnitud proporcional a la velocidad, o sea, $F_a = -cx'$, donde c es una constante positiva que mide la resistencia del medio. La ecuación (4.1) pasa a ser ahora

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_r + F_a,$$

es decir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = 0.$$

Por conveniencia, de nuevo, la escribimos como

$$x'' + px' + \omega^2x = 0, \quad (4.8)$$

donde

$$p = \frac{c}{M}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M}.$$

Como nuestro sistema es disipativo (debido a la fuerza disipativa presente), no podemos aplicar las ecuaciones de Hamilton directamente (ya que se deducieron de un sistema conservativo) por lo cual para calcular $H(x, y, t)$, haremos uso del problema inverso del calculo variacional.

Multipliquemos la ecuación (4.8) por una función no-negativa $f(t)$.

$$f(t)x'' + f(t)px' + f(t)\omega^2x = 0. \quad (4.9)$$

La cual debe coincidir con la ecuación de Euler reescrita en la forma.

$$-L_x + L_{x't} + L_{x'x}x' + L_{x'x'}x''.$$

En donde elegimos $L_{x'x'} = mf(t)$

$$-L_x + L_{x't} + L_{x'x}x' + mf(t)x'', \quad (4.10)$$

de tal forma que

$$L'_x = f(t)x' + M(t, x),$$

volviendo a integrar tenemos

$$L = f(t)\frac{x'^2}{2} + M(t, x)x' + N(t, x), \quad (4.11)$$

con $M(t, x)$ y $N(t, x)$ funciones arbitrarias

Despejando $f(t)x''$ de (4.9) y de (4.10) e igualando obtenemos

$$-L_x + L_{x't} + L_{x'x}y' = pf(t)x' + \omega^2 f(t)x,$$

o bien de las derivadas de (4.11) tenemos

$$-(M_x x' + N_y) + f'(t)x' + M_t + M_x x' = bf(t)x' + \omega^2 f(t)y,$$

y de aquí tenemos que $f'(t) = p(f)$, es decir

$$f(t) = \exp^{pt}, \quad (4.12)$$

y así

$$-N_y + M_t = \omega^2 y \exp^{pt}. \quad (4.13)$$

Si suponemos que $M = 0$, tenemos que

$$N = -(\omega^2)2y^2 \exp^{pt}$$

Sustituyendo (4.12) y (4.13) en (4.11)

$$L(t, x, x') = \left(\frac{x'^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}\right) \exp^{bt}.$$

Pero como $x' = y$, tenemos

$$L(t, x, x') = \left(\frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}\right) \exp^{bt}.$$

Através de la transformada de Legendre podremos encontrar H

$$H(x, y, t) = yx' - L(x, x', t)$$

$$\Rightarrow H(x, y, t) = yx' - \left(\frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}\right) \exp^{bt},$$

recordemos que $x' = y$

$$H(x, y, t) = y^2 - \left(\frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}\right) \exp^{bt}.$$

Retomando la ecuación diferencial (4.8) expresemosla en variables de estado, tomando $x' = y$

$$x' = yy' = -py - \omega^2 x. \quad (4.14)$$

El sistema anterior es un sistema lineal, por lo cual tiene un solo punto crítico, calculemos sus valores propios para saber que tipo de estabilidad se presenta

El polinomio característico asociado es

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Se presentan tres diferentes casos

a) Si $p^2 > 4\omega^2$ entonces $p > \sqrt{p^2 - 4\omega^2}$ por lo cual tenemos que ambos valores propios son negativos, el punto crítico es un sumidero.

b) Si $p^2 < 4\omega^2$ entonces $\sqrt{p^2 - 4\omega^2}$ es un complejo por lo cual los valores propios son complejos con parte real distinta de cero ya que $p \neq 0$ por que si no fuera así regresaríamos al caso del oscilador armónico. Estamos hablando de que el punto crítico es un foco.

c) Si $p^2 = 4\omega^2$ entonces los valores propios son reales e iguales, por lo cual el punto crítico es un nodo.

4.3. conclusiones

Lo que actualmente se busca es desarrollar teorías que nos permitan encontrar la funcional asociada a un sistema dinámico continuo, ya que ella contiene toda la información del sistema, además que el análisis no es tan complicado.

La teoría Hamiltoniana, esta desarrollada para sistemas conservativos, pero entonces que pasa cuando se quiere analizar un sistema que no es conservativo, no podemos aplicar directamente esta teoría, así que lo que debemos hacer es tratar de buscar teorías que nos permitan analizar sistemas no conservativos.

Hemos comprobado que la mayoría de las teorías que se han desarrollado, se aplican mayormente a los sistemas conservativos

Bibliografía

- [1] "Simple mathematical models with very complicated dynamics". R. May *Nature* **261** (1976) 459.
- [2] "A model of student migration" J. Scheurle and R. Seydel. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **10** (2000) 477.
- [3] "Love affairs and differential equations" S. Strogatz. *Math. Magazine* **61** (1988) 35.
- [4] "Amplitud equations in double diffusive convection", Ricardo Becerril and J. Swift. *Phys. Rev*, **E 55** (1997) 6270.
- [5] "Universal behavior in nonlinear systems". *Los Alamos Science*, **1** (1980) 4.
- [6] "Nonlinear dynamics and chaos" S. Strogatz, Addison-Wesley (1994).
- [7] "Chaos and nonlinear dynamics" R. Hilborn, Oxford University Press (1994).
- [8] "Logistic map driven by dichotomous noise" J. Gutierrez, A. Iglesias and M. Rodriguez *Phys. Rev.* **E 48** (1993) 2507.
- [9] "Optimized chaos control with simple limiter" C. Wagner and R. Stoop. *Phys. Rev.* **E 63** (2000) 017201.