Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

El Papel de la Radiación Cósmica de Fondo en la Cosmología Actual

Tesis para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta

Enif Guadalupe Gutiérrez Guerrero

Directores de tesis:
Dr. Francisco Astorga Sáenz
Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Instituto de Física y Matemáticas,
UMSNH.

Marzo del 2007

Agradecimientos

Al Dr. Francisco Astorga, primero por haber abierto las puertas del maravilloso mundo de la física y la cosmología y en segundo lugar por haber confiado en mí para la realización de este proyecto de tesis, a pesar de sus múltiples ocupaciones, por sus palabras de aliento en los momentos que más las necesitaba.

Al Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por aceptar participar como pieza fundamental y soporte en este trabajo de tesis, por sus horas de dedicación, por su apoyo en todo momento, por su tranquilidad para llevarme por el camino correcto, por sus clases y enseñanzas, por su buen humor, por haber sido y ser un gran maestro, un gran asesor, pero por sobre todas las cosas por su amistad y entusiasmo en todo momento, que hoy queda para siempre expresado en unas cuantas hojas de tesis que representan el arduo esfuerzo y el trampolin para mi siguiente meta que sin él no hubera sido posible.
Muchas gracias por todo Ulises.

A mis papás por su nobleza, por su amor y cuidado durante mi infancia, por sus consejos bien fundamentados durante mi adolescencia, por su cariño y comprensión a lo largo de toda mi vida.

A Mara por sus múltiples regaños cada uno mas sabio y más útil que el anterior, por estar a mi lado siempre sin importar las circunstancias, por ayudarme a levantarme cuando me caigo, por llenar de luz, cualquier camino sin importar lo oscuro que paresca

A Juan, Marta, Mayra y Susi, por ser parte importante de mi familia, por demostrarme su apoyo y ayudarme siempre.

A Javier, por mostrarme la belleza de la vida

Contenido

Introducción

La teoría de la relatividad especial (TRE) [1] es una herramienta básica para los físicos. Sus conceptos dados a conocer en 1905 son asimilados hoy en día con naturalidad por los estudiantes de física , sin embargo aún no podemos decir lo mismo respecto de la teoría de la Relatividad General (TRG) [2, 3], que es la teoría relativista de la gravitación de Einstein. El propósito del primer capítulo es mostrar que esta idea es injustificada, que la gravedad relativista general es accesible intuitivamente y que la curvatura del espacio tiempo es una base conceptual natural para ella. Específicamente, en ese capítulo mostramos la estructura física y matemática de la TRG de tal manera que sea accesible y entendible conceptualmente por los lectores, es decir, presentamos la TRG como una teoría matemática de la gravedad motivada físicamente.

La TRG es la teoría del espacio-tiempo y la gravitación formulada por Einstein [4, 5]. Es a menudo considerada como una teoría difícil de entender, particularmente porque el nuevo punto de vista introducido sobre la naturaleza del espacio-tiempo se contrapone con nuestras nociones intuitivas comunes a él, y debido a que las matemáticas requeridas para una formulación precisa de las ideas y ecuaciones de la TRG (la geometría diferencial), no son familiares para muchos físicos. Aunque ha sido universalmente reconocido que la TRG es una teoría elegante, la relevancia potencial de ella para el resto de la física no fue universalmente reconocida durante prácticamente la primera mitad del siglo XX.

Un fuerte interés en la TRG comenzó a principios de la década de los cincuenta del siglo XX particularmente por dos grupos de físicos, el primero de ellos, de la Universidad de Princeton, dirigido por John Wheeler y el segundo, llamado el grupo de Londres, liderado por Herman Bondi. Las razones de este interés fueron dos desarrollos (que relacionan la TRG a otras áreas de la física y de la astronomía) que contribuyeron enormemente al interés sostenido en la TRG y el cual ha continuado desde entonces hasta el presente. El primero fue el descubrimiento astronómico de objetos compactos sumamente energéticos tales como cuasares y fuentes de rayos X compactas. Es probable que el colapso gravitacional de objetos compactos ó bien los campos gravitacionales fuertes jueguen un papel importante en estos fenómenos físicos y por lo tanto la TRG será necesaria para entender la estructura de estos objetos.

El segundo factor que promovió un renovado interés en la TRG provino de la física de partículas, particularmente de la idea de unificar las interacciones fundamentales no gravitatorias con la interacción gravitacional con el fin de lograr un entendimiento completo de las leyes físicas fundamentales de la naturaleza. Para ésto se requiere el desarrollo de una teoría cuántica de la gravitación lo cual no se ha logrado completamente hasta ahora.

Finalmente, en el presente la TRG ha llegado a ser una parte indispensable e integral de la física moderna. De manera creciente los estudiantes e investigadores contemporáneos en una amplia variedad de disciplinas encuentran necesario el estudio de la TRG. Además de ser un área de investigación activa por su propio derecho, TRG es parte del material estándar para cualquiera que este interesado en las áreas de astrofísica, cosmología, teoría de cuerdas, y aún física de partículas. Entre las predicciones teóricas notables de la TRG que están siendo verificadas observacionalmente se encuentran la existencia de hoyos negros y de las ondas gravitacionales emitidas por púlsares. Vale la pena mencionar que la primera aplicación tecnológica de TRG ha sido realizada en la red de satélites del sistema de posicionamiento global (GPS por sus siglas en inglés)[6].

Otra de las áreas en donde la TRG ha tenido un gran impacto es en la Cosmología ya que, por primera vez en nuestra historia, ella nos ha proporcionado las bases de una teoría del universo comprobable y autoconsistente. El descubrimiento de que el universo se esta expandiendo y que en el pasado fué mucho más caliente y denso dió como resultado la formulación de un modelo de evolución de nuestro universo llamado **el modelo del Big Bang** (también llamado el modelo estándar de la cosmología) el cual nos permite contestar algunas antiguas preguntas tales como (pero no todas): ¿porqué estamos en este lugar?, ¿de donde venimos?, y preguntas recientes como por ejemplo: ¿cómo se formarón los elementos de la tabla periódica?, ¿cómo se formarón las galaxias y los cúmulos de galaxias?, ¿porqué en grandes escalas de distancia el universo es tan homogéneo e isotrópico?. Es notable que con ayuda de este modelo (y algunos más recientes) podemos dar respuestas cuantitativas a algunas de estas preguntas combinando nuestro conocimiento de la física fundamental con nuestro entendimiento de las condiciones en que se encontraba el universo temprano. Aún más notable es el hecho de que estas respuestas pueden ser corroboradas ó descartadas usando observaciones astronómicas de gran precisión.

El éxito del **modelo del Big Bang** recaé sobre tres pilares observacionales: el diagrama de Hubble que muestra la expansión del universo; las abundancias de los elementos ligeros (hidrógeno, helio, litio, berilio, etc.) las cuales están en concordancia con el proceso de nucleosíntesis del **Big Bang**; y la radiación de cuerpo negro emitida en los primeros cientos de miles de años de existencia del universo, la cual es llamada **la radiación cósmica del fondo de microondas (RCFM)** y que fué detectada por Penzias y Wilson en 1965 [12, 7, 8].

La RCFM nos ofrece una mirada del universo cuando tenía solamente 300, 000 años de existencia. En ese tiempo los fotones de la RCFM fueron dispersados por última vez por electrones y desde entonces han viajado libremente a través del espacio hasta llegar a nosotros. Cuando los detectamos, han llegado desde los primeros momentos del universo. Estos fotones tienen por lo tanto información acerca de las condiciones físicas del universo en esos primeros instantes de su existencia. Un hecho crucial acerca de los fotones de la RCFM es que sus colisiones con los electrones antes de que fueran dispersados por última vez, garantizan que ellos estuvieran en equilibrio térmico lo que a su vez implica que tienen un espectro de frecuencias de cuerpo negro.

El objetivo principal de esta tesis es mostrar las propiedades principales de la radiación cósmica del fondo de microondas.

Capítulo 1

Herramientas básicas de Relatividad General

1.1. Antecedentes

Por las razones anteriores, el principal objetivo de este capítulo es presentar las herramientas matemáticas y conceptuales que nos permitan entender como los cálculos son realizados en TRG y lo que significan.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: la sección (1.2) proporciona un punto de vista heurístico de la gravedad y la geometría del espacio-tiempo junto con las ideas físicas que son la base de la teoría sin alguna herramienta matemática. Esta sección sirve como motivación para el desarrollo matemático de las secciones subsecuentes. Las herramientas matemáticas para un entendimiento cuantitativo de la teoría se desarrollan en las secciones (1.3) y (1.4). En esta última, introducimos la ecuación de las geodésicas, la noción de la curvatura del espacio-tiempo y las ecuaciones de campo de la TRG se muestran y se discuten. En la siguiente subsección definimos la notación y las convenciones que se usarán a lo largo de la tesis.

1.1.1. Notación y Convenciones

Para intentar maximizar la claridad en el desarrollo de las ecuaciones, en este trabajo incluiremos explícitamente el factor de la velocidad de la luz c, y la constante de la gravitación universal G.

En esta tesis trabajaremos en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de la TRG (tres dimesiones espaciales y una temporal). Un punto en el espacio-tiempo se especifica por los valores de sus cuatro coordenadas. Por conveniencia usaremos diferentes conjuntos de coordenadas para etiquetar un punto en el espacio-tiempo. Por ejemplo, para coordenadas esfericas usaremos (ct, r, θ, ϕ), o bien $(x^t, x^r, x^\theta, x^\phi)$. El símbolo general para una coordenada será una letra griega minúscula, por ejemplo x^μ, donde μ puede tener cualquier valor $0, 1, 2, 3$ ó t, r, θ, ϕ.

En el espacio-tiempo de Minkowski de la TER ,las mediciones en un sistema de referencia inercial particular son más fáciles de describir mediante el uso de las coordenadas Minkowskianas (ct, x, y, z). En este caso los índices numéricos toman los valores de 0 a 3 y x^0 siempre representa a la velocidad de la luz por la coordenada de tiempo, ct . Cuando usamos dos sistemas coordenados diferentes para el mismo espacio(tiempo) distinguimos uno del otro usando una prima sobre uno de ellos: $x^{\mu'}$. Un ejemplo muy familiar son las transformaciones de Lorentz entre dos sistemas de coordenadas minkowskianos. En el caso más simple del movimiento relativo a la velocidad v, solamente en la dirección x, la transformación es

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \qquad (1.1)$$

La forma más general de la transformación de Lorentz esta dada por

$$x' = \sum_\nu \Lambda^{\mu'}{}_\nu \, x^\nu \qquad (1.2)$$

donde la suma se realiza sobre el símbolo ν. Una convención notablemente útil y muy utilizada es la *convención de sumas*, la cual establece que cuando un índice está repetido en un término, uno como subíndice y el otro como superíndice, se asume una suma sobre él y por lo tanto se dice que es *mudo*. Bajo esta convención la ecuación (1.3) se escribe como

$$x' = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \, x^\nu \qquad (1.3)$$

entonces en este ejemplo el índice ν es mudo y μ' es llamado un índice libre. Para dos puntos (eventos) separados infinitesimalmente en el espacio-tiempo, con una separación dt, dx, dy, dz, definimos el intervalo entre ellos como

$$ds^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad . \qquad (1.4)$$

A continuación introducimos los símbolos $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ definidos por

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu \neq \nu \\ -1 & \text{si} \quad \mu = \nu = 0 \\ +1 & \text{si} \quad \mu = \nu = 1, 2, \text{ ó } 3 \end{cases} \tag{1.5}$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ son matrices inversas una de la otra, puesto que

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} \quad = \quad \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.6}$$

donde δ^{μ}_{ν} es la función delta de Kronecker. Reescribiendo el intervalo obtenemos

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{1.7}$$

el desplazamiento entre dos intervalos se etiqueta como espacial, nulo, o temporal dependiendo de si ds^2 es positivo, cero o negativo. Para desplazamientos temporales es útil usar $d\tau^2 = -(ds^2)/c^2$ donde $d\tau$ es el tiempo propio entre los eventos, es decir, el tiempo medido por un observador que se mueve sobre una curva temporal que pasa a través de ambos eventos.

La propiedad mas importante de la ecuación (1.4) y de (1.1) es que el intervalo entre dos eventos dados es siempre el mismo en cualquier sistema de coordenadas inerciales.

Los vectores serán denotados por letras en negritas. Un vector de suma importancia en TER es la cuadrivelocidad de una partícula la cual es el vector tangente a su curva y definida por

$$\mathbf{U} \equiv \left(\frac{\mathbf{ds}}{d\tau}\right) \tag{1.8}$$

donde **ds** es el desplazamiento diferencial a lo largo de la curva temporal de la partícula y $d\tau$ es el tiempo propio requerido para este desplazamiento. Las componentes del vector **U** en un sistema de coordenadas inerciales son

$$U^0 = c\left(\frac{dt}{d\tau}\right), \quad U^1 = U^x = c\left(\frac{dx}{d\tau}\right), \quad U^2 = U^y = c\left(\frac{dy}{d\tau}\right), \quad U^3 = U^z = c\left(\frac{dz}{d\tau}\right) \tag{1.9}$$

Para una transformación de Lorentz las componentes del vector **U** en un sistema de coordenadas minkowskiano se transforman de acuerdo a la siguiente ecuación

$$U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} U^{\nu} \quad . \tag{1.10}$$

El *producto punto* o *producto interior* de dos vectores en un espacio-tiempo esta definido por

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 = -c^2A^tB^t + A^xB^x + A^yB^y + A^zB^z \quad . \tag{1.11}$$

usando el símbolo $\eta_{\mu\nu}$ el producto punto entre dos vectores es simplemente

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \quad , \tag{1.12}$$

notemos ahora que el producto punto de la cuadrivelocidad consigo misma es

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \eta_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = -c^2 \quad . \tag{1.13}$$

En esta tesis asumiremos que la masa de una partícula se refiere a su masa en reposo y la denotaremos por m. Podemos ahora expresar el cuadrimomento como

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{U} \quad . \tag{1.14}$$

Notemos que para el caso particular de los fotones, la cuadrivelocidad $\mathbf{U}$ no esta definida (pues la cantidad $d\tau$ asociado a su curva es cero), sin embargo, se puede definir el cuadrimomento de fotones. Las componentes del cuadrimomento de una partícula en un sistema de referencia inercial son

$$p^0 = mc\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = mc\gamma \quad , \tag{1.15}$$

$$p^i = m\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) = m\gamma\left(\frac{dx^i}{dt}\right) \quad . \tag{1.16}$$

donde γ es el factor de Lorentz e i denota un índice espacial ($i = 1, 2, 3$ o x, y, z).

Cuando trabajamos en un espacio-tiempo es muy útil en algunas ocasiones conservar el concepto de un vector ordinario en tres dimensiones espaciales, tal como la velocidad ordinaria. Con esta notación tenemos por ejemplo que

$$\begin{gathered} \gamma = (1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/c^2)^{-1/2} \\ p^0 = mc\gamma, \quad \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \quad . \end{gathered} \tag{1.17}$$

1.2. Relatividad, Gravedad y Geometría

1.2.1. Geometría

Se dice que un espacio(tiempo) tiene una métrica si tenemos una manera de medir la separación entre dos puntos cercanos, que representaremos como (ds). Si x, y son las coordenadas en un espacio bidimensional real, una forma de (ds) puede ser, por ejemplo:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad . \tag{1.18}$$

Reconocemos esta formula inmediatamente como el elemento de distancia (o elemento de linea) de un espacio plano euclideano dos-dimensional descrito en coordenadas cartesianas. De la misma manera

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad , \tag{1.19}$$

es el elemento de linea de un espacio plano euclideano tridimensional igualmente descrito en coordenadas cartesianas y,

$$(ds)^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{1.20}$$

es el espacio-tiempo de Minkowski de la *TER*(*Teoría Especial de la Relatividad*) descrito en coordenadas asociadas a un sistema de referencia inercial. Las formulas (1.18), (1.19) y (1.20) son llamados elementos de linea asociados a la métrica del espacio (o espacio-tiempo) en consideración. La formula general para el cuadrado del elemento de linea $(ds)^2$ se escribe, de acuerdo a la convención de suma, de la siguiente manera:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \tag{1.21}$$

donde las x^ν son coordenadas definidas en una region local. Los coeficientes de la métrica, $g_{\mu\nu}$, no son constantes en general, como en las ecuaciones anteriores, sino que son funciones de las coordenadas x^β, es decir: $g_{\mu\nu}(x^\beta)$. De aquí en adelante asumiremos que la métrica es simétrica, es decir, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Definimos las cantidades $g^{\mu\nu}$ bajo la restricción

$$g_{\mu\alpha} g^{\mu\alpha} = \delta^\nu{}_\mu \quad . \tag{1.22}$$

El camino más simple para encontrar los coeficientes $g^{\mu\nu}$ es considerar los coeficientes de la métrica $g_{\mu\nu}$ como las entradas de una matriz, de manera que los elementos de $g^{\mu\nu}$ son las entradas correspondientes a la matriz inversa. Si podemos encontrar coordenadas $(x, y, z, w, ...)$ en todo el espacio-tiempo tales que la métrica se escribe en la forma mas simple

$$(ds)^2 = \pm(dx)^2 \pm (dy)^2 \pm (dz)^2 \pm ... \tag{1.23}$$

se dice que el espacio-tiempo y sus coordenadas asociadas son *planas* (estas coordenadas no son únicas por supuesto). El espacio es Euclidiano si todos los signos son positivos o bien negativos, y pseudo-euclidiano si hay algunos signos positivos y algunos negativos, por ejemplo, en un espacio-tiempo tenemos un signo diferente de los otros. Las coordenadas que no satisfacen la apariencia de la formula (1.23) son llamadas usualmente coordenadas *curvilíneas*. Es necesario notar que las coordenadas por si mismas son únicamente etiquetas y no tienen significado geométrico hasta que conocemos la estructura de la distancia asociada a ellas. La formula de la métrica define el significado geométrico de las coordenadas.

Elementos de línea que se ven muy diferentes pueden corresponder al mismo espacio(tiempo) descrito en diferentes sistemas de coordenadas. Por ejemplo,

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2 \quad \text{donde} \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\phi\phi} = r^2, \quad g_{r\phi} = 0 \tag{1.24}$$

no parece corresponder a un espacio plano euclideano, pero si utilizamos la transformación de coordenadas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$, logramos transformar (1.24) en $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, de donde el elemento de distancia corresponde a un espacio plano euclideano. En general el elemento de distancia ds es invariante ante cambios de coordenadas.

Una region suficientemente pequeña de una geometría curva es esencialmente plana pero, ¿pequeña comparada con que?. Por ejemplo, consideremos una region con un tamaño mucho menor que el radio de la tierra. En esta no podríamos apreciar la curvatura de la tierra y por lo tanto diríamos que la region es localmente plana. En este ejemplo la escala de longitud que determina la magnitud de los efectos de la curvatura es el radio de la tierra. Mientras más pequeña sea esta escala más curva será la geometría.

Cualquier geometría en una escala suficientemente pequeña es plana y por lo tanto es razonable que podamos introducir coordenadas planas en esa región. Podemos entonces escoger coordenadas tales que satisfacen

$$g_{\nu\mu} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{si} \quad \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.25}$$

en un punto P y además

$$\left(\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) = 0, \tag{1.26}$$

en una vecindad alrededor del punto P.

Estas coordenadas son localmente planas (LP), y tampoco son únicas en un punto. Las coordenadas LP serán importantes para consideraciones físicas en el espacio(tiempo) porque serán las coordenadas localmente Minkowskianas correspondientes a un sistema de referencia inercial local.

Otro punto importante sobre la geometría es lo referente a una clase especial de curvas llamadas *geodésicas*. En el espacio(tiempo) plano existen curvas especiales: las líneas rectas, que son simplemente una relación lineal entre las coordenadas planas que pueden ser escritas en la forma parametrizada

$$x^{\mu} = a^{\mu}\sigma + b^{\nu} \tag{1.27}$$

donde σ es el parámetro a lo largo de la curva y a^{μ}, b^{μ} son cuadrivectores constantes.

En un espacio-tiempo curvo no hay sistema preferido de coordenadas. El concepto de una línea recta es remplazado por el concepto de una *geodésica, una curva que es localmente tan recta como es posible*. El desarrollo de la descripción matemática de geodésicas requiere nuevas herramientas matemáticas que describiremos hasta la sección (1.7). Por ahora haremos una derivación basada sobre el hecho de que las geodésicas, al igual que las líneas rectas en un espacio(tiempo) plano, son curvas de longitud extrema (mínima o máxima) entre dos puntos. Nos restringiremos al caso de curvas geodésicas temporales entre dos puntos, P_a y P_b, en un espacio-tiempo curvo aunque la ecuación que derivaremos es válida para curvas geodésicas tipo espacio y nulas. Especificamos una curva temporal dando las coordenadas $x^{\mu}(\lambda)$, donde λ es un parámetro que toma valores a lo largo de la curva empezando en $\lambda = 0$ en P_a a $\lambda = 1$ en P_b. A lo largo de esta curva el tiempo propio se incrementa acorde a

$$d\tau = (-c^{-2}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu})^{1/2} = \left(-c^{-2}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{1/2} d\lambda \equiv F\left(x^{\beta}, \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\right) d\lambda \tag{1.28}$$

y el tiempo propio total se escribe como

$$\tau \equiv \int_0^1 F\left(x^\beta, \frac{dx^\beta}{d\lambda}\right) d\lambda \tag{1.29}$$

F es considerada una función de las coordenadas x^β y las derivadas $\left(dx^\beta/d\lambda\right)$.

La integral en la ecuación (1.29) debe ser extremizada a fín de que la curva sea una geodésica temporal. La condición necesaria para que la integral (1.29) sea un extremo se encuentra de la variación de Euler-Lagrange usual (similar a la que se utiliza en la mecánica clásica Newtoniana). El resultado es que la curva geodésica temporal debe satisfacer las ecuaciones,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial(dx^\alpha/d\lambda)}\right) = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \tag{1.30}$$

Introduciendo F definida en (1.28) en la ecuación (1.30) resulta en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para las funciones $x^\mu(\lambda)$

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}\right) = g_{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}F^{-1}\frac{dF}{d\lambda} \tag{1.31}$$

La curva $x(\lambda)$ puede ser parametrizada de muchas maneras diferentes, es decir, que λ puede ser cualquier parámetro a lo largo de la curva. La elección más simple para λ es $\lambda = \tau$, el tiempo propio a lo largo de la curva. Dado que $F = d\tau/d\lambda$ en general, $F = 1$ para esta elección y el lado derecho de la ecuación (1.31) se anula, lo cual nos conduce al siquiente resultado:

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}\right) = 0 \tag{1.32}$$

la cual es la ecuación para las geodésicas temporales en su forma mas común. Si $d\tau$ se remplaza por ds, la ecuación (1.32) es la ecuación para las geodésicas tipo espacio parametrizadas por su longitud. La ecuación (1.32) tambien describe geodésicas nulas si remplazamos a τ por un parámetro apropiado para curvas nulas. La ecuación (1.32) tambien es compatible con nuestro punto de vista local en el siguiente sentido: en un sistema coordenado LF en un punto P las derivadas parciales de los coeficientes métricos se anulan en P, de tal forma que la ecuación (1.32) se reduce a

$$\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}\right) = 0 \quad , \tag{1.33}$$

es decir, que la curva es localmente recta en coordenadas LF. Note la forma en que las derivadas parciales de $g_{\mu\nu}$ aparecen en la ecuación (1.32) para decribir una geodésica en coordenadas no LF.

1.2.2. Gravedad y Geometría

Consideremos una partícula puntual libre, en el sentido que la única influencia sobre su movimiento es la gravedad. En algún momento, digamos t_0, podemos especificar el movimiento de una partícula, por ejemplo, podemos especificar su velocidad y posición en algún sistema de referencia inercial. Utilizando el principio de equivalencia sabemos que el movimiento subsecuente de la partícula es independiente de su naturaleza (masa, carga, etc). En otras palabras, la dinámica de una partícula libre esta completamente especificada independientemente de sus propiedades.

La descripción completa de los efectos dinámicos de la gravedad en el espacio-tiempo puede ser descrita por todas las posibles líneas curvas que siguen las partículas libres.

En el caso de un espacio-tiempo donde no existe la interacción gravitacional, tenemos que éste es el de Minkowski; en este caso, las partículas libres siguen geodésicas que son rectas temporales. Para encontrar las bases geométricas de las curvas en presencia de la gravedad recurriremos al principio de equivalencia. De acuerdo a este principio podemos desterrar localmente la gravedad usando un sistema de referencia local libre de ella. El clásico ejemplo es un elevador en caída libre en el campo gravitacional de la tierra. El elevador y todos los objetos en él experimentan la misma aceleración gravitacional, medida por un observador en reposo sobre la superficie de la tierra, es decir, todos caen juntos sin aceleración relativa. Un cambio a un sistema de referencia en caída libre junto con el elevador elimina la fuerza de gravedad debido a que el observador en caída libre mide una aceleración nula del elevador y de los objetos que se encuentran en él. Por lo tanto la fuerza de gravedad no puede ser una fuerza real, sino una pseudo-fuerza tal como la fuerza centrífuga.

Es cierto que el aspecto más común de la gravedad, el peso, desaparece en un sistema en caída libre y podemos considerarlo como una pseudo-fuerza y no como una fuerza real pero no es cierto que todos los efectos de la gravedad desaparezcan en un sistema en caída libre. En realidad hay una aceleración relativa de aproximadamente $4 \times 10^{-4} cm/seg^2$ entre un objeto en la cima y el suelo del elevador, esto se debe a que el suelo está más cerca del centro de la tierra que la cima del elevador, experimentando una aceleración gravitacional ligeramente mayor. Si el elevador es suficientemente pequeño, éste es una buena aproximación a un sistema inercial libre de la gravedad (sistema localmente inercial).

No podemos construir coordenadas x^ν globales en las cuales todas las curvas temporales de las partículas libres tengan la forma $x^\nu = a^\nu \sigma + b^\nu$; si pudiéramos hacerlo no habría aceleración relativa entre ellas y no habría efectos gravitacionales en una región del espacio-tiempo. Lo mejor que podemos hacer es construir coordenadas locales en las cuales todas las partículas libres no tienen aceleración en algún punto particular P y una región suficientemente pequeña alrededor de él.

Las implicaciones de estas consideraciones son claras:

- El espacio-tiempo es curvo.
- Existen sistemas de coordenados localmente planas (LP) definidas sobre pequeñas regiones del espacio-tiempo. Estas corresponden a sistemas inerciales en caída libre.
- Las partículas libres siguen curvas geodésicas.

En resumen: ***La unión de la geometría y de la gravedad en el espacio-tiempo nos permite concluir que éste es curvo, y que las partículas libres siguen geodésicas.***

Remplacemos la ecuación de la fuerza Newtoniana

$$\mathbf{F} = -m\nabla\phi \tag{1.34}$$

por el principio dinámico *curvas de partículas libres de fuerzas = geodésicas.* Con ésto tenemos al menos conceptualmente la mitad de la estructura de la Teoría General de la

Relatividad.

La otra mitad se refiere a la tarea de determinar la curvatura del espacio-tiempo. En la teoría Newtoniana la ecuación que relaciona las fuentes de materia con el campo gravitacional ϕ es:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \tag{1.35}$$

En nuestra teoría geométrica de gravedad, queremos remplazar esta ecuación por otra de la forma:

Curvatura =fuente material de gravedad (densidad de masa-energía, etc.) (1.36)

De manera similar como $\nabla^2\phi$ se anula en el exterior de una fuente gravitacional, la ecuación anterior requiere que la curvatura se anule afuera de la fuente. Ésto implica que no hay influencia gravitacional cerca de la tierra debido al sol, una conclusion que está en desacuerdo con las observaciones. En la teoría Newtoniana este problema se resuelve diciendo que $\nabla\phi$ describe los efectos de la gravedad y, claramente $\nabla\phi$ no va a cero necesariamente cuando $\nabla^2\phi$ se anula, lo cual implica que los efectos gravitacionales se extienden en el exterior de la fuente.

Similarmente en un espacio-tiempo, la descripción de la gravedad debe tener dos medidas distintas de la curvatura. El análogo del término $\nabla\phi$ será la curvatura de Riemann que es la apropiada para describir los efectos de la gravedad. De igual manera que $\nabla\phi = 0$ significa que no hay gravedad, la anulación de la curvatura de Riemann garantiza que no hay efectos gravitacionales y por lo tanto no hay curvatura, es decir el espacio-tiempo es plano. El análogo de $\nabla^2\phi$ es llamado *la curvatura de Ricci*. La curvatura de Ricci puede ser cero sin necesidad de que la curvatura de Riemann lo sea. La estructura de la teoría relativista de gravedad se resume como sigue:

- Las curvas geodésicas asociadas a partículas libres y la aceleración relativa entre ellas están determinadas por la curvatura de Riemann.

- La curvatura de Ricci es "la fuente gravitacional", la parte izquierda de la ecuación (2.7).

Estas afirmaciones no solo son válidas en la teoría de la gravitación de Einstein, sino a la mayoría de las teorías alternativas llamadas teorías métricas de la gravedad; estas teorías satisfacen el principio de equivalencia. La teoría de Einstein es la más simple de estas teorías, pues la fuente de la curvatura de Ricci involucra únicamente densidades de energía no gravitacionales, tales como el momento de flujo de materia, etc. En las teorías alternativas métricas de la gravedad hay, además del tensor métrico, nuevos campos gravitacionales tales como campos vectoriales o campos escalares.

1.3. Vectores y Tensores en Espacios Curvos

1.3.1. Vectores y bases

Un vector en el espacio-tiempo plano es un segmento de línea de recta de un punto a otro. En un espacio tiempo curvo, tal concepto no tiene un significado claro puesto que no hay líneas rectas. En este caso, sin embargo,podemos retener el concepto de vector para un desplazamiento diferencial $\mathbf{ds}$, el desplazamiento entre dos puntos separados infinitesimalmente. Heuristicamente, tal desplazamiento diferencial es demasido pequeño por lo cual no toma en cuenta la curvatura de la geometría. Intuitivamente si $\mathbf{ds}$ es un vector en algún punto podemos hacer con él todas las cosas que usualmente hacemos con los vectores que pertenecen a un espacio vectorial en algebra lineal. En un punto dado, los vectores de desplazamiento diferencial en un espacio- tiempo n dimensional forman un espacio vectorial n dimensional. Esto es particularmente claro desde un punto de vista localmente plano(recordemos que siempre podemos escoger una región localmente plana alrededor del punto). ***Por lo tanto el álgebra de vectores en un punto dado no depende de si el espacio tiempo es curvo o plano***. Por lo tanto podemos sumar estos vectores, multiplicarlos por escalares, etc.

Tenemos un ejemplo importante de lo anterior en el espacio plano tridimensional de la física clasica. Si una particula experimenta un desplazamiento $\vec{\mathbf{ds}}$ en un tiempo dt podemos definir su vector velocidad como $\vec{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}/dt$. En un espacio-tiempo (curvo o plano) el vector velocidad análogo es la cuadrivelocidad definida por

$$\mathbf{U}^{\mu} \equiv \left(\frac{\mathbf{ds}^{\mu}}{d\tau}\right) \quad , \tag{1.37}$$

donde $d\tau$ es el tiempo propio que la partícula requiere para realizar el desplazamiento $\mathbf{ds}^\mu$ y el cual es un escalar. Podemos multiplicar la ecuación (1.37) por otro escalar m, el cual es la masa en reposo de la partícula, para formar otro vector importante llamado el *cuadrimomento* de la partícula

$$\mathbf{p}^\mu \equiv m\mathbf{U}^\mu \tag{1.38}$$

localmente estos vectores tienen su significado usual en TER. Especificamente, el vector $\mathbf{p}^\mu$, es precisamente el cuadrimomento asignado a la partícula por un observador en un sistema en caída libre localmente Minkowskiano.

Para un fotón la ecuación (1.38) no es válida debido a que el fotón no tiene masa. En este caso el cuadrimomento del fotón se define como el vector que en un sistema localmente inercial es el cuadrimomento usual definido en TER.

Como en TER y en la mecánica clásica la importancia de los vectores esta basada en la importancia del desplazamiento: $\mathbf{ds}$. Los desplazamientos son el punto de partida para la cinemática y por lo tanto de la dinámica. Los vectores velocidad y momento lineal $\mathbf{v}, \mathbf{p}$ necesariamente surgen en la descripción del movimiento. Las leyes de movimiento, son necesariamente leyes vectoriales.

Una operación importante es el *producto escalar*, o *producto punto* de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, el cual es lineal en cada vector y que da como resultado un escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Sabemos en principio como calcular productos escalares en espacio-tiempo curvos: podemos ir a un sistema coordenado localmente Minkowskiano y calcular ahí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ tal como en TER. Por lo tanto debe ser cierto que

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = -c^2 \quad , \tag{1.39}$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -m^2c^2 \tag{1.40}$$

pues lo es en TER. De manera similar que en TER llamaremos a un vector espacial si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} > 0$, temporal si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} < 0$, y nulo si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 0$. El conjunto de vectores definidos sobre un punto P del espacio-tiempo forma un espacio vectorial y por lo tanto podemos escoger una base de vectores (N vectores linealmente independientes en un punto P del espacio-tiempo). A los elementos de una base los denotaremos por $\mathbf{e}_\mu$ (note que vectores y vectores de una base tienen significado solo en un punto dado; la relación de vectores en diferentes puntos del espacio-tiempo será dada más adelante). Dada una base de vectores $\{\mathbf{e}_\mu\}$, un vector $\mathbf{W}$ puede describirse como

$$\mathbf{W} = W^\mu \mathbf{e}_\mu \tag{1.41}$$

donde W^μ son las componentes del vector $\mathbf{W}$ en la base $\mathbf{e}_\mu$. La base se escoge de cualquier manera que sea conveniente. Los componentes de un vector dependen de la base de vectores elegida. Si cambiamos la base las componentes del vector deben cambiar, de manera que el vector $\mathbf{W} = W^\mu \mathbf{e}_\mu$ no cambie.

En esta tesis usaremos un tipo especial de base el cual define en cada punto en el espacio-tiempo un conjunto de vectores base ***univocamente definido por el sistema coordenado escogido*** el cual es llamado una base de vectores coordenados.

Formalmente hablando, una base de vectores coordenados $\{\mathbf{e}_\mu \,|\, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ es la base en la cual un conjunto de incrementos coordenados infinitesimales dx^μ da un desplazamiento

$$\mathbf{ds} = dx^\mu \mathbf{e}_\mu \tag{1.42}$$

En otras palabras: las componentes, en una base de vectores coordenados, del vector desplazamiento son los cambios coordenados. El ejemplo más simple es el sistema coordenado cartesiano en el espacio-tiempo de Minkowski

$$\mathbf{ds} = c\,dt\,\mathbf{e}_t + dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z \quad . \tag{1.43}$$

La distancia, o intervalo, asignado al desplazamiento $\mathbf{ds}$ debe coincidir con la estructura geométrica del espacio-tiempo, como lo dicta la fórmula métrica. Este hecho y la linealidad del producto escalar, nos lleva a un importante hecho acerca de las bases de vectores coordenados:

$$\mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds} = (dx^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \mathbf{e}_\nu) = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu \quad . \tag{1.44}$$

Debido a que

$$\mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds} = (ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.45}$$

el producto escalar de los vectores base coordenados están relacionados con las componentes de la métrica por la relación

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu} \tag{1.46}$$

Esto muestra que los vectores de la base son ortonormales si y sólo si las coordenadas son planas. Para efectos prácticos utilizaremos indistintamente la notación

$$\mathbf{e}_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \tag{1.47}$$

la cual es ampliamente utilizada en otros textos. Finalmente podemos caracterizar a un vector $\mathbf{A}$ no únicamente por sus componentes contravariantes, A^μ, sino también por sus componentes covariantes, A_μ, definidas cómo

$$A_\mu \equiv g_{\mu\alpha} A^\alpha \quad . \tag{1.48}$$

Para encontrar las componentes contravariantes en términos de las covariantes podemos multiplicar la ecuación anterior por $g^{\beta\mu}$ y sumar sobre el índice μ:

$$g^{\beta\mu} A_\mu = g^{\beta\mu} g_{\mu\alpha} A^\alpha = \delta^\beta{}_\alpha A^\alpha = A^\beta \quad . \tag{1.49}$$

Las bases de vectores coordenados facilitan y simplifican los cálculos y de aquí en adelante las usaremos ampliamente.

1.3.2. Tensores

La necesidad de tratar con relaciones lineales entre vectores en un punto dado da lugar inevitablemente a nuevos objetos matemáticos, diferentes de los vectores, llamados tensores. Como un ejemplo, supongamos que un vector $\mathbf{V}$ es una función lineal de otro vector $\mathbf{W}$. Entonces dado una base de vectores coordenados las componentes V^μ deben depender linealmente de las componentes W^μ, es decir

$$V^\mu = T^\mu{}_\nu W^\nu \quad . \tag{1.50}$$

El símbolo indexado $T^\mu{}_\nu$ representa N^2 números (en un punto en un espacio-tiempo de N dimensiones) y estos números estan definidos por la relación de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$. Veamos un ejemplo más: consideremos un escalar f, que es una función lineal de tres vectores, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, en una base de vectores coordenados de manera que:

$$f = S_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}^\beta \mathbf{C}^\gamma \tag{1.51}$$

donde $S_{\alpha\beta\gamma}$ representa N^3 números en general. Las ecuaciones anteriores son llamadas *ecuaciones tensoriales* ya que son ecuaciones que expresan relaciones lineales entre vectores. Los símbolos $T^{\mu}{}_{\nu}$ y $S_{\alpha\beta\gamma}$ son llamados componentes tensoriales de los tensores **T** y **S** respectivamente. El rango del tensor se refiere al número de índices distintos de sus componentes. De esta manera el tensor **T** tiene rango dos, en tanto que el tensor **S** tiene rango tres. Los vectores son considerados tensores de rango uno y los escalares son tensores de rango cero.

Uno de los tensores más importantes en relatividad especial y general es el *tensor de energía-momento*, el cual es un tensor de rango dos y se define en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones por

$$(dF^{\mu}) = T^{\mu}{}_{\nu}(dA)^{\nu} \quad , \tag{1.52}$$

donde $d\mathbf{A}$ es un vector que representa un elemento diferencial de área en un medio material, cuya dirección es normal al área y apunta de adentro hacia afuera. El vector $d\mathbf{F}$ representa a la fuerza transmitida a través del área, debido al material dentro del área, actuando sobre el material afuera de ella. La fuerza es proporcional al tamaño del área y linealmente dependiente del vector $d\mathbf{A}$. En un medio isotropico $d\mathbf{F}$ debe de ser paralelo a $d\mathbf{A}$ y los componentes del tensor son

$$T^{\mu}{}_{\nu} = p\delta^{\mu}{}_{\nu} \quad . \tag{1.53}$$

donde p es la presión del medio material. Al igual que para las componentes vectoriales, los índices de las componentes tensoriales pueden ser "subidos o bajados". En una base de vectores coordenados esto se hace con las componentes del tensor mêtrico, $g_{\mu\nu}$ y su inversa, $g^{\mu\nu}$. Por ejemplo

$$T^{\mu\nu}{}_{\alpha} = g^{\mu\gamma}T_{\gamma}{}^{\nu}{}_{\alpha} = g_{\alpha\beta}T^{\mu\nu\beta} \quad . \tag{1.54}$$

Si utilizamos los resultados (1.22),(1.48),(1.49) podemos concluir que las siguientes ecuaciones representan la misma relación

$$V^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu}W^{\nu} \quad . \tag{1.55}$$

$$V^{\mu} = T^{\mu\nu}W_{\nu} \quad . \tag{1.56}$$

$$V_{\mu} = T_{\mu\nu}W^{\nu} \quad . \tag{1.57}$$

$$V_\mu = T_\mu{}^\nu W_\nu \quad . \tag{1.58}$$

Al igual que en análisis vectorial, un subíndice es llamado un índice covariante y un superíndice es conocido como un índice contravariante. Los valores numéricos de las componentes de un tensor, en general, dependen de sí los índices son covariantes o contravariantes, pues por ejemplo $T_1{}^2 \neq T_{12}$.

Decimos que un tensor es simétrico sobre dos de sus índices si el intercambio de éstos no cambia el valor de la componente. Por ejemplo, un tensor de rango tres **Q**, es simétrico en su primer y tercer índice si

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\gamma\beta\alpha}, \quad \forall\ \alpha\,,\beta\,,\gamma. \tag{1.59}$$

El intercambio entre dos índices es, por supuesto, entre dos índices covariantes o los dos contravariantes. Es fácil verificar que el tensor de energía momento es simétrico y ésto quiere decir que hay solo 10 componentes independientes de las $N^2 = 4^2 = 16$ componentes en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

Un tensor muy importante en geometría es *el tensor métrico* $\boldsymbol{g}$, el cual esta definido mediante el producto escalar o producto interior entre vectores.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son dos vectores cualesquiera, el producto escalar es un escalar, llamado S, dado por

$$S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu\ B^\nu \tag{1.60}$$

los componentes de $\boldsymbol{g}$ son fáciles de encontrar en una base ya que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (B^\nu \mathbf{e}_\nu) = A^\mu B^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad . \tag{1.61}$$

Y por lo tanto

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \tag{1.62}$$

Es claro que los coeficientes $g_{\mu\nu}$ son precisamente los coeficientes del tensor métrico.

Estamos introduciendo tensores, en términos de cantidades indexadas que surgen en la descripción de relaciones lineales entre vectores. Estos números indexados dependen de la base usada. Las componentes de los tensores deben cambiar cuando cambiamos de una base a otra de tal manera que sigan representando la misma relación lineal entre vectores.

Cualquier cantidad indexada cuyos valores no se transformen de esta manera no puede representar una relación lineal entre vectores y en consecuencia no puede ser un tensor.

A continuación daremos las leyes de transformación para las componentes de tensores en general bajo un cambio de base de vectores coordenados.

1.3.3. Transformaciones tensoriales

Transformaciones de escalares (tensores de rango cero)

Una función $\mathbf{f}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \mathbf{f}(x^\mu)$ es un escalar o un tensor de rango cero, si ante una transformación de coordenadas, $x'^\beta = x'^\beta(x^\mu)$, el valor de $\mathbf{f}$ no cambia, solo cambian las coordenadas.

Por ejemplo: sea $\mathbf{f} = (x^1)^2$ y hagamos una transformación de coordenadas $x'^1 = x'^1 + x'^2$, esto implicaría que $\mathbf{f} = (x'^1 + x'^2)$.

Transformaciones de vectores (tensores de rango uno contravariantes)

El conjunto de vectores definido en un punto del espacio-tiempo es un espacio vectorial llamado el espacio tangente y se denota por $T_p(M)$. Formalmente el espacio tangente es el espacio vectorial de todos los mapeos lineales que asocian un número real a cada función infinitamente diferenciable, es decir, si $\boldsymbol{U}$ es un vector, $f, g \in C^\infty$ y $a, b \in \Re$, entonces, $\boldsymbol{U} : C^\infty \to \Re$,

$$\boldsymbol{U}(f) \in \Re \tag{1.63}$$

$$\boldsymbol{U}(af + bg) = a\,\boldsymbol{U}(f) + b\,\boldsymbol{U}(g) \tag{1.64}$$

Esta definición es congruente con la noción de vectores tratada en la subsección *Vectores y bases*.

Una transformación de coordenadas implica un cambio de base de vectores coordenados del espacio tangente ya que:

$$\mathbf{e}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'^\beta}\right) = \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\right)\mathbf{e}'_\beta \tag{1.65}$$

Veamos como se transforman las componentes contravariantes de un vector o tensor de rango uno. Sea el vector $\boldsymbol{U}$ definido por,

$$\boldsymbol{U} = U^{\mu}(x^{\alpha})\mathbf{e}_{\mu} = U^{\mu}(x^{\alpha})\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{1.66}$$

veamos ahora como se transforma. Sabemos que

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\right\}_{\mu=0}^{3} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{0}}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x^{1}}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x^{2}}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x^{3}}\right)\right\} \tag{1.67}$$

forma una base, entonces usando (1.65) tenemos

$$\boldsymbol{U} = U^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) = U^{\mu}\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}\right) = U'^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}\right) \tag{1.68}$$

de donde

$$U'^{\alpha} = U^{\mu}\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{1.69}$$

(1.69) es la transformación de las componentes de un vector ante un cambio de coordenadas. Obtengamos ahora la transformación inversa multiplicando ambos lados de (1.69) por el factor $(\partial x^{\beta}/\partial x'^{\alpha})$

$$\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right)U'^{\alpha} = U^{\mu}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) = U^{\mu}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\right) = U^{\mu}\delta_{\mu}^{\beta} = U^{\beta} \quad , \tag{1.70}$$

es decir que

$$U^{\beta} = U'^{\alpha}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right) \quad . \tag{1.71}$$

Transformaciones de covectores

Llamemos Λ al espacio vectorial dual al espacio tangente definido en un punto del espacio-tiempo (Λ también es llamado el espacio cotangente y se denota por $T_p^*(M)$). Por definición tenemos que Λ es el espacio vectorial de todos los mapeos lineales que asocian un número real a cada vector del espacio tangente, es decir, si $\boldsymbol{V}$ es un elemento del espacio cotangente, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ son vectores y $a, b \in \Re$, entonces, $\boldsymbol{V} : T_p(M) \rightarrow \Re$,

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{U}) \in \Re \tag{1.72}$$

$$\boldsymbol{V}(a\,\boldsymbol{U} + b\,\boldsymbol{W}) = a\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{U}) + b\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}) \tag{1.73}$$

A los elementos del espacio cotangente también se les llama covectores. En el espacio cotangente existen bases de covectores coordenados definidos en un sistema de coordenadas, $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, por,

$$\{dx^\mu\}_{\mu=0}^3 = \left\{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\right\} \tag{1.74}$$

Estos covectores coordenados de la base actúan sobre vectores de la siguiente forma:

$$dx^\nu(\boldsymbol{U}) = dx^\nu \left[U^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right] = U^\mu dx^\nu \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right] \equiv U^\mu \left[\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}\right)\right] = U^\mu \delta^\nu_\mu = U^\nu \tag{1.75}$$

Cualquier covector $\boldsymbol{V}$ se puede expresar en términos de una base de covectores coordenados

$$\boldsymbol{V} = V_\mu dx^\mu \tag{1.76}$$

Una transformación de coordenadas implica un cambio de base de covectores coordenados del espacio cotangente ya que:

$$dx^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\right) dx'^\beta \tag{1.77}$$

Veamos como se transforman las componentes covariantes de un covector. Sea el covector $\boldsymbol{V}$ definido por la ecuación (1.76). Aplicamos la transformación de los vectores base coordenados (1.77) a (1.76),

$$\boldsymbol{V} = V_\mu dx^\mu = V_\mu \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\right) dx'^\beta = V'_\beta \, dx'^\beta \tag{1.78}$$

de (1.78) obtenemos,

$$V'_\beta = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\right) V_\mu \tag{1.79}$$

(1.79) es la transformación de las componentes de un covector ante un cambio de coordenadas. Obtengamos ahora la transformación inversa multiplicando ambos lados de (1.79) por el factor $(\partial x'^\beta / \partial x^\alpha)$ obtenemos,

$$V_\alpha = \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\right) V'_\beta \tag{1.80}$$

Definición del producto escalar

Definimos el producto escalar o punto entre un covector $\boldsymbol{V}$ y un vector $\boldsymbol{U}$ como,

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U} = V_\mu dx^\mu\left[U^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right] = V_\mu U^\alpha dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = V_\mu U^\alpha\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1.81}$$

$$\tag{1.82}$$

$$= V_\mu U^\alpha \delta^\mu_\alpha = V_\mu \cdot U^\mu = g_{\mu\nu}V^\mu U^\nu \quad . \tag{1.83}$$

Transformaciones Tensoriales

El objetivo de esta sección es estudiar las transformaciones de las componentes contravariantes o covariantes de un tensor de rango arbitrario bajo una transformación de coordenadas.

Los tensores contravariantes de rango k, definidos en un punto del espacio-tiempo, forman un espacio vectorial de dimensión 4^k. A continuación definimos el producto tensorial de vectores el cual será útil para construir una base de tensores contravariantes.

Sean k funciones $f, g, ..., h \in C^\infty$, definimos el producto tensorial, entre los k vectores $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, ..., $\boldsymbol{W}$ como el mapeo

$$\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{V}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W} : (f, g, ..., h) \to \Re \tag{1.84}$$

tal que

$$\begin{gathered}
[\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{V}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}](f, g, ..., h) \equiv \\
\left[U^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\otimes V^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\otimes ... \otimes W^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right](f, g, ..., h) = \\
U^\mu V^\nu .... W^\alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right](f, g, ..., h) = \\
U^\mu V^\nu ... W^\alpha\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x^\nu}\right)\cdot ... \cdot\left(\frac{\partial h}{\partial x^\alpha}\right)\right] \quad .
\end{gathered} \tag{1.85}$$

Podemos construir una base de tensores contravariantes coordenados de rango k a partir de una base de vectores coordenados usando el producto tensorial de vectores. Esta base está definida como el siguiente conjunto de tensores k-veces contravariantes,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)\right\}_{\mu,\nu,\ldots,\alpha=0}^{3} \tag{1.86}$$

Entonces podemos expresar cualquier tensor, $\boldsymbol{U}$, k-veces contravariante en términos de esta base,

$$\boldsymbol{U}=U^{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\right) \tag{1.87}$$

Veamos como se transforman bajo un cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{U}=U^{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\right)=$$

$$U^{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right)\otimes\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}}\right)=$$

$$U^{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)\ldots\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}}\right)\right]\equiv$$

$$U'^{\mu\nu\ldots\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}}\right)\right]$$

de donde

$$U'^{\mu\nu\ldots\rho}=U^{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)\ldots\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\right) \tag{1.88}$$

Mientras que para la transformación inversa tenemos,

$$U^{\alpha\beta\ldots\gamma}=U'^{\mu\nu\ldots\rho}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)\ldots\left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}}\right) \tag{1.89}$$

Por ejemplo, dado que la métrica inversa es un tensor contravariante simétrico de rango dos entonces la podemos expresar como,

$$\boldsymbol{g} \;=\; g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) \quad , \tag{1.90}$$

con la condición $g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$. Entonces las componentes de la métrica inversa se transforman bajo un cambio de coordenadas como

$$g'^{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) \tag{1.91}$$

Sean $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Sigma}, ..., \boldsymbol{\Omega}$ covectores sean $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ vectores. Demanera similar definimos el producto tensorial de covectores como el mapeo:

$$\boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Sigma} \otimes .... \otimes \boldsymbol{\Omega} : (\mathbf{U}, \mathbf{V}, ..., \mathbf{W}) \to \Re \tag{1.92}$$

tal que

$$\begin{gathered}
[\boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Sigma} \otimes ... \otimes \boldsymbol{\Omega}](\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \otimes ... \otimes \mathbf{W}) \equiv \\
\Lambda_\alpha dx^\alpha \otimes \Sigma_\beta dx^\beta \otimes ... \otimes \Omega_\rho dx^\rho \left[U^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \otimes V^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \otimes ... \otimes W^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x^\eta} \right) \right] = \\
\Lambda_\alpha \Sigma_\beta ... \Omega_\rho \cdot U^\mu V^\nu ... W^\eta \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \right) ... \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^\eta} \right) = \\
\Lambda_\alpha \Sigma_\beta ... \Omega_\rho \cdot U^\mu V^\nu ... W^\eta \, \delta^\alpha_\nu \, \delta^\beta_\nu ... \, \delta^\rho_\eta = \Lambda_\mu \Sigma_\nu ... \Omega_\eta \cdot U^\mu V^\nu ... W^\eta
\end{gathered} \tag{1.93}$$

Para el espacio vectorial de tensores k-veces covariantes podemos construir una base de tensores covariantes coordenados de rango k a partir de una base de covectores coordenados usando el producto tensorial de covectores. Esta base está definida como el siguiente conjunto de tensores k-veces covariantes,

$$\left\{ dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes ... \otimes dx^\gamma \right\}^3_{\alpha, \beta, ..., \gamma = 0} \tag{1.94}$$

Entonces en general un tensor, $\boldsymbol{\Lambda}$, k veces covariante se puede expresar en términos de esta base como,

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta...\gamma} \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\alpha \otimes \mathrm{d}\mathbf{x}^\beta \otimes .... \otimes \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\gamma \quad . \tag{1.95}$$

Analicemos como se tranforman ante un cambio de coordenadas,

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta...\gamma} \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\alpha \otimes \mathrm{d}\mathbf{x}^\beta \otimes .... \otimes \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\gamma = \\
\Lambda_{\alpha\beta.....\gamma} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) dx'^\mu \otimes \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right) dx'^\nu \otimes ... \otimes \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \right) dx'^\rho = \\
\Lambda_{\alpha\beta...\gamma} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \cdot \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right) \cdot ... \cdot \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \right) \left[dx'^\mu \otimes dx'^\nu \otimes ... \otimes dx'^\rho \right] \\
\equiv \Lambda'_{\mu\nu...\rho} \left[dx'^\mu \otimes dx'^\nu \otimes .... \otimes dx'^\rho \right]
\end{gathered} \tag{1.96}$$

de donde obtenemos,

$$\Lambda'_{\mu\nu\ldots\rho} = \Lambda_{\alpha\beta\ldots\gamma}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho}\right) \tag{1.97}$$

y para la transformación inversa tenemos,

$$\Lambda'_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \Lambda'_{\mu\nu\ldots\rho}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma}\right) \tag{1.98}$$

Por ejemplo, la métrica es un tensor covariante simétrico de rango dos dado por,

$$\boldsymbol{g} \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{1.99}$$

con la condición $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ Entonces las componentes covariantes de la métrica se transforman bajo un cambio de coordenadas como,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\right) \quad . \tag{1.100}$$

A continuación, enumeremos sin prueba algunas de las características sobresalientes de los tensores covariantes y contravariantes:

1. Si todas las componentes de un tensor son cero en una base entonces las componentes en cualquier otra base también son cero.

2. Si cualesquiera dos índices de las componentes de un tensor son simétricos en una base, entonces son simétricos en cualquier otra base

3. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son dos vectores, entonces $A_\mu B_\nu$ son las *componentes tensoriales covariantes* de un tensor de segundo rango. De manera similar $A^\mu B^\nu$ son las *componentes tensoriales contravariantes*, y $A^\mu B_\nu$ y $A_\mu B^\nu$ son las *componentes mixtas* de ese tensor. Un tensor de rango $r_1 + r_2$ puede ser formado por los tensores de rango r_1 y r_2.

4. Sumar (Contraer) sobre un índice covariante y contravariante de un tensor de rango $r \geq 2$ produce un tensor de rango $r - 2$. Así por ejemplo

$$T_{\alpha\beta\gamma} = F_{\mu\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta\gamma} \tag{1.101}$$

1.4. La conexión afín

Hemos introducido tensores como objetos matemáticos en un punto del espacio tiempo. Consideraremos ahora campos tensoriales. Sea una región en el espacio-tiempo. En cada punto de esta región definimos un tensor (covariante, contravariante ó mixto). Entonces un campo tensorial es basicamente el conjunto de tensores definidos sobre esta región de espacio-tiempo.

Como casos particulares tenemos los campos tensoriales contravariantes (covariantes) también llamados campos vectoriales (campos covectoriales), y los campos escalares que son simplemente funciones C^∞ de las coordenadas del espacio-tiempo. En esta sección daremos las reglas para derivar campos tensoriales en general por medio de la conección afín ó derivada covariante. Estas reglas de derivación están definidas de modo tal que nos permiten obtener un tensor de la derivada covariante de un tensor. A continuación empezaremos con la definición de la derivada covariante ó conección afín.

1.4.1. La Derivada Covariante de Campos Vectoriales

Sea $\chi(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales definidos sobre el espacio-tiempo M. Una conección afín, ∇, es un mapeo $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ ó bien $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) \mapsto \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{V}$ que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}) &= \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{V} + \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{W} \\
\nabla_{(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})} \boldsymbol{W} &= \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{W} + \nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{W} \\
\nabla_{(f\boldsymbol{U})} \boldsymbol{V} &= f \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{V} \\
\nabla_{\boldsymbol{U}}(f \boldsymbol{V}) &= \boldsymbol{U}[f] \boldsymbol{V} + f \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{V}
\end{aligned} \tag{1.102}$$

donde $f \in C^\infty(M)$ y $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \in \chi(M)$. Tomemos un sistema coordenado $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, en el espacio-tiempo M, definimos 4^3 funciones $\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$, llamados coeficientes de la conección ó símbolos de Christoffel, como

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} e_\lambda \tag{1.103}$$

donde $\{e_\mu\} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ es una base coordenada asociada con $\{x^\mu\}$ en $T_P(M)$. Los coeficientes de la conexión especifican como cambian las bases vectoriales de un punto a otro. Una vez que la acción de la conexión ∇ esta definida en las bases vectoriales, podemos calcular la acción de ∇ sobre cualquier otro vector. Sea $\boldsymbol{V} = V^\mu e_\mu$ y $\boldsymbol{W} = W^\mu e_\mu$ elementos de $T_p(M)$ entonces

$$\begin{aligned}\nabla_V \boldsymbol{W} &= \nabla_{V^\mu e_\mu}(W^\nu e_\nu) = V^\mu \nabla_{e_\mu}(W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu[W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}\right) e_\lambda \quad .\end{aligned} \tag{1.104}$$

Por definición, ∇ mapea dos vectores $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$, a un nuevo vector, cuya λ-ésima componente es $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$, donde hemos definido

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} W^\nu \quad . \tag{1.105}$$

Notemos que $\nabla_\mu W^\lambda$ es la λ-ésima componente del vector $\nabla_\mu \boldsymbol{W} = \nabla_\mu (W^\lambda e_\lambda)$ y no debe confundirse con la componente contravariante W^λ.

$\nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{W}$ es independiente de la derivada de $\boldsymbol{V}$. En este sentido, la derivada covariante o conección afín es una generalizacion propia de la derivada direccional de funciones a tensores.

1.4.2. La Derivada Covariante de Campos Tensoriales

Dado que $\nabla_{\boldsymbol{U}}$ es una derivada, es natural definir la derivada covariante de $f \in C^\infty(M)$ por la derivada direccional ordinaria:

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} f = \boldsymbol{U}[f] = U^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right) \quad . \tag{1.106}$$

Entonces la cuarta propiedad de la ecuacion (1.102) tiene exactamente la misma forma que la regla de Leibnitz,

$$\nabla_U (f\, \boldsymbol{V}) = (\nabla_U f)\, \boldsymbol{V} + f \nabla_U \boldsymbol{V} \quad . \tag{1.107}$$

Generalizamos la expresión anterior para cualquier par de tensores,

$$\nabla_U (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_U T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_U T_2) \quad . \tag{1.108}$$

donde T_1 y T_2 son campos tensoriales de tipo arbitrario (covariantes, contravariantes o mixtos). La ecuación (1.108) es tambien válida cuando algunos de los índices están contraidos.

Vamos a proporcionar sin prueba y de manera operacional la derivada covariante de tensores arbitrarios de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla_\nu t^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} &= \partial_\nu t^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} + \Gamma^{\lambda_1}{}_{\nu k} t^{k \lambda_2 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} + \dots \\ &+ \Gamma^{\lambda_p}{}_{\nu k} t^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} k}_{\mu_1 \dots \mu_q} - \Gamma^{k}{}_{\nu \mu_1} t^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{k \mu_2 \dots \mu_q} - \dots - \Gamma^{k}{}_{\nu \mu_q} t^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}} \end{aligned} \tag{1.109}$$

Además de las cuatro condiciones de la ecuación (1.102), imponemos una quinta condición para la derivada covariante, $\forall\, f \in C^\infty(M)$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f \tag{1.110}$$

Con ayuda de la ecuación (1.109) podemos escribir,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\mu (\partial_\nu f) = \partial_\mu (\partial_\nu f) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} (\partial_\lambda f) \tag{1.111}$$

usando (1.111) reescribimos la condicion (1.110) como

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu \nabla_\nu f - \nabla_\nu \nabla_\mu f &= [\partial_\mu (\partial_\nu f) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} (\partial_\lambda f)] - [\partial_\nu (\partial_\mu f) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} (\partial_\lambda f)] \\ &= (\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})(\partial_\lambda f) \end{aligned} \tag{1.112}$$

debido a que la función f es arbitraria entonces concluimos que los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a sus dos últimos índices

$$\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \quad . \tag{1.113}$$

Aunque en general no es necesario imponer la condición (1.110) (de hecho, existen teorías de la gravitación diferentes de la TRG donde no se impone), en la TRG se asume que el operador derivada covariante la satisface. Claro está, la imposición de esta propiedad depende de su confirmación por medio de datos experimentales u observacionales.

1.5. La conexión métrica

Dado un operador derivada ∇_μ, vamos a definir la noción de transporte paralelo a lo largo de una curva C con vector tangente t^α. Decimos que un vector V con componentes

V^α es transportado paralelamente cuando uno se mueve sobre la curva C si la ecuación

$$t^\mu \nabla_\mu V^\alpha = 0 \tag{1.114}$$

se satisface a lo largo de la curva. Para espacios curvos el producto de un covector $\boldsymbol{A}$ y un vector $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, depende del punto donde es calculado y por lo tanto su valor cambia cuando lo transportamos a lo largo de la curva C. En general este cambio depende de la conexión afín u operador derivada covariante escogida. De hecho existen una infinidad de distintas conexiones afines y ninguna de ellas se prefiere naturalmente. Sin embargo si ya hemos definido una métrica sobre el espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$, entonces hay una manera o elección natural que podemos imponer sobre el transporte paralelo de vectores:

Dados dos vectores con componentes A_μ, B_ν definidos sobre el punto P, demandamos que su producto punto $A_\beta B^\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$ sea invariante si lo transportamos paralelamente a lo largo de cualquier curva C con vector tangente t^μ, es decir,

$$t^\mu \nabla_\mu (g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta) = t^\mu \nabla_\mu (A^\alpha B_\alpha) = t^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha) = 0 \tag{1.115}$$

con las condiciones de que los vectores A^α, B^β son transportados paralelamente,

$$t^\mu \nabla_\mu A^\alpha = 0 \quad , \quad t^\mu \nabla_\mu B^\beta = 0 \tag{1.116}$$

derivando la ecuación (1.115) tenemos

$$t^\mu (\nabla_\mu g_{\alpha\beta}) A^\alpha B^\beta + g_{\alpha\beta} (t^\mu \nabla_\mu A^\alpha) B^\beta + g_{\alpha\beta} A^\alpha (t^\mu \nabla_\mu B^\beta) = 0 \tag{1.117}$$

y exigiendo la condición (1.116) obtenemos que

$$t^\mu (\nabla_\mu g_{\alpha\beta}) A^\alpha B^\beta = 0 \tag{1.118}$$

el hecho de que los vectores t^μ, A^α, B^β son arbitrarios nos permite concluir que,

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0, \quad \forall\ \mu,\, \alpha,\, \beta = \{0, 1, 2, 3\} \tag{1.119}$$

lo cual nos elige de manera única una derivada covariante o conexión afín. Esta es la conexión de *Levi-Civita*. Usando (1.109), la condición (1.119) se escribe como

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}\, g_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}\, g_{\alpha\lambda} = 0 \quad . \tag{1.120}$$

Para encontrar los símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}$, en términos de la métrica, reescribimos la expresión anterior en las siguientes formas

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\beta\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} \\
\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= \Gamma_{\beta\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha\beta} \\
\partial_\beta g_{\mu\alpha} &= \Gamma_{\alpha\beta\mu} + \Gamma_{\mu\beta\alpha} \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.121}
$$

donde hemos definido $\Gamma_{\beta\mu\alpha} \equiv \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}\, g_{\lambda\beta}$. Sumando las dos primeras ecuaciones, restando la tercera, y con ayuda de la condición de simetría (1.113) encontramos que

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\alpha} &= \Gamma_{\beta\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\mu} - \Gamma_{\mu\beta\alpha} \\
&= 2\Gamma_{\beta\mu\alpha} \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.122}
$$

es decir que

$$
\Gamma_{\beta\mu\alpha} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\alpha}\right) \quad , \tag{1.123}
$$

que al reescribirlo obtenemos

$$
\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha} = g^{\rho\beta}\Gamma_{\beta\mu\alpha} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\beta}[\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\alpha}] \quad , \tag{1.124}
$$

entonces hemos encontrado los símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}$, en términos de la métrica.

1.6. Transformación de los símbolos de Christoffel bajo un cambio de sistema coordenado.

En esta parte encontraremos la regla de transformación de los símbolos de Christoffel bajo un cambio de sistema de coordenadas. Para empezar tenemos en el sistema coordenado $\{x^\nu\}$,

$$
\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right] \quad . \tag{1.125}
$$

a continuación realicemos un cambio de sistema de coordenadas definido por

$$
x'^\nu = x'^\nu(x^\beta) \ , \tag{1.126}
$$

y su tranformación inversa,

$$
x^\beta = x^\beta(x'^\nu) \ , \tag{1.127}
$$

además tenemos la regla de transformación de las componentes de la métrica bajo un cambio de coordenadas,

$$
\begin{aligned}
g_{\beta\mu} &= g'_{\rho\nu}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \\
g^{\alpha\beta} &= g'^{\eta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

veamos ahora como se transforman los símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$, usando la ecuación (1.128):

$$
\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\beta\rho}\left[\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\rho}}\right] =
$$

$$
\frac{1}{2}g^{\beta\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[g'_{\eta\epsilon}\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right]\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[g'_{\eta\epsilon}\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right]\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left[g'_{\eta\epsilon}\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right]\right)\right] =
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g^{\beta\rho}\Bigg[\left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) + \left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) - \left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right) \\
&+ g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) + g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\epsilon}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right) \\
&+ g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) + g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\epsilon}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}}\right) \\
&- g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right) - g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\Bigg] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g^{\beta\rho}\Bigg[\left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) + \left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) - \left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right) \\
&+ 2g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\Bigg] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g^{\beta\rho}\Bigg[\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x'^{\gamma}}\right) + \left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial g'_{\gamma\epsilon}}{\partial x'^{\eta}}\right) \\
&-\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g'_{\eta\gamma}}{\partial x'^{\epsilon}}\right) + 2g'_{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right)\Bigg] \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.129}
$$

donde en la novena y décima línea hemos utilizado la regla de la cadena. A continuación, introducimos la transformación de las componentes de la métrica inversa

$$\frac{1}{2}g^{\beta\rho} = \frac{1}{2}g'^{\lambda\psi}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\psi}} \tag{1.130}$$

en la penúltima línea de la ecuación (1.129),

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g'^{\lambda\psi}\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x'^{\rho}}\right)\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\psi}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\right)\left[\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial g'_{\gamma\epsilon}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x'^{\epsilon}}\right] + \\
g'_{\eta\epsilon}\, g'^{\lambda\psi}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\right)\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\psi}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\rho}}\right) = \\
\frac{1}{2}g'^{\lambda\epsilon}\left[\frac{\partial g'_{\eta\epsilon}}{\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial g'_{\gamma\epsilon}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial g'_{\eta\gamma}}{\partial x'^{\epsilon}}\right]\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\right) + \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right) = \\
\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\right)\Gamma'^{\lambda}{}_{\eta\gamma} + \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)
\end{aligned} \tag{1.131}$$

De la ecuación (1.131) concluimos que los símbolos de Christoffel no son tensores, pues su regla de transformación ante un cambio de coordendas es

$$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\right)\Gamma'^{\lambda}{}_{\eta\gamma} + \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right) \tag{1.132}$$

1.7. Transformación de la derivada covariante de un covector bajo un cambio de sistema coordenado

Veamos como se transforma la derivada covariante de un covector. Usando las ecuaciones de transformación para los símbolos de Christoffel (1.132) y para las componentes de un covector tenemos

$$\nabla_{\mu}A_{\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \tag{1.133}$$

Veamos que es un tensor pues

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\mu}A'_{\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial A'_{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\right) + A'_{\rho}\left(\frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right) \\
-\left[\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\right)\Gamma'^{\lambda}_{\mu\gamma} + \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)\right]A'_{\tau}\left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\beta}}\right)
\end{aligned} \tag{1.134}$$

$$= \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial A'^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\right) + A'_{\rho}\left(\frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x'^{\gamma}}\right)\Gamma'^{\lambda}_{\eta\gamma}A'_{\tau} - \left(\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\beta}}\right)\left(\frac{\partial^2 x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\right)A'_{\tau}$$

$$= \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial A'^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\right) - \left(\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\Gamma'^{\lambda}_{\eta\gamma}A'_{\lambda} \tag{1.135}$$

$$= \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial A'^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\right) - \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\Gamma'^{\lambda}_{\nu\rho}A'_{\lambda}$$

$$\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\left[\frac{\partial A'_{\rho}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'^{\lambda}_{\nu\rho}A'_{\lambda}\right] = \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\nabla'_{\nu}A'_{\rho} = \nabla_{\nu}A_{\alpha} \quad ,$$

es decir que la derivada covariante de un covector se transforma como un tensor dos veces covariante.

1.8. Geodésicas, Curvatura y Relatividad General

1.8.1. La ecuación de las geodésicas

La interacción gravitacional y la geometría han sido unificadas por el principio de que las partículas libres se mueven sobre curvas geodésicas. Si una fuerza F^{μ} está actuando sobre una partícula, su cuadrimomento puede no ser constante y cambiar de acuerdo a la bien conocida ecuación

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = F^{\mu} \quad . \tag{1.136}$$

El hecho de que una fuerza este actuando o no, es un fenómeno completamente local.

La razón de cambio del cuadrimomento p^{μ} descrito por esta ecuación es precisamente la razón que sería observado por un observador en su sistema en caída libre. El *principio de equivalencia débil* nos dice que un observador en caída libre no medirá una aceleración no nula de la partícula si solo la interacción gravitacional esta actuando sobre ella. Dicho de otra manera la cuadrifuerza F^{μ} no tiene contribuciones gravitacionales (por esta razón se dice que la interacción gravitacional es una *pseudofuerza*). Una partícula libre obedece

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \tag{1.137}$$

cuyo significado geométrico es que, el cuadrimomento p^μ es un vector tangente a la curva de la partícula. La ecuación (1.137) nos dice que este vector tangente a la curva no cambia a lo largo de ésta.

Para el desplazamiento $d\boldsymbol{s}$ con componentes dx^μ a lo largo de la curva de la partícula, y de acuerdo a las ecuaciones (1.37) y (1.38) obtenemos (nuestra definición de *partícula* asume tacitamente el requerimiento de que la masa en reposo, m, es constante)

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \quad . \tag{1.138}$$

Una curva temporal geodésica satisface la ecuación (1.137).

Analicemos la ecuación (1.137) en una base coordenada. Para un desplazamiento $d\mathbf{s}$ (con componentes dx^μ) a lo largo de la curva de la partícula podemos escribir

$$dp^\mu = (\nabla_\nu p^\mu) dx^\nu \quad , \tag{1.139}$$

y por lo tanto la ecuación (1.137) se escribe como

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = (\nabla_\nu p^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad , \tag{1.140}$$

usando la siguiente ecuación

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} = U^\nu = \frac{p^\nu}{m} \tag{1.141}$$

reescribimos (1.140) como

$$(\nabla_\nu p^\mu) p^\nu = 0 \tag{1.142}$$

que es equivalente a

$$U^\nu (\nabla_\nu U^\mu) = 0 \tag{1.143}$$

De las ecuaciones (1.143), (1.105), y de $U^\nu \equiv \dfrac{dx^\nu}{d\tau}$ obtenemos

$$0 = \left(U^\mu_{\ ,\,\nu} + U^\beta \Gamma^\mu{}_{\beta\nu}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dU^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\Gamma^\mu{}_{\beta\nu} \tag{1.144}$$

y finalmente expresamos la ecuación anterior en la forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\, g^{\mu\gamma}(g_{\gamma\beta,\,\nu} + g_{\nu\gamma,\,\beta} - g_{\beta\nu,\,\gamma}) = 0 \quad . \tag{1.145}$$

Ésta es precisamente la ecuación de las geodésicas (**??**) que ya fué anteriormente encontrada.

Las ecuaciones (1.143) y (1.144) no pueden ser directamente aplicadas a las curvas que siguen los fotones pues en este caso ni el tiempo propio τ ni el cuadrivector temporal de velocidad $\mathbf{U}$ están bien definidos. El principio básico de que el cuadrimomento del fotón satisface la ecuación $dp^\mu = 0$ a lo largo de su curva nula aun es valido. Para aplicar este principio a una curva nula con coordenadas $x^\nu(\lambda)$ podemos escoger un parámetro especial λ (también llamado un parametro afín) tal que

$$p^\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{1.146}$$

note la diferencia entre la definición para el cuadrimomento de una partícula con masa (1.138) y la de una partícula sin masa (1.146). La ecuación dinámica para una partícula libre sin masa es

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = 0 \tag{1.147}$$

Esta ecuación puede reescribirse como la ecuación (1.142). Cuando la ecuación (1.146) es usada en la ecuación (1.142) obtenemos como resultado la ecuación (1.144) con el tiempo propio τ remplazado por el parámetro λ.

1.8.2. Definición de curvatura

Puesto que los símbolos de Christoffel no son tensores, no pueden tener un significado geométrico intrinseco ni pueden ser una medida de la curvatura del espacio-tiempo. Un tensor intrínseco que caracteriza totalmente a la curvatura de un espacio-tiempo es el tensor dela curvatura de Riemann el cual se define por la expresión

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\right) \tag{1.148}$$

Las componentes de este tensor pueden ser evaluadas usando la definición de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica. Es preciso mencionar que en coordenadas LP los símbolos de Christoffel se anulan pero no sus derivadas, y en general no podemos encontrar coordendas (excepto en un espacio-tiempo plano tal como el espacio-tiempo de Minkowski) en las cuales las derivadas de los símbolos de Christoffel se anulan. Si pudiéramos encontrar tales coordenadas entonces las componentes del tensor de Riemann en este sistema coordenado serían nulas y por lo tanto tambien se anularían en cualquier otro sistema coordenado debido a una propiedad de los tensores ya mencionada.

El tensor de Riemann caracteriza a la curvatura en el siguiente sentido: Si el tensor de Riemann se anula en una región finita del espacio-tiempo entonces podemos hallar coordenadas en las cuales la métrica tiene la forma plana (1.20) del espacio-tiempo de Minkowski por lo que podemos decir que *Una región del espacio-tiempo (ó todo el espacio-tiempo) es plano si y solamente si el tensor de Riemann se anula en esa región.* Una caracterización completa de la curvatura del espacio-tiempo requiere entonces el cálculo, en algún sistema de coordenadas, de todas las componentes del tensor de Riemann. Esta tarea es complicada pero facilitada por el hecho de que las $4^4 = 256$ componentes del tensor de Riemann no son todas independientes. Las simetrías en las componentes del tensor de Riemann reducen el número de componentes independientes a solamente 20 (en un espacio-tiempo N dimensional existen en general $N^2(N^2-1)/12$ componentes independientes). Estas 20 componentes independientes contienen toda la información acerca de la curvatura del espacio-tiempo.

Sin embargo es preciso mencionar que existen otras formas de caracterizar la curvatura del espacio-tiempo que nos proporcionan menos información que la que está contenida en el tensor de Riemann. Por ejemplo, si contraemos el tensor de Riemann en dos de sus índices podemos definir un tensor de segundo rango llamado el tensor de curvatura de Ricci cuyas componentes son

$$R_{\sigma\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu} \tag{1.149}$$

Este tensor es simétrico en sus dos únicos índices, por lo que solamente 10 de sus 16 componentes son independientes. Contrayendo el tensor de Ricci obtenemos el *escalar de Ricci*

$$R \equiv R^{\nu}{}_{\nu} = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \tag{1.150}$$

que nos da una medida numérica simple de la curvatura en cada punto del espacio-tiempo.

Usando las ecuaciones (1.148) y (1.149) obtenemos el tensor de Ricci en términos de los símbolos de Christoffel

$$R_{\sigma\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma} \right) \tag{1.151}$$

1.8.3. La Teoría de la Relatividad General y sus ecuaciones

Hemos mencionado en la sección anterior que el tensor de Riemann es una medida matematicamente completa de la curvatura del espacio-tiempo. En 1915, Einstein propuso que la información acerca de la interacción gravitacional está contenida en el tensor de curvatura de Riemann el cual debe satisfacer las siguientes ecuaciones

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \tag{1.152}$$

el tensor $G_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de energía-momento que representa a todas las componentes de materia en un espacio-tiempo. El tensor de energía-momento contiene toda la información que necesitamos sobre la materia y sus componentes se interpretan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &T_{00} = \text{la densidad de masa-energía .} \\ &T_{0i} = \text{la componente i-ésima del flujo de energía} \times c^{-1}. \\ &T_{ij} = \text{las componentes del tensor de esfuerzos .} \end{aligned} \tag{1.153}$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ puede contener contribuciones de partículas masivas, no masivas y de campos materiales (electromagnéticos, nucleares, etc), sin embargo el tensor de energía-momento no contiene contribuciones identificadas como energía gravitacional, flujo de energía gravitacional, ó presiones gravitacionales.

Si aplicamos la derivada covariante a la ecuación (1.152) obtenemos la identidad de Bianchi

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = \nabla^{\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{1.154}$$

la cual implica la conservación local del tensor de energía-momento (llamada así porque se reduce a la ley de conservación de energía-momento usual en un sistema inercial local con coordenadas LP)

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{1.155}$$

tomando la traza de la ecuación (1.152) obtenemos una relación entre el escalar de curvatura y la traza del tensor de energía-momento

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T \quad , \tag{1.156}$$

introduciendo la ecuación (1.156) en (1.152) obtenemos

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \tag{1.157}$$

Las ecuaciones de Einstein relacionan el tensor de curvatura de Ricci del espacio-tiempo al tensor de energía-momento de la materia. Estas son diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$ dadas las fuentes de materia por medio del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de Maxwell, las cuales determinan el campo electromagnético dadas las densidades de carga y de corriente de cargas. Sin embargo, a diferencia de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones diferenciales de la teoría de la relatividad general no son lineales por lo que son más difíciles de resolver que las ecuaciones de Maxwell.

Para regiones del espacio-tiempo donde $T_{\mu\nu} = 0$, es decir, en el vacío, las ecuaciones(1.152) se reducen a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad , \tag{1.158}$$

de manera que si contraemos sobre los dos índices y usamos que $g^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = 4$, obtenemos

$$R - 2R = -R = 0 \quad , \tag{1.159}$$

es decir, el escalar de curvatura es cero de manera que la ecuación (1.158) puede sustituirse por

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad , \tag{1.160}$$

que es la forma usual de las ecuaciones de Einstein para el vacío y se usan para examinar el campo gravitacional fuera de las fuentes de materia.

Capítulo 2

El modelo estándar de la Cosmología

En cosmología la teoría del *Big Bang*, o de la gran explosión, es la teoría cosmológica científica que mejor describe el desarrollo y evolución del universo. [13]. Curiosamente uno de sus detractores, el astrofísico *Fred Hoyle* en 1950 le dió ese nombre con la intención de burlarse de ella.

La piedra angular de la cosmología moderna consiste en el hecho de que el lugar que nosotros ocupamos en el universo no es, de alguna manera, especial, y además de que el universo visto por cualquier observador en cualquier lugar en un tiempo determinado es el mismo. Estas ideas forman el *Principio Cosmológico* que es la base del modelo del *Big Bang*. Es muy importante resaltar que el *Principio Cosmológico* no es exacto. De hecho esta no es una buena aproximación ni siquiera a escalas de distancia del tamaño de galaxias individuales. Sin embargo, una vez que tomamos grandes regiones (del tamaño de miles de megaparsecs) conteniendo millones de galaxias, observamos que cada región se ve más o menos igual a cualquier otra, del mismo tamaño.

Entre 1920 y 1930, el padre jesuita belga *Georges Lemaitre* propuso que el universo se inició con la explosión de una región primigenia, lo que mas tarde fué llamado el Big Bang. En 1929, *Edwin Hubble* realizó observaciones que sirvieron de base para comprobar las ideas de *Georges Lemaitre* y descubrió que las galaxias se alejan entre ellas a velocidades directamente proporcionales a su distancia. Este hecho se conoce como la *Ley de Hubble.*

El alejamiento de las galaxias sugería que el universo estaba en expansión. Esta idea dió lugar a dos posibilidades opuestas. La primera fué la teoría del Big Bang de *Georges Lemaitre, Friedmann, Robertson y Walker*, sustentada y desarrollada por *George Gamow.*

La segunda posibilidad era el modelo de *Fred Hoyle*, la llamada *Teoría del Estado Estacionario*, que surge de la aplicación del *Principio Cosmológico Perfecto*, el cuál sostiene que para cualquier observador el universo debe parecer el mismo en cualquier lugar del espacio y del tiempo. Por lo tanto el universo presenta el mismo aspecto desde cualquier punto en el espacio y en cualquier instante del tiempo. La *Teoría del Estado Estacionario* propone que la disminución de la densidad debida a la expansion del universo es compensada con la creación continua de materia.

Los problemas con la teoría del estado estacionario comenzaron a surgir a finales de los años 60, debido a que las evidencias observacionales mostraron la existencia de cuásares solo a grandes distancias y no en las galaxias mas cercanas a nosotros lo que prueba que el universo ha cambiado a travéz del tiempo. [**?**] La prueba definitiva llego con el descubrimiento de la *Radiación de Fondo de micoondas Cósmica (RFMC)* , pues en un modelo estacionario, el universo ha sido siempre igual y no hay razón para que se produzca una radiación de fondo cósmica con características térmicas similares a la que se observan en el presente.

Desde el descubrimiento de la *RFMC* en 1965, el modelo del *Big Bang* ha sido considerado como la mejor teoría para explicar el origen y evolución de nuestro universo. Las evidencias empíricas que dan sustento a la teoría cosmológica del *Big Bang* son

1. La expansión del universo.
2. La medidas existencia de la RFMC.
3. La abundancia de elementos ligeros.

El modelo del *Big Bang* no asume una explosión de materia que se expande para llenar el universo vacío, sino propone que es el espacio-tiempo mismo el que se expande.

2.1. Expansión del Universo

La evidencia observacional mas dramática, en la cosmología, es que prácticamente todo en el universo parece estar alejándose de nosotros, y entre más lejos se encuentran su recesión es aun mayor.

Hubble mostró que la velocidad de recesión, $\boldsymbol{v}$, de una galaxia que se aleja de nosotros es proporcional a su distancia $\boldsymbol{r}$ respecto a nosotros, y por lo tanto se expresa popularmente como

$$\overrightarrow{v} = H_0 \overrightarrow{r} \quad . \tag{2.1}$$

Esta ecuación es conocida como la *Ley de Hubble*, donde H_0, es la constante de Hubble. Esta ley, al igual que el principio cosmológico, tampoco es exacta, pero describe muy bien el comportamiento promedio de las galaxias cercanas a nosotros. Esto parece ser una violación al principio cosmológico pues parece ubicarnos en el centro del universo. La realidad es que para cada observador, todas las galaxias parecen estar alejandose de él, con una velocidad proporcional a la distancia. Debido a que casi todas las galaxias se están alejando una de otra, podemos concluir que en el pasado ellas estaban mucho más cercanas entre sí.

2.2. Derivación informal de la Ecuación de Friedmann

La ecuación de *Friedmann* describe la velocidad de la expansion del universo. Actualmente esta ecuación es una de las más importantes en cosmología. Es posible derivarla de una manera informal de la teoría de la gravitación de Newton. Aunque su derivación formal requiere del uso de la teoría general de la relatividad, ya que esta es la mejor teoría de la interacción gravitacional en el presente.

Dado que la fuerza de atracción gravitaconal newtoniana entre dos objetos de masa m M es

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -\nabla V \Rightarrow V = -G\frac{Mm}{r} \quad , \tag{2.2}$$

donde $\hat{\boldsymbol{r}}$ es un vector unitario en la dirección radial. Consideremos un observador en un medio uniforme en expansión con densidad de masa ρ, y consideremos una partícula con un vector de posición $\boldsymbol{r}$, la fuerza de atracción será entonces

$$F = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{4\pi G\rho m \boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{r}}}{3} \quad . \tag{2.3}$$

Su energía potencial gravitacional será

$$U = -G\frac{Mm}{r} = -\frac{4\pi G\rho m r^2}{3} \quad . \tag{2.4}$$

Debido a la conservación de la energía, tenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m = T + V \quad . \tag{2.5}$$

Realizamos ahora un cambio de sistema coordenado a coordenadas comóviles, las cuales son coordenadas que se mueven con la expansión. Asumiendo que la expansión es uniforme la relación entre elvector de posición real $\boldsymbol{r}$ y la distancia comoving $\boldsymbol{x}$ es

$$\boldsymbol{r} = a(t)\boldsymbol{x} \quad , \tag{2.6}$$

donde la propiedad de homogeneidad del espacio ha sido usada para escribir a la función $a(t)$ únicamente como función del tiempo. El termino $a(t)$ es llamado el *factor de escala del universo*, y nos muestra cómo la separación ó distancia física aumenta con el tiempo.

Reescribiendo la energía total (2.5) en términos del factor de escala tenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2x^2m \quad . \tag{2.7}$$

multiplicando por $2/ma^2x^2$ ambos lados de esta ecuación , y reordenando los términos obtenemos

$$\frac{\dot{a}}{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad . \tag{2.8}$$

donde $kc^2 = -2U/mx^2$. En esta expresión el término k debe de ser independiente de x, dado que E es proporcional a x^2. De hecho k define la geometría espacial del universo en un tiempo constante, usualmente recibe el nombre de *curvatura*. La ecuación (2.8) es llamada la ecuación de Friedmann y su interpretación será dada posteriormente.

2.3. Ley de Hubble

La ecuación de Friedmann nos permite explicar el descubrimiento de Hubble acerca de la relación existente entre la velocidad de recesión y la distancia r asociada al vector de posición $\boldsymbol{r}$ de una galaxia. La velocidad de recesión esta dada por $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ y tiene la misma dirección que $\boldsymbol{r}$, es decir

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{a}\boldsymbol{x} = \dot{a}\frac{\boldsymbol{r}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\boldsymbol{r} \quad . \tag{2.9}$$

El factor $\left(\dfrac{\dot{a}}{a}\right)$ es conocido como el parámetro de Hubble, y se representa por $H(t)$. Consecuentemente, la ley de Hubble enuncia que $\boldsymbol{v} = H\boldsymbol{r}$.

Debido a que el parámetro $H(t)$ es positivo y no negativo en el presente, podemos concluir que el universo actualmente se está expandiendo y no contrayendo. Algunas veces al parámetro de Hubble se le llama constante de Hubble, pero hay que ser cuidadosos en especificar que es constante espacialmente pero no tiene por qué ser constante en el tiempo. Reservamos la frase *constante de Hubble* para indicar su valor actual $H_0 = H(t_0)$ donde t_0 es el tiempo presente.

Podemos ahora escribir la ecuación de Friedmann en términos de el parámetro de Hubble como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{2.10}$$

donde hemos usado unidades donde la velocidad de la luz $c = 1$.

2.4. La relación entre la expansión y el corrimiento al rojo

Una de la más notable evidencia observacional en cosmología es el hecho de que casi todas las estructuras más grandes en el universo (galaxias y cúmulos de galaxias) se están alejando de nosotros y entre ellas. La velocidad de recesión de estas estructuras es mayor conforme la distancia con respecto a nosotros aumenta. Estas velocidades se miden mediante el *corrimiento al rojo*, el cual es básicamente el efecto Doppler aplicado a las ondas electromagneticas. Las galaxias tienen un conjunto de absorción y emisión que pueden ser identificadas observando su espectro de ondas electromagneticas, y cuyas frecuencias características se conocen bien. Sin embargo, si una galaxia se mueve hacia nosotros, la longitud de onda observada de la luz emitida por ella disminuye y su frecuencia aumenta, y entonces esta luz sufre un *corrimiento al azul.* Si la galaxia esta alejandose de nosotros, la longitud de onda observada de la luz emitida por ella aumenta y su frecuencia disminuye, dandose el efecto de un corrimiento al rojo. De hecho, prácticamente todas las galaxias y cúmulos de galaxias estan alejandose de nosotros, de tal forma que la notación estándar usada por los astronomos es el *corriento al rojo* z, definido por

$$z = \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm em}}{\lambda_{\rm em}} \tag{2.11}$$

donde $\lambda_{\rm em}$ y $\lambda_{\rm obs}$ son las longitudes de onda de los fotones en los puntos de emisión (las galaxias ó cúmulos de galaxias) y de observación (nosotros ó la tierra).

El corrimiento al rojo de las líneas espectrales que hemos utilizado para justificar la afirmación de que el universo se expande está relacionada también con el factor de escala a definido en la ecuación (2.6). Para encontrar esta relación asumimos por simplicidad que los fotones viajan desde un objeto a otro muy cercanos, separados por una distancia muy pequeña dr. Los objetos pueden ser galaxias o cúmulos de galaxias. De acuerdo a la ley de Hubble, ecuación (2.9), la velocidad relativa entre ellos dv esta dada por

$$dv = H dr = \frac{\dot{a}}{a}\, dr \quad . \tag{2.12}$$

Dado que los dos objetos son muy cercanos entre sí, podemos aplicar directamente el efecto Doppler para decir que el cambio de las longitudes de onda de emisión y observación, $d\lambda \equiv \lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm em}$, es

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{\rm em}} = dz = \frac{dv}{c} \quad , \tag{2.13}$$

donde $d\lambda$ es positivo puesto que la longitud de onda observada es mayor que la longitud de onda emitida. El tiempo que transcurre entre la emisión y la observación está dado por el tiempo en el cual la luz viaja, es decir $dt = dr/c$; relacionando las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{\rm em}} = \frac{\dot{a}}{a}\frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a} \quad . \tag{2.14}$$

La integración de la ecuación (2.14) produce como resultado,

$$\ln \lambda = \ln a + \text{constante} \quad , \tag{2.15}$$

es decir que

$$\lambda \quad \propto \quad a(t) \tag{2.16}$$

donde ahora λ se refiere a la longitud de onda instantanea medida a un tiempo dado t.

A pesar de que este resultado se ha obtenido como consecuencia de asumir dos objetos cercanos entre sí, resulta que es completamente general, es decir, es válido aún si los objetos están alejados uno de otro y en un espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker el cuál es un universo totalmente relativista. Este resultado nos indica que conforme el universo se expande, las longitudes de onda aumentan en forma proporcional a su expansión, y por lo tanto su cambio nos dice que tanto el universo se ha expandido desde que los fotones fuerón emitidos. Por ejemplo, si la longitud de onda ha aumentado por un factor de dos, el universo debe haber sido la mitad de su tamaño en el presente cuando la luz fué emitida. El corrimiento al rojo definido por la ecuación (2.11) está relacionado con el factor de escala mediante la ecuación

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a_{\text{obs}}}{a_{\text{em}}} \tag{2.17}$$

2.5. Deducción formal de las Ecuaciones de Friedmann

En esta sección derivaremos formalmente las ecuaciones que describen la evolución de nuestro universo cosmológico a partir de las ecuaciones de Einstein las cuales son las ecuaciones dinámicas del campo gravitacional en la teoría general de la relatividad.

Para describir nuestro universo postulamos el principio cosmológico el cuál establece que, a un tiempo fijo, el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico en escalas de distancia del orden de 3 mil megaparsecs pero que evoluciona con el tiempo. Este principio es totalmente consistente con las observaciones actuales. En la teoría de la relatividad general, estas ideas implican que el universo de cuatro dimensiones puede ser "partido"en superficies espaciales tres dimensionales y una superficie unidimensional temporal ortogonal a éstas que representa la evolución de la "flecha del tiempo". Cada superficie espacial tiene las propiedades de isotropía (esta propiedad significa que en cualquier punto de esta superficie todas las direcciones son equivalentes) y homogeneidad espacial (implica que al movernos de un punto a otro de esta superficie no notamos alguna diferencia). La forma más general de la métrica congruente con este principio se escribe como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\, d\sigma^2 \tag{2.18}$$

donde

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.19}$$

aquí hemos escogido un sistema coordenado $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ con rangos $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, r es una coordenada adimensional comóvil, t es una coordenada de tiempo que mide la evolución temporal del universo y k es una constante adimensional. La forma de la métrica (2.18) manifiesta la simetría esférica del espacio-tiempo congruente con la isotropía ya postulada. La función $a(t)$ es conocida como el factor de escala. A esta métrica se le conoce como la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

De acuerdo a (2.18) y (2.19), las componentes de la métrica en este sistema cordenado son

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^2(t)}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)\,r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)\,r^2\,sin^2\theta \end{pmatrix}$$

donde hemos tomado la velocidad de la luz $c = 1$.

Con esta métrica, usando la ecuación (1.125) y definiendo $\dot{a} \equiv \dfrac{da}{dt}$, calculamos los simbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t{}_{rr} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} &\qquad& \Gamma^r{}_{rr} = \frac{kr}{1-kr^2} \\
&\Gamma^t{}_{\theta\theta} = a\dot{a}r^2 && \Gamma^t{}_{\phi\phi} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta \\
&\Gamma^r{}_{tr} = \Gamma^\theta{}_{t\theta} && \Gamma^\phi{}_{t\phi} = \frac{\dot{a}}{a} \\
&\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r(1-kr^2) && \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
&\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} && \\
&\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta && \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{2.20}$$

de las ecuaciones (1.151) obtenemos las componentes no nulas del tensor de Ricci las cuales son

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\
R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

y finalmente el escalar de Ricci es

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \quad . \tag{2.22}$$

La métrica FRW está definida para cualquier forma del factor de escala $a(t)$; los Cosmólogos asumen que todas las componentes dominantes y distintas de materia y energía en el universo pueden ser modeladas por fluidos perfectos, los cuales son fluidos sin viscocidad, y sin conducción de calor. Para ser congruentes con el principio cosmológico, estos fuidos perfectos deben ser isotrópicos y homogéneos en el sistema coordenado comóvil que ya fué escogido, lo que implica que éstos se encuentran en reposo en estas coordenadas comóviles. Es decir, que la cuadrivelocidad del fluido es $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, de lo cual podemos deducir que

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu = (-1, 0, 0, 0) \tag{2.23}$$

debido a que U_μ es una cuadrivelocidad debe satisfacer

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = U^\mu U_\mu = -1 \tag{2.24}$$

por otro lado, el tensor de energía-momento para materia formada por un conjunto de fluidos perfectos que no interactúan entre ellos (la única interacción entre ellos es la gravitacional) es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + Pg_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

donde $\rho = \sum_i \rho_i$ y $P = \sum_i P_i$ son respectivamente la densidad y presión total de la materia, mientras que ρ_i y P_i son la densidad y presión asociadas a cada fluido respectivamente, U_μ es la cuadrivelocidad de un observador comóvil con el fluido.

Como consecuencia de todo lo anterior tenemos que

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi}P \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

De la misma manera podemos escribir las componentes mixtas del tensor de energía momento en una forma conveniente

$$T^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

note que la traza del tensor de energía momento es

$$T = T^{\mu}{}_{\mu} = -\rho + 3P \quad . \tag{2.27}$$

Asumimos que los fluidos solo interaccionan gravitacionalmente y por lo tanto la ecuación de movimiento para cada fluido es

$$\nabla_{\mu}T^{(i)\mu}{}_{\nu} = 0 \tag{2.28}$$

donde

$$T^{(i)}{}_{\mu\nu} = (\rho_i + P_i)\, U_{\mu}U_{\nu} + g_{\mu\nu}P_i \tag{2.29}$$

es el tensor de energía-momento para cada uno de los fluidos perfectos. Consideremos la componente temporal $\nu = t$ de la ecuación (2.28)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mu}T^{(i)\mu}{}_{t} = \partial_{\mu}T^{(i)\mu}{}_{t} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda}T^{(i)\lambda}{}_{t} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu t}T^{(i)\mu}{}_{\lambda} \\ &= \partial_t T^{(i)t}{}_{t} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu t}T^{(i)t}{}_{t} - \Gamma^{r}{}_{rt}T^{(i)r}{}_{r} - \Gamma^{\theta}{}_{\theta t}T^{(i)\theta}{}_{\theta} - \Gamma^{\phi}{}_{\phi t}T^{(i)\phi}{}_{\phi} \\ &= \partial_t T^{(i)t}{}_{t} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu t}T^{(i)t}{}_{t} - \Gamma^{\mu}{}_{\mu t}T^{(i)r}{}_{r} = \partial_t T^{(i)t}{}_{t} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu t}\left(T^{(i)t}{}_{t} - T^{(i)r}{}_{r}\right) \\ &= -\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(-\rho_i - P_i\right) = -\frac{\partial \rho_i}{\partial t} - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_i + P_i\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

es decir

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + P_i) \tag{2.31}$$

que es la ecuación de movmiento para cada fluido. Los fluidos perfectos relevantes en cosmología tienen la siguiente ecuación de estado

$$P_i = w_i \rho_i \tag{2.32}$$

donde w_i es una constante que depende de la naturaleza del fluido. Con ayuda de (2.32), la ecuación (2.31) puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + w_i\,\rho_i) = -3(1+w_i)\frac{\dot{a}}{a}\,\rho_i \\ \Rightarrow \qquad \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} &= -3(1+w_i)\,\frac{\dot{a}}{a} \end{aligned} \tag{2.33}$$

la integración de la ecuación (2.75) produce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,(\ln\,\rho_i) &= -3(1+w_i)\frac{\partial}{\partial t}(\ln\,a) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\,a^{-3(1+w_i)}\right] \\ \Rightarrow \qquad \ln\,\rho_i &= \ln\,a^{-3(1+w_i)} + A \end{aligned} \tag{2.34}$$

por lo que finalmente obtenemos

$$\rho_i = B a^{-3(1+w_i)} \tag{2.35}$$

donde A, B son constantes. La constante B se fija de tal forma que para el tiempo presente t_0 tenemos la densidad actual de cada fluido ρ_i^0

$$\rho_i(t_0) = \rho_i^0 \tag{2.36}$$

de donde

$$B = \frac{\rho_i^0}{a^{-3(1+w_i)}(t_0)} \tag{2.37}$$

sustituyendo (2.37) en (2.35) obtenemos

$$\rho_i(t) = \rho_i^0\,\left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^{-3(1+w_i)} \tag{2.38}$$

La solución (2.38) nos proporciona el comportamiento temporal de la densidad de cada fluido en función de su parámetro de estado w_i y del factor de escala del universo. A continuación daremos algunos ejemplos de los más importantes fluidos cosmológicos:

- **Materia**: formada por partículas no relativistas sin colisiones con una ecuación de estado dada por

$$P_m \cong 0, \qquad \rho_m \neq 0, \qquad P_m \ll \rho_m\, c^2, \qquad w_m \cong 0 \tag{2.39}$$

y de la ecuación (2.38) obtenemos una dependencia del factor de escala

$$\rho_m(t) = \rho_m^0 \left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^3 \tag{2.40}$$

- **Radiación**: formada por partículas no masivas moviéndose a la velocidad de la luz, por ejemplo, la radiación electromagnética, con ecuación de estado

$$P_r = \frac{1}{3}\,\rho_r, \qquad w_r = \frac{1}{3} \tag{2.41}$$

y cuya dependencia del factor de escala es

$$\rho_r(t) = \rho_r^0 \left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^4 \tag{2.42}$$

se cree que hoy en día tenemos:

$$\frac{\rho_m^0}{\rho_r^0} \approx 10^3 \tag{2.43}$$

Esto quiere decir que en el presente, la densidad de energía de radiación es mucho menor que la densidad de materia.

En el pasado el universo era de menor tamaño y más caliente, y la densidad de energía en radiación habría dominado el universo temprano por sobre todas las otras componentes de materia.

- **La energía del vacío**: también llamada la densidad de la constante cosmológica, esta densidad de energía está asociada a las energías de los campos cuánticos de la materia en su estado de vacío (recordemos que la densidad del estado vacío de un campo cuántico no es cero sino que tiene un nivel de energía mínimo diferente de cero como en el caso del oscilador armónico cuántico). El tensor de energía-momento asociado a la energía del vacío es

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{vac})} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu} \tag{2.44}$$

comparando (2.44) con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto (2.29) obtenemos la siguiente ecuación de estado para la energía del vacío

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, \qquad w_\Lambda = -1 \tag{2.45}$$

por lo que concluimos de la ecuación (2.38)

$$\rho_\Lambda(t) = \rho_\Lambda^0 \left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^0 = \rho_\Lambda^0 \tag{2.46}$$

es decir, la densidad de energía del vacío es una constante a través de la evolución del universo. Antes de 1998, no se tenía evidencia observacional de la existencia de este tipo de fluido aunque sobre bases teóricas sabemos que debe existir. A partir de 1998, se ha detectado indirectamente una densidad de energía del vacío por medio de observaciones que indican que en el presente el universo se está acelerando (ver por ejemplo la sección (**1.2**) del libro [9]).

El próximo paso es introducir el tensor de Ricci en las ecuaciones de Einstein para derivar las ecuaciones de Friedmann que relacionan el factor de escala al tensor de energía-momento del universo. Para ello usaremos la siguiente forma de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{2.47}$$

usando las ecuaciones (2.21), (2.26), (2.27) en (2.47) tenemos para la ecuación $\mu = t, \nu = t$ (con $c = 1$),

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3P) \tag{2.48}$$

y las ecuaciones

$\mu\nu = rr = \theta\theta = \phi\phi$ se reducen a una sola dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - P) \tag{2.49}$$

usamos (2.48) para eliminar $\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)$ en (2.49) llegamos a

$$\begin{gathered}
-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3P)+2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+2\frac{k}{a^2}=4\pi G(\rho-P) \quad \Rightarrow \\
2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}\right]=4\pi G\left[(\rho-P)+\frac{(\rho+3P)}{3}\right]=4\pi G\left(\rho+\frac{\rho}{3}\right)=(4\pi G)\left(\frac{4}{3}\right)\rho
\end{gathered} \tag{2.50}$$

por lo que obtenemos la primera ecuación de Friedmann

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\left(\frac{8\pi G}{3}\right)\rho-\frac{k}{a^2}} \tag{2.51}$$

de (2.48) tenemos la segunda ecuación deFriedmann

$$\boxed{\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)=-\left(\frac{4\pi G}{3}\right)(\rho+3P)} \tag{2.52}$$

Si conocemos $\rho=\rho(a)$ de la ecuación (2.38), la ecuación (2.51) puede ser integrada para el factor de escala $a(t)$. La razón de expansión es caracterizada por el parámetro de Hubble:

$$H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{2.53}$$

cuyo valor presente es

$$H_0=70\pm 10\frac{km}{seg\cdot Mpc} \tag{2.54}$$

donde $1Mpc=3{,}09\times 10^{19}km$. Por conveniencia, definimos el parámetro de densidad total

$$\Omega(t)\equiv\left(\frac{8\pi G}{3H^2}\right)\rho(t)\equiv\frac{\rho(t)}{\rho_{\rm crit}(t)} \tag{2.55}$$

y el parámetro de densidad para cada fluido

$$\Omega_i(t)\equiv\left(\frac{8\pi G}{3H^2}\right)\rho_i(t)\equiv\frac{\rho_i(t)}{\rho_{\rm crit}(t)} \tag{2.56}$$

por lo que

$$\Omega(t)=\sum_i\Omega_i(t) \tag{2.57}$$

y donde la densidad crítica es definida como:

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad . \tag{2.58}$$

Con ayuda de las ecuaciones (2.55) y (2.58), la primera ecuación de Friedmann (2.51) se reescribe como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad \Rightarrow \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{H^2 a^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - \frac{k}{H^2 a^2}$$

de donde obtenemos

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \tag{2.59}$$

El signo de k es por lo tanto determinado por el valor de Ω, lo que a su vez detemina la geometría de la superficie espacial tres dimensional a tiempo fijo. Para esta geometría solo existen las siguientes tres posibilidades:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} \rho < \rho_{\text{crit}} & \leftrightarrow & \Omega < 1 & \leftrightarrow & k < 0 & \leftrightarrow & \text{universo abierto} \\ \rho = \rho_{\text{crit}} & \leftrightarrow & \Omega = 1 & \leftrightarrow & k = 0 & \leftrightarrow & \text{universo plano} \\ \rho > \rho_{\text{crit}} & \leftrightarrow & \Omega > 1 & \leftrightarrow & k > 0 & \leftrightarrow & \text{universo cerrado} \end{array}} \tag{2.60}$$

Al respecto es preciso mencionar dos comentarios:

- El parámetro de densidad total Ω nos dice cual de las tres geometrías anteriores describe nuestro universo actual. Por lo que es preciso medir Ω en el presente.

- Recientes medidas de pequeñas desviaciones de la temperatura promedio $T = 2{,}728$ K de la RCFM (llamadas anisotropías de RCFM) nos proporcionan que $\Omega \approx 1$ ($k \approx 0$) durante toda la historia del universo lo que implica que nuestro universo ha sido siempre plano.

2.6. Universos planos ($k = 0$)

Al final de la sección anterior mencionamos que nuestro universo es plano y por esta razón nos concentraremos en Cosmologías con $k = 0$ y $\Omega = 1$ y por lo tanto la primera ecuación de Friedmann es

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)\rho = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)\sum_i \rho_i \tag{2.61}$$

En nuestro universo existen diferentes clases de fluidos con su propia densidad de energía ρ_i y presión P_i. Los más importantes son:

- el fluido compuesto de materia bariónica y oscura que es comunmente llamado ***materia*** y cuya densidad es denotada por ρ_m.
- Fluido compuesto de radiación electromagnética y neutrinos sin masa, ó con masa y moviéndose con velocidades cercanas a la de la luz y se denota por ρ_r. Se le llama ***radiación***.
- Fluido formado por la energía del estado base del vacío cuántico asociado a los campos cuánticos. Su densidad de energía asociado se escribe como ρ_Λ y se le llama ***energía del vacío cuántico***.

Por lo tanto un modelo completo de nuestro universo deberá incluir los tres tipos de fluidos ya mencionados. Sin embargo, debido a que los diferentes tipos de fluidos evolucionan de diferentes maneras con respecto al tiempo, resulta que por largos periódos de tiempo la densdad de energía total será claramente dominado por una sola clase de fluido (siendo las otras subdominantes). Por lo tanto es muy útil examinar soluciones a las ecuaciones de Friedmann cuando hay solamente una clase de fuido ya que nos dará ideas cualitativas acerca del comportamiento de nuestro universo (¡¡más no cuantitativas!!). Esto es hecho en la siguiente parte.

2.6.1. Universos planos con un solo fluido perfecto

Asumiendo que hay una sola contribución de fluido perfecto que domina el universo, digamos ρ_i, tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)\rho_i \tag{2.62}$$

introduciendo la expresión para ρ_i de la ecuación (2.38) en (2.61) obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)\rho_i^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)} \tag{2.63}$$

aplicando la raíz cuadrada llegamos a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_i^0\right)^{1/2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_i)/2} \tag{2.64}$$

integrando la ecuacion (2.64) obtenemos

$$a_0^{\frac{-3(1+w_i)}{2}}\int a^{\frac{3(1+w_i)}{2}-1}\,da = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_i^0\right)^{1/2}\int dt \tag{2.65}$$

cuyo resultado es

$$\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{3(1+w_i)/2} = \frac{3(1+w_i)}{2}\left[\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_i^0\right)^{1/2} t + D\right], \qquad w_i \neq -1 \tag{2.66}$$

donde D es una constante de integración que escogemos igual a cero. Imponiendo la condición $a(t_0) = a_0$ en la ecuación (2.66) obtenemos el valor del tiempo de vida del universo t_0 en función del parámetro del fluido w_i y la densidad actual del fluido ρ_i^0,

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w_i)}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_i^0\right)^{-1/2} \tag{2.67}$$

introduciendo (2.67) en (2.66) obtenemos

$$a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w_i)}}, \qquad w_i \neq -1 \tag{2.68}$$

A continuación tenemos los siguientes casos especiales:

- **Universo dominado por materia**: Incluye materia hecha de estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias y materia oscura. El fluido de todas estas componentes de materia es bastante bien aproximado por un gas sin presión debido a que los movimientos aleatorios tipícos de galaxias y cúmulos de galaxias son del orden de $100km/s$ y por lo tanto dan una energía termica mucho menor que su energía en reposo.

$$w_m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2.69}$$

- **Universo dominado por radiación**: Incluye a los fotones de la RCFM, algunas especies de neutrinos con masas cero ó masas en reposo suficientemente pequeñas moviendose con una velocidad cercana a la de la luz.

$$w_r = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{2.70}$$

Universo dominado por la energía del vacío ó la constante cosmológica: En este caso la solución (2.68) no es válida. Por lo que tenemos que introducir (2.46) en (2.62),

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{8\pi G}{3}\,\rho_\Lambda^0\right)^{1/2} \tag{2.71}$$

integrando (2.71) obtenemos

$$a(t) = \tilde{A}\,\exp\left[\left(\frac{8\pi G}{3}\,\rho_\Lambda^0\right)^{1/2}\,t\right] \tag{2.72}$$

Imponiendo la condición $a(t_0) = a_0$ en la ecuación (2.72) obtenemos

$$\tilde{A} = a_0 \exp\left[-\left(\frac{8\pi G}{3}\,\rho_\Lambda^0\right)^{1/2}\,t_0\right] \tag{2.73}$$

por lo que finamente la ecuación (2.72) se expresa como

$$a(t) = a_0\,\exp\left[\left(\frac{8\pi G}{3}\,\rho_\Lambda^0\right)^{1/2}\,(t - t_0)\right] \tag{2.74}$$

En este modelo la constante cosmológica es

$$\Lambda = 8\pi\rho_\Lambda^0 \tag{2.75}$$

En los tres casos anteriores, el universo se expande sin límite cuando el tiempo se incrementa. En los casos dominados por materia y radiación, el universo comienza con una singularidad donde el factor de escala es $a(0) = 0$ en $t = 0$ (ver las ecuaciones (2.69) y (2.70)). Ésto es una singularidad física debido a que en este tiempo, la densidad (la cuál es una cantidad física) diverge a infinito el momento $t = 0$ es conocido como la singularidad del Big Bang. En el caso dominado por la energía del vacío, el factor de escala

Figura 2.1: Los Tres Universos.

$a \to 0$ cuando $t \to -\infty$, por lo que ésto no puede interpretarse como una singularidad del espacio-tiempo (note que la densidad ρ_Λ es constante).

La figura 2.1 ilustra la evolución del factor de escala $a(t)$ para cada clase de fluido. Observemos que en tiempos tempranos la expansión del universo es dominada por el fluido de radiación. Después entramos en un periódo dominado por el fluido de materia y finalmente para tiempos tardíos la expansión es dominado por la energía del vacío cuántico. Obviamente éstos son tres modelos de universo diferentes los cuales no son buenos modelos cuantitativos de nuestro universo real. A continuación analizaremos el caso de nuestro universo.

2.7. Nuestro Universo

En nuestro universo existen principalmente las tres clases de fluidos cosmológicos ya mencionadas en la parte anterior y las cuales son parametrizadas por sus respectivas densidades de energía: ρ_m, ρ_r, ρ_Λ.

Debido a que nuestro universo es plano durante toda su historia, tenemos que el factor de escala satisface la primera ecuación de Friedmann con curvatura $k = 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda\right] \tag{2.76}$$

Introduciendo para ρ_m, ρ_r, ρ_Λ, las soluciones (2.40), (2.42), (2.46) respectivamente en (2.76) tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_m^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 + \rho_\Lambda^0 + \rho_R^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4\right]$$

$$= H_0^2\,\frac{8\pi G}{3H_0^2}\left[\rho_m^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 + \rho_\Lambda^0 + \rho_R^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4\right]$$

$$= H_0^2\left[\Omega_m^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_R^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4\right] \tag{2.77}$$

donde hemos usado que

$$\Omega_i^0 = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_i^0 \tag{2.78}$$

de (2.77) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{da(t)}{dt} = H_0\,a\left[\Omega_m^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_R^0\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4\right]^{1/2} \tag{2.79}$$

Por otro lado si evaluamos (2.77) en $t = t_0$ obtenemos

$$\Omega_\Lambda^0 + \Omega_m^0 + \Omega_R^0 = 1 \tag{2.80}$$

reescalamos la ecuación (2.79) con las nuevas variables adimensionales

$$\tau \equiv H_0\,t \tag{2.81}$$

$$\tilde{a}(\tau) \equiv \frac{a}{a_0} \tag{2.82}$$

para obtener la siguiente ecuación reescalada

$$\boxed{\frac{d\tilde{a}(\tau)}{d\tau} = \tilde{a}(\tau)\left[\Omega_m^0\left(\frac{1}{\tilde{a}(\tau)}\right)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_R^0\left(\frac{1}{\tilde{a}(\tau)}\right)^4\right]^{1/2} \qquad (2.83)}$$

Un modelo FRW está definido por cuatro parámetros H_0, Ω_r, Ω_m, Ω_Λ. La constante de Hubble es encontrada a través de mediciones del corrimiento al rojo y de las distancias a las galaxias y su valor actual es $H_0 = 72 \pm 7\, km/(seg\, Mpc)$. Por lo tanto el valor de la densidad crítica en el presente es

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}88 \times 10^{-29} h^2\, g/cm^3 \tag{2.84}$$

donde $h \equiv H_0/[100(km/s)/Mpc] = 0{,}72$. El segundo parámetro Ω_r es la razón entre la densidad de energía de radiación y la densidad crítica ρ_{crit}. La densidad de energía de la RCFM se conoce de la temperatura de radiación y está dada por

$$\Omega_r = \Omega_{\text{RCFM}} = 2{,}5 \times 10^{-5} h^{-2} \approx 5 \times 10^{-5} \tag{2.85}$$

Si incluimos los neutrinos sin masa el valor de Ω_r es $\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$. La existencia de los gravitones sin masa es incierta pero muy probablemente solo aportan una pequeña contribución. La densidad número de bariones (partículas tales como protones y neutrones) puede ser determinada con exactitud de las abundancias de los elementos ligeros primordiales observados y del proceso de nucleosíntesis en el modelo del Big Bang. Su contribución al parámetro de densidad Ω_m es

$$\Omega_{\text{bar}} \approx 0{,}04 \tag{2.86}$$

Este valor dá una cota inferior para Ω_m la cual sería considerablemente mayor si existe materia oscura no bariónica. Con la finalidad de determinar Ω_m y Ω_Λ, la geometría del espacio-tiempo del universo debe medirse a grandes escalas estudiando la manera en la cual la materia se mueve a través de él. De hecho, hemos detectado la existencia de materia oscura en galaxias y cúmulos de galaxias por medio de su efecto dinámico gravitacional. Estas observaciones dán como resultado $\Omega_{\text{materia oscura}} \approx 0{,}28$. Sumando la materia bariónica y la materia oscura tenemos para el parámetro de densidad de materia $\Omega_m \approx 0{,}3$. El valor de Ω_Λ se determina de observaciones de la luminosidad de supernovas distantes y de las anisotropías de la temperatura de la RCFM, proporcionando el valor de

$$\Omega_\Lambda \approx 0{,}7 \tag{2.87}$$

resumiendo, en el presente tenemos los siguientes valores para los parámetros cosmológicos de nuestro universo:

- $H_0 \approx 72\,(Km/s)/\text{Mpc}$,
- $\Omega_m^0 \approx 0{,}3$
- $\Omega_r^0 \approx 8 \times 10^{-5}$
- $\Omega_\Lambda^0 \approx 0{,}7$

Estos números son consistentes con un universo espacialmente plano. La figura (2.2)

Figura 2.2: El valor de $\tilde{a} = 1$ corresponde al presente, $\tilde{a} > 1$ corresponde al futuro del universo y $\tilde{a} < 1$ corresponde a su pasado. Note que $\tilde{a} = 0$ corresponde a la singularidad del Big Bang.

muestra la solución a la ecuación (2.83) con los valores para los parámetros de densidad presentes en nuestro universo.

Para finalizar, notamos las siguientes propiedades de nuestro universo

$$0 < \tilde{a} < 3{,}3 \times 10^{-4} \qquad \text{dominado por radiación} \tag{2.88}$$

$$3{,}3 \times 10^{-4} < \tilde{a} < 0{,}666 \qquad \text{dominado por materia} \tag{2.89}$$

$$0{,}666 < \tilde{a} \qquad \text{dominado por la energía del vacío cuántico} \tag{2.90}$$

Este modelo es conocido como el modelo estándar cosmológico ya que es el que mejor se ajusta a los datos observacionales cosmológicos obtenidos hasta el presente, también se le conoce como el modelo **ΛCDM** *(Λ-cold dark matter)* por sus siglas en inglés.

Capítulo 3

La Radiación del Fondo de Microondas Cósmico

3.1. Descubrimiento de la RCFM

Un radiotelescopio dirigido al cielo recibe no solo radiación del espacio, sino también de otras fuentes tales como la superficie de la tierra, la atmósfera de la tierra y las propias componentes del radiotelescopio. En 1960, los laboratorios Bell diseñaron un reflector en forma de cuerno de 20 pies para distinguir cada una de estas fuentes y especialmente para reducir el ruido en los receptores de señales de comunicación provenientes del satélite "Echo". Este radiotelescopio fue el instrumento para el descubrimiento de la RCFM.

Los dos componentes más importantes de un radiotelescopio son: la antena y el radiómetro. Una antena recibe la radiación de una dirección deseada sobre un área, llamada el área de colección. Una antena se usa normalmente para maximizar una respuesta en una dirección y minimizarla en cualquier otra dirección. Por otro lado, el radiómetro es un aparato que mide la intensidad de la radiación.

Para medir la intensidad de una fuente de radio extraterrestre con un radiotelescopio, debemos de ser capaces de distinguir entre las siguientes fuentes de ruido: el ruido local, el ruido del radiómetro, el proveniente de la tierra, el ruido de la atmósfera de la tierra, y el de la estructura misma de la antena. Esta distinción se hace normalmente apuntando la antena alternadamente hacia la fuente de interés y a continuación a una región cercana a ella con el fín de medir la diferencia de la respuesta del radiómetro en ambas regiones, y finalmente restando este ruido local. Para determinar la intensidad absoluta de una fuente de radio astronómica, es necesario calibrar la antena y el radiómetro, ó bien, como se hace de manera usual, observar una fuente de calibración con una intensidad conocida.

En 1963, cuando el cuerno reflector de 20 pies ya no era requerido para el trabajo satelital, Penzias y Wilson se preparaban para usarlo en Radioastronomía. ¿Pero porqué querían utilizar una antena con un área de colección de $25m$, cuando en ese momento había radiotelescopios mucho mas grandes?, la razón es que el cuerno reflector tenía características propias que ellos esperaban explotar. Una de ellas era que su sensibilidad ó área de colección podía ser calculada con mucha precisión usando un transmisor localizado a menos de un 1 km de distancia. Con este dato, la antena podía ser usada con un radiómetro calibrado para realizar mediciones primarias de las intensidades de varias fuentes de radio extraterrestres. Ambos radioastrónomos esperaban poder entender todas las fuentes de ruido de la antena, como por ejemplo la cantidad de radiación recibida de la tierra, de tal forma que las regiones de fondo podían medirse absolutamente. El interés de Wilson por el cuerno reflector de 20 pies provino de su trabajo de tesis doctoral realizada en Caltech bajo la dirección de J.G. Bolton. Su trabajo consistió en hacer un mapeo de la radiación con una longitud de onda de 33 cm emitida por la vía lactea para estudiar las fuentes discretas y el gas difuso dentro de nuestra galaxia. Para realizar el mapeo, apuntaron la antena al lado oeste de ella y usaron la rotación de la tierra para monitorearla en varias direcciones. Esto mantuvo constante todo e ruido local, incluyendo la radiación que la antena recibía de la tierra. Las regiones sobre ambos lados de la vía lactea, donde el brillo era constante, fueron usados como las zonas de referencia cero en brillo. Puesto que la antena estaba dentro de la vía lactea, es completamente imposible apuntarla fuera de ella para medir el brillo proveniente del exterior de la vía lactea el cuál es necesario conocer para tener un nivel de referencia cero en brillo que fuera satisfactorio. Esto era un serio problema porque medidas previas de baja frecuencia indicaban que alrededor de nuestra galaxia habia un halo extenso que emitia radiación en longitudes de onda de radio. El cuerno reflector era, sin embargo, un instrumento ideal para medir la radiación débil de este halo galáctico en longitudes de onda más cortas. Una de las intenciones de Wilson cuando llegó a los laboratorios Bell en 1963 era precisamente hacer tales medidas. Por lo tanto Penzias y Wilson planearon probar la capacidad de la antena para medir la radiación del halo lejano de la vía lactea.

Existían mediciones de baja frecuencia que indicaban que la temperatura del halo debía ser menor a 0.1 K en longitudes de onda de 7 cm. Como consecuencia una medición de fondo en 7 cm debería producir un resultado nulo, y sería una buena comprobación de la habilidad de medida de la antena.

Antes de realizar el experimento mencionado hace un momento, era necesario realizar medidas precisas de la antena. Penzias y Wilson idearon un mecanismo para realizar una comparación precisa de la temperatura de la antena con la de una fuente de ruido de referencia que estaba enfriada con helio líquido por lo que podían determinar su temperatura equivalente. Ellos observaron que la temperatura de la antena era alrededor de 7.5 K la cual incluía la temperatura de la fuente de ruido de referencia. Este era un resultado difícil de explicar puesto que teoricamente la temperatura de la antena debería haber sido solamente la suma de la contribución atmosférica que era de 2.3 K y la temperatura de la radiación de las paredes de la antena y la base que sumaban 1 K. Debido a que tenían una comparación directa de la temperatura de la antena con la de la fuente de ruido de referencia (cuya temperatura absoluta conocían), la única explicación posible era asignar el exceso de temperatura a la antena. Para llevar a cabo el experimento de la medición de radiación de 21 cm que provenía del halo galáctico ellos tenían que resolver **el enigma de la antena**.

Ellos trataron de explicar este exceso de temperatura dando los siguienteas argumentos los cuales fuerón descartando uno a uno.

1. En ese tiempo algunos radioastrónomos pensaban que la absorción de radiación de microondas de la atmósfera de la tierra era alrededor de dos veces el valor que ellos usaban, en otras palabras, su temperatura era de 5 K en lugar de 2.5 K. Pero ellos sabían que éste no era el caso dado que ellos habían medido un valor cercano a 2.4 K.

2. Otra posiblidad era la contaminación de ruido humano que podría estar siendo medido por la antena, por lo que dirigieron la antena hacia la ciudad de New York y a otras direcciones concluyendo que la antena no mostraba cambios significativos respecto a la temperatura térmica de la tierra.

3. Otra posible explicación era que la antena estaba midiendo radiación de nuestra galaxia, sin embargo, sus medidas de la emisión del plano de la vía lactea eran

explicadas por las intensidades de radiación esperadas de extrapolaciones de medidas de baja frecencia. Adicionalmente cualquier contribución galáctica debe de variar con la posición y ellos midierón cambios solo cerca de la vía lactea, lo cual era consistente con las medidas en bajas frecuencias

4. Las fuentes de radio extraterrestres discretas fueron descartadas debido a que tienen espectro similar a la de nuestra galaxia.

5. Descubrieron que algunas palomas habían anidado en la antena, pero al echarlas no hubieron cambios notables, salvo una insignificante reducción en la temperatura de la antena.

6. En 1962, una explosión nuclear había llenado el cinturón de Van Allen con partículas ionizadas las cuales podían ser la fuente de esta radiación. Esta explicación no solucionó el problema debido a que después de un año, esta radiación hubiera disminuido notablemente lo cual no fué medido.

Entonces comenzaron a pensar que la antena no era la fuente del ruido extra. Ante la imposibilidad de explicarse el exceso de ruido se resignaron por algún tiempo, a vivir con el problema de la temperatura de la antena, y se concentraron en mediciones en las cuales no era necesaria. En 1965, casi un año había pasado y el exceso de temperatura de la antena no había cambiado. En la siguiente sección mencionaremos la secuencia de eventos que dió como resultado la resolución del misterio del exceso de temperatura de la antena.

3.2. Un poco de Historia.

Una de las consecuencias de la teoría del *Big Bang* es la predicción de la existencia de la radiación cósmica del fondo de microondas ($RCFM$) esta fué predicha en el año de 1948, en una breve nota publicada en la revista Nature escrita por Ralph Alpher y Robert Herman. Basados en la estimación de Gamow de que la temperatura del universo había sido de mil millones de grados kelvin tres minutos despues del Big Bang, entonces el universo en el presente debería mostrar signos de esta primitiva fase super-caliente. Alpher

Y Herman predijerón que en todo el universo presente debería existir un mar de ondas electromagneticas emitidas por un cuerpo negro con una temperatura de unos cinco grados kelvin, según ellos esta radiación a cinco grados kelvin se debería registrar con diferentes intensidades para diferentes longitudes de onda en la región de las microondas, desde los tres centimetros a una centésima de centimetro. Alpher y Herman nunca propusierón la factibilidad de realizar un experimento para detectarla y nadie más se interesó por el asunto debido a que su artículo pasó desapercibido para la mayoría de los astrónomos de la época.

Por otro lado, *Robert Dicke*, un físico de la Universidad de Princeton, había detectado la *RCFM* en 1946, dos años antes de que fuera predicha. *Dicke* desarrrolló aparatos de medición con los cuáles descubrió una radiación con una temperatura menor que 20 grados kelvin; sus resultados los publicó en un artículo en la revista de física "Physical Review"pero al no tener ninguna explicación para este fenómeno simplemente olvidó el asunto. *Dicke* no recordó esta observación cuando empezó trabajar con modelos cosmológicos a principios de los años sesenta. Como fruto de sus investigaciones él llegó también a la conclusión de que debería existir algún tipo de radiación cósmica producto del universo temprano. Un colega suyo de Princeton James Peebles, a sugerencia de él, realizó un estudio sobre la temperatura que debería tener esta radiación obteniendo una cifra de 10 grados kelvin para ella. A continuación, Dicke convenció a otros dos investigadores de Princeton, Peter Roll y David Wilkinson, para que trataran de detectar la radiación cósmica predicha por lo que ellos contruyerón una antena para poder detectarla.

Al mismo tiempo, en New Jersey, un par de radioastrónomos trabajando en los laboratorios de la compañia Bell Telephone, *Arno Penzias,* y *Robert Wilson*, estaban tratando de corregir algunas deficiencias en una radioantena que había sido utilizada recientemente para probar algunos satélites de comunicaciones con el fín de poder utilizarla para realizar nuevas observaciones en radiastronomía. Cabe mencionar que, al igual que Dicke, Penzias y Wilson no conocían las investigaciones de Gamow sobre el modelo del Big Bang ni la predicción de la existencia de la RCFM hecha por Alpher y Herman, y que, como curiosidad historica, Wilson se había convertido en ese momento en un fiel creyente de la teoría del estado estacionario después de haber asistido a un curso de cosmología en Caltech impartido por Fred Hoyle.

Penzias y *Wilson*, notaron que no podían eliminar un ruido de radiación de fondo de microondas con una temperatura de aproximadamente 3 grados kelvin de las mediciones que estaban realizando. En ese momento se dierón cuenta de que unas palomas habían anidado en el cuerno de la antena, debido a lo cual pensarón que ése era el origen del problema. Aunque las palomas fueron retiradas de la antena, la radiación de fondo permaneció.

Al no poder eliminar esta radiación de fondo, Penzias entró en contacto con el investigador, Bernard Burke, que estaba trabajando en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, para tratar de solucionar el problema. Burke no pudo resolver el problema pero recordó que un colega suyo había escuchado recientemente en Princeton una conferencia de Peebles en la que habló sobre la predicción de la existencia de una radiación cósmica de fondo en el rango de las microondas. Debido a esto, Burke sugirió a Penzias entrar en contacto con Dicke y Peebles. Cuando el grupo de investigadores de Princeton se enteraron del descubrimiento de Penzias y Wilson comprendierón que se trataba de la RCFM que habían conjeturado aunque ni Penzias ni Wilson entendieran la magnitud de su descubrimiento.

A sugerencia de *Dicke*, *Penzias* y *Wilson* publicarón un artículo en 1965 en la revista de astrofísica Astrophysical Journal. El artículo describía en detalle el descubrimiento de la existencia de una radiación de fondo de microondas con una temperatura cercana a tres grados kelvin sin dar alguna explicación de su origen pero es preciso decir que referenciaron otro artículo que ofrecía una explicación a este fenómeno. Estos dos artículos no mencionaron los estudios teóricos de 1948 de Alpher, Herman, y Gamow, que predecían la existencia de la RCFM lo que molestó a Gamow y a otros investigadores.

Cuando la teoría del *Big Bang* fué reconocida por el comité del premio Nobel en 1978, muchos de sus creadores principales ya habían muerto. Lemaitre, quien murió en 1966, se enteró del descubrimiento de la RCFM poco antes de morir y Gamow murió en 1968. Dado que el premio solo se concede a científicos vivos, el comité del premio nobel decidió otorgárselo a *Penzias* y *Wilson*, ignorando a todos los cientificos que la habían predicho.

La *RCFM* es una radiación de baja temperatura que llega a la superficie de la tierra desde el espacio. Recibe este nombre porque constituye un fondo de radiación de todas las direcciones del espacio, incluso de aquellas en las que no hay ningún cuerpo. Esta radiación es el producto de las elevadas temperaturas de los primeros momentos del *Big Bang*.

Las microondas son ondas de radio de alta frecuencia y por consiguiente de longitud de onda muy corta, que están situadas entre los rayos infrarrojos (cuya frecuencia es mayor) y las ondas de radio convencionales (cuya frecuencia es menor). Su longitud de onda se encuentra aproximadamente dentro del rango de 1mm hasta 30cm. Las microondas tienen muchas aplicaciones tales como en la radio, la televisión, los radares, las comunicaciones vía satélite, y en áreas tales como la metereología, la medición de distancias, la investigación de las propiedades de la materia, el cocinado de alimentos, etc.

Debido a la constante expansión del universo a lo largo de miles de años, esta radiación de alta energía y longitud de onda corta que ocupa todo el espacio-tiempo, sufriría un corrimiento al rojo, convirtiéndose en el presente en una radiación de baja energía y longitud de onda grande. Mediciones actuales han confirmado que el universo presente se halla permeado por una radiación de microondas a una temperatura de aproximadamente 2.7 grados kelvin o que se considera una reliquia que proviene de los primeros momentos del Big Bang.

En las siguientes seciones estudiaremos las características de la RCFM comenzando con su distribución que es prácticamente la asociada con la emisión de un cuerpo negro.

3.3. La radiación emitida por un Cuerpo Negro

En esta sección hallaremos la función de distribución de la radiación emitida por un cuerpo negro.

Consideremos la interacción térmica entre dos sistemas macroscópicos A y $\hat{A}$, y designemos sus energías respectivas por E, $\hat{E}$. Llamaremos $\Omega(E)$ al número de estados del sistema A en el intervalo entre E y $E + \delta E$, y $\hat{\Omega}(\hat{E})$ al número de estados de $\hat{E}$ en el intervalo entre $\hat{E}$ y $\hat{E} + \delta \hat{E}$. Supongamos que los sistemas no están térmicamente aislados entre sí, de manera que pueden intercambiar energía entre ellos. Asumimos que los parámetros exteriores están fijos. El sistema combinado $A^0 = A + \hat{A}$ esta aislado, de manera que $E^0 = E + \hat{E}$ permanece constante. Sin embargo, la energía de cada sistema no está fija, dado que puede intercambiar energía con el otro sistema. Supongamos que los dos sistemas A y $\hat{A}$ están en equilibrio térmico. La energía correspondiente a $\hat{A}$ es entonces $\hat{E} = E^0 - E$. Debido a esta última relación, el número de estados accesibles para el sistema completo, A^0, puede considerarse como función de un único parámetro: la energía E. Designemos por $\Omega^0(E)$ el número total de estados accesibles a A^0 cuando A tiene una energía entre E y $E + \delta E$. Sabemos que si A^0 está en equilibrio térmico entonces tiene la misma probabilidad de encontrarse en cualquiera de sus estados accesibles. De aquí se deduce que la probabilidad $P(E)$ de que el sistema se encuentre en una configuración en la que A tenga una energía entre E y $E + \delta E$ es simplemente proporcional a $\Omega^0(E)$.

$$P(E) \propto \Omega^0(E) \tag{3.1}$$

Ahora bien si A tiene una energía E entonces puede estar en cualquiera de sus $\Omega(E)$ estados posibles. Al mismo tiempo $\hat{A}$ tendría que estar en uno de sus $\hat{\Omega}(\hat{E}) = \hat{\Omega}(E^0 - E)$ estados posibles. Dado que cualquiera de los estados posibles de A puede combinarse con todos los estados posibles de $\hat{A}$, se deduce que el número de estados accesibles distintos para A^0 cuando A tiene una energía entre E y $E + \delta E$ es

$$\Omega^0(E) = \Omega(E)\hat{\Omega}(E^0 - E) \quad . \tag{3.2}$$

Consideremos el caso de un sistema pequeño A en contacto térmico con un foco calorífico $\hat{A}$ como se muestra en la 3.1.

Figura 3.1: baño térmico .

Calculemos la probabilidad P_r de encontrar al sistema A en cualquier único microestado r con energía entre E_r y $E_r + \delta E_r$. Supongamos una interacción débil entre A y $\hat{A}$ de modo que sus energías son aditivas. La energía de A no está fija, únicamente la energía total $E^0 = E_r + \hat{E}$. El foco $\hat{A}$ deberá entonces tener una energía proxima a $\hat{E} = E^0 - E_r$. De aquí que si A está en el único estado definido r, el número de estados accesibles al sistema combinado A^0 es proporcional el número de estados $\hat{\Omega}(E^0 - E_r)$. Entonces usando (3.1) y (3.2) con $E = E_r$ tenemos

$$P(E_r) = \hat{C}\hat{\Omega}(E^0 - E_r) \quad . \tag{3.3}$$

donde $\hat{C}$ es una constante independiente de r.

Tomemos ahora dos estados del sistema A con energías ε_1 y ε_2. Utilizando que la entropía, S, se define mediante la relación

$$S = k \ln \Omega \quad , \tag{3.4}$$

deducimos que

$$\Omega = e^{S/k} \quad . \tag{3.5}$$

El símbolo k es la constante de Boltzman.

La probabilidad de encontrar el sistema A en ε_i, con $i = 1, 2$, es entonces proporcional al número de estados compatibles con la energía $(E^0 - \varepsilon_i)$, por lo que usando las ecuaciones (3.3) y (3.5) deducimos entonces que

$$\frac{P(\varepsilon_1)}{P(\varepsilon_2)} = \frac{e^{S(E^0-\varepsilon_1)/k}}{e^{S(E^0-\varepsilon_2)/k}} \equiv e^{\Delta S/k} \tag{3.6}$$

donde $\Delta S \equiv S(E^0 - \varepsilon_1) - S(E^0 - \varepsilon_2)$.

A continuación expandamos en serie de Taylor alrededor de E^0

$$S(E^0 - \varepsilon_1) = S(E^0) + (-\varepsilon_1)\frac{\partial S}{\partial(E^0 - \varepsilon_1)}\Big|_{E^0} + ... \tag{3.7}$$

De la misma manera

$$S(E^0 - \varepsilon_2) = S(E^0) + (-\varepsilon_2)\frac{\partial S}{\partial(E^0 - \varepsilon_2)}\Big|_{E^0} + ... \tag{3.8}$$

y por lo tanto

$$\Delta S = -(\varepsilon_1)\frac{\partial S}{\partial(E^0 - \varepsilon_1)}\Big|_{E^0} + (\varepsilon_2)\frac{\partial S}{\partial(E^0 - \varepsilon_2)}\Big|_{E^0} + ... \tag{3.9}$$

asumiendo que

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll E^0 \tag{3.10}$$

concluimos que

$$\Delta S = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad e^{\Delta S/k} = \frac{e^{-\varepsilon_1/kT}}{e^{-\varepsilon_2/kT}} \tag{3.11}$$

donde hemos definido T como la temperatura del sistema total A^0 que está en equilibrio térmico,

$$\frac{1}{T} \equiv \frac{\partial S}{\partial E^0} \tag{3.12}$$

Entonces, de la ecuación (3.11) proponemos que

$$P(\varepsilon_s) \equiv ce^{-\varepsilon_s/kT} \quad , \tag{3.13}$$

donde c es una constante. Al término $e^{-\varepsilon_s/kT}$ se le conoce como *El Factor de Boltzman.* En el caso que estamos tratando tenemos que la energía de un fotón en el nivel s es $\varepsilon_s = sh\nu$ donde $s = 0, 1, 2...$, donde h es la constante de Plank y ν es la frecuencia del fotón. Debido a que $P(\varepsilon_s)$ es una probabilidad, requerimos que

$$\sum_{s=0}^{\infty} P(\varepsilon_s) = \sum_{s=0}^{\infty} ce^{-\varepsilon_s/kT} = 1 \quad , \tag{3.14}$$

por lo que encontramos que

$$c = \frac{1}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_s/kT}} \quad . \tag{3.15}$$

Finalmente tenemos

$$P(\varepsilon_s) = \frac{e^{-\varepsilon_s/kT}}{z}, \tag{3.16}$$

donde

$$z = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_s/kT} \tag{3.17}$$

es llamada *La Función de Partición.*

Sea $\langle s \rangle$ el número de fotones promedio en un nivel s, es decir

$$\langle s \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} sP(\varepsilon_s). \tag{3.18}$$

la correspondiente función de partición es

$$z_{\text{fot}} = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-shv/kT} = \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad . \tag{3.19}$$

Sea $y \equiv \frac{h\nu}{kT}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle s \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} sP(\varepsilon_s) = -z^{-1}\frac{d}{dy}\sum_{s=0}^{\infty}(e^{-y})^s = z^{-1}(1-e^{-y})^{-2}e^{-y} \\ = (1-e^{-y})(1-e^{-y})^{-2}e^{-y} = \frac{1}{e^y - 1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

de donde

$$\langle s \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad , \tag{3.21}$$

este es el número promedio de fotones por nivel de frecuencia o de energía, y se le conoce como la función de distribución de Planck. En la figura 3.2 presentamos una gráfica de la distribución (3.21). De ésta, podemos deducir facilmente que hay pocos fotones muy energéticos y muchos fotones poco energéticos. La función de distribución de la RCFM es prácticamennte de la forma de la ecuación (3.21) con una temperatura de $T_{RCFM} = 2.728 \pm 0.004$ K excepto por pequeñas desviaciones de ella.

3.4. Densidad de Energía por frecuencia para fotones

En esta sección calcularemos la unidad de energía por frecuencia asociada a la radiación emitida por un cuerpo negro. Imaginemos un sistema con una sola partícula cuántica (en nuestro caso estas partículas serán los fotones de la RCFM); de acuerdo al principio de incertidumbre tenemos que

$$\Delta x^3 \Delta p^3 \geqslant h^3 \tag{3.22}$$

lo que implica que la región mas pequeña donde una partícula cuántica puede ser confinada tiene un volumen h^3 en el espacio fase. A la región que ocupa este volumen mínimo la llamaremos celda y cada celda representa un estado posible de la partícula. Tomemos un elemento de volumen diferencial en el espacio fase d^3xd^3p que contiene una cantidad extremadamente grande de celdas. Entonces el número total de celdas contenidas dentro del volumen d^3xd^3p es

Figura 3.2: Ocupación por nivel de energía .

$$\frac{1}{h^3}\int d^3x d^3p = \frac{1}{h^3}4\pi V\int p^2 dp = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int E^2 dE. \tag{3.23}$$

donde V es el volumen del espacio tridimensional y donde hemos usado la ecuación $E = cp$ para partículas sin masa.

Debido a que en cada celda el fotón puede tener dos polarizaciones distintas (y por lo tanto dos estados distintos por celda), tenemos que la densidad de estados por nivel de energía para un fotón es

$$\rho(E) = \frac{8\pi V}{h^3c^3}E^2 \quad . \tag{3.24}$$

Obtengamos ahora la energía total, la cual está dada por la multiplicación de tres factores: la densidad de estados por nivel de energía y por partícula, el número de ocupación por nivel de energía, y la energía del nivel.

$$E_T = \rho(E)\cdot\langle s\rangle\cdot E = \left(\frac{8\pi V}{h^3c^3}E^2\right)\left(\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right)E = \frac{8\pi V}{h^3c^3}\left(\frac{E^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right) \quad . \tag{3.25}$$

Podemos obtener la densidad de energía por frecuencia, $\rho(\nu)$, para un intervalo entre E y $E + dE$, donde $E = h\nu$, de la siguiente manera

$$\frac{E_T dE}{V} = \frac{8\pi}{h^3 c^3}\left(\frac{E^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) dE = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \equiv \rho(\nu) d\nu \quad . \tag{3.26}$$

de donde utilizando nuevamente que $y = \dfrac{h\nu}{kT}$, obtenemos:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^2}\frac{y^3}{e^y - 1} \tag{3.27}$$

que es precisamente la densidad de energía por unidad de frecuencia asociada a la *radiación de cuerpo negro.*

En la figura 3.3 graficamos la distribución dada por la ecuación (3.27). De esta figura notamos que

1. $\rho(\nu) \Rightarrow 0$ cuando $\nu \Rightarrow 0$ ó $\nu \Rightarrow \infty$.

2. $\rho(\nu)$ alcanza su máximo para frecuencias del orden de $h\nu \approx 2.8\ kT$. Es decir, la energía total en la radiación es dominado por fotones con energías del orden de kT.

3. La frecuencia media de un fotón en esta distribución es $E_{\mathrm{media}} = h\nu_{\mathrm{media}} \approx 3kT$.

Podemos calcular ahora la *Densidad total de energía* de la radiación de cuerpo negro que se obtiene integrando la ecuación (3.27) sobre todas las frecuencias. Usando como hasta ahora la variable $y = \dfrac{h\nu}{kT}$ obtenemos

$$\rho_T = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy = \sigma T^4 \tag{3.28}$$

esta ecuación, $\rho_T = \sigma T^4$, es conocida como la *Ley de Stefan-Boltzmann*, y σ es *la constante de Stefan-Boltzmann*, también llamada *constante de un cuerpo negro.*

La integral en la ecuación (3.28) no es particularmente fácil de calcular. En el apéndice mostramos los detalles del cálculo de esta integral cuyo valor es

$$\int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy = \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad , \tag{3.29}$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann, y $\Gamma(x)$ es la función Gamma. Por lo que obtenemos finalmente

$$\sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3}\frac{\pi^4}{15} = 7{,}565 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-4}} \tag{3.30}$$

Figura 3.3: Radiación de Cuerpo negro.

3.4.1. Máximo de la densidad de energía por frecuencia

Para hallar el máximo de la densidad de energía por unidad de frecuencia encontramos los extremos de la función (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\nu)}{\partial \nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y^3}{e^y - 1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(e^y - 1)(3y^2) - y^3(e^y)}{(e^y - 1)^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad 3(e^y - 1) - ye^y = 0 \quad \Rightarrow \quad e^y(3 - y) = 3 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Utilizando el software Mathematica vemos que $y_{\mathrm{max}} = 2.821$, es decir, que

$$h\nu_{_{max}} = 2{,}821kT \quad , \tag{3.32}$$

lo que muestra la relación lineal existente entre $h\nu_{_{max}}$ y T.

3.4.2. Densidad total de energía asociada a la radiación cósmica de fondo (RCFM)

Denotemos por t_0 al tiempo actual. Usando que la temperatura media actual de la RCFM es de $T_{RCFM} = 2.728 \pm 0.004$ K y utilizando la ley de Stefan-Boltzmann podemos calcular que la densidad de energía actual de la RCFM

$$\rho_{_\gamma} = \sigma T^4_{_{RCFM}} = 4{,}189 \times 10^{-14} \mathrm{J\,m^{-3}} \quad . \tag{3.33}$$

3.5. La razón entre fotones y bariones.

En esta parte haremos una estimación de la razón del número de fotones al número de bariones (partículas formadas por 3 quarks) en el presente. Para los bariones tomaremos en cuenta solamente a los protones y neutrones puesto que estos son los bariones mas comunes en el universo presente.

La densidad número total de fotones

Designemos $\eta_{_\gamma}(\nu)$ a la densidad número de fotones de frecuencia ν. Usando las ecuaciones (??) y (??) obtenemos

$$\eta_{_\gamma}(\nu) d\nu \equiv \frac{\rho(E) \cdot \langle s \rangle}{V} dE = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad . \tag{3.34}$$

Sea N_γ la densidad número total de fotones. Integrando (3.34) sobre todas las frecuencias, tenemos:

$$N_{_\gamma} = \int_0^\infty n_{_\gamma}(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu, \tag{3.35}$$

entonces usando como siempre el cambio de variable $y = \dfrac{h\nu}{kT}$,

$$N_{_\gamma} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{k^3 T^3}{h^3} \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{k^3 T^3}{h^3} \Gamma(3)\zeta(3) \quad , \tag{3.36}$$

donde la integral la hemos calculado en el apéndice.

Calculemos ahora la energía media por fotón de la radiación de cuerpo negro

$$E_{_{media}} = \frac{\rho_T}{N_\gamma} = \frac{\dfrac{8\pi^5}{15\,c^3} \dfrac{k^4 T^4}{h^3}}{\dfrac{8\pi}{c^3} \dfrac{k^3 T^3}{h^3} \Gamma(3)\zeta(3)} = \frac{\pi^4 kT}{15\,\Gamma(3)\zeta(3)} = 2{,}701\,kT \quad . \tag{3.37}$$

En la actualidad $T_{RCFM} = 2{,}728$. Esto significa que actualmente $N_{\gamma} = 3{,}7 \times 10^8 m^{-3}$. Es decir que por cada metro cubico hay $3{,}7 \times 10^8$ fotones de la *RCFM*.

3.6. La densidad número de Bariones

Vamos a calcular la densidad número de bariones en el presente.

Sea ε_{B} la densidad de energía barionica, ρ_{B} la densidad de masa bariónica, Ω_{B} el parámetro de densidad bariónica, y ρ_c la densidad crítica, todas estas cantidades evaluadas en el presente. Usando las relaciones

$$\varepsilon_{B} = \rho_{B} c^2, \tag{3.38}$$

y

$$\Omega_{B} = \frac{\rho_B}{\rho_c} \tag{3.39}$$

obtenemos para la densidad de energía bariónica

$$\varepsilon_{B} = \Omega_{B} \rho_{c} c^2. \tag{3.40}$$

Tomando el valor de Ω_{B} del proceso de nucleosíntesis

$$\Omega_{B} = 0{,}02 h^{-2} \tag{3.41}$$

y el valor de la densidad crítica en el presente

$$\rho_{c} = 1{,}88 h^2 \times 10^{-11} J m^{-3}. \tag{3.42}$$

obtenemos que la *Densidad de energía Bariónica* es

$$\varepsilon_{B} = 3{,}38 \times 10^{-11} J m^{-3}. \tag{3.43}$$

la densidad de energía presente de los bariones es entonces alrededor de mil veces más grande que la densidad de energía presente de la radiación, es decir,

$$\frac{\varepsilon_B}{\rho_\gamma} = \frac{3{,}38 \times 10^{-11} J m^{-3}}{4{,}189 \times 10^{-14} J m^{-3}} \approx 10^3 \tag{3.44}$$

Tomando la energía media del protón ó del neutrón igual a $m_p c^2 \approx 939\,\mathrm{MeV}$ (hay más bariones pero su masa es insignificante), donde m_p es la masa del protón, obtenemos que la densidad número de bariones es igual a

$$N_B = \frac{\varepsilon_B}{m_p c^2} \approx 0{,}22\, m^{-3} \quad . \tag{3.45}$$

Por lo que deducimos finalmente

$$\eta = \frac{N_f}{N_B} \approx 1{,}7 \times 10^9 \quad . \tag{3.46}$$

Es decir que hay aproximadamente $1{,}7 \times 10^9$ fotones por cada barión. Aunque la densidda de energía bariónica excede considerablemente a la densidad de energía de radiación, hay más fotones que bariones debido a que los bariones individules tienen mucho más energía que cada fotón. Note que en la tierra hay muchos mas bariones que en el espacio interestelar donde prácticamente no hay.

3.7. Conservación del número de partículas

La densidad número de una especie particular de partículas es útil porque en muchas circunstancias el número de partículas se conserva. Por ejemplo, tenemos dos situaciones en las cuales ésto ocurre:

- si las interacciones entre partículas son insignificantes, no esperariamos que un fotón ó un electrón desaparecería para convertirse en otras partículas, por lo tanto esperariamos que el número de partículas de cada especie se conserve.

- En general, el número de partículas puede cambiar a través de interacciones, por ejemplo un electrón y un positrón pueden aniquilarse y crear dos fotones. Sin embargo, si la razón de interacción es extremadamente alta esperamos que el universo se encuentre en un estado de equilibrio térmico. De ser así, entonces el número de partículas se conserva aún si la tasa de interacciones es grande, puesto que por definición el equilibrio térmico significa que cualquier interacción crea y destruye partículas de manera tal que no hay un cambio neto en el número de partículas de cada especie. Entonces, a excepción de periódos breves de tiempo donde no existió equilibrio térmico, esperamos que el número de partículas de cada especie se conserve.

A diferencia del número de partículas, la densidad número de una especie cambia conforme el universo se expande debido a que el volumen crece proporcionalmente al cubo del factor de escala:

$$V \propto a^3, \tag{3.47}$$

por lo que la densidad número de cada especie, n, es proporcional al inverso del cubo del factor de escala:

$$n \propto \frac{1}{a^3}, \tag{3.48}$$

por lo que podemos concluir que la razón entre las densidades número de fotones y bariones no cambia conforme el universo se expande, excepto claro esta, en las épocas durante las cuales no hay equilibrio térmico en él.

3.8. Dependencia de la Temperatura de la expansión del universo

De acuerdo a la primera ley de la termodinámica

$$dE = dW + dQ = -PdV + TdS \quad , \tag{3.49}$$

y consideremos un proceso reversible con entropía S constante. Sea

$$\boldsymbol{r} = a(t)\boldsymbol{x} \tag{3.50}$$

la relación que guardan las coordenadas comóviles $\boldsymbol{r}$ y las coordenadas físicas $\boldsymbol{x}$ de una partícula de un fluido en el universo. Elijamos $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, lo que implica que $\|\boldsymbol{r}\| = a(t)$.

Tomemos una esfera de radio $\|\boldsymbol{r}\| = a(t)$ cuyo volumen V es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{3.51}$$

derivamos con respecto al tiempo la ecuación (3.51)

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \dot{a} \quad , \tag{3.52}$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo. A continuación derivamos con respecto al tiempo la ecuación $E = \rho c^2 V$, donde ρ es la densidad de masa del fluido y E es la energía contenida en el volumen V,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho c^2 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3\right) = \rho c^2 \cdot 4\pi a^2 \dot{a} + \dot{\rho} c^2 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \quad , \tag{3.53}$$

como el proceso es reversible $dS = 0$, por lo que de la ecuación (3.49) obtenemos

$$\frac{dE}{dt} + P\frac{dV}{dt} = 0, \tag{3.54}$$

introduciendo las ecuaciones (3.52) y (3.53) en (3.54) llegamos a

$$\rho c^2 \cdot 4\pi a^2 \dot{a} + \dot{\rho} c^2 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 + P(4\pi a^2 \dot{a}) = 0 \tag{3.55}$$

factorizamos la ecuación anterior

$$\frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \left[\frac{3\dot{a}}{a}\rho + \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{P}{c^2}\right] = 0 \tag{3.56}$$

asumiendo que $\frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \neq 0$ nos conduce a la ecuación del fluido

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \quad . \tag{3.57}$$

Tomaremos la ecuación de estado para un fluido de radiación congruente con la RCFM

$$P = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad , \tag{3.58}$$

sustituyendo (3.58) en (3.57) tenemos

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{1}{3}\rho\right) = \dot{\rho} + 4\,\rho\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a^4}\frac{d}{dt}\left(\rho a^4\right) = 0 \tag{3.59}$$

por lo que

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho a^4 = A \tag{3.60}$$

donde A es una constante. Podemos concluir entonces que

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}, \tag{3.61}$$

y dado que $\varepsilon_\gamma \equiv \rho c^2$, llegamos a la expresión

$$\varepsilon_\gamma \propto \frac{1}{a^4}. \tag{3.62}$$

Comparando la ecuación (3.62) con la ley de Stefan-Boltzmann (3.28) tenemos que

$$T_\gamma \propto \frac{1}{a} \tag{3.63}$$

Si asumimos que la temperatura del universo es igual a la temperatura, T_γ, asociada a la RCFM, entonces concluimos que el universo se esta enfriando conforme se expande.

Figura 3.4: La evolución del espectro de frecuencias de un cuerpo negro conforme el universo se expande. La expansión reduce la densidad número de fotones, mientras el corrimiento al rojo reduce su frecuencia. En combinación, estos dos efectos llevan el espectro de frecuencias en un nuevo espectro de cuerpo negro a una temperatura menor. La curva superior corresponde a una temperatura $T = 4{,}06$, y la inferior a $T = 2{,}782$.

Debido a que en el presente la temperatura de la RCFM es aproximadamente $3K$, la ecuación (3.63) implica que en el pasado el universo era más caliente y más pequeño.

De hecho, debe haber sido extremadamente caliente en los primeros momentos de su existencia. Si la temperatura esta disminuyendo conforme el universo evoluciona, entonces, la distribución térmica de la RCFM debe estar también evolucionando. Sin embargo, la distribución de densidad de energía de la radiación de cuerpo negro

$$\epsilon(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.64}$$

tiene una propiedad especial que se muestra en la figura (3.4).

Conforme el universo se expande, la frecuencia ν de los fotones se reduce proporcionalmente al inverso del factor de escala $1/a$, pero la forma de la distribución de cuerpo negro se preserva para una temperatura final T_f menor que una temperatura inicial T_i debido a que:

- el denominador de la ecuación (3.64) es solamente una función de ν/T de tal manera que una reducción de la frecuencia ν es absorbida por una redución equivalente en la temperatura T, es decir,

$$\frac{\nu_f}{T_f} = \frac{\left(\dfrac{\nu_i \times a_i}{a_f}\right)}{\left(\dfrac{T_i \times a_i}{a_f}\right)} = \frac{\nu_i}{T_i} \quad , \tag{3.65}$$

  este resultado nos dice que durante la evolución del universo, el factor $h\nu/kT$ no depende de la expansión del universo.

- El factor ν^3 en el numerador escala como $1/a^3$ de tal manera que esta reducción es absorbida por un escalamiento de la densidad de energía de la forma $\varepsilon \propto 1/a^3$ (puesto que las densidades son inversamente proporcionales al volumen el cual crece como a^3), es decir,

$$\frac{\varepsilon_f}{\nu_f^3} = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_i \times a_i^3}{a_f^3}\right)}{\left(\dfrac{\nu_i^3 \times a_i^3}{a_f^3}\right)} = \frac{\varepsilon_i}{\nu_i^3} \quad , \tag{3.66}$$

  de lo cual tendriamos que

$$\varepsilon_f = \left(\frac{\nu_f}{\nu_i}\right)^3 \varepsilon_i = \left(\frac{\nu_f}{\nu_i}\right)^3 \left(\frac{8\pi h}{c^3}\right) \frac{\nu_i^3}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_i}} - 1} \quad , \tag{3.67}$$

Consecuentemente, podemos afirmar que conforme el universo se expande y se enfría, una distribución de radiación de cuerpo negro conserva su forma pero con una temperatura en el presente menor que en el pasado.

3.9. Conclusiones

En esta tesis hemos revisado algunas de las bases teóricas que dan sustento al modelo estándar cosmológico. Este modelo es el que mejor se ajusta a todos los datos observacionales cosmológicos obtenidos hasta ahora. Entre las bases teóricas que se han revisado se encuentran:

- Las herramientas matemáticas de la TRG.
- Las ideas teóricas que dan sustento a la TRG.
- El principio cosmólogico que afirma que el universo es isotrópico y homegéneo en grandes escalas de distancia.
- El modelo cosmológico estándar el cual es un espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker.
- La existencia de la radiación cósmica del fondo de microondas (RCFM).

El descubrimiento de la RCFM fué uno de los principales triunfos y predicciones del modelo del Big Bang, el cual permitió entrar en una era de observaciones con alta precisión que en la actualidad permiten poner a prueba diversos modelos y teorías cosmológicas. También nos permitió darnos cuenta de que el universo era extremadamente más caliente en el pasado. La RCFM tiene un espectro de frecuencias de cuerpo negro y tiene información acerca del pasado del universo. Actualmente se han logrado obtener medidas precisas de las anisotropías en la temperatura de la RCFM que nos permiten estudiar la formación y evolución de estructuras en el universo tales como galaxias y cúmulos de galaxias. En el futuro cercano, se estan desarrollando diversos experimentos que permitirán medir con precisión la polarización de esta radiación que darán la posibilidad de descartar o afirmar diversos modelos cosmológicos. Finalmente, es preciso mencionar que en los próximos años se espera un auge en el estudio de la cosmología debido a la gran cantidad de experimentos que se realizarán por parte de la agencia espacial estadounidense (NASA) y las diversas agencias espaciales europeas. Estos planes hacen que sea más urgente el desarrollo de grupos de cosmológos en instituciones mexicanas de educación superior para estar en la frontera de la investigación en el campo de la cosmología.

Apéndice

En este apéndice mostramos en detalle el cálculo de una integral que fué usada a través del texto. Definimos la función

$$g_n(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x - 1}, \qquad n \in \mathbb{R}, \quad 0 \le z \le 1 \quad . \tag{3.68}$$

Multiplicando la fracción dentro de la integral por el término ze^{-x} obtenemos,

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{ze^{-x}x^{n-1}dx}{1 - ze^{-x}} \quad , \tag{3.69}$$

utilizando el hecho bien conocido de la convergencia de la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - ze^{-x}} = \sum_{k=0}^\infty (ze^{-x})^k, \qquad |ze^{-x}| < 1 \tag{3.70}$$

al sustituir (3.70) en (3.69) obtenemos,

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty ze^{-x} \sum_{k=0}^\infty z^k e^{-kx} x^{n-1}dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty z^{k+1} e^{-x(1+k)} x^{n-1} dx \tag{3.71}$$

de donde

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^\infty z^k \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx \quad . \tag{3.72}$$

definamos ahora $y = kx$, entonces la integral en la ecuación (3.72) se convierte en

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^\infty z^k \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} \right) \frac{1}{k}\, dy \quad . \tag{3.73}$$

utilizando ahora que,

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy \quad , \tag{3.74}$$

obtenemos finalmente

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} \right) \frac{1}{k} \, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad . \tag{3.75}$$

tomando $z = 1$,

$$g_n(1) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \zeta(n) \quad , \tag{3.76}$$

donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann.

De donde finalmente

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{e^x - 1} = \zeta(n)\Gamma(n) \quad , \qquad n \in \mathbb{R} \tag{3.77}$$

este resultado será empleado para resolver las ecuaciones (3.28) y (3.36).

Bibliografía

[1] Existen una gran cantidad de libros y artículos que explican la teoría especial de la relatividad (TRE). En particular recomendamos el texto:
Special Relativity, A. P. French, The MIT Introductory Physics Series, Edit. Norton and Company, 1966.

[2] ***Gravity: An introduction to Einstein's General Relativity***, James B. Hartle, Edit. Addison Wesley, 2003.

[3] ***An introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry***, Sean M. Carroll, Edit. Addison Wesley, 2004.

[4] ***Zur Allgemeinen Relativitatstheorie***, A. Einstein, Preuss Akad. Wiss. Berlin , Sitzber., págs. 778-786, 1915.

[5] ***Der Feldgleichungen der Gravitation***, A. Einstein, Preuss Akad. Wiss. Berlin , Sitzber., págs. 844-847, 1915.

[6] ***Relativity in the Global Positioning System***, Neil Ashby, Living Rev. Relativity 6, (2003), 1. URL (cited on february 17, 2007): http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1.

[7] Penzias A. A. and R. W. Wilson, Astrophysical Journal **142**, pág. 1149, 1965.

[8] Penzias A. A. and R. W. Wilson, Astrophysical Journal **142**, pág. 420, 1965.

[9] ***Modern Cosmology***, Scott Dodelson, Academic Press, 2003.

[10] ***General relativity primer***, Richard H. Price, American Journal of Physics **50**(**4**), April, 1982.

[11] ***Geometry, Topology and Physics***, M. Nakahara, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing (IOP), 2003.

[12] ***The cosmic microwave background radiation***, R. W. Wilson, Reviews of Modern Physics, Vol. 51, No. 3, July, 1979.

[13] ***An Introduction to Modern Cosmology***, A. Liddle, Jonh Wiley and Sons, England, 1999.