

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Medidas Complejas y Teoremas de
Representación.

Tesis para acreditar el título de Licenciado
en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta:

Alina Ixchel Calderón Andrade

Asesor:

Pierre Michel Bayad

Morelia, Michoacán a 20 de Mayo de 2008

Agradecimientos

A mis Padres.

A mis hermanos.

A mis sobrinos.

A Dany.

A Pierre.

A Jorge.

A mis amigos.

Y a todos aquellas personas que me han acompañado y apoyado en este trayecto.

Índice general

1. Medidas Complejas	7
1.1. Medidas complejas y medidas de variación total asociadas	7
1.2. Medidas absolutamente continuas con respecto a una medida positiva y medidas mutuamente singulares	9
1.3. Propiedades elementales	11
2. El teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym	13
3. Funciones Absolutamente Continuas	21
3.1. Definición y ejemplos	21
3.2. El teorema fundamental	24
3.3. La función de Cantor	27
4. Funcionales lineales acotados en L^p	35
4.1. Representación de las formas lineales continuas sobre L^p , $1 \leq p < +\infty$. . .	35
4.2. Contraejemplo para $p = +\infty$	40
5. El Teorema de representación de Riesz	41
5.1. Integral con respecto a una medida compleja	41
5.2. Formas lineales continuas sobre $C(X)$; ejemplos.	42
5.3. El teorema de Riesz	44
6. Apéndice	49
6.1. Apéndice 1: operadores lineales continuos o acotados	49
6.2. Apéndice 2: Algunos resultados auxiliares	49
6.3. Apéndice 3: Puntos de Lebesgue de una función integrable	51

Introducción

En esta tesis estudiamos la noción de medidas complejas y su utilización en teoremas de representación.

El primer capítulo esta conformado por las definiciones de medida compleja, medida de variación total, medidas absolutamente continuas con respecto a una medida positiva y medidas mutuamente singulares. También se incluyen algunas propiedades de las medidas antes mencionadas.

El teorema fundamental concierne la representación de las medidas complejas. Es el teorema clásico Radon-Nikodym: las medidas complejas absolutamente continuas con respecto a una medida positiva dada se representan por funciones integrables. Este teorema y su prueba detallada son descritos en el segundo capítulo de la tesis.

En los capítulos 3 y 4 estudiamos aplicaciones del teorema de Radon-Nikodym a la representación de funciones y de formas lineales continuas.

En el capítulo 3 estudiamos las funciones absolutamente continuas. Probamos que las funciones absolutamente continuas son derivables en casi todas partes y obtenemos la caracterización siguiente: son exactamente las funciones que son integrales de su derivada. Como contra-ejemplo presentamos la función de Cantor.

En el capítulo 4 estudiamos la dualidad $L^p - L^q$: las formas lineales continuas sobre L^p , $1 \leq p < \infty$, se representan por funciones de L^q , donde q es el exponente conjugado de p . Detallamos la construcción de un contra-ejemplo para $p = +\infty$: existen formas lineales continuas sobre $L^\infty(\mathbb{R})$ que no provienen de funciones L^1 .

En el último capítulo presentamos la definición de la integral de una función con respecto a una medida compleja, y estudiamos el teorema de representación de Riesz: las formas lineales continuas del espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto se indentifican con las medidas complejas (mediante la integral). De este teorema se obtiene facilmente una prueba alternativa de la existencia de la medida de Lebesgue.

Terminamos la tesis con un anexo donde colectamos resultados utiles: la representación de las formas lineales continuas de un espacio de Hilbert, la noción de puntos de Lebesgue de una función integrable y la derivabilidad en casi todas partes de una integral indefinida.

Los teoremas estudiados en la tesis son clásicos, pero sus pruebas son delicadas. Nuestro trabajo consistio en dar demostraciones completas y detalladas, así como ejemplos y contra-ejemplos variados. El trabajo se desarrollo principalmente a partir del libro *Análisis*

real y complejo de W. Rudin.

Capítulo 1

Medidas Complejas

En este primer capítulo estudiamos la noción de *medida compleja*; definamos la medida de variación total asociada, y probamos que es una medida positiva de masa finita.

Además se incluyen las definiciones importantes de medida absolutamente continua respecto a una medida positiva y de medidas mutuamente singulares. También revisamos varias propiedades de estas medidas, que serán de gran utilidad para el desarrollo del trabajo.

1.1. Medidas complejas y medidas de variación total asociadas

Definición 1.1.1 Sea $\mathcal{M}$ una σ -álgebra en un conjunto. Se dice que una colección numerable $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ es una partición de E , si $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Una medida compleja es, por definición, una función compleja μ en $\mathcal{M}$ tal que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \quad (E \in \mathcal{M}) \quad (1.1)$$

para toda partición E_i de E .

Definición 1.1.2 Si μ es una medida compleja en $\mathcal{M}$, sea $|\mu|$ una función en $\mathcal{M}$ definida por

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \quad (E \in \mathcal{M}) \quad (1.2)$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones E_i de E . La función $|\mu|$ se llama la variación total de μ .

Observación 1.1.3 Si μ es una medida positiva entonces $|\mu| = \mu$.

Teorema 1.1.4 La variación total $|\mu|$ de una medida compleja μ en $\mathcal{M}$ es una medida positiva en $\mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que $|\mu|$ es una medida positiva debemos verificar que es numerablemente aditiva. Sea $\{E_i\}$ una partición de $E \in \mathcal{M}$. Sean t_i números reales tales que $t_i < |\mu|(E_i)$. Entonces cada E_i tiene una partición $\{A_{ij}\}$ tal que

$$\sum_j |\mu(A_{ij})| > t_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.3)$$

Como $\{A_{ij}\}$ ($i, j=1, 2, 3, \dots$) es una partición de E , se sigue que

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E). \quad (1.4)$$

Tomando el supremo del miembro de la izquierda de (1.4), sobre todas las posibles elecciones de $\{t_i\}$ vemos que

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \quad (1.5)$$

Ahora hay que demostrar la otra desigualdad. Sea $\{A_j\}$ una partición de E . Entonces para cualquier j fijo, $\{A_j \cap E_i\}_i$ es una partición de A_j , y para cada i fijo, $\{A_j \cap E_i\}_j$ es una partición de E_i . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_j |\mu(A_j)| &= \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Puesto que la Ec.(1.6) se cumple para toda partición $\{A_i\}$ de E , tenemos que

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i). \quad (1.7)$$

Por (1.5) y (1.7), $|\mu|$ es numerablemente aditiva.

Teorema 1.1.5 Si μ es una medida compleja en X , entonces

$$|\mu|(X) < \infty. \quad (1.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que algún conjunto $E \in \mathcal{M}$ es tal que $|\mu|(E) = \infty$. Sea $t = \pi(1 + |\mu(E)|)$. Tenemos que $|\mu|(E) > t$. Por lo tanto existe una partición E_i de E tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| > t$, lo que implica

$$\sum_{i=1}^N |\mu(E_i)| > t$$

para algún N . Aplicamos el Lema (6.2.1)(ver anexo), con $z_i = \mu(E_i)$, y concluimos que existe un conjunto $A \subset E$ (una unión de algunos de los conjuntos E_i) para el cual

$$|\mu(A)| > \frac{t}{\pi} > 1.$$

Haciendo $B = E - A$, se tiene que

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

De esta manera E queda dividido en dos conjuntos disjuntos A y B tales que $|\mu(A)| > 1$ y $|\mu(B)| > 1$. Por el teorema (1.1.4) tenemos que al menos una de $|\mu|(A)$ o $|\mu|(B)$ es ∞ . Ahora, si $|\mu|(X) = \infty$, dividamos X en A_1 y B_1 con $|\mu(A_1)| > 1$, $|\mu|(B_1) = \infty$. Dividamos B_1 en A_2 , B_2 con $|\mu(A_2)| > 1$, $|\mu|(B_2) = \infty$. Repitiendo el procedimiento, obtenemos una colección numerable disjunta A_i , con $|\mu(A_i)| > 1$ para cada i . La aditividad numerable de μ implica que

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i).$$

Pero esta serie no converge ya que $\mu(A_i)$ no tiende a cero cuando $i \rightarrow \infty$. Tenemos una contradicción por lo tanto concluimos que $|\mu(X)| < \infty$.

Observación 1.1.6 Si μ es una medida positiva en X , μ es una medida compleja si y sólo si $\mu(X) < +\infty$.

1.2. Medidas absolutamente continuas con respecto a una medida positiva y medidas mutuamente singulares

Definición 1.2.1 Sea μ una medida positiva en una σ -álgebra $\mathcal{M}$ y sea λ una medida arbitraria en $\mathcal{M}$; λ puede ser negativa o compleja. Se dice que λ es Absolutamente Continua con respecto a μ y se escribe

$$\lambda \ll \mu \tag{1.9}$$

si $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$.

EJEMPLO 1 Si $h \in L^1(\mu)$,

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu, \quad E \in \mathcal{M}, \quad (1.10)$$

define una medida compleja absolutamente continua con respecto a μ .

La propiedad anterior es consecuencia del teorema de convergencia dominada: si $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una partición de E , tenemos

$$1_E = \sum_{i=1}^{+\infty} 1_{E_i},$$

y por lo tanto

$$\lambda(E) = \int_X h 1_E d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{+\infty} (h 1_{E_i}) d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_X h 1_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(E_i).$$

La suma infinita y la integral se pueden invertir por el teorema de convergencia dominada ya que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_X |h 1_{E_i}| d\mu = \int_X |h| \sum_{i=1}^{+\infty} 1_{E_i} d\mu = \int_X |h| 1_E d\mu \leq \int_X |h| d\mu < +\infty.$$

La inversión de la suma infinita y de la integral en esta ultima cuenta es consecuencia del teorema de Beppo-Levi.

Definición 1.2.2 Sea λ una medida en $\mathcal{M}$. Si existe un conjunto $A \in \mathcal{M}$ tal que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, se dirá que λ está Concentrada en A . Dicho de otra manera $\lambda(E) = 0$ siempre que $E \cap A = \emptyset$.

EJEMPLO 2 Si $h \in L^1(\mu)$ y $A \in \mathcal{M}$,

$$\lambda(E) = \int_{A \cap E} h d\mu, \quad E \in \mathcal{M}, \quad (1.11)$$

está concentrada en A .

Definición 1.2.3 Supongamos que λ_1 y λ_2 son medidas en $\mathcal{M}$ y supongamos que existe un par de conjuntos disjuntos A y B tales que λ_1 esta concentrada en A y λ_2 concentrada en B . En este caso se dirá que λ_1 y λ_2 son Mutuamente Singulares y se escribirá

$$\lambda_1 \perp \lambda_2. \quad (1.12)$$

1.3. Propiedades elementales

Propiedad 1.3.1 Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Por hipótesis sabemos que $\lambda_1(E) = 0$, $\lambda_2(E) = 0$. Como $(\lambda_1 + \lambda_2)(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E)$, tenemos $(\lambda_1 + \lambda_2)(E) = 0$. Por lo tanto $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

Propiedad 1.3.2 Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

DEMOSTRACIÓN. Sean A_1 y B_1 conjuntos disjuntos tales que λ_1 está concentrada en A_1 y μ está concentrada en B_1 . Sean A_2 y B_2 conjuntos disjuntos tales que λ_2 está concentrada en A_2 y μ en B_2 . Verifiquemos que $\lambda_1 + \lambda_2$ está concentrada en $A = A_1 \cup A_2$. Supongamos que $E \cap A = \emptyset$. Por hipótesis sabemos que $\lambda_1(E) = 0$ y $\lambda_2(E) = 0$. Por lo tanto $(\lambda_1 + \lambda_2)(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E) = 0$, y $\lambda_1 + \lambda_2$ está concentrada en A . Verifiquemos que μ está concentrada en $B = B_1 \cap B_2$, para ello escribimos B_1 y B_2 como uniones disjuntas, $B_1 = B'_1 \cup B_1 \cap B_2$, $B_2 = B'_2 \cup B_1 \cap B_2$. Tenemos $B'_1 \subset B_2^c$ y $B'_2 \subset B_1^c$. Sea E tal que $E \cap B = \emptyset$. Como la unión es disjunta E se escribe

$$E = (E \cap B'_1) \cup (E \cap B'_2) \cup (E \cap (B_1 \cup B_2)^c).$$

Por lo tanto

$$\mu(E) = \mu(E \cap B'_1) + \mu(E \cap B'_2) + \mu(E \cap (B_1 \cup B_2)^c).$$

Como $B'_1 \subset B_2^c$ entonces $\mu(E \cap B'_1) = 0$, $B'_2 \subset B_1^c$ entonces $\mu(E \cap B'_2) = 0$ y $E \cap (B_1 \cup B_2)^c \subset (B_1^c \cap B_2^c)$ entonces $\mu(E \cap (B_1 \cup B_2)^c) = 0$ de los resultados anteriores podemos concluir que $\mu = 0$, y por lo tanto que μ está concentrada en $B_1 \cap B_2$.

Por otro lado

$$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset. \quad (1.13)$$

$\lambda_1 + \lambda_2$ y μ están concentradas en A y B respectivamente, conjuntos ajenos. Por lo tanto $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

Propiedad 1.3.3 Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis sabemos que $\lambda_2 \perp \mu$. Por lo tanto, existe un conjunto A con $\mu(A) = 0$ en el cual está concentrada λ_2 . Por otro lado $\lambda_1 \ll \mu$, es decir, $\lambda_1(E) = 0$ para todo $E \subset A$; eso implica que λ_1 está concentrada en A^c . Puesto que $A \cap A^c = \emptyset$, concluimos que $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Propiedad 1.3.4 Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$ entonces $\lambda = 0$.

DEMOSTRACIÓN. De la hipótesis y de la observación anterior tenemos que $\lambda \perp \lambda$, lo cual nos lleva a concluir que $\lambda = 0$.

Capítulo 2

El teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Este capítulo trata en su totalidad del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, incluyendo una descripción detallada de la demostración.

Teorema 2.0.5 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sea μ una medida positiva σ -finita sobre una σ -álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X , y sea λ una medida compleja en $\mathcal{M}$. Entonces:*

(a) *Existe un único par de medidas complejas λ_a y λ_s en $\mathcal{M}$ tales que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu; \quad (2.1)$$

(b) *Existe una única $h \in L^1(\mu)$ tal que para todo $E \in \mathcal{M}$*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu. \quad (2.2)$$

La descomposición (2.1) se llama la descomposición de Lebesgue de λ con respecto a μ , y la función h en (2.2) la derivada de Radon-Nikodym de la parte absolutamente continua de λ con respecto a μ .

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos la unicidad del inciso (a). Sea (λ'_a, λ'_s) otro par de medidas que cumplen con (2.1). Entonces tenemos que:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \quad y \quad \lambda = \lambda'_a + \lambda'_s. \quad (2.3)$$

Obtenemos la siguiente igualdad

$$\lambda'_a + \lambda'_s = \lambda_a + \lambda_s, \quad \text{reescribimos} \quad \text{como} \quad \lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s. \quad (2.4)$$

Por las propiedades (1.3.1) y (1.3.2) tenemos que:

(i) $\lambda'_a - \lambda_a \ll \mu$ y $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$

(ii) $\lambda'_s - \lambda_s \ll \mu$ y $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$.

Aplicando la propiedad (1.3.4) en (i) y (ii) tenemos que:

$\lambda'_a - \lambda_a = 0$ es decir $\lambda'_a = \lambda_a$;

$\lambda_s - \lambda'_s = 0$ es decir $\lambda_s = \lambda'_s$.

Lo que se quería demostrar.

Ahora demostremos la unicidad del inciso (b). Sabemos que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu \quad (2.5)$$

y supongamos que existe un $h' \in L^1(\mu)$ que satisface lo anterior; de aquí obtenemos la siguiente igualdad: para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E h d\mu = \int_E h' d\mu, \quad \text{es decir} \quad \int_E (h - h') d\mu = 0. \quad (2.6)$$

Sabemos que si $f \in L^1(\mu)$ y $\int_E f d\mu = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ entonces $f = 0$ en casi todas partes de X . Haciendo uso de este resultado podemos concluir que: $h - h' = 0$ en $L^1(\mu)$ es decir $h = h'$. Lo que se quería demostrar.

Antes de demostrar la existencia de la descomposición de Lebesgue es necesario mencionar el siguiente lema:

Lema 2.0.6 *Si μ es una medida positiva σ -finita en una σ -álgebra $\mathcal{M}$ sobre un conjunto X , entonces existe una función $w \in L^1(\mu)$ tal que $0 < w(x) < 1$ para todo $x \in X$.*

NOTA: La demostración de este lema se encuentra en el anexo (6.2.2).

DEMOSTRACIÓN(existencia). Supongamos que λ es una medida positiva acotada en $\mathcal{M}$. Asociemos a μ una w (como en el lema 2.0.6). Entonces $d\varphi = d\lambda + w d\mu$ define una medida positiva acotada φ en $\mathcal{M}$. Por definición de suma de dos medidas tenemos la siguiente igualdad: para toda función f integrable con respecto a φ ,

$$\int_X f d\varphi = \int_X f d\lambda + \int_X f w d\mu. \quad (2.7)$$

Veamos que esto es cierto. Primero demostremos que se cumple para $f = 1_E$:

$$\int_X 1_E d\varphi = \varphi(E) = \lambda(E) + \int_E w d\mu = \int_X 1_E d\lambda + \int_X 1_E w d\mu.$$

Ahora veamos que se verifica para funciones simples. Sea f una función simple dada por

$$f = \sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i}, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_X f d\varphi &= \int_X \left(\sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i} \right) d\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \int_X 1_{E_i} d\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \int_X 1_{E_i} (d\lambda + w d\mu) \\
 &= \sum_{i=1}^N a_i \left(\int_X 1_{E_i} d\lambda + \int_X 1_{E_i} w d\mu \right) \\
 &= \int_X \sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i} d\lambda + \int_X \sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i} w d\mu = \int_X f d\lambda + \int_X f w d\mu.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos que se cumple para funciones medibles no negativas. Sea f medible no negativa. Sabemos que existe $\{f_n\}_n$ sucesión creciente de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f . Por el teorema de Beppo-Levi tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_X f d\varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n d\lambda + \int_X f_n w d\mu \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n w d\mu = \int_X f d\lambda + \int_X f w d\mu.
 \end{aligned}$$

Si ahora f es una función integrable con respecto a φ , f se escribe

$$f = (Re f)^+ - (Re f)^- + i((Im f)^+ - (Im f)^-).$$

Por lo anterior $(Re f)^+, (Re f)^-, (Im f)^+$ y $(Im f)^-$ satisfacen la ecuación (2.7). Por lo tanto estas funciones son integrables con respecto a $d\lambda$ y $w d\mu$, y f satisface (2.7).

Sea $f \in L^2(\varphi)$. De (2.7) tenemos

$$\int_X |f| d\lambda \leq \int_X |f| d\varphi.$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz en el último término de la expresión anterior (con la función $g = 1$) tenemos que

$$\int_X |f| d\varphi \leq \left\{ \int_X |f|^2 d\varphi \right\}^{1/2} \left\{ \int_X d\varphi \right\}^{1/2} = \left\{ \int_X |f|^2 d\varphi \right\}^{1/2} \{\varphi(X)\}^{1/2}.$$

Entonces concluimos:

$$\int_X |f| d\lambda \leq \left\{ \int_X |f|^2 d\varphi \right\}^{1/2} \{\varphi(X)\}^{1/2}.$$

Como φ es una medida acotada, es decir $\varphi(X) < \infty$, concluimos que f es integrable con respecto a λ ; además, la aplicación

$$f \rightarrow \int_X f d\lambda \quad (2.8)$$

es un funcional lineal acotado sobre $L^2(\varphi)$: para todo $f \in L^2(\varphi)$,

$$|\int_X f d\lambda| \leq C(\int_X |f|^2 d\varphi)^{1/2} \quad \text{donde} \quad C = \varphi(X)^{1/2}.$$

Sabemos que $L^2(\varphi)$ es un espacio de Hilbert y también sabemos que todo funcional lineal acotado sobre un espacio de Hilbert viene dado por el producto interior con un elemento de H (Ver anexo 6.1.2). Por lo tanto existe $g \in L^2(\varphi)$ tal que para toda $f \in L^2(\varphi)$

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi. \quad (2.9)$$

Sea $E \in \mathcal{M}$ con $\varphi(E) > 0$ y hagamos $f=1_E$ en la ecuación (2.9) para obtener lo siguiente:

$$\int_X 1_E d\lambda = \int_X 1_E g d\varphi.$$

Entonces

$$\lambda(E) = \int_E g d\varphi.$$

Recordemos que $0 \leq \lambda \leq \varphi$; como consecuencia de esto obtenemos:

$$0 \leq \lambda(E) = \int_E g d\varphi \leq \varphi(E).$$

Si dividimos la expresión anterior por $\varphi(E)$ llegamos al siguiente resultado:

$$0 \leq \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} = \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi \leq 1. \quad (2.10)$$

Resumiendo, sabemos que $\varphi(X) < \infty$, $g \in L^2(\varphi)$ y que $\frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \in [0, 1]$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\varphi(E) > 0$. Como consecuencia de un teorema (anexo 6.2.3) tenemos que $g(x) \in [0, 1]$, para casi todo x (con respecto a φ). Podemos suponer que $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ sin que eso afecte a la Ec.(2.9), que podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi = \int_X f g (d\lambda + w d\mu) = \int_X f g d\lambda + \int_X f g w d\mu.$$

Reescribimos la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned}\int_X f d\lambda - \int_X f g d\lambda &= \int_X f g w d\mu \\ \int_X (f - f g) d\lambda &= \int_X f g w d\mu \\ \int_X (1 - g) f d\lambda &= \int_X f g w d\mu.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Sean A y B dos conjuntos definidos como sigue:

$$A = \{x : 0 \leq g(x) < 1\}, \quad B = \{x : g(x) = 1\}$$

y definimos medidas λ_a y λ_s de la siguiente manera:

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$$

para todo $E \in \mathcal{M}$.

Hagamos $f = 1_B$ en la Ec.(2.11):

$$\int_X (1 - g) 1_B d\lambda = \int_X 1_B g w d\mu.$$

El termino de la izquierda se hace cero, puesto que $1_B(x) = 0$ si $x \notin B$ y $g(x) = 1$ si $x \in B$; el termino de la derecha vale $\int_B w d\mu$. Por lo tanto obtenemos

$$0 = \int_B w d\mu.$$

Puesto que $w(x) > 0$ para todo x podemos concluir que $\mu(B) = 0$. Por consiguiente μ esta concentrada en B^c . Por otro lado, por la definición de λ_s , tenemos que λ_s está concentrada en B , i.e, $\lambda_s(E) = 0$ siempre que $E \cap B = \emptyset$. Concluimos que $\lambda_s \perp \mu$. Puesto que g es acotada, se cumple la Ec.(2.11) sustituyendo f por: $(1 + g + \dots + g^n) 1_E$ para $n=1,2,3,\dots$ y $E \in \mathcal{M}$

$$\int_X (1 - g)(1 + g + \dots + g^n) 1_E d\lambda = \int_X (1 + g + \dots + g^n) 1_E g w d\mu.$$

Como $(1 - g)(1 + g + \dots + g^n) = 1 - g^{n+1}$ obtenemos

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_E g(1 + g + \dots + g^n) w d\mu.\tag{2.12}$$

Ahora, por un lado tenemos que en todo punto de B , $g(x) = 1$, y por lo tanto $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Por otro lado, en todo punto de A $(1 - g^{n+1}(x))_{n \geq 0}$ es creciente y tiende

a 1. ($0 \leq g(x) < 1$ si $x \in A$). Por lo tanto la sucesión de funciones medibles no negativas $(1 - g^{n+1})_{n \geq 0}$ es creciente y converge puntualmente a 1_A . El teorema de convergencia monótona implica que:

$$\int_X (1 - g^{n+1}) 1_E d\lambda \quad \rightarrow \quad \int_X 1_E 1_A d\lambda = \lambda(E \cap A) = \lambda_a(E)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

En el miembro de la derecha de la Ec. (2.12) tenemos una sucesión creciente de funciones medibles no negativas. Sea $h : x \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $g(1 + g + \dots + g^n)w \rightarrow h$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces, por el teorema de convergencia monótona, tenemos que:

$$\int_E g(1 + g + \dots + g^n)w d\mu \quad \rightarrow \quad \int_E h d\mu \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De los resultados anteriores podemos concluir que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. Si hacemos $E = X$ tenemos que $h \in L^1(\mu)$ puesto que $\lambda_a(X) < \infty$. Solo basta ver que $\lambda_a \ll \mu$. Sea $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Entonces $\int_E h d\mu = 0$ y por lo tanto $\lambda_a(E) = 0$ con lo que se cumple $\lambda_a \ll \mu$. Con esto la demostración queda terminada para λ positiva.

Si λ es una medida compleja, λ se escribe

$$\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) + i(\lambda_3 - \lambda_4)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ son medidas positivas finitas: tomemos por ejemplo

$$\lambda_1 = \frac{Re\lambda + |Re\lambda|}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{|Re\lambda| - Re\lambda}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{Im\lambda + |Im\lambda|}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{|Im\lambda| - Im\lambda}{2},$$

(aquí, por ejemplo, $Re\lambda$ es la medida real que consiste en tomar la parte real de λ , y $|Re\lambda|$ es su medida de variación total). Aplicamos el caso anterior a cada medida $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$: para todo $i \in 1, 2, 3, 4$,

$$\lambda_i = \lambda_{i,a} + \lambda_{i,s},$$

donde $\lambda_{i,a} \ll \mu$, $\lambda_{i,s} \perp \mu$. Además $\lambda_{i,a}$ se escribe

$$\lambda_{i,a}(E) = \int_E h_i d\mu,$$

para un única $h_i \in L^1(\mu)$. Definamos ahora

$$\lambda_a = (\lambda_{1,a} - \lambda_{2,a}) + i(\lambda_{3,a} - \lambda_{4,a}),$$

$$\lambda_s = (\lambda_{1,s} - \lambda_{2,s}) + i(\lambda_{3,s} - \lambda_{4,s}),$$

y

$$h = (h_1 - h_2) + i(h_3 - h_4).$$

Las medidas λ_a, λ_s y la función h satisfacen (2.1) y (2.2). De esta manera terminamos la demostración.

Capítulo 3

Funciones Absolutamente Continuas

En este capítulo aplicamos el teorema de Radon-Nikodym al problema de la representación de las funciones reales como integral de su derivada. Presentamos primero la noción de función absolutamente continua, probamos luego que las funciones absolutamente continuas son derivables en casi todas partes, de derivada integrable, y que son exactamente las funciones que son integrales de su derivada. Terminamos el capítulo con la descripción de la función de Cantor.

3.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1.1 *Se dice que una función compleja f definida en un intervalo $I = (a, b)$ es Absolutamente Continua en I si a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que*

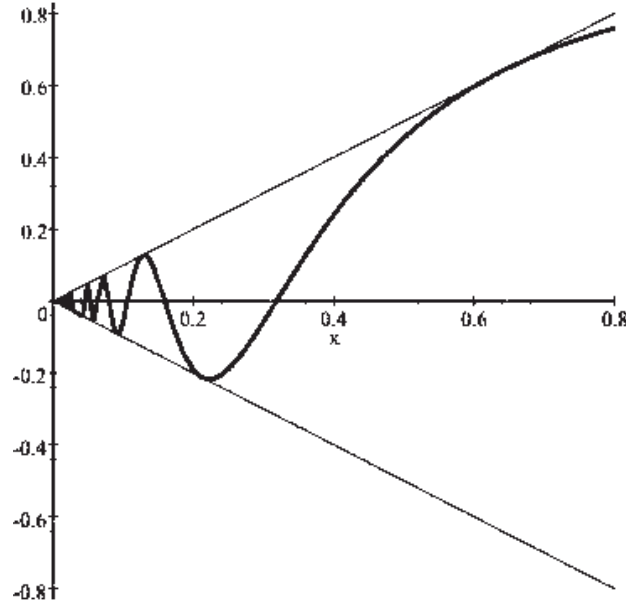
$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

para todo n y para cualquier colección disjunta de segmentos $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ en I cuyas longitudes satisfagan:

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta. \quad (3.2)$$

Observación 3.1.2 *Sea f una función absolutamente continua. Entonces f es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ y para todo $y \in I$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sabemos que f es AC; entonces, haciendo $n = 1$ en la definición anterior, tenemos que: a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que:

Figura 3.1: Función $x \sin \frac{1}{x}$

$$|f(\beta_1) - f(\alpha_1)| < \varepsilon$$

para $\alpha_1 \in I$ y $\beta_1 \in I$ que satisfacen

$$|\beta_1 - \alpha_1| < \delta.$$

Por lo tanto f es uniformemente continua.

EJEMPLO 1. Sea f la función continua definida en $[0,1]$ por: $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. f es continua sobre el segmento $[0,1]$, y por lo tanto es uniformemente continua (teorema de Heine). Verifiquemos que f no es AC. Por definición f no es AC si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ con

$$\sum_{i=1}^n |(a_i - b_i)| < \delta \quad y \quad \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(b_i)| \geq \varepsilon. \quad (3.3)$$

Sea $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_k, y_k], \dots$ la colección disjunta de segmentos tal que

$$x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}, \quad 1 \leq k.$$

Ahora hagamos los siguientes cálculos:

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left| x_k \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) - y_k \sin\left(\frac{1}{y_k}\right) \right| = \left| \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) \right|$$

$$= \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \geq \frac{2}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}.$$

Por otro lado tenemos:

$$|x_k - y_k| = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{(2k\pi + \frac{\pi}{2})(2k\pi + \frac{3\pi}{2})}.$$

Pero cuando $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\pi}{(2k\pi + \frac{\pi}{2})(2k\pi + \frac{3\pi}{2})} \sim \frac{\pi}{4k^2\pi^2} = \frac{1}{4k^2\pi}.$$

Como

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$$

converge, la serie

$$\sum_{k \geq 1} |x_k - y_k|$$

converge.

Ahora aplicamos el criterio para verificar que f no es AC. Elegimos $\varepsilon = 1$. Sea $\delta > 0$; de la convergencia de la serie tenemos lo siguiente: existe N tal que,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k - y_k| < \delta.$$

Por otro lado, sea $q \geq N + 1$. Entonces tenemos

$$\sum_{k=N+1}^q |f(x_k) - f(y_k)| \geq 2 \sum_{k=N+1}^q \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}.$$

Tomemos en cuenta que $\frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \sim \frac{1}{2k\pi}$ cuando $k \rightarrow \infty$ y que la serie armónica diverge. De esta manera obtenemos,

$$\sum_{k=N+1}^q \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \rightarrow \infty$$

cuando

$$q \rightarrow +\infty$$

.

De aquí concluimos que se puede elegir q tal que

$$2 \sum_{k=N+1}^q \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \geq 1,$$

es decir tal que

$$\sum_{k=N+1}^q |f(x_k) - f(y_k)| \geq 1.$$

Por lo tanto f no es AC.

3.2. El teorema fundamental

Recordaremos primero la caracterización de los conjuntos de Lebesgue de medida cero de $[0,1]$. Denotemos por $\mathcal{M}$ la σ -álgebra de todos los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y m la medida de Lebesgue en $\mathcal{M}$.

Definición 3.2.1 Sea $A \subset [0,1]$ entonces $A \in \mathcal{M}$ y $m(A)=0$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ segmentos disjuntos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad y \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Teorema 3.2.2 Sea $I = [a, b]$ y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no decreciente. Cada una de las siguientes afirmaciones sobre f implica las otras dos:

- (a) f es AC en I .
- (b) f aplica conjuntos de medida 0 en conjuntos de medida 0.
- (c) f es derivable en c.t.p. de I , $f' \in L^1$, y

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (3.4)$$

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (a)$. Supongamos que f es AC en I y elegimos $E \subset I$ tal que $E \in \mathcal{M}$ y $m(E) = 0$. Debemos verificar que $f(E) \in \mathcal{M}$ y $m(f(E)) = 0$. Elegimos $\varepsilon > 0$ y asociamos un $\delta > 0$ a f y ε dada por la definición de una función absolutamente continua. Como la medida de Lebesgue es regular, existe un conjunto abierto V con $m(V) < \delta$, tal que $E \subset V \subset I$. Sean (α_i, β_i) los segmentos disjuntos cuya unión es V , i.e, $V = \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$. Entonces $\sum (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ y en consecuencia la elección de δ muestra que:

$$\sum_i (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) \leq \varepsilon. \quad (3.5)$$

Puesto que $E \subset V$ entonces $f(E) \subset \bigcup_i [f(\alpha_i), f(\beta_i)]$ (f es monótona). Veamos que la medida de Lebesgue de esta unión es el miembro de la izquierda de la ecuación anterior:

$$m\left(\bigcup_i [f(\alpha_i), f(\beta_i)]\right) = \sum_i m([f(\alpha_i), f(\beta_i)]) = \sum_i (f(\beta_i) - f(\alpha_i)).$$

Entonces resulta ser que para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección de segmentos

$$(f(\alpha_1), f(\beta_1)), \dots, (f(\alpha_i), f(\beta_i))$$

tal que

$$f(E) \subset \bigcup [f(\alpha_i), f(\beta_i)]$$

y

$$\sum (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) < \varepsilon;$$

por lo tanto $m(f(E)) = 0$. Además la medida de Lebesgue es completa es decir todos los subconjuntos de medida cero son medibles. Entonces concluimos que $f(E) \in \mathcal{M}$ y $m(f(E)) = 0$. Tenemos así demostrado que (a) implica (b).

Supongamos ahora que cumple (b) y definamos

$$g(x) = x + f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (3.6)$$

La función g es estrictamente creciente, y por lo tanto inyectiva.

Si la imagen por f de algún segmento de longitud η tiene longitud η' entonces la imagen por g del mismo segmento tiene longitud $\eta + \eta'$ (f es no decreciente).

Primero debemos verificar que g satisface (b). Sea B un conjunto de medida cero es decir tal que $m(B) = 0$; además $m(f(B)) = 0$. Por lo tanto

$$m(g(B)) \leq m(B + f(B)) \leq m(B) + m(f(B)) = 0.$$

Supongamos ahora que $E \subset I$, $E \in \mathcal{M}$. Entonces $E = E_1 \cup E_0$ donde $m(E_0) = 0$ y E_1 es un F_σ (unión numerable de conjuntos cerrados, ver Rudin teorema 2.20). Así tenemos que E_1 es una unión de conjuntos compactos y también lo es $g(E_1)$ pues g es continua. Ahora como $m(g(E_0)) = 0$ y $g(E) = g(E_1) \cup g(E_0)$ entonces concluimos que $g(E) \in \mathcal{M}$; por lo tanto podemos definir

$$\mu(E) = m(g(E)) \quad (E \subset I, E \in \mathcal{M}). \quad (3.7)$$

Tenemos que g es una función inyectiva; entonces conjuntos disjuntos en I tienen imágenes disjuntas bajo g . Verifiquemos que μ es una medida positiva acotada. Sea $\{A_i\}$ una colección numerable disjunta de elementos de $\mathcal{M}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m\left(g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (g(A_i))\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(g(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Esto es posible ya que m tiene la propiedad de ser aditiva numerable. También tenemos que $\mu \ll m$, veamos porque: sea E_0 tal que $m(E_0) = 0$; entonces $\mu(E_0) = m(g(E_0)) = 0$. Esto se debe a que g satisface (b).

Ahora por el Teorema de Radon-Nikodym sabemos que existe $h \in L^1(m)$ tal que

$$d\mu = h dm, \quad (3.8)$$

que también se puede expresar como:

$$\mu(E) = \int_E h dm.$$

Si $E = [a, x]$ entonces $g(E) = [g(a), g(x)]$; de esta manera $m(g(E)) = m[g(a), g(x)] = g(x) - g(a)$.

Combinando los resultados anteriores obtenemos:

$$g(x) - g(a) = m(g(E)) = \mu(E) = \int_E h dm = \int_a^x h(t) dt.$$

Utilizando esta Ec. tenemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= g(x) - x - g(a) + a = g(x) - g(a) - x + a \\ &= g(x) - g(a) - \int_a^x dt = \int_a^x h(t) dt - \int_a^x dt, \end{aligned}$$

es decir

$$f(x) - f(a) = \int_a^x [h(t) - 1] dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (3.9)$$

Observación 3.2.3 Si $f \in L^1$ y $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$ en todos los puntos de Lebesgue de f , y por lo tanto en c.t.p.

(Para la noción de puntos de Lebesgue y demostración ver el anexo 6.3.2)

Aplicando este resultado a nuestro caso tenemos que: $f'(x) = [h(x) - 1]$ en c.t.p.; entonces podemos concluir que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

De esta manera queda demostrado que (b) implica (c)

Finalmente demostremos que (c) implica (a). Sea f derivable en c.t.p. de I tal que $f' \in L^1$ y

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

Debemos probar que f es AC en I .

Observación 3.2.4 Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $m(E) < \delta$ entonces $\int_E f' dm < \varepsilon$.

Nota: La demostración de esta observación se encuentra en el anexo (6.2.6)

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E f' dm < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Sea $E = \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$ donde $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ son segmentos disjuntos tales que

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Como

$$m(E) = m\left(\bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]\right) = \sum_{i=1}^n m([\alpha_i, \beta_i]) = \sum_{i=1}^n |\beta_i - \alpha_i| < \delta,$$

la propiedad (3.10) implica que

$$\sum_{i=1}^n (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f' dm = \int_E f' dm < \varepsilon.$$

De aquí concluimos que f es AC. Con esto queda demostrado el teorema.

3.3. La función de Cantor

Construimos aquí el ejemplo clásico de Cantor de una función continua no decreciente, derivable casi en todas partes y de derivada integrable, pero que no es la integral de su derivada. Por el teorema (3.2.2) la función de Cantor no es AC.

Elijamos una sucesión $(\delta_n)_n$ tal que $1 = \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \dots \delta_n \rightarrow 0$. Construimos por inducción una sucesión de segmentos encajados $(E_n)_{n \geq 0}$ de medida $m(E_n) = \delta_n$, para todo $n \geq 0$: sea $E_0 = [0, 1]$ y dado $n \geq 0$ sea E_n la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos, cada uno de ellos de longitud $2^{-n}\delta_n$. Suprimamos un segmento de longitud $2^{-n}(\delta_n - \delta_{n+1})$ en el centro de cada uno de esos 2^n intervalos, como se muestra en la figura (3.2)

De esta manera tenemos 2^{n+1} intervalos de longitud $2^{-n-1}\delta_{n+1}$. Definamos E_{n+1} como la unión de esos 2^{n+1} intervalos. Por construcción $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$, y la medida de los E_n es:

$$m(E_n) = (2^n)(2^{-n}\delta_n) = \delta_n.$$

Llamemos

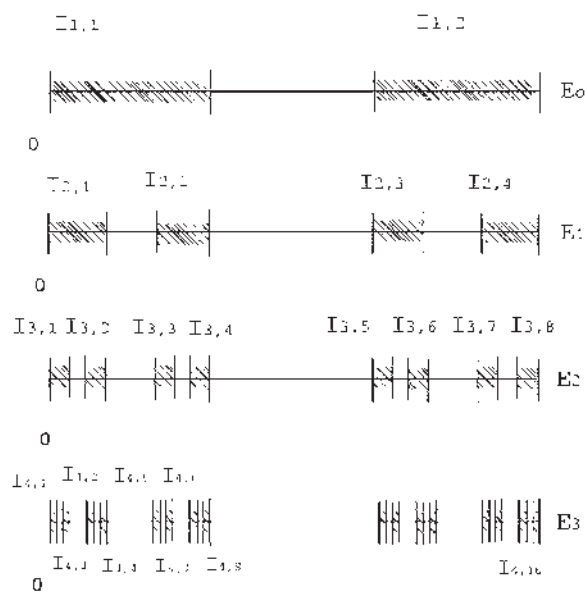


Figura 3.2: Función de Cantor

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Dicho conjunto E es un compacto ya que cada E_n es un conjunto compacto y la intersección decreciente de compactos en $\mathbb{R}$ es un compacto, y

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Sean

$$g_n = \frac{1}{\delta_n} 1_{E_n} \quad y \quad f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Entonces $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, y cada f_n es una función monótona que es constante en cada segmento del complementario de E_n . Hagamos la gráfica de f_n para algunos valores de n .

Para $E_0 = [0, 1]$.

$$g_0 = 1_{E_0}, \quad f_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\delta_0} dt = x.$$

Para $E_1 = [0, \frac{\delta_1}{2}] \cup [1 - \frac{\delta_1}{2}, 1]$. $g_1 = \frac{1}{\delta_1} 1_{E_1}$

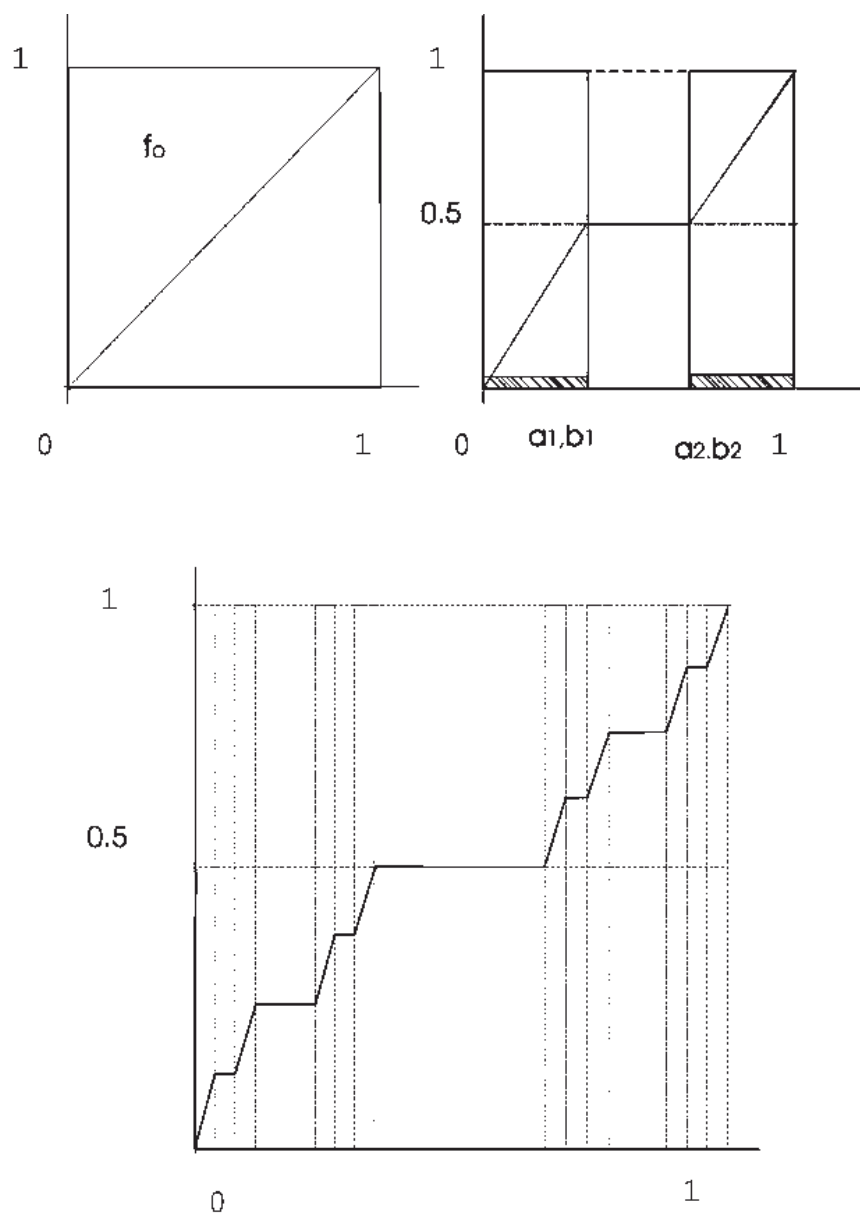


Figura 3.3: Función de escalera

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\delta_1} 1_{E_1} dt$$

entonces

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{\delta_1} & si & \quad 0 \leq x \leq \frac{\delta_1}{2}, \\ f_1(x) &= \frac{1}{2} & si & \quad \frac{\delta_1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta_1}{2}, \\ f_1(x) &= \frac{x}{\delta_1} + (1 - \frac{1}{\delta_1}) & si & \quad 1 - \frac{\delta_1}{2} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$g_2 = \frac{1}{\delta_2} 1_{E_2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{\delta_2} \quad si \quad 0 \leq x \leq \frac{\delta_2}{4}, \dots$$

ver la figura (3.3)

Si J es uno de los 2^n intervalos cuya unión E_n se tiene que

$$\int_J g_n(t) dt = \int_J \frac{1}{\delta_n} dt = \frac{1}{\delta_n} m(J) = \frac{1}{\delta_n} \frac{\delta_n}{2^n} = 2^{-n}.$$

Por otro lado si $J = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ donde I_1 y I_3 son intervalos de los 2^{n+1} intervalos de medida $\frac{\delta_{n+1}}{2^{n+1}}$ cuya unión es E_{n+1} , se cumple que

$$\begin{aligned} \int_J g_{n+1}(t) dt &= \int_{I_1} g_{n+1}(t) dt + \int_{I_2} g_{n+1}(t) dt + \int_{I_3} g_{n+1}(t) dt \\ &= \int_{I_1} \frac{1}{\delta_{n+1}} dt + \int_{I_3} \frac{1}{\delta_{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\delta_{n+1}} m(I_1) + \frac{1}{\delta_{n+1}} m(I_3) = \frac{2}{2^{n+1}} = 2^{-n}. \end{aligned}$$

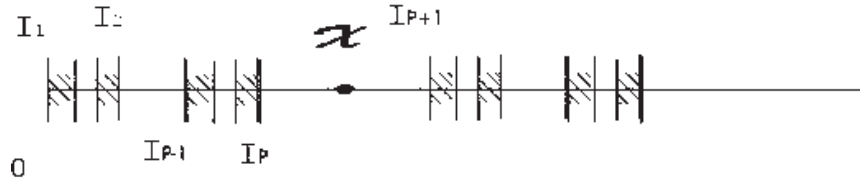
Por lo tanto se tiene que

$$\int_J g_n(t) dt = \int_J g_{n+1}(t) dt = 2^{-n}. \quad (3.11)$$

Haciendo uso de este resultado verifiquemos lo siguiente:

$$(a) f_{n+1}(x) = f_n(x) \quad (x \notin E_n);$$

$$(b) |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_J |g_n - g_{n+1}| \leq 2^{-n+1} \quad (x \in E_n).$$

Figura 3.4: Intervalo I_p

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $E_n = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{2^n}$ donde $I_k = [a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq 2^n$ como en la figura(3.4)

Demostremos el inciso (a). Sea $x \in [0, 1] \setminus E_n$. Consideramos el índice p tal que $b_p < x < a_{p+1}$, como en la figura (3.4). Tenemos que

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x g_{n+1}(t) dt = \sum_{k=1}^p \int_{I_k} g_{n+1}(t) dt,$$

y por otro lado,

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt = \sum_{k=1}^p \int_{I_k} g_n(t) dt.$$

Por la igualdad (3.11), para todo $k=1, 2, \dots, p$

$$\int_{I_k} g_n(t) dt = \int_{I_k} g_{n+1}(t) dt.$$

De donde se concluye que

$$f_{n+1}(x) = f_n(x).$$

Demostremos el inciso (b). Aquí $x \in E_n$. Sea p el índice tal que $x \in I_p = [a_p, b_p]$. Tenemos

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(t) dt - \int_0^x g_{n+1}(t) dt \\ &= \int_{I_1 \cup \dots \cup I_{p-1}} g_n(t) dt + \int_{a_p}^x g_n(t) dt \\ &\quad - \left(\int_{I_1 \cup \dots \cup I_{p-1}} g_n(t) dt + \int_{a_p}^x g_{n+1}(t) dt \right) \\ &= \int_{a_p}^x g_n(t) dt - \int_{a_p}^x g_{n+1}(t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left| \int_{[a_p, x]} g_{n+1}(t) dt - \int_{[a_p, x]} g_n(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{[a_p, x]} g_{n+1}(t) dt + \int_{[a_p, x]} g_n(t) dt \\
 &\leq \int_{[a_p, b_p]} g_{n+1}(t) dt + \int_{[a_p, b_p]} g_n(t) dt \\
 &\leq 2^{-n} + 2^{-n} \leq 2^{-n+1}.
 \end{aligned}$$

De esta manera se verifica (b). Ahora veamos que $\{f_n\}$ converge a una función uniformemente. Para esto hacemos uso del criterio de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, y sean p, q números tales que $q \geq p$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 |f_p(x) - f_q(x)| &= |f_p(x) - f_{p+1}(x) + f_{p+1}(x) - f_{p+2}(x) + \dots + f_{q-1}(x) - f_q(x)| \\
 &\leq |f_p(x) - f_{p+1}(x)| + |f_{p+1}(x) - f_{p+2}(x)| + \dots + |f_{q-1}(x) - f_q(x)| \\
 &\leq 2^{-p+1} + 2^{-p} + 2^{-(p+1)} + \dots + 2^{-(q-1)+1} \\
 &\leq \sum_{k=p}^{+\infty} 2^{-k+1} = 2^{-p+1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \right) = 2^{-p+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2^{-p+2}.
 \end{aligned}$$

Así que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_p(x) - f_q(x)| \leq 2^{-p+2}.$$

Como $2^{-p+2} \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$, podemos concluir que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[0, 1]$. Sea $f = \lim f_n$.

Esta función es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. Veamos que f es creciente: sean $x \leq y$; sabemos que $f_n(x) \leq f_n(y)$ para todo $n \geq 0$. Como $f(x) = \lim f_n(x)$ y $f(y) = \lim f_n(y)$, obtenemos $f(x) \leq f(y)$.

Además, $f_n(0) = 0$ para todo n , lo que implica $f(0) = 0$, y $f_n(1) = 1$ para todo n , lo que implica $f(1) = 1$.

Probemos ahora que f es derivable en cada $x \in [0, 1] \setminus E$ y $f'(x) = 0$: sea $x \in [0, 1] \setminus E$. Como $x \in (\bigcap_n E_n)^c = \bigcup_n (E_n)^c$, existe n_0 tal que $x \in (E_{n_0})^c$. $(E_{n_0})^c$ es unión finita de intervalos abiertos y $x \in (a, b)$ uno de estos intervalos. f es constante sobre (a, b) , por lo tanto es derivable de derivada 0. De lo anterior podemos concluir que $f' = 0$ en c.t.p. De esta manera tenemos una función continua f en el intervalo $[0, 1]$, derivable en casi todo punto y tal que $f' \in L^1$ pero que no es integral de su derivada:

por un lado $f(1) - f(0) = 1$, y por otro lado

$$\int_0^1 f'(t)dt = 0.$$

Por lo tanto

$$f(1) - f(0) \neq \int_0^1 f'(t)dt.$$

Capítulo 4

Funcionales lineales acotados en L^p

En este capítulo se presenta otra aplicación del teorema de Radon-Nikodym. Aquí vemos que las formas lineales continuas sobre L^p , $1 \leq p < +\infty$, se representan por funciones de L^q , donde p y q son exponentes conjugados. También se presenta la construcción de un contra-ejemplo para $p = +\infty$ en el cual veremos que existen funciones lineales continuas sobre $L^\infty(\mathbb{R})$ que no provienen de funciones $L^1(\mathbb{R})$.

4.1. Representación de las formas lineales continuas sobre L^p , $1 \leq p < +\infty$.

Teorema 4.1.1 Sean $1 \leq p < \infty$, μ una medida positiva σ -finita en X , y Φ un funcional lineal acotado sobre $L^p(\mu)$. Entonces existe una única $g \in L^q$, donde q es el exponente conjugado de p , tal que

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu \quad (f \in L^p(\mu)). \quad (4.1)$$

Además, si Φ y g están relacionadas como en (4.1) se tiene que

$$\|\Phi\| = \|g\|_q. \quad (4.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos la unicidad. Supongamos que tanto g como g' son funciones que satisfacen la Ec.(4.1). Entonces,

$$\int_X fg d\mu = \int_X fg' d\mu \quad (\forall f \in L^p(\mu)),$$

de aquí que

$$\int_X fg d\mu - \int_X fg' d\mu = 0,$$

es decir

$$\int_X f(g - g')d\mu = 0. \quad (4.3)$$

Sea E un conjunto medible tal que $\mu(E) < +\infty$; tenemos $1_E \in L^p(d\mu)$ ya que $\int_X 1_E^p d\mu = \mu(E) < +\infty$. Sustituimos $f = 1_E$ en la ecuación (4.3) :

$$\int_X 1_E(g - g')d\mu = \int_E (g - g')d\mu = 0.$$

Escribimos $X = \bigcup_i X_i$ donde $\mu(X_i) < +\infty$ (μ es σ -finita). De lo anterior, para todo $E \in \mathcal{M}(X_i)$, la σ -álgebra de los subconjuntos medibles de X_i ,

$$\int_E (g - g')d\mu = 0.$$

La función $g - g'$ pertenece $L^1(X_i, \mu, A(X_i))$ ($L^q(X_i) \subset L^1(X_i)$ ya que $\mu(X_i) < +\infty$) y satisface la ecuación anterior para todo E ; por lo tanto $g - g' = 0$ en c.t.p. de X_i , para todo i (anexo 6.2.4), y $g - g' = 0$ en c.t.p. de X , es decir $g = g'$ en L^q .

Antes de demostrar la existencia veamos que se verifica una de las desigualdades en Ec.(4.2). Si se verifica Ec. (4.1) la desigualdad de Hölder implica que

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Además una manera de escribir la norma de ϕ es

$$\|\phi\| = \inf\{k > 0 \quad |\forall f \in L^p, \quad |\phi(f)| \leq k\|f\|_p\}.$$

Haciendo uso de estos resultados concluimos que

$$\|\phi\| \leq \|g\|_q. \quad (4.4)$$

De esta manera lo que nos resta es demostrar la existencia de g y verificar la otra desigualdad en Ec.(4.4). Observemos que si $\|\phi\| = 0$ se verifican (4.1) y (4.2) con $g = 0$. Por lo tanto supondremos que $\|\phi\| > 0$.

Comenzaremos con el caso $\mu(X) < \infty$. Para cualquier conjunto medible $E \in X$, definamos:

$$\lambda(E) = \phi(1_E).$$

Observemos que $1_E \in L^p(\mu)$ ya que $\int_E 1_E^p d\mu = \mu(E) < +\infty$.

Veamos que λ es una medida aditiva; para esto recordemos que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$, si A y B son disjuntos, y que ϕ es lineal. Tenemos

$$\lambda(A \cup B) = \phi(1_{A \cup B}) = \phi(1_A) + \phi(1_B) = \lambda(A) + \lambda(B),$$

y por lo tanto λ es aditiva.

Ahora verifiquemos que λ es una medida con la propiedad de aditividad numerable. Supongamos que E es la union de una colección numerable de conjuntos medibles E_i disjuntos, y definamos $A_k = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$. La sucesión $(A_k)_{k \geq 0}$ es creciente. Calculemos lo siguiente:

$$\|1_E - 1_{A_k}\|_p = \|1_{E/A_k}\|_p = \left\{ \int 1_{E/A_k}^p d\mu \right\}^{1/p} = [\mu(E - A_k)]^{1/p}.$$

Entonces tomamos el límite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|1_E - 1_{A_k}\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mu(E - A_k)]^{1/p} = 0,$$

ya que la sucesión $(E - A_k)_{k \geq 0}$ es decreciente y que $\mu(E) < +\infty$. Es importante observar que aquí se utiliza la hipótesis de que $p < \infty$.

Sabemos que ϕ es continua: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|1_E - 1_{A_k}\|_p < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(1_E) - \phi(1_{A_k})| = |\lambda(E) - \lambda(A_k)| < \varepsilon.$$

Es decir

$$\lambda(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k).$$

Como λ es aditiva,

$$\lambda(A_k) = \sum_{i=1}^k \lambda(E_i).$$

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{i \geq 1} \lambda(E_i)$$

converge y

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(E_i).$$

De lo anterior concluimos que λ es una medida compleja.

Demostremos que la medida λ es absolutamente continua con respecto a μ . Sea E medible tal que $\mu(E) = 0$; queremos comprobar que $\lambda(E) = 0$.

Por definición de λ ,

$$|\lambda(E)| = |\phi(1_E)| \leq \|\phi\| \|1_E\|_p,$$

donde $\|\phi\|$ es la norma de la aplicación lineal continua ϕ .

Como

$$\|1_E\|_p = [\int_X (1_E)^p d\mu]^{1/p} = [\mu(E)]^{1/p},$$

deducimos que

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Por lo tanto $\lambda \ll \mu$.

Ahora empleando el Teorema de Radon-Nikodym podemos asegurar la existencia de una función $g \in L^1(\mu)$ tal que para todo conjunto medible $E \subset X$

$$\phi(1_E) = \int_E g d\mu = \int_X 1_E g d\mu. \quad (4.5)$$

Si f es una función medible simple,

$$f = \sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i}, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

y haciendo uso de la linealidad de ϕ obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \phi\left(\sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^N a_i \phi(1_{E_i}) = \sum_{i=1}^N a_i \int_X 1_{E_i} g d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^N a_i 1_{E_i} g d\mu = \int_X f g d\mu. \end{aligned}$$

Si $f \in L^\infty(\mu)$, existe $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que $f_i \rightarrow f$ en $L^\infty(\mu)$. Por lo anterior $\phi(f_i) = \int_X f_i g d\mu$. De un lado, $\phi(f_i) \rightarrow \phi(f)$, cuando $i \rightarrow +\infty$ puesto que

$$\begin{aligned} |\phi(f_i) - \phi(f)| &\leq \|\phi\| \|f_i - f\|_p \\ &\leq \|\phi\| \|f_i - f\|_\infty (\mu(X))^{1/p}. \end{aligned}$$

Es importante observar que la hipótesis $\mu(X) < \infty$ es esencial.

Por otro lado $f g \in L^1(\mu)$ y $\int_X f_i g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu$ cuando $i \rightarrow \infty$, puesto que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_i g d\mu - \int_X f g d\mu \right| &\leq \int_X |f_i - f| |g| d\mu \\ &\leq \|f_i - f\|_\infty \|g\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $f \in L^\infty(\mu)$,

$$\phi(f) = \int_X f g d\mu. \quad (4.6)$$

Queremos concluir que $g \in L^q$ y que se verifica la Ec.(4.2), esto lo haremos por casos.
CASO 1. Primero lo haremos para $p=1$. De la Ec.(4.5) tenemos,

$$\left| \int_E g d\mu \right| = \left| \int_X 1_E g d\mu \right| \leq \|\phi\| \cdot \|1_E\|_1 = \|\phi\| \cdot \mu(E)$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. La desigualdad expresa la continuidad de ϕ . Por un teorema (anexo 6.2.3), $|g(x)| \leq \|\phi\|$ en c.t.p., luego $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$ y se sigue que $g \in L^\infty$.

CASO 2. Para $1 < p < \infty$. Existe una función medible α , $|\alpha| = 1$, tal que $\alpha g = |g|$ (anexo, proposición 6.2.5). Sea $E_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$, y definamos $f_n = 1_{E_n} |g|^{q-1} \alpha$. Entonces $|f_n|^p = |g|^q$ en E_n , $f_n \in L^\infty(\mu)$, y de Ec. (4.6)

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu = \int_X f_n g d\mu = \phi(f_n) \leq \|\phi\| \|f_n\|_p \leq \|\phi\| \left(\int_X |f_n|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \|\phi\| \left\{ \int_{E_n} |g|^q d\mu \right\}^{1/p}.$$

Por lo tanto

$$\int_X 1_{E_n} |g|^q d\mu \leq \|\phi\|^q \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.7)$$

Si aplicamos el teorema de la convergencia monótona a Ec. (4.7) obtenemos que $\|g\|_q \leq \|\phi\|$.

De esta manera se verifica la Ec.(4.2) y $g \in L^q(\mu)$. Se sigue que ambos lados de la Ec.(4.6) son funciones continuas en $L^p(\mu)$. Ambas coinciden en el subconjunto denso $L^\infty(\mu)$ de $L^p(\mu)$; y por lo tanto coinciden en todo $L^p(\mu)$. Lo cual completa la demostración en el caso en que $\mu(X) < \infty$.

Si $\mu(X) = \infty$ pero μ es σ -finita, elijamos $w \in L^1(\mu)$ como en el lema 6.2.2 (ver anexo). Entonces $d\tilde{\mu} = w d\mu$ define una medida finita en $\mathcal{M}$, $(\tilde{\mu}(X) = \int_X w d\mu < +\infty)$, y

$$F \rightarrow w^{1/p} F \quad (4.8)$$

es una isometría de $L^p(\tilde{\mu})$ a $L^p(\mu)$, puesto que $w(x) > 0$ para todo $x \in X$ (la aplicación inversa es $F \rightarrow w^{-1/p} F$). Por tanto, se define

$$\psi(F) = \phi(w^{1/p} F) \quad (4.9)$$

un funcional lineal acotado ψ en $L^p(\tilde{\mu})$, con $\|\psi\| = \|\phi\|$.

La primera parte de la demostración muestra ahora que existe $G \in L^q(\tilde{\mu})$ tal que

$$\psi(F) = \int_X F G d\tilde{\mu} \quad (F \in L^p(\tilde{\mu})). \quad (4.10)$$

Sea $g = w^{1/q} G$. (Si $p=1$, $g=G$). Veamos que $g \in L^q$:

$$\int_X |g|^q d\mu = \int_X w |G|^q d\mu = \|G\|_{\tilde{\mu}}^q < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X |g|^q d\mu = \|G\|_\mu^q = \|\psi\|^q = \|\phi\|^q \quad (4.11)$$

si $p > 1$, mientras que $\|g\|_\infty = \|G\|_\infty = \|\psi\| = \|\phi\|$ si $p = 1$. Así se verifica la Ec. (4.2), y puesto que $Gd\tilde{\mu} = w^{1/p}gd\mu$, obtenemos finalmente que

$$\phi(f) = \psi(w^{-1/p}f) = \int_X w^{-1/p}fGd\tilde{\mu} = \int_X fg d\mu \quad (4.12)$$

para toda $f \in L^p(\mu)$.

4.2. Contraejemplo para $p = +\infty$

Sea C_a el espacio de las funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}$, y sea $T : C_a(\mathbb{R}), f \mapsto f(0)$.

T es una forma lineal continua sobre $(C_a(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$: para toda $f \in C_a(\mathbb{R})$, $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$. Por el teorema de Hahn-Banach T se extiende a una forma lineal continua sobre $L^\infty(\mathbb{R})$

Capítulo 5

El Teorema de representación de Riesz

En este capítulo vemos la definición de la integral de una función respecto a una medida compleja. También presentamos el teorema de Riesz el cual nos dice que las formas lineales continuas sobre un espacio métrico compacto se identifican, mediante la integral, con las medidas complejas.

Antes de enunciar el teorema daremos algunas definiciones y mencionaremos algunos ejemplos de formas lineales continuas.

5.1. Integral con respecto a una medida compleja

Para definir la integral con respecto a una medida compleja necesitamos el siguiente teorema:

Teorema 5.1.1 *Sea μ una medida compleja en una σ -álgebra $\mathcal{M} \in X$. Existe una función medible h tal que para todo $x \in X$ $|h(x)| = 1$ y*

$$d\mu = h d|\mu|. \quad (5.1)$$

La igualdad anterior es conocida como *la representación polar* (o *descomposición polar*) de μ .

DEMOSTRACIÓN: De la definición de $|\mu|$ tenemos que $\mu \ll |\mu|$, por lo tanto el teorema de Radon-Nikodym garantiza la existencia de algún $h \in L(|\mu|)$ que verifica (6.1). Sea $A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$, donde r es algún número positivo, y sea $\{E_j\}$ una partición de A_r . Entonces

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h d|\mu| \right| \leq \sum_j r |\mu|(E_j) = r |\mu|(A_r),$$

por lo que $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$. Si $r < 1$, esto nos lleva a que $|\mu|(A_r) = 0$. Así $|h| \geq 1$ en c.t.p.

Por otra parte, si $|\mu|(E) > 0$, la ecuación (6.1) muestra que

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Apliquemos ahora el teorema (6.2.3), usando el disco unidad en lugar de S , y concluimos que $|h| \leq 1$ en c.t.p.

Sea $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$. Hemos demostrado que $|\mu|(B) = 0$, y si redefinimos h en B haciendo $h(x) = 1$ en B , de esta manera obtenemos una función con las propiedades deseadas.

Definición 5.1.2 Sea μ una medida compleja y sea h una función medible tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$, y $d\mu = h d|\mu|$. Decimos que una función $f \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable con respecto a μ si es integrable con respecto a $|\mu|$. Si f es integrable con respecto a μ definimos

$$\int_X f d\mu := \int_X f h d|\mu|.$$

Observación 5.1.3 Una función medible acotada es μ -integrable ($|\mu|(X) < +\infty$).

Propiedad 5.1.4 Si λ, μ son dos medidas complejas, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible acotada

$$\int_X f d(\lambda + \mu) = \int_X f d\lambda + \int_X f d\mu.$$

5.2. Formas lineales continuas sobre $C(X)$; ejemplos.

Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea $C(X) = \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{continua}\}$, el espacio vectorial de las funciones continuas de X a $\mathbb{C}$. Si $\varphi \in C(X)$, definimos $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$. Sabemos que $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach: una sucesión uniforme de Cauchy converge uniformemente. Además, si las funciones de la sucesión son continuas su límite es una función continua.

Ejemplo 1. Si μ es una medida compleja,

$$T : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu$$

es una forma lineal continua: para todo $\varphi \in C(X)$,

$$\left| \int_X \varphi d\mu \right| \leq \int_X |\varphi| d|\mu| \leq \|\varphi\|_\infty |\mu|(X),$$

es decir

$$|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$$

donde $C = |\mu|(X) < \infty$. Además $\|T\| \leq |\mu|(X)$.

Ejemplo 2. Sea $x_0 \in X$ y $T_{x_0} : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi \rightarrow \varphi(x_0)$. T_{x_0} es una forma lineal continua: para todo $\varphi \in C(X)$, $|T_{x_0}(\varphi)| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_\infty$. T_{x_0} proviene de la medida de Dirac δ_{x_0} : para todo $\varphi \in C(X)$,

$$T_{x_0}(\varphi) = \int_X \varphi d\delta_{x_0}. \quad (5.2)$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $\varphi = 1_A$, con A un conjunto de Borel. Tenemos

$$\varphi(x_0) = 1_A(x_0) \quad y \quad \int_X \varphi d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}(A),$$

lo que implica

$$\varphi(x_0) = \int_X \varphi d\delta_{x_0}.$$

Si φ es una función simple positiva

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \lambda_i 1_{A_i}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad A_i \in B,$$

y obtenemos (5.2) por linealidad.

Si φ es una función continua positiva, φ es un límite de una sucesión creciente de funciones simples positivas $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$T_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n d\delta_{x_0} = \int_X \varphi d\delta_{x_0}.$$

La última igualdad viene del teorema de convergencia dominada.

Finalmente, si $\varphi \in C(X)$, φ es integrable con respecto a δ_{x_0} , y

$$\varphi = (Re\varphi)^+ - (Re\varphi)^- + i[(Im\varphi)^+ - (Im\varphi)^-].$$

El caso anterior y la linealidad de la integral implican el resultado.

5.3. El teorema de Riesz

Teorema 5.3.1 Sea (X, d) espacio métrico compacto. Para toda T forma lineal continua sobre X existe una única medida compleja μ sobre $(X, \mathbf{B})$, donde $\mathbf{B}$ es la σ -álgebra de Borel, tal que para todo $\varphi \in C(X)$,

$$T(\varphi) = \int_X \varphi d\mu.$$

Además $\|T\| = \|\mu\|$.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la existencia: Sea T una forma lineal continua sobre $C(X)$.

Si $T = 0$, la medida $\mu = 0$ conviene. Por lo tanto podemos suponer $T \neq 0$. Sea $\tilde{T} = \frac{T}{\|T\|}$. Tenemos que $\|\tilde{T}\| = 1$. Si $\tilde{\mu}$ representa $\tilde{T}$, la medida $\mu = \|T\|\tilde{\mu}$ representa la forma T . Por lo tanto podemos suponer $\|T\| = 1$. Construiremos primero una medida positiva $|\mu|$. Para esto es necesario que definamos lo siguiente:

Definición 5.3.2 Sea $f \in C^+(X)$, el espacio de las funciones continuas no negativas. Definimos

$$\Lambda f = \sup \{ |Th|, h \in C(X), |h| \leq f \}.$$

Sea $f \in C(X)$. f se escribe

$$f = (Re f)^+ - (Re f)^- + i[(Im f)^+ - (Im f)^-].$$

Definamos

$$\Lambda f := \Lambda(Re f)^+ - \Lambda(Re f)^- + i[\Lambda(Im f)^+ - \Lambda(Im f)^-].$$

Λ es positiva en el siguiente sentido: para toda $f \in C^+(X)$, $\Lambda(f) \geq 0$. Además, de la definición sabemos que, para toda $f \in C(X)$,

$$|T(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty. \quad (5.3)$$

DEMOSTRACIÓN: Probemos primero la primera desigualdad: si $f \in C(X)$, $|f| \in C^+(X)$. Por definición de $\Lambda(|f|)$, para toda $h \in C(X)$ tal que $|h| \leq |f|$, tenemos

$$\Lambda(|f|) \geq |Th|.$$

En particular, con $h = f$ obtenemos la desigualdad.

Probemos la segunda desigualdad: por la continuidad de T , para toda $h \in C(X)$ tal que $|h| \leq |f|$,

$$|Th| \leq \|T\| \|h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Tomando el supremo sobre las funciones continuas h tales que $|h| \leq |f|$, obtenemos que

$$\Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty.$$

Por otro lado recordemos el teorema de representación de Riesz de las formas positivas:

Teorema 5.3.3 *Si Λ es una forma lineal positiva sobre $C(X)$ entonces puede representarse por una medida positiva $|\mu|$.*

La prueba consiste en proponer una fórmula para la medida asociada y en hacer las verificaciones.

Recordemos los principales argumentos de la demostración:

Sea ω abierto de X . Definamos $|\mu|(w) = \sup\{\Lambda(f), f \in C(X), 0 \leq f \leq 1_w\}$, y si $E \subset X$, $|\mu|(E) = \inf\{|\mu|(V), E \subset V, V \text{ abierto}\}$.

Nos restringimos a N , el conjunto de los subconjuntos $E \subset X$ tales que

$$|\mu|(E) = \sup\{|\mu|(K), K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

Es un trabajo técnico pero fácil de verificar las siguientes propiedades: N es una σ -álgebra que contiene los borelianos, $|\mu|$ es una medida positiva sobre N . Además, N es completa con respecto a $|\mu|$: si $E \in N$, y $A \subset E$ es tal que $|\mu|(E) = 0$, entonces $A \in N$.

La medida $|\mu|$ representa a Λ en el siguiente sentido: para toda $f \in C(X)$,

$$\Lambda f = \int_X f d|\mu|.$$

(ver Rudin, teorema 2.14, el teorema de Riesz para las formas lineales continuas positivas) Por construcción $|\mu|$ es una medida regular.

$T : (C(X), \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbf{C}$ es continua si $\|\cdot\|_1$ es la norma definida sobre $C(X)$ por: para toda $f \in C(X)$,

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d|\mu|.$$

Lo anterior es evidente por la Ec. (5.3): para toda $f \in C(X)$,

$$|T(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \int_X |f| d|\mu| \leq \|f\|_1.$$

Además su norma es menor o igual a 1. Podemos extender T a L^1 , en una aplicación lineal de norma ≤ 1 ya que $C(X)$ es denso en L^1 . Entonces, por el Teorema (5.1.1), podemos concluir que: existe $g \in L^\infty$ con $|g| \leq 1$ tal que para toda $f \in C(X)$,

$$T(f) = \int_X f g d|\mu|.$$

Sea μ tal que $d\mu = g d|\mu|$. Tenemos que: para toda $f \in C(X)$

$$T(f) = \int_X f d\mu.$$

Observemos primero que

$$|\mu|(X) = 1,$$

ya que

$$|\mu|(X) = \sup\{|T(f)|, f \in C(X), |f| \leq 1\} = \|T\| = 1.$$

Probemos que $|g| = 1$ en c.t.p. y que $|\mu|$ es la medida de variación total de μ . Sabemos que

$$|\mu|(X) = 1, \quad y \quad |g| \leq 1. \quad (5.4)$$

Por otro lado, si $f \in C(X)$ es tal que $|f| \leq 1$,

$$|T(f)| = \left| \int_X f g d|\mu| \right| \leq \int_X |g| d|\mu|.$$

Por lo tanto,

$$\int_X |g| d|\mu| \geq \sup\{|T(f)|, f \in C(X), |f| \leq 1\} = \|T\| = 1. \quad (5.5)$$

La Ec.(5.4) y la Ec. (5.5) son compatibles si y sólo si $|g| = 1$ en c.t.p. El lema siguiente implica que $|\mu|$ es la medida de variación total de μ :

Lema 5.3.4 *Si ν es una medida positiva en $\mathcal{M}$, $g \in L^1(\nu)$ y*

$$\lambda(E) = \int_E g d\nu, \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

entonces

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| d\nu, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Como $d\mu = g d|\mu|$, por el lema, la medida de variación total de μ es la medida $|g| d|\mu|$, es decir $|\mu|$ ya que $|g| = 1$ en c.t.p.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema (5.1.1), existe una función h , de valor absoluto 1, tal que $d\lambda = h d|\lambda|$. Por hipótesis $d\lambda = g d\mu$. Por lo tanto

$$h d|\lambda| = g d\mu.$$

Esto nos da que $d|\lambda| = \bar{h}g d\mu$.

Puesto que $|\lambda| \geq 0$ y $\mu \geq 0$, se sigue que $\bar{h}g \geq 0$ en c.t.p. $[\mu]$, por lo que $\bar{h}g = |g|$ en c.t.p. $[\mu]$ (ya que $|h| = 1$).

Ahora demostremos la unicidad en el teorema de representación de Riesz. Sea $T : C(X) \rightarrow \mathbf{C}$ forma lineal continua, y sean μ, μ' medidas complejas tales que, para toda $\varphi \in C(X)$,

$$T(\varphi) = \int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu'.$$

$\mu - \mu'$ es una medida compleja que denotamos por ν . Tenemos que: para todo $\varphi \in C(X)$,

$$\int_X \varphi d\nu = 0.$$

Esto se cumple en particular para cada φ función medible acotada. Por definición de la integral con respecto a la medida compleja ν ,

$$\int_X \varphi d\nu = \int_X \varphi h d|\nu|$$

donde h es medible tal que $|h| = 1$. $C(X)$ es denso en $L^1(X, |\mu|)$: existe $(\varphi_n)_n$ sucesión de funciones en $C(X)$ tales que $\varphi_n \rightarrow \bar{h}$ en $L^1(|\mu|)$. Por un lado tenemos que

$$\int_X \varphi_n h d|\nu| \rightarrow \int_X \bar{h} h d|\nu| = |\nu|(X), \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Por otro lado, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X \varphi_n h d|\nu| = 0.$$

Por lo tanto $|\nu|(X) = 0$ y $\nu=0$. Con esto terminamos la demostración.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Apéndice 1: operadores lineales continuos o acotados

Teorema 6.1.1 *Para cualquier operador acotado A que actúa de un espacio normado a otro espacio normado se tiene*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{k > 0 \mid \forall x \in E, \|Ax\| \leq k\|x\|\}.$$

Teorema 6.1.2 *Sea H un espacio de Hilbert. Para toda forma lineal f continua sobre H existe un único elemento $x_0 \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, x_0) \quad x \in H.$$

Además resulta que $\|f\| = \|x_0\|$. Viceversa, si $x_0 \in H$, la fórmula anterior define una forma lineal continua f tal que $\|f\| = \|x_0\|$.

6.2. Apéndice 2: Algunos resultados auxiliares

Lema 6.2.1 *Si $z_1, \dots, z_N$, son números complejos, entonces existe un subconjunto S de $\{1, \dots, N\}$ para el cual*

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N |z_k|.$$

Lema 6.2.2 *Si μ es una medida positiva σ -finita en una σ -álgebra $\mathcal{M}$ sobre un conjunto X , entonces existe una función $w \in L^1(\mu)$ tal que $0 < w(x) < 1$ para todo $x \in X$.*

Teorema 6.2.3 *Supongamos que $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, S es un conjunto cerrado del plano y los promedios*

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

pertenecen a S para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$. Entonces $f(x) \in S$ para casi todo $x \in X$.

Teorema 6.2.4 *Supongamos que $f : X \rightarrow [0, \infty]$, es medible, $E \in \mathcal{M}$, y $\int_E f d\mu = 0$. Entonces $f = 0$ en c.t.p. de E .*

Proposición 6.2.5 *Si f es una función compleja medible en X , existe una función compleja medible α en X tal que $|\alpha| = 1$ y $f = \alpha|f|$.*

Proposición 6.2.6 *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio con medida y $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ entonces $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que la función f es no negativa. Primero lo demostramos para una función acotada. Sea f una función acotada lo que significa que existe $M \neq 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq M$ para todo x . Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ y $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) < \delta$. Entonces

$$\int_E f d\mu \leq \int_E M d\mu < M\mu(E) \leq M\delta$$

Ahora elegimos δ tal que $M\delta < \varepsilon$ (por ejemplo $\frac{\varepsilon}{2M}$), tenemos

$$\int_E f d\mu < \varepsilon.$$

Ahora lo hacemos para cualquier f integrable no negativa, para esto definimos los siguientes conjuntos:

$$E_n = \{x \in X \text{ tal que } 0 \leq f(x) \leq n\} \quad E_\infty = \{x \in X \text{ tal que } f(x) = +\infty\},$$

aquí es importante notar que $\mu(E_\infty) = 0$ puesto que f es integrable. Comenzamos por demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu. \quad (6.1)$$

Sabemos que

$$\int_{E_n} f d\mu = \int_X f 1_{E_n} d\mu,$$

la sucesión $f 1_{E_n}$ es creciente y el teorema de Beppo-Levi implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f 1_{E_n} d\mu = \int_X f \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{E_n} d\mu$$

Pero $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{E_n} = 1_{\bigcup E_n}$. Como $X = \bigcup_n E_n \cup E_\infty$ y $\mu(E_\infty) = 0$, tenemos $1_{\bigcup_n E_n} = 1$ en c.t.p., lo que implica (6.1)

Ahora fijamos $\varepsilon > 0$, y n_0 tal que

$$0 \leq \int_X f d\mu - \int_{E_{n_0}} f d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.2)$$

Sabemos que el resultado se cumple para funciones acotadas y f es una función acotada en E_{n_0} ; entonces existe δ tal que para toda $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap E_{n_0}) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_{A \cap E_{n_0}} f d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \delta$; escribamos

$$\int_A f d\mu = \int_{A \cap E_{n_0}} f d\mu + \int_{A \cap (E_{n_0})^c} f d\mu.$$

Del hecho de que $A \cap (E_{n_0})^c \subset X \setminus E_{n_0}$, usando (6.2) tenemos que

$$\int_{A \cap (E_{n_0})^c} f d\mu \leq \int_{X \setminus E_{n_0}} f d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_A f d\mu < \varepsilon.$$

6.3. Apéndice 3: Puntos de Lebesgue de una función integrable

Teorema 6.3.1 *A cada $x \in \mathbf{R}^k$ asociémosle una sucesión $\{E_i(x)\}$ que contraiga a x adecuadamente y sea $f \in L^1(\mathbf{R}^k)$. Entonces*

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f dm \quad (6.3)$$

para todo punto de Lebesgue de f y por tanto para c.t.p. $[m]$

DEMOSTRACIÓN: Sea x un punto de Lebesgue y $\{E_i(x)\}$ la sucesión asociada a x . Puesto que esta sucesión se contrae adecuadamente. Sean $\alpha(x)$ y $B(x, r_i)$ el número positivo y las bolas asociadas a $\{E_i(x)\}$ t.q. $E_i(x) \subset B(x, r_i)$ y

$$m(E_i(x)) \geq \alpha m(B(x, r_i)). \quad (6.4)$$

Reescribimos lo que queremos demostrar como

$$f(x) - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f dm = 0. \quad (6.5)$$

Por otro lado tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f(x) dm. \quad (6.6)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x) - \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f dm| &= \left| \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f(x) dm - \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f dm \right| \\ &= \left| \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} (f(x) - f) dm \right| \leq \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} |(f(x) - f)| dm. \end{aligned}$$

Usando (6.4) obtenemos

$$\frac{\alpha(x)}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} |(f(x) - f)| dm \leq \frac{1}{m(B(x, r_i))} \int_{B(x, r_i)} |(f(x) - f)|.$$

Ahora en el miembro de la derecha de esta desigualdad tenemos $r_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow +\infty$; además sabemos que x es un punto de Lebesgue. Deducimos que

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r_i))} \int_{B(x, r_i)} |(f(x) - f)| = 0,$$

y por lo tanto que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} |f(x) - f| dm = 0.$$

Con este resultado vemos que se verifica (6.5). De esta manera se concluye la demostración.

Teorema 6.3.2 Si $f \in L^1(\mathbf{R}^1)$ y $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$ para $(-\infty < x < \infty)$. Entonces $F'(x)=f(x)$ en todo punto de Lebesgue y por tanto en c.t.p.

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar esto es necesario probar la existencia y calcular la derivada de $F(x)$, es decir, $F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_{-\infty}^x f dm)$. Sea δ_i una sucesión de números positivos que converja a cero. Hacemos los siguientes cálculos

$$\frac{F(x + \delta_i) - F(x)}{\delta_i} = \frac{1}{\delta_i} \int_x^{x+\delta_i} f dm.$$

Para el miembro de la derecha el limite existe por el teorema anterior con $E_i = [x, x + \delta_i]$. Entonces

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \delta_i) - F(x)}{\delta_i} = \lim_{\delta_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta_i} \int_x^{x+\delta_i} f dm$$

El miembro de la izquierda de la igualdad es la definición de derivada por la derecha de F en x y. El limite de la derecha existe y es igual a $f(x)$ por el teorema (6.3.1). Por lo tanto $F'(x) = f(x)$ por derecha.

Si procedemos de la misma manera pero ahora haciendo $E_i = [x - \delta_i, x]$ obtenemos

$$\frac{F(x) - F(x - \delta_i)}{\delta_i} = \frac{1}{\delta_i} \int_{x-\delta_i}^x f dm$$

aplicando el limite obtenemos

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(x - \delta_i)}{\delta_i} = \lim_{\delta_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta_i} \int_{x-\delta_i}^x f dm$$

Ahora tenemos que el miembro de la izquierda es la definición de derivada por izquierda. Nuevamente el teorema (6.3.1) garantiza la existencia del limite y por lo tanto $F'(x) = f(x)$ por izquierda. Como las derivadas por derecha y por izquierda en x coinciden, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$.

Bibliografía

- [1] Walter Rudin, *Análisis Real y Complejo* (McGraw-Hill, Tercera Edición)
- [2] Walter Rudin, *Principio de Análisis Matemático* (McGraw-Hill, Tercera Edición)