



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

*PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES
DE LA ECUACIÓN DE ONDA EN LOS
ESPACIOS DE DIMENSIÓN UNO Y DOS*

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

LIC. EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA

EDWIN GARIVALDY LOPEZ ALVAREZ

ASESORES

DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

DR. ANATOLI MERZON

MAYO 2008

Índice general

0.1. Agradecimientos	4
0.2. Introducción	5
1. Ecuaciones diferenciales parciales y la ecuación de onda	6
1.1. Definiciones generales	6
1.2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con dos variables independientes	8
1.3. Vibraciones pequeñas de una cuerda elástica	13
2. Cuerda infinita	16
2.1. Problema de Cauchy	16
2.1.1. Fórmula de D'Alembert	17
2.1.2. Problema bien planteado	18
2.2. Interpretación física de la solución de la ecuación de onda	20
2.2.1. Ondas viajeras	20
2.2.2. Triángulo característico	20
3. Cuerda semi-infinita	22
3.1. Soluciones débiles de la ecuación de onda	22
3.1.1. Funciones prueba	22
3.1.2. Derivadas débiles	23
3.1.3. Soluciones débiles de la ecuación de D'Alembert de la clase C^1	23
3.2. Solución débil del problema mixto	35
3.3. Unicidad de la solución del problema mixto	38
4. Problema de Cauchy en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	42
4.1. Método de promediación	42
4.2. Método de Descenso	47
A.	49
A.1. Ejemplo de una función prueba	49

0.1. Agradecimientos

Empezaré por los seres que contribuyeron para hacer posible mi existencia en esta bendita tierra; mi madre Ma. de Jesús Álvarez Cárdenas y mi padre Magdaleno López Rosales. Sin ellos no hubiese sido posible navegar en el inmenso mar de retos, tropiezos y logros, que es la vida misma.

A mi amada esposa, Ana Gabriela Saucedo Aguirre, que por su amor y comprensión, es hoy en día, uno de los grandes pilares que sostienen mi vida.

A mis abuelos, tíos, hermanos y todos aquellos que han confiado en mi por alguna razón, que yo desconozco.

A los profesores que a lo largo de toda mi vida académica han aportado un granito de arena para hacer de mí, un hombre de bien. Debo una gratificación especial a mis profesores de la universidad y sobre todo, a mis asesores Anatoli Merzon y Abdon E. Choque Rivero.

Gracias a todos y cada uno de ellos por impulsarme y por hacer de mi vida, una vida plena.

0.2. Introducción

El estudio de la ecuación de onda fue la motivación para los primeros trabajos en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Jean Rond D'Alembert (1717 – 1783) publicó en 1743 *Fraite de dynamique*, artículo en el cual fue considerada la ecuación de una cuerda. Considerables argumentos surgieron entre D'Alembert y Leonar Euler (1707 – 1783) publicando importantes artículos entre 1734 y 1748. En estos artículos se establecieron soluciones periódicas y condiciones iniciales que envolvían funciones discontinuas. Jean Bernoulli (1700-1782) estudió ondas en barras y extendió considerablemente el conjunto de condiciones iniciales admisibles. Un tiempo después, Joseph-Louis Lagrange consideró la propagación del sonido y llegó al descubrimiento umbral de las series de Fourier en 1759. Entre 1762 y 1763, Euler y D'Alembert resuelven ondas en una cuerda por una gran variedad de técnicas, y en 1759, Euler considera ondas en una membrana.

En nuestra tesis consideraremos el Problema de Cauchy para la ecuación de onda en una dimensión (cuerda infinita) y el problema mixto para la ecuación de onda sobre la semirrecta (cuerda semi-infinita con extremo izquierdo fijo).

Para investigar las vibraciones de la cuerda semi-infinita hay que considerar el problema de la Cauchy sobre la semirrecta \mathbb{R}_+ . Resulta que aunque los datos iniciales φ y ψ sean infinitamente diferenciables en $\overline{\mathbb{R}_+}$, la solución del problema no pertenece a C^2 , si la segunda derivada $\varphi''(0) \neq 0$ (vease Lema 3.1.2). Por lo tanto, la solución del problema no es la solución clásica; esto implica que es necesario entender la solución en otro sentido, llamado el *sentido generalizado* ó el *sentido débil*. En genral, para las soluciones generalizadas se utiliza la teoría de distribuciones de Soboleff-Schwartz, pero la exposición de esta teoría en la tesis ocuparía mucho lugar y por eso se escogió otra ruta que no usa la teoría de diferenciación de las distribuciones. Sin embargo, este camino requiere muchos más cálculos directos que se presentan en el capítulo 3. La esencia de este método consiste en la aparición de las funciones prueba y las identidades integrales. En la sección 3.1 introducimos las funciones prueba y en la sección 3.2 demostramos que la solución satisface la ecuación de onda en el sentido débil. Usando este método demostramos la unicidad de la solución del problema para la onda en la semirrecta. Esto es la parte central de la tesis.

Notemos que la teoría de las soluciones débiles para la cuerda semi-infinita no se presenta ampliamente en la literatura. Por lo tanto, los resultados de las secciones 3.1 y 3.2 son originales en cierto sentido.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales parciales y la ecuación de onda

1.1. Definiciones generales

En esta sección presentaremos algunas de las definiciones generales y notaciones utilizadas acerca de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Definición 1.1.1 1. Una **Ecuación Diferencial Parcial (EDP)** es una ecuación que contiene al menos una derivada parcial.

2. Una **solución** de la EDP es cualquier función que satisface la ecuación.

3. El **orden** de una EDP es el orden de la derivada parcial mayor que esté en la ecuación.

Ejemplos:

1. Las ecuaciones

$$x^2 u_{xx} - y u_{xy} = u, \quad (1.1)$$

$$x^2 u_{xx} - y u_{xy} = u^2, \quad (1.2)$$

y

$$u_{xx} + 4y u_{yy} - (u_x)^3 + u_x u_y = \cos u, \quad (1.3)$$

son ecuaciones diferenciales parciales¹. Tales ecuaciones son de gran interés en matemáticas y en el modelado de fenómenos de la ciencia, ingeniería, economía, entre otras áreas.

¹Utilizaremos las siguientes notaciones: $u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial xy}$, y así sucesivamente, para cualquier función u diferenciable.

2. a) La ecuación

$$4u_x + 3u_y + u = 0 \quad (1.4)$$

tiene a la función

$$u(x, y) = e^{-x/4}(3x - 4y), \quad (1.5)$$

como solución particular. Lo que se verifica sustituyendo

$$u_x = e^{-x/4}\left[-\frac{1}{4}(3x - 4y) + 3\right], \quad u_y = -4e^{-x/4}, \quad (1.6)$$

y (1.5) en la ecuación (1.4). De donde obtenemos que u satisface (1.4) para toda (x, y) .

b) La ecuación

$$u_{xx} - 9u_{yy} = 0, \quad (1.7)$$

tiene solución general

$$u(x, y) = f_1(3x - y) + f_2(3x + y), \quad (1.8)$$

en la que f_1 y f_2 son funciones arbitrarias.

En lo sucesivo demostraremos que (1.8) proporciona todas las soluciones de (1.7) en la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, es decir, de las funciones que tienen derivadas parciales continuas de segundo orden. Para obtener todas las soluciones de esta clase hay que tomar f_1 y f_2 de la clase $C^2(\mathbb{R})$.

En vista de la gran variedad en la elección de las funciones f_1 y f_2 , la ecuación (1.7) tiene una infinidad de soluciones. Para especificar las funciones f_1 y f_2 se usan condiciones adicionales, por ejemplo, condiciones de frontera. En particular, el problema de Cauchy para las ecuaciones de este tipo determinan f_1 y f_2 (vease la sección (2.1)).

3. La ecuación (1.4) tiene orden uno y la ecuación (1.7) tiene orden dos.

Definición 1.1.2 1. Una EDP es **lineal** si ésta es lineal con respecto a la función y sus derivadas parciales. Una ecuación que no es lineal con respecto a la función y sus derivadas parciales es llamada **no lineal**.

2. Una EDP es **cuasilineal** si ésta es lineal con respecto a sus términos en derivadas mayores.

Ejemplos:

1. La ecuación (1.1) es una ecuación diferencial lineal, mientras que la ecuación (1.2) es no lineal, por el término u^2 .
2. La ecuación de segundo orden (1.3) es cuasilineal, porque es lineal con respecto a sus términos de segundas derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} . En general, cualquier ecuación lineal es también cuasilineal.

1.2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con dos variables independientes

Consideremos el problema de simplificar y clasificar ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en dos variables independientes, x e y . Específicamente, consideremos la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$au_{xx}(x, y) + 2bu_{xy}(x, y) + cu_{yy}(x, y) + du_x(x, y) + eu_y(x, y) + fu(x, y) = g(x, y), \quad (1.9)$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes reales ².

Podemos llevar la ecuación (1.9) a una ecuación equivalente más sencilla (llamada *forma canónica*), mediante un cambio de variables

$$\xi := \xi(x, y), \quad \eta := \eta(x, y), \quad \xi, \eta \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad (1.10)$$

que admita transformación inversa. Recordemos que la transformación inversa de (1.10) existe si y sólo si, el Jacobiano de la transformación

$$Jac(\xi, \eta) := \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.11)$$

Llamaremos a tales transformaciones, *transformaciones no degeneradas*.

En el siguiente teorema demostraremos que existe una transformación lineal no degenerada (1.10) tal que la *parte principal*

$$au_{xx}(x, y) + 2bu_{xy}(x, y) + cu_{yy}(x, y) \quad (1.12)$$

de la ecuación (1.9) se transforma en una de las formas canónicas. Estas formas canónicas dependen del *discriminante*

$$D = b^2 - ac. \quad (1.13)$$

Teorema 1.1 *Existe una transformación lineal no degenerada $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ tal que la ecuación (1.9) puede reducirse a una de las siguientes formas canónicas:*

1. *Ecuación hiperbólica ($D > 0$)*

$$u_{\xi\eta} + \bar{d}u_\xi + \bar{e}u_\eta + \bar{f}u = \bar{g}(\xi, \eta), \quad (1.14)$$

²Podemos considerar, en general, a, b, c, d, e y f como funciones dependientes de las variables x e y , pero para nuestros propósitos basta con considerarlas como constantes

2. Ecuación parabólica ($D = 0$)

$$u_{\eta\eta} + \bar{d}u_\xi + \bar{e}u_\eta + \bar{f}u = \bar{g}(\xi, \eta), \quad (1.15)$$

3. Ecuación elíptica ($D < 0$)

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{d}u_\xi + \bar{e}u_\eta + \bar{f}u = \bar{g}(\xi, \eta), \quad (1.16)$$

donde: \bar{d} , \bar{e} , \bar{f} son constantes.

Demostración. Primero, consideramos el caso general de cambio de variables. Con respecto a las variables ξ y η de (1.10) tenemos:

$$u(x, y) \equiv \bar{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (1.17)$$

Usando la regla de la cadena para derivar (1.17) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \bar{u}_\xi \xi_x + \bar{u}_\eta \eta_x, \\ u_y &= \bar{u}_\xi \xi_y + \bar{u}_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= \bar{u}_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_x^2 + \bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= \bar{u}_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + \bar{u}_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + \bar{u}_\xi \xi_{xy} + \bar{u}_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= \bar{u}_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_y^2 + \bar{u}_\xi \xi_{yy} + \bar{u}_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Sustituyendo (4.21) en la ecuación (1.9) y denotando $\bar{u}(\xi, \eta)$ nuevamente como $u(\xi, \eta)$, obtenemos:

$$Au_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2Bu_{\xi\eta}(\xi, \eta) + Cu_{\eta\eta}(\xi, \eta) + Du_\xi(\xi, \eta) + Eu_\eta(\xi, \eta) + fu(\xi, \eta) = g(\xi, \eta), \quad (1.19)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2, \\ B &= a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + c\xi_y \eta_y, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2, \\ D &= a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y, \\ E &= a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Nótese las constantes a , b y c no se anulan simultáneamente, pues si así fuese, la ecuación (1.9) sería de primer orden. Ahora, dividamos la demostración en casos:

1. **Caso hiperbólico.** Consideremos el caso

$$D = b^2 - ac > 0. \quad (1.21)$$

a) Supóngese que $a^2 + c^2 \neq 0$, entonces $a \neq 0$ ó $c \neq 0$. Por simetría de a y c en la ecuación (1.9) podemos suponer que $a \neq 0$. En este caso la ecuación cuadrática

$$az^2 + 2bz + c = 0, \quad (1.22)$$

tiene dos raíces reales distintas

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{a} \quad (1.23)$$

Tomemos el cambio de variables (1.10) como:

$$\xi = \alpha x + y \quad y \quad \eta = \beta x + y \quad (1.24)$$

con α, β dadas por (1.23) y $\alpha \neq \beta$ por (1.21). Esta transformación lineal es no degenerada, ya que $Jac(\xi, \eta) = \alpha - \beta \neq 0$. Sustituyendo (1.24) en (1.20), por (1.21) y (1.22) tenemos:

$$A = C = 0, \quad B = -\frac{2}{a}(b^2 - ac) \neq 0, \quad D = d\alpha + e, \quad E = d\beta + e. \quad (1.25)$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.25) en la ecuación (1.19) y dividiendo entre $2B$ obtenemos la ecuación canónica de tipo hiperbólico (1.14), donde:

$$\bar{d} = \frac{D}{2B}, \quad \bar{e} = \frac{E}{2B}, \quad \bar{f} = \frac{f}{2B} \text{ constantes y } \bar{g}(\xi, \eta) = \frac{1}{2B}g(\xi, \eta).$$

b) Si $a^2 + c^2 = 0$, entonces $a = c = 0$. Además $b \neq 0$, ya que la ecuación (1.9) es de segundo orden. Por lo tanto, la ecuación (1.9) tendría la forma canónica (1.14) después de dividir entre $2b$.

2. **Caso parabólico.** Consideremos el caso

$$D = b^2 - ac = 0. \quad (1.26)$$

a) Supongamos que $a \neq 0$. Entonces por (1.23) y (1.26), la ecuación cuadrática (1.22) tiene una única raíz

$$\alpha = -\frac{b}{a}. \quad (1.27)$$

1) Supongamos que $b = 0$, entonces por (1.26) $c = 0$; por lo tanto, tendremos forma canónica (1.15) dividiendo (1.9) entre a .

- 2) Supongamos que $b \neq 0$, entonces $\alpha \neq 0$ por (1.27). En este caso escogemos el cambio de variables (1.10) como:

$$\xi = \alpha x + y \quad y \quad \eta = y, \quad (1.28)$$

con α dada por (1.27). Así, $Jac(\xi, \eta) = \alpha \neq 0$ y la transformación lineal (1.28) es no degenerada.

Sustituyendo (1.28) en (1.20), por (1.21) y (1.26) tenemos

$$A = B = 0, \quad C = c, \quad D = d\alpha + e, \quad E = e. \quad (1.29)$$

Sustituyendo (1.29) en (1.9) y dividiendo entre c obtenemos la forma canónica (1.15) para una ecuación parabólica, donde $\bar{d} = \frac{D}{c}$, $\bar{e} = \frac{e}{c}$,

$\bar{f} = \frac{f}{c}$ son constantes y $\bar{g}(\xi, \eta) = \frac{1}{c}g(\xi, \eta)$.

- b) Si $a = 0$, entonces $b = 0$ por (1.26). Por lo tanto $c \neq 0$, ya que la ecuación (1.9) es de segundo orden. En este caso tenemos la ecuación canónica (1.15) dividiendo (1.9) entre c .

3. Caso elíptico.

Consideremos el caso

$$D = b^2 - ac < 0. \quad (1.30)$$

La desigualdad (1.30) implica que $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Entonces la ecuación cuadrática (1.22) tiene dos raíces complejas distintas:

$$\alpha_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{a}. \quad (1.31)$$

Podemos realizar el cambio de variables como en el caso hiperbólico, considerando la ecuación (1.9) en el caso complejo, pero no es nuestro objeto de estudio. Una manera de permanecer en el campo real es definir el cambio de variables (1.10) siguiente:

$$\xi = \alpha x + y \quad y \quad \eta = \beta x \quad (1.32)$$

donde $\alpha := Re(\alpha_1) = -\frac{b}{a}$, $\beta := Im(\alpha_2) = -\frac{\sqrt{-D}}{a}$. Así $Jac(\xi, \eta) = -\beta \neq 0$, entonces la transformación lineal (1.32) es no degenerada.

Sustituyendo (1.32) en (1.20) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2b\alpha + c = \frac{-(b^2 - ac)}{a} \neq 0, \\ B &= a\alpha\beta + b\beta = 0, \\ C &= a\beta^2 = \frac{-(b^2 - ac)}{a} \neq 0, \\ D &= d\alpha + e, \\ E &= d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Sustituyendo (1.32) en (1.9) y dividiendo entre A obtenemos la forma canónica (1.16), donde $\bar{d} = \frac{D}{A}$, $\bar{e} = \frac{e}{A}$, $\bar{f} = \frac{f}{A}$ son constantes y $\bar{g}(\xi, \eta) = \frac{1}{A}g(\xi, \eta)$. ■

Corolario 1.2.1 *La ecuación*

$$c^2 u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad c > 0, \quad (1.34)$$

es de tipo hiperbólico y se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0. \quad (1.35)$$

Observación 1 *En la siguiente sección veremos que (1.34) es la ecuación que describe las vibraciones pequeñas de una cuerda. Esta ecuación se llama **ecuación de onda** y juega un papel muy importante en la física matemática.*

Demostración del Corolario 1.2.1. El discriminante de la ecuación (1.34) es $D = c^2 > 0$ y por lo tanto es de tipo hiperbólico. Por (1.23) tenemos, $\alpha = \frac{1}{c}$ y $\beta = -\frac{1}{c}$ y el cambio de variables (1.24) tiene la forma:

$$\xi = \frac{1}{c}x + t \quad \text{y} \quad \eta = -\frac{1}{c}x + t. \quad (1.36)$$

Sustituyendo (1.36) en (1.20) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} A &= c^2 \xi_x^2 + (-1)\xi_t^2 = c^2 \left(\frac{1}{c}\right)^2 + (-1)(1)^2 = 0, \\ B &= c^2 \xi_x \eta_x + (-1)\xi_t \eta_t = c^2 \left(\frac{1}{c}\right) \left(-\frac{1}{c}\right) + (-1)(1)(1) = -2, \\ C &= c^2 \eta_x^2 + (-1)\eta_t^2 = c^2 \left(-\frac{1}{c}\right)^2 + (-1)(1)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Por (1.37) y (1.14) del Teorema 1.1 concluimos que la forma canónica de la ecuación (1.34) es (1.35). ■

1.3. Vibraciones pequeñas de una cuerda elástica

En esta sección deduciremos la ecuación de onda, como una ecuación que describe las vibraciones pequeñas de una cuerda elástica.

Consideremos una cuerda tensa estirada entre dos puntos fijos. Para colocar esta cuerda en movimiento, podemos jalarla, puntearla, etc. El problema consiste en estudiar el resultado de las vibraciones resultantes. Asumamos que la cuerda tiene longitud L y está sujeta en cada uno de sus extremos. Supongamos que uno de los extremos se encuentra en el origen y el otro extremo se halla a lo largo del eje x en la posición $x = L$.

Tomemos la cuerda como un continuo. Desde un punto de vista matemático, esto quiere decir que existe una función continua ρ (densidad), tal que la integral de ρ sobre cualquier segmento de la cuerda de como resultado la masa de la cuerda en tal segmento. Asumamos lo siguiente:

1. La cuerda es perfectamente elástica, es decir, flexible, no se resiste a deformaciones y la tensión en ella actúa tangencialmente.
2. Las vibraciones son tan pequeñas que si enfocamos nuestra atención en un punto x en la posición de equilibrio, éste se mueve perpendicularmente con respecto a la recta cuyos extremos son los puntos $x = 0$ y $x = L$.

Construimos un eje u perpendicular al eje x en $x = 0$ y asumimos que la posición de equilibrio de la cuerda es el segmento horizontal $0 \leq x \leq L$.

Ahora, hagamos salir nuestra cuerda de su posición de equilibrio en el instante $t = 0$, por ejemplo, tirémosla con el dedo hacia un lado y dejemos que vibre (oscile) libremente. Después de un cierto tiempo t transcurrido, un punto cuya posición en la cuerda es x , cuando ésta se encuentra en equilibrio, tendrá una nueva localización que será denotada por

$$u = u(x, t) \quad (0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0). \quad (1.38)$$

Entonces, para un tiempo fijo t , la función $u = u(x, t)$ designará la desviación de la cuerda en tal tiempo.

Si $\rho_0(x)$ denota la densidad lineal de la cuerda en la posición de equilibrio y $\rho(x, t)$ la densidad lineal en el tiempo t , cuando la cuerda se estira, ρ y ρ_0 serán diferentes. Si enfocamos nuestra atención a un intervalo arbitrario entre $x = x_1$ y $x = x_2$ a lo largo de la cuerda, encontramos que la masa m en este intervalo satisface:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_0(x) dx = m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) [1 + u_x^2(x, t)]^{1/2} dx \quad (1.39)$$

Como el intervalo $[x_1, x_2]$ es arbitrario y los integrandos de (1.39) son continuos, concluimos que:

$$\rho_0 = \rho(1 + u_x^2)^{1/2}. \quad (1.40)$$

Esta simple ecuación expresa la conservación de la masa. Teniendo en mente que la cuerda se mueve perpendicularmente a su posición de equilibrio.

En seguida, se considera un elemento de la cuerda sobre un intervalo arbitrario $[x, x + \Delta x]$. Determinaremos las fuerzas que actúan en estos pedazos pequeños de la cuerda y obtendremos una expresión para el equilibrio del momento lineal. Denótese por T_x la tensión en el punto x y considere la Figura 1.

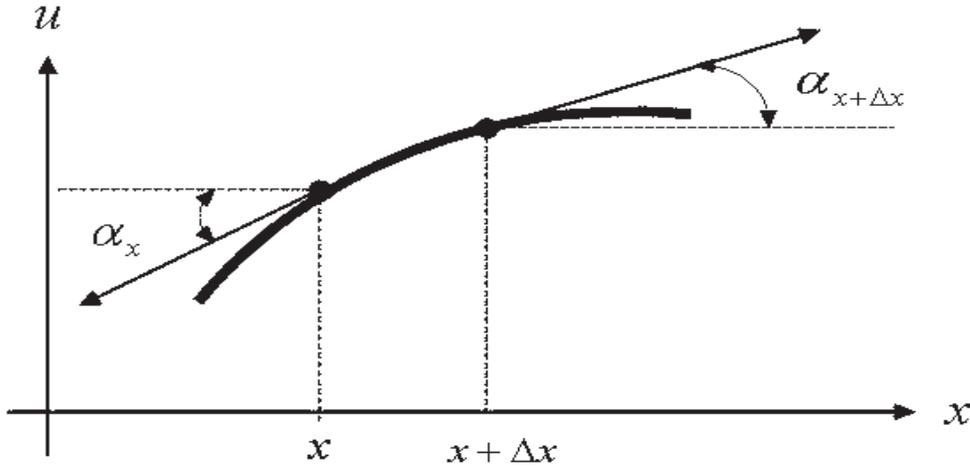


Figura 1

La primera observación que hacemos es que como solo los movimientos verticales tienen lugar, las fuerzas en la dirección horizontal están en equilibrio y en vista del diagrama, esto implica que:

$$T_{x+\Delta x} \cos \alpha_{x+\Delta x} - T_x \cos \alpha_x = 0 \quad (1.41)$$

para toda Δx , ó bien, dividiendo (1.41) entre Δx y dejando que $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} T_x \cos \alpha_x = 0, \quad (1.42)$$

por lo tanto, de (1.42) concluimos:

$$T_x \cos \alpha_x := \tau, \quad (1.43)$$

donde τ es una constante ó posiblemente una función de t . Notemos que $\tau > 0$ por que es la magnitud de la componente horizontal de la tensión.

El movimiento vertical se determina por el hecho de que el tiempo contribuye a que el cambio del momento lineal es igual a la suma de las fuerzas que actúan en la dirección vertical. El momento de un elemento pequeño es dado, usando (1.40) por:

$$\int \rho u_t ds = \int_x^{x+\Delta x} \rho(1 + u_x^2)^{1/2} u_t dx = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_t dx \quad (1.44)$$

y su contribución al cambiar el tiempo es:

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_t dx = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt} dx. \quad (1.45)$$

Distinguimos dos tipos de fuerzas actuando en el segmento de la cuerda, la que se debe a la tensión, que sirve para mantener la cuerda tensa y otra que actúa a lo largo de la longitud de la cuerda, tal como el peso. De (4.46) y nuestro diagrama encontramos que la fuerza neta actuando en los puntos extremos del segmento de cuerda es:

$$\begin{aligned} T_{x+\Delta x} \sin \alpha_{x+\Delta x} - T_x \sin \alpha_x &= \tau \left(\frac{\sin \alpha_{x+\Delta x}}{\cos \alpha_{x+\Delta x}} - \frac{\sin \alpha_x}{\cos \alpha_x} \right) \\ &= \tau (\tan \alpha_{x+\Delta x} - \tan \alpha_x) \\ &= \tau [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \end{aligned} \quad (1.46)$$

Se sigue que el peso de la cuerda actuando hacia abajo es:

$$- \int \rho g ds = - \int_x^{x+\Delta x} \rho g (1 + u_x^2)^{1/2} dx = - \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 g dx.$$

Si un peso externo actúa sobre la cuerda, modelamos la fuerza resultante por:

$$\int \rho f ds = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 f(x, t) dx,$$

donde $f(x, t)$ es una densidad de fuerza que describe la acción de la fuerza externa. Ahora, una aplicación de la ley de Newton produce:

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt} dx = \tau [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 (f - g) dx. \quad (1.47)$$

Dividiendo (1.47) por Δx y haciendo tender Δx a cero obtenemos la ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F. \quad (1.48)$$

donde hemos denotado $c^2 := \tau/\rho_0$ y $F := f - g$. La ecuación (1.48) describe las vibraciones de nuestra cuerda cuando está en movimiento y es frecuentemente llamada *ecuación de onda no homogénea*. Si no existen fuerzas externas y el peso de la cuerda es despreciable, F puede realmente tomarse como cero y obtenemos:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.49)$$

que es llamada *Ecuación de onda homogénea* en una dimensión.

Observación 2 Tiene sentido considerar (1.49) también, para $t < 0$. En este caso, obtenemos la ecuación (1.34).

Capítulo 2

Cuerda infinita

2.1. Problema de Cauchy

En esta sección resolveremos el problema de Cauchy para la ecuación de onda en \mathbb{R} , siguiendo el razonamiento desarrollado por D'Alembert. Considerando la ecuación de onda

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad c > 0, \quad (2.1)$$

enunciamos el siguiente

Teorema 2.1 (D'Alembert) *Sea $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ una solución de (2.1). Entonces existen $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tal que:*

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (2.2)$$

Demostración. Por el Corolario 1.2.1, la ecuación (2.1) tiene la forma canónica

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad (2.3)$$

con ξ y η dadas por (1.36). Notemos que $u(\xi, \eta) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ya que $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y (1.36) es una transformación de la clase C^∞ . Claramente (2.3) implica que u_ξ es independiente de η (ya que $u_{\xi\eta} = (u_\xi)_\eta = 0$) y, por lo tanto,

$$u_\xi = U(\xi), \quad (2.4)$$

donde $U(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$. Integrando (2.4) con respecto a ξ , obtenemos:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi), \quad (2.5)$$

donde $f_2(\xi) := \int U(\xi) d\xi \in C^2(\mathbb{R})$ y la constante de integración con respecto a ξ es, en general, una función de η , entonces también $f_1 \in C^2(\mathbb{R})$ por (2.5). La

función $f_1(\eta)$ es una función de $-\frac{1}{c}x + t$ y la función $f_2(\xi)$ es una función de $\frac{1}{c}x + t$ por (1.36). Podemos considerar estas funciones como funciones de $x - ct$ y $x + ct$, respectivamente. Nosotros usamos las mismas letras para estas funciones. Por lo tanto, la solución de (2.1) tiene la forma (2.2). ■

Es fácil verificar que el recíproco es cierto, es decir, (2.2) satisface la ecuación de onda (2.1) y pertenece a $C^2(\mathbb{R}^2)$.

2.1.1. Fórmula de D'Alembert

Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación de onda (2.1). Este problema consiste en encontrar una solución de (2.1) que satisfaga la posición y velocidad inicial de la cuerda. Estas condiciones se escriben como

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Supongamos que $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Nuestra meta es encontrar todas las soluciones $u(x, t)$ de la ecuación de la onda (2.1) sujeta a las condiciones iniciales (2.6), que pertenecen a $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Definición 2.1.1 *El problema (2.1), (2.6) se llama el **problema de Cauchy**.*

Mostraremos el siguiente teorema:

Teorema 2.2 *Sean $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, la única solución del sistema (2.1), (2.6) en la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ se expresa por la fórmula*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \quad (2.7)$$

Demostración. Sea $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ una solución de (2.1). Entonces, por el Teorema 2.1 existen funciones $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $u(x, t)$ admite (2.2).

Determinemos las funciones f_1 y f_2 dadas por (2.2) de modo que se cumplan las condiciones iniciales indicadas en (2.6), es decir:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (2.8)$$

y

$$u_t(x, 0) = cf_2'(x) - cf_1'(x) = \psi(x). \quad (2.9)$$

Integrando (2.9) obtenemos:

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + k, \quad (2.10)$$

donde x_0 y k son constantes arbitrarias. Por (2.8) y (2.10) tenemos:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(y)dy - \frac{k}{2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(y)dy, + \frac{k}{2}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.2), obtenemos (2.7). De esta manera demostramos que si $u(x, t)$ satisface (2.1), (2.6), entonces u necesariamente tiene la forma (2.7), esto implica que u es única solución.

Ahora demostraremos que (2.7) efectivamente nos da la solución de (2.1), (2.6) y $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Diferenciando (2.7) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi'(x - ct) + \varphi'(x + ct)] + \frac{1}{2c}[\psi(x + ct) - \psi(x - ct)], \\ u_t(x, t) &= \frac{c}{2}[\varphi'(x + ct) - \varphi'(x - ct)] + \frac{1}{2}[\psi(x + ct) + \psi(x - ct)], \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi''(x - ct) + \varphi''(x + ct)] + \frac{1}{2c}[\psi'(x + ct) - \psi'(x - ct)], \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{c^2}{2}[\varphi''(x - ct) + \varphi''(x + ct)] + \frac{c}{2}[\psi'(x + ct) - \psi'(x - ct)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

De (2.12) se verifica que (2.7) resuelve el problema de Cauchy y como $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ también, de (2.12), concluimos que $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, por que u_{xx} y u_{tt} son continuas. ■

Observación 3 Si $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy \quad (2.13)$$

satisface la ecuación de onda (2.1) en \mathbb{R}^2 .

Demostración. Se sigue inmediatamente de (2.12).

Definición 2.1.2 La fórmula (2.7) se llama **Fórmula de D'Alembert** para la ecuación de onda.

2.1.2. Problema bien planteado

En la sección anterior hemos demostrado que la solución del problema (2.1), (2.6) existe, es única y se expresa por la fórmula de D'Alembert (2.7). En esta sección demostraremos que esta solución depende continuamente de los datos iniciales, es decir, pequeños cambios en los datos iniciales producen pequeños cambios en la solución.

Definición 2.1.3 Decimos que el problema de Cauchy para la ecuación de onda en la línea real es un **problema bien planteado** si

1. Existe una solución,
2. La solución está unívocamente determinada por la condiciones de Cauchy, y
3. La solución depende continuamente de las condiciones iniciales.

Un problema esta **mal planteado** si uno de estos criterios no se cumple.

En el siguiente teorema demostramos que el problema (2.1), (2.6) está bien planteado.

Teorema 2.3 El problema (2.1), (2.6) es un problema bien planteado.

Demostración. El Teorema 2.2 muestra que la solución (2.1), (2.6) existe, es única y se expresa por (2.7). Por la definición 2.1.3, falta demostrar que se cumple la propiedad 3. Demostremos esta propiedad.

Sean u_1 y u_2 soluciones de (2.1) que satisfacen:

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad u_{it}(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Demostremos que dado $\epsilon > 0$ y $T > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad \text{y} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta, \quad (2.15)$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, entonces

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \epsilon. \quad (2.16)$$

En efecto, por (2.7) tenemos

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(x - ct) + \varphi_1(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_1(y) dy \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2}(\varphi_2(x - ct) + \varphi_2(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_2(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Ahora dado $\epsilon > 0$ y $T > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x - ct) - \varphi_2(x - ct)| + \frac{1}{2}|\varphi_1(x + ct) - \varphi_2(x + ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(y) - \psi_2(y)| dy < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2c}(2cT)\delta \\ &= (1 + T)\delta \end{aligned}$$

si $t \in [0, T]$ y las desigualdades (2.15) se satisfacen. Por lo tanto, tenemos (2.16) para toda x y $t \in [0, T]$, si elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{1 + T}$. ■

2.2. Interpretación física de la solución de la ecuación de onda

2.2.1. Ondas viajeras

La función $u(x, t)$, dada por (2.7), representa el proceso de propagación de la onda sujeto a las condiciones iniciales (2.6). Sea t_0 fijo, entonces $u(x, t_0)$ muestra el perfil de la cuerda en el momento t_0 ; mientras que, fijando x_0 , $u(x_0, t)$ que muestra el proceso del movimiento en el punto x_0 .

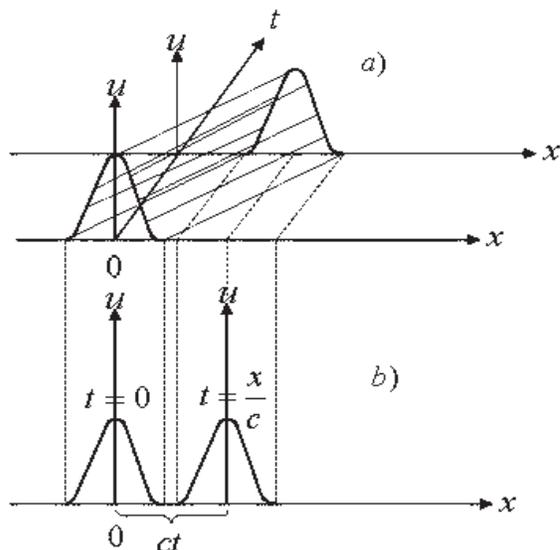


Figura 2

se desplaza hacia la derecha con velocidad c . La función $f(x + ct)$ representa, evidentemente, una onda que se desplaza hacia la izquierda con velocidad c . De este modo, la solución general (2.7) del problema de Cauchy para la cuerda infinita es la superposición de dos ondas, $f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$, donde:

$$f_1(x - ct) = \frac{1}{2}\varphi(x - ct) - \Psi(x - ct), \quad f_2(x + ct) = \frac{1}{2}\varphi(x + ct) + \Psi(x + ct),$$

con $\Psi(x) = \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(y) dy$. La onda f_1 se desplaza hacia la derecha con una velocidad c , mientras que f_2 , hacia la izquierda con la misma velocidad.

2.2.2. Triángulo característico

Para establecer el carácter de la solución (2.7), es cómodo utilizar el plano xt , llamado también **plano fase**. Las rectas $x - ct = k_1$ y $x + ct = k_2$, donde k_1 y k_2

Supongamos que un observador que se hallaba en el punto $x = 0$ en el momento $t = 0$, se mueve con una velocidad c en el sentido positivo. Introduzcamos un sistema de coordenadas relacionado con el observador, haciendo $x' = x - ct$, $t' = t$. En este sistema móvil de coordenadas, la función $u(x, t) = f(x - ct)$ se determinará mediante la fórmula $u = f(x')$, y el observador verá todo el tiempo el mismo perfil que en el momento inicial. Por lo tanto, la función $u(x, t) = f(x - ct)$ es el perfil invariante $f(x)$, que

son constantes arbitrarias, son llamadas **características** de la ecuación (2.1). La función $u = f(x - ct)$ se mantiene constante a lo largo de la característica $x - ct = k_1$; mientras que la función $u = f(x + ct)$ es constante a lo largo de la característica $x + ct = k_2$.

Sea $f(x) \neq 0$ si $x \in (x_1, x_2)$, y $f(x) = 0$ si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$. Tracemos las características $x - ct = x_1$ y $x - ct = x_2$ por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$; éstas dividen al semiplano $(x, t > 0)$ en tres regiones, I, II y III (ver Figura 3 a)). La función $u(x, t) = f(x - ct)$ es distinta de cero solo en la región II, donde $x_1 < x - ct < x_2$, y las características $x - ct = x_1$ y $x - ct = x_2$ representan los frentes trasero y delantero (respectivamente), de la onda que se propaga hacia la derecha.

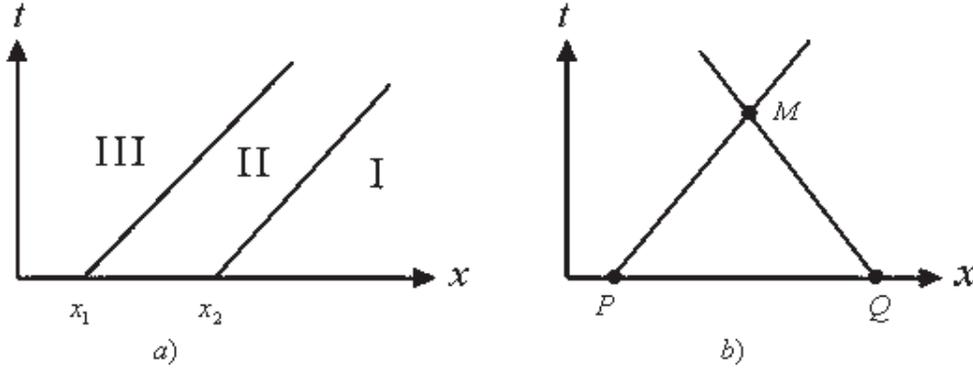


Figura 3

Tomemos ahora un punto fijo $M := (x_0, t_0)$, y tracemos por él ambas características $x - ct = x_0 - ct_0$ y $x + ct = x_0 + ct_0$. Dichascaracterísticas cortaran al eje x en los puntos $x_1 = x_0 - ct_0, t = 0$ y $x_2 = x_0 + ct_0, t = 0$. El valor de la función $u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ en el punto (x_0, t_0) es igual a $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, es decir, se determina por los valores de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, que son los vértices del triángulo MPQ formado por las dos características y el eje x . Este triángulo se llama **triángulo característico** del punto (x_0, t_0) . De la fórmula que la desviación $u(x_0, t_0)$ del punto de la cuerda en el momento t_0 depende sólo de los valores de la desviación inicial en los vértices $P := (x_0 - ct_0, 0)$ y $Q := (x_0 + ct_0, 0)$ del triángulo característico MPQ , y de los valores de la velocidad inicial en el lado PQ . Esto se aclara particularmente, si se escribe la fórmula (2.7) en la forma:

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (2.18)$$

Los datos iniciales dados fuera de PQ no ejercen influencia en el valor de $u(x, t)$ en el punto $M(x_0, t_0)$. Si las condiciones iniciales están dadas no en toda la recta infinita, sino en el segmento P_1Q_1 , éstos determinan unívocamente la solución dentro del triángulo característico cuya base es el segmento P_1Q_1 .

Capítulo 3

Cuerda semi-infinita

3.1. Soluciones débiles de la ecuación de onda

3.1.1. Funciones prueba

En esta sección introducimos la teoría de derivadas débiles para resolver después el problema de la cuerda en una semirrecta. Introduciremos alguna terminología:

Definición 3.1.1 1. Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ¹, el **soporte** de f , denotado por $\text{supp } f$, es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual f se anula, es decir, la clausura de $\{x : f(x) \neq 0\}$.

2. Una función f definida sobre \mathbb{R}^n es llamada **función prueba** si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que el soporte de f está contenido en K . Denotamos el conjunto de todas las **funciones prueba** por

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \phi \text{ es compacto}\}.$$

Usaremos también el espacio $C_0^\infty(\Omega)$, donde Ω es un dominio en \mathbb{R}^n .

Definición 3.1.2

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \phi \subset \Omega \text{ es compacto}\}.$$

Observación 4 Es claro que $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es importante conocer que una función prueba con estas propiedades existe; por ejemplo

$$\phi_{y,\epsilon}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x-y|^2}\right), & |x-y| < \epsilon \\ 0, & |x-y| \geq \epsilon, \end{cases} \quad (3.1)$$

es positiva en una vecindad pequeña de $y \in \mathbb{R}^n$ y 0 fuera de tal vecindad: $\phi_{y,\epsilon}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La demostración de esta afirmación se encuentra en el Apéndice A.1.

¹En general, se puede considerar $C(X)$ en cualquier espacio topológico X .

3.1.2. Derivadas débiles

Definición 3.1.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

1. $L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \int_{\omega} |f| dx < \infty, \forall \omega \subset \Omega \text{ acotado y abierto} \right\}$.
2. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que f es diferenciable con respecto a la variable x_k si existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle f, \partial_k \phi \rangle := \int_{\Omega} f(x) \partial_k \phi(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx = - \langle g, \phi \rangle .$$

En este caso $g(x) = \partial_k f(x)$ se llama **derivada parcial débil** de f .

Ejemplo. La derivada débil de $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ es

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Demostración. Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ cualquiera y supongamos sin pérdida de generalidad que $[a, b]$, con $a < 0 < b$, es el soporte de ϕ . Entonces, usando que $|x| = -x$ si $x \in [a, 0]$ y $|x| = x$ si $x \in [0, b]$, tenemos:

$$\langle |x|, \phi'(x) \rangle = \int_a^b |x| \phi'(x) dx = - \int_a^0 x \phi'(x) dx + \int_0^b x \phi'(x) dx \quad (3.3)$$

Integrando por partes las últimas expresiones de (3.3)

$$\langle |x|, \phi'(x) \rangle = \int_a^0 \phi(x) dx - \int_0^b \phi(x) dx = - \int_a^b g(x) \phi(x) dx = - \langle g, \phi \rangle \quad (3.4)$$

con g dada por (3.2). ■

3.1.3. Soluciones débiles de la ecuación de D'Alembert de la clase C^1 .

En lo sucesivo consideraremos la ecuación de D'Alembert no solamente en \mathbb{R}^2 , sino también en algunos dominios de \mathbb{R}^2 .

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio (puede ser \mathbb{R}^2). Considerando la ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (3.5)$$

damos la siguiente:

Definición 3.1.4 La función $u(x, t) \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisface la ecuación (3.5) en el sentido débil si para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle u_{tt} - c^2 u_{xx}, \phi \rangle := \langle u, \phi_{tt} - c^2 \phi_{xx} \rangle = \int_{\Omega} u(x, t) (\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx}) dx dt = 0. \quad (3.6)$$

Observación 5 Cada solución clásica de la ecuación de onda en Ω es la solución débil. Esto se sigue del hecho que en (3.6) podemos integrar por partes (debido que $u \in C^2(\Omega)$).

Construcción de un ejemplo de la solución débil de la ecuación de onda

En este párrafo construiremos una solución de la ecuación de onda en el sentido débil que pertenece a $C^1(\mathbb{R}^2)$ y no pertenece a $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Sea $c = 1$, $\varphi(x) := x^2$, $x \geq 0$ y considere el problema de Cauchy para la ecuación de onda con

$$u(x, 0) := \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \Psi(x) \equiv 0. \quad (3.7)$$

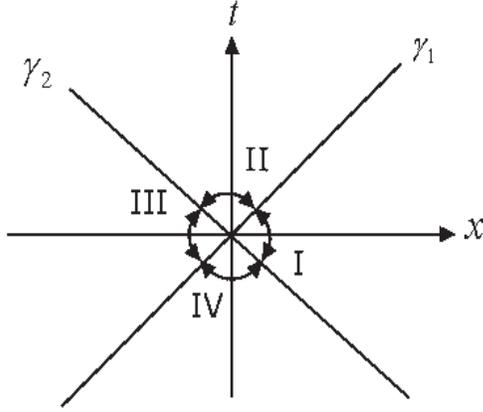


Figura 4

Similarmente a (2.7), escribimos $u(x, t)$ en la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+t) + \Phi(x-t)]. \quad (3.8)$$

Para representar explícitamente $u(x, t)$, dividimos el plano en cuatro regiones limitadas por las ecuaciones de las características $\gamma_1 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x = t\}$ y $\gamma_2 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x = -t\}$ (ver Figura 4):

$$\begin{aligned} I &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -t, x \geq t\}, & II &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -t, x \leq t\}, \\ III &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -t, x \leq t\}, & IV &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -t, x \geq t\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.8) y tomando en cuenta las regiones (3.9), la función $u(x, t)$ tiene forma explícita

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] = x^2 + t^2, & (x, t) \in I \\ \frac{1}{2}[(x+t)^2 - (-x+t)^2] = 2xt, & (x, t) \in II \\ \frac{1}{2}[(-x-t)^2 - (-x+t)^2] = -(x^2 + t^2), & (x, t) \in III \\ \frac{1}{2}[(-x-t)^2 + (x-t)^2] = -2xt, & (x, t) \in IV. \end{cases} \quad (3.10)$$

Con respecto a esta función $u(x, t)$ afirmamos la siguiente:

Proposición 3.1.1 $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $u \notin C^2(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Ya que $u(x, t)$ es infinitamente diferenciable en las regiones abiertas $I - IV$, es suficiente verificar la continuidad de u y sus primeras derivadas a lo largo de las características γ_1 y γ_2 . Usando (3.10) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (a, a) \\ (x, t) \in I}} u(x, t) &= \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (a, a) \\ (x, t) \in II}} u(x, t) = 2a^2, \\
 \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (a, a) \\ (x, t) \in III}} u(x, t) &= \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (a, a) \\ (x, t) \in IV}} u(x, t) = -2a^2, \\
 \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (-a, a) \\ (x, t) \in I}} u(x, t) &= \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (-a, a) \\ (x, t) \in IV}} u(x, t) = 2a^2, \\
 \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (-a, a) \\ (x, t) \in II}} u(x, t) &= \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (-a, a) \\ (x, t) \in III}} u(x, t) = -2a^2.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

El hecho de que, en (3.11) el límite cuando $(x, t) \rightarrow (a, a)$ coincide entre las regiones I y II , y entre las regiones III y IV , implica que $u(x, t)$ es continua a lo largo de la característica γ_1 . Similarmente, dado que el límite cuando $(x, t) \rightarrow (-a, a)$ coincide entre las regiones I y IV , y entre las regiones II y III , deducimos la continuidad de $u(x, t)$ a lo largo de la característica γ_2 . Por lo tanto $u \in C(\mathbb{R}^2)$.

Extrayendo las primeras derivadas de (3.10) tenemos:

$$u_x = \begin{cases} 2x, & (x, t) \in I \\ 2t, & (x, t) \in II \\ -2x, & (x, t) \in III \\ -2t, & (x, t) \in IV, \end{cases} \quad u_t = \begin{cases} 2t, & (x, t) \in I \\ 2x, & (x, t) \in II \\ -2t, & (x, t) \in III \\ -2x, & (x, t) \in IV. \end{cases} \tag{3.12}$$

Por (3.12) tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in I}} u_x(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in II}} u_x(x,t) = 2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in III}} u_x(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in IV}} u_x(x,t) = -2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in I}} u_x(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in IV}} u_x(x,t) = -2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in II}} u_x(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in III}} u_x(x,t) = 2a. \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in I}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in II}} u_t(x,t) = 2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in III}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,a) \\ (x,t) \in IV}} u_t(x,t) = -2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in I}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in IV}} u_t(x,t) = 2a, \\
\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in II}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (-a,a) \\ (x,t) \in III}} u_t(x,t) = -2a.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Argumentando de manera similar a la demostración de la continuidad de $u(x, t)$ en el plano, por (3.13) deducimos que $u_x(x, t)$ es continua a lo largo de las características γ_1 y γ_2 . Por otro lado, nuevamente, por (3.13) deducimos que $u_t(x, t)$ es continua a lo largo de las características γ_1 y γ_2 . Por lo tanto $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Derivando nuevamente la expresión (3.12) obtenemos:

$$u_{xx} = u_{tt} = \begin{cases} 2, & (x, t) \in I \\ 0, & (x, t) \in II \\ -2, & (x, t) \in III \\ 0, & (x, t) \in IV, \end{cases} \quad u_{xt} = u_{tx} = \begin{cases} 0, & (x, t) \in I \\ 2, & (x, t) \in II \\ 0, & (x, t) \in III \\ -2, & (x, t) \in IV. \end{cases} \quad (3.14)$$

Usando la metodología anterior, deducimos que (3.14) implica que $u_{xx}(x, t)$, $u_{xt}(x, t)$, $u_{tx}(x, t)$ y $u_{tt}(x, t)$ no son continuas a lo largo de las características γ_1 y γ_2 . Por lo tanto $u \notin C^2(\mathbb{R}^2)$. ■

Proposición 3.1.2 *La función $u(x, t)$ dada por (3.10), satisface la ecuación (3.5) en el sentido débil.*

Demostración. Necesitamos mostrar que para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t)[\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)] dx dt = 0, \quad (3.15)$$

con $u(x, t)$ dada por (3.10).

Separando la integral dada por la parte izquierda de (3.15), tenemos:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4^2, \quad (3.16)$$

donde:

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\int_{-x}^x (x^2 + t^2) \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx - \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{|t|}^\infty (x^2 + t^2) \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt, \quad (3.17)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{|x|}^\infty 2xt \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx - \int_0^\infty \left(\int_{-t}^t 2xt \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt, \quad (3.18)$$

$$I_3 = - \int_{-\infty}^0 \left(\int_x^{-x} (x^2 + t^2) \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx + \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^{-|t|} (x^2 + t^2) \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt, \quad (3.19)$$

$$I_4 = - \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^{-|x|} 2xt \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx + \int_{-\infty}^0 \left(\int_t^{-t} 2xt \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt. \quad (3.20)$$

²En esta sección I_1 denotará que integramos con respecto a la región I , I_2 que integramos con respecto a la región II , etcétera.

1. Cálculo de la expresión para I_1 .

Denotemos por $I_{1,1}$ la primer integral del lado derecho de (3.17), entonces:

$$I_{1,1} = \int_0^\infty x^2 \left(\int_{-x}^x \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx + \int_0^\infty \left(\int_{-x}^x t^2 \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx. \quad (3.21)$$

Usando en (3.21), el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para la primer integral e integremos por partes la segunda. Entonces:

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_0^\infty x^2 (\phi_t(x, x) - \phi_t(x, -x)) dx + \int_0^\infty [t^2 \phi_t(x, t)]_{-x}^x dx \\ &\quad - \int_0^\infty \left([2t\phi(x, t)]_{-x}^x - 2 \int_{-x}^x \phi(x, t) dt \right) dx \\ &= 2 \int_0^\infty x^2 \phi_t(x, x) dx - 2 \int_0^\infty x^2 \phi_t(x, -x) dx - 2 \int_0^\infty x \phi(x, x) dx \\ &\quad - 2 \int_0^\infty x \phi(x, -x) dx + 2 \int_0^\infty \left(\int_{-x}^x \phi(x, t) dt \right) dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ahora, denotemos por $I_{1,2}$ la segunda integral del lado derecho de (3.17), entonces:

$$I_{1,2} = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{|t|}^\infty x^2 \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt + \int_{-\infty}^\infty t^2 \left(\int_{|t|}^\infty \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt. \quad (3.23)$$

En (3.23) integremos por partes la primer integral y usemos el TFC para la segunda. Entonces:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \int_{-\infty}^\infty \left([x^2 \phi_x(x, t)]_{|t|}^\infty - [2x\phi(x, t)]_{|t|}^\infty + 2 \int_{|t|}^\infty \phi(x, t) dx \right) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty t^2 \left(\phi_x(x, t) \Big|_{|t|}^\infty \right) dt = -2 \int_{-\infty}^\infty t^2 \phi_x(|t|, t) dt \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^\infty |t| \phi(|t|, t) dt + 2 \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{|t|}^\infty \phi(x, t) dx \right) dt. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.22) y (3.24) en (3.17) y notando:

- a) $\int_0^\infty \left(\int_{-x}^x \phi(x, t) dt \right) dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{|t|}^\infty \phi(x, t) dx \right) dt$, pues ambas son integrales de la función $\phi(x, t)$ sobre la región I ,
- b) $\int_{-\infty}^\infty t^2 \phi_x(|t|, t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(-t, t) dt + \int_0^\infty t^2 \phi_x(t, t) dt$,

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi(|t|, t)dt = - \int_{-\infty}^0 t\phi(-t, t)dt + \int_0^{\infty} t\phi(t, t)dt,$$

$$d) \int_0^{\infty} x\phi(x, x)dx = \int_0^{\infty} t\phi(t, t)dt,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^{\infty} x^2\phi_t(x, x)dx - 2 \int_0^{\infty} x^2\phi_t(x, -x)dx - 4 \int_0^{\infty} x\phi(x, x)dx \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} x\phi(x, -x)dx + 2 \int_{-\infty}^0 t^2\phi_x(-t, t)dt \\ &\quad + 2 \int_0^{\infty} t^2\phi_x(t, t)dt + 2 \int_{-\infty}^0 t\phi(-t, t)dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

2. Cálculo de la expresión para I_2 .

Denotemos por $I_{2,1}$ la primer integral del lado derecho de (3.18), entonces, integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \left([t\phi_t(x, t)]_{|x|}^{\infty} - [\phi(x, t)]_{|x|}^{\infty} \right) dx \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} x|x|\phi_t(x, |x|)dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x, |x|)dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ahora, denotando la segunda integral del lado derecho de (3.18) por $I_{2,2}$ e integrandola por partes tenemos:

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= 2 \int_0^{\infty} t \left([x\phi_x(x, t)]_{-t}^t - [\phi(x, t)]_{-t}^t \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} t^2[\phi_x(t, t) + \phi_x(-t, t)]dt - 2 \int_0^{\infty} t[\phi(t, t) - \phi(-t, t)]dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.27) en (3.18) y notando:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} x|x|\phi_t(x, |x|)dx = - \int_{-\infty}^0 x^2\phi_t(x, -x)dx + \int_0^{\infty} x^2\phi_t(x, x)dx,$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x, |x|)dx = \int_{-\infty}^0 x\phi(x, -x)dx + \int_0^{\infty} x\phi(x, x)dx,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_{-\infty}^0 x^2\phi_t(x, -x)dx - 2 \int_0^{\infty} x^2\phi_t(x, x)dx + 2 \int_{-\infty}^0 x\phi(x, -x)dx \\ &\quad + 4 \int_0^{\infty} x\phi(x, x)dx - 2 \int_0^{\infty} t^2\phi_x(t, t)dt \\ &\quad - 2 \int_0^{\infty} t^2\phi_x(-t, t)dt - 2 \int_0^{\infty} t\phi(-t, t)dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3. Cálculo de la expresión para I_3 .

Denotemos por $I_{3,1}$, la primera integral de lado derecho de (3.19), entonces:

$$I_{3,1} = \int_{-\infty}^0 x^2 \left(\int_x^{-x} \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx + \int_{-\infty}^0 \left(\int_x^{-x} t^2 \phi_{tt}(x, t) dt \right) dx. \quad (3.29)$$

Usando en (3.29), el TFC para la primer integral e integrando por partes la segunda, tenemos:

$$\begin{aligned} I_{3,1} &= \int_{-\infty}^0 \left([t^2 \phi_t(x, t)]_x^{-x} - [2t\phi(x, t)]_x^{-x} + 2 \int_x^{-x} \phi(x, t) dt \right) dx \\ &+ \int_{-\infty}^0 x^2 (\phi_t(x, t)|_x^{-x}) dx = 2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, -x) dx - 2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, x) dx \\ &+ 2 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, -x) dx + 2 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, x) dx + 2 \int_{-\infty}^0 \left(\int_x^{-x} \phi(x, t) dt \right) dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ahora, denotemos por $I_{3,2}$ la segunda integral de lado derecho de (3.19). Entonces:

$$\begin{aligned} I_{3,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-|t|} x^2 \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt + \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\int_{-\infty}^{-|t|} \phi_{xx}(x, t) dx \right) dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \phi_x(-|t|, t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |t| \phi(-|t|, t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-|t|} \phi(x, t) dx \right) dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sustituyendo las expresiones (3.30) y (3.31) en (3.19), y notando

- a) $\int_{-\infty}^0 \left(\int_x^{-x} \phi(x, t) dt \right) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-|t|} \phi(x, t) dx \right) dt$, ya que ambas son integrales de la función $\phi(x, t)$ sobre la región III,
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \phi_x(-|t|, t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(t, t) dt + \int_0^{\infty} t^2 \phi_x(-t, t) dt$,
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \phi(-|t|, t) dt = - \int_{-\infty}^0 t \phi(t, t) dt + \int_0^{\infty} t \phi(-t, t) dt$,

tenemos:

$$\begin{aligned} I_3 &= -2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, -x) dx + 2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, x) dx - 2 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, -x) dx \\ &- 4 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, x) dx + 2 \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(t, t) dt \\ &+ 2 \int_0^{\infty} t^2 \phi_x(-t, t) dt + 2 \int_0^{\infty} t \phi(-t, t) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

4. Cálculo de la expresión para I_4 .

Calculando la expresión (3.20), similarmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= -2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, x) dx + 2 \int_0^{\infty} x^2 \phi_t(x, -x) + 4 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, x) dx \\
 &+ 2 \int_0^{\infty} x \phi(x, -x) dx - 2 \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(-t, t) dt \\
 &- 2 \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(t, t) dt - 2 \int_{-\infty}^0 t \phi(-t, t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sumando las expresiones (3.25) y (3.28) tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= -2 \int_0^{\infty} x^2 \phi_t(x, -x) dx - 2 \int_0^{\infty} x \phi(x, -x) dx + 2 \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(-t, t) dt \\
 &+ 2 \int_{-\infty}^0 t \phi(-t, t) dt + 2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, -x) dx \\
 &+ 2 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, -x) dx - 2 \int_0^{\infty} t^2 \phi_x(-t, t) dt - 2 \int_0^{\infty} t \phi(-t, t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sumando las expresiones (3.32) y (3.33) tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_3 + I_4 &= -2 \int_{-\infty}^0 x^2 \phi_t(x, -x) dx - 2 \int_{-\infty}^0 x \phi(x, -x) dx + 2 \int_0^{\infty} t^2 \phi_x(-t, t) dt \\
 &+ 2 \int_0^{\infty} t \phi(-t, t) dt + 2 \int_0^{\infty} x^2 \phi_t(x, -x) \\
 &+ 2 \int_0^{\infty} x \phi(x, -x) dx - 2 \int_{-\infty}^0 t^2 \phi_x(-t, t) dt - 2 \int_{-\infty}^0 t \phi(-t, t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Sumando (3.34) y (3.35) obtenemos (3.15) y la Proposición 3.1.2 queda demostrada.

■

Observación 6 *Si alguna función satisface la ecuación de D'Alembert en \mathbb{R}^2 (en cualquier sentido), entonces esta función satisface la misma ecuación en cualquier dominio de \mathbb{R}^2 .*

Generalización al caso de la función φ arbitraria

Generalizaremos ahora el resultado de la sección anterior a cualquier φ . Consideremos en lugar de la función $\varphi(x) = x^2$, $x \geq 0$, una función $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ con la condición $\varphi(0) = 0$. Después, extendemos ésta función de manera impar a todo

\mathbb{R} , similarmente a (3.7), obteniendo una función $\Phi(x)$, que pertenece a $C^1(\mathbb{R})$ y, en general, no pertenece a $C^2(\mathbb{R})$. Demostraremos que $\Phi(x - ct)$ satisface la ecuación de onda en el sentido débil.

Lema 3.1.1 Sea $\varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$,

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.36)$$

y

$$\Phi(\xi) := \begin{cases} \varphi(\xi), & \xi > 0 \\ -\varphi(-\xi), & \xi < 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Entonces $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$.

Demostración. Ya que $\varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$, entonces $\Phi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ por (3.37) y, por lo tanto, es suficiente demostrar que $\Phi'(\xi)$ en $\xi = 0$, existe y es continua.

Como $\varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, podemos diferenciar (3.37) y obtener:

$$\Phi'(\xi) = \begin{cases} \varphi'(\xi), & \xi > 0 \\ \varphi'(-\xi), & \xi < 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Las expresión (3.38) implica

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \Phi'(\xi) = \varphi'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \Phi'(\xi), \quad (3.39)$$

Por otro lado, la derivada en $\xi = 0$ efectivamente existe, pues, usando (3.37) obtenemos:

$$\Phi'_+(0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} = \varphi'(0), \quad (3.40)$$

ya que $\varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$, y

$$\Phi'_-(0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{-\varphi(-\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} = \lim_{-\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(-\epsilon) - \varphi(0)}{-\epsilon} = \varphi'(0). \quad (3.41)$$

Por lo tanto, $\Phi'_+(0) = \Phi'_-(0) = \varphi'(0)$ y tomando en cuenta (3.39), obtenemos la afirmación. \blacksquare

Lema 3.1.2 Sea $\varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, tal que (3.36) se satisface y Φ es definida por (3.37). Entonces, $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y en general no pertenece a $C^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $\varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, podemos diferenciar (3.37) dos veces y obtener:

$$\Phi''(\xi) = \begin{cases} \varphi''(\xi) & \text{si } \xi > 0 \\ -\varphi''(-\xi) & \text{si } \xi < 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Esto implica que $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \setminus 0)$. Además,

$$\varphi''(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \Phi''(\xi) \neq \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \Phi''(\xi) = -\varphi''(0). \quad (3.43)$$

Ya que, en general, $\varphi''(0) \neq 0$, entonces $\Phi''(\xi)$ no es continua en \mathbb{R} . ■

Lema 3.1.3 *Supongase que las condiciones del Lema 3.1.2 se satisfacen. Entonces, $\Phi(x - ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en el sentido débil*

Demostración. Demostraremos que para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - ct)[\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)] dx dt = 0. \quad (3.44)$$

Dividamos el plano en dos regiones:

$$\Pi_+ := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > ct\} \quad \text{y} \quad \Pi_- := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x < ct\}. \quad (3.45)$$

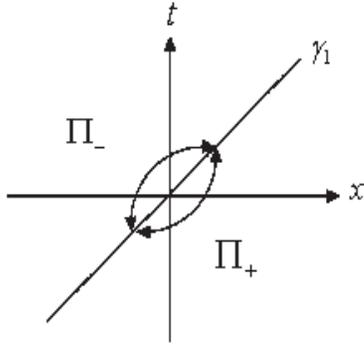


Figura 5

Entonces, por (3.37) y (3.45) tenemos:

$$\Phi(x - ct)|_{\Pi_+} = \varphi(x - ct), \quad (3.46)$$

$$\Phi(x - ct)|_{\Pi_-} = -\varphi(ct - x),$$

y así, separando la integral dada por la parte izquierda de (3.44), tenemos:

$$I = I_+ + I_-, \quad (3.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_+ &:= \int_{\Pi_+} \Phi(x - ct)[\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)] dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{c}} \varphi(x - ct)\phi_{tt}(x, t) dt \right) dx - c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{ct}^{\infty} \varphi(x - ct)\phi_{xx}(x, t) dt \right) dx, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} I_- &:= \int_{\Pi_-} \Phi(x - ct)[\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)] dx dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} \varphi(ct - x)\phi_{tt}(x, t) dt \right) dx + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{ct} \varphi(ct - x)\phi_{xx}(x, t) dt \right) dx, \end{aligned} \quad (3.49)$$

Integrando por partes la expresión (3.48), usando (3.36), $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, y notando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{c}} \varphi''(x-ct)\phi(x,t)dt \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{ct}^{\infty} \varphi''(x-ct)\phi(x,t)dx \right) dt, \quad (3.50)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x-ct)]\phi_t(x,t) \Big|_{-\infty}^{\frac{x}{c}} dx + c \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(x-ct)\phi(x,t)] \Big|_{-\infty}^{\frac{x}{c}} dx \\ &\quad - c^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x-ct)]\phi_t(x,t) \Big|_{ct}^{\infty} dt + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(x-ct)\phi(x,t)] \Big|_{ct}^{\infty} dt \quad (3.51) \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(0)\phi(x, \frac{x}{c})dx - c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(0)\phi(ct, t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes la expresión (3.49), usando (3.36), $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, y notando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} \varphi''(ct-x)\phi(x,t)dt \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{ct} \varphi''(ct-x)\phi(x,t)dx \right) dt, \quad (3.52)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} I_- &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(ct-x)]\phi_t(x,t) \Big|_{\frac{x}{c}}^{\infty} dx + c \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(ct-x)\phi(x,t)] \Big|_{\frac{x}{c}}^{\infty} dx \\ &\quad + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(ct-x)]\phi_t(x,t) \Big|_{-\infty}^{ct} dt + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(x-ct)\phi(x,t)] \Big|_{-\infty}^{ct} dt \quad (3.53) \\ &= -c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(0)\phi(x, \frac{x}{c})dx + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(0)\phi(ct, t)dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.51) y (3.53) en (3.47) obtenemos (3.44). ■

Lema 3.1.4 *Sean las condiciones del Lema 3.1.2 satisfechas. Entonces $\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 en el sentido débil.*

Demostración. El Lema 3.1.3 y la Observación 6, implican que $\Phi(x-ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 en el sentido débil.

Por (3.37), $\Phi(x+ct) = \varphi(x+ct)$ en \mathbb{R}_+^2 , ya que $x+ct > 0$ para $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, y como $\varphi(x+ct) \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$, entonces $\Phi(x+ct) \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$. Por lo tanto, podemos diferenciar dos veces $\Phi(x+ct)$ con respecto a x y t , y obtener:

$$\Phi_{tt}(x+ct) - c^2\Phi_{xx}(x+ct) = c^2\varphi''(x+ct) - c^2\varphi''(x+ct) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (3.54)$$

Ya que cada solución clásica en cualquier región es la solución débil (ver Observación 5), tenemos que $\Phi(x + ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 en el sentido débil.

Por linealidad de la ecuación de onda, $\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 en el sentido débil y el lema está demostrado. ■

3.2. Solución débil del problema mixto

En esta sección aplicaremos resultados de la sección anterior. Consideremos el problema de Cauchy mixto para la propagación de una onda en la semirrecta $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,

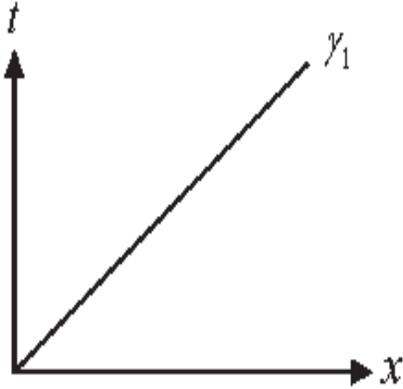


Figura 6.

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & (x, t) &\in \mathbb{R}_+^2, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & x &\in \mathbb{R}_+, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & x &\in \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= 0, & t &\in \overline{\mathbb{R}_+}. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

A diferencia con (2.1), (2.6) consideramos aquí $t \geq 0$. La última condición en (3.55) quiere decir que la cuerda tiene extremo izquierdo fijo y es llamada *condición de frontera*. Este método de solución es llamado *método de imágenes*. Usaremos la fórmula de D'Alembert para el problema (2.1), (2.6), definiendo extensiones impares de φ y ψ a todo \mathbb{R} , en la forma:

$$\Phi(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) := \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Teorema 3.1 Sea $\varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ y $\psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$,

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (3.57)$$

Entonces la función

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy, & 0 \leq t < \frac{x}{c}, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy, & t > \frac{x}{c} \geq 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

satisface (3.55) en el sentido débil y pertenece a $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma_1)$.

Demostración. Consideremos el problema de Cauchy para la línea entera \mathbb{R}

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= \Phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

con Φ y Ψ dadas por (3.56). Notemos que $\Phi, \Psi \in C^1(\mathbb{R})$, por el Lema 3.1.1. Intentaremos escribir la solución de (3.59) en la forma de D'Alembert (2.7). Esta fórmula se obtuvo con las suposiciones que las condiciones iniciales φ y ψ pertenecen a $C^1(\mathbb{R})$ y $C^2(\mathbb{R})$, respectivamente. En este caso u fue la solución clásica del problema de Cauchy. En el problema de Cauchy (3.59), Φ y Ψ no pertenecen a estos casos, pero usaremos esta fórmula, la cual tiene sentido para $\Phi, \Psi \in C^1(\mathbb{R})$. No esperamos que en este caso u pertenezca a $C^2(\mathbb{R}^2)$, entonces no será la solución clásica; pero demostraremos que u va a ser la solución débil. Por lo tanto escribiremos u en esta forma como:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y) dy, \quad (3.60)$$

y demostraremos que u satisface (3.59), pero en el sentido débil (en el sentido clásico u no satisface (3.59) por que en general (vease Lema 3.1.2), $u \notin C^2(\mathbb{R}^2)$).

1. Demostremos que (3.60) coincide con (3.58) en \mathbb{R}_+^2 . Para eso, dividimos el plano en cuatro regiones limitadas por las características $\gamma_1 := \{(x, t) : x = ct\}$ y $\gamma_2 := \{(x, t) : x = -ct\}$:

$$I := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x + ct \geq 0 \text{ y } x - ct \geq 0\},$$

$$II := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x + ct \geq 0 \text{ y } x - ct \leq 0\},$$

$$III := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x + ct \leq 0 \text{ y } x - ct \leq 0\},$$

$$IV := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x + ct \leq 0 \text{ y } x - ct \geq 0\}.$$

(3.61)

Notemos que estas regiones coinciden con las regiones dadas en (3.9) si $c = 1$. Nos restringiremos a las regiones I y II , pues $(I \cup II) \supset \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Por (3.56) y (3.61) tenemos:

$$\Phi(x - ct)|_I = \varphi(x - ct), \quad \Phi(x + ct)|_I = \varphi(x + ct),$$

$$\Psi(x - ct)|_I = \psi(x - ct), \quad \Psi(x + ct)|_I = \psi(x + ct),$$

$$\Phi(x - ct)|_{II} = -\varphi(ct - x), \quad \Phi(x + ct)|_{II} = \varphi(x + ct),$$

$$\Psi(x - ct)|_{II} = -\psi(ct - x), \quad \Psi(x + ct)|_{II} = \psi(x + ct).$$

(3.62)

Sustituyendo (3.62) en (3.60) encontramos que $u(x, t)|_{\overline{\mathbb{R}_+^2}}$ tiene la forma (3.58).

2. Por Lema 3.1.1 $\Phi, \Psi \in C^1(\mathbb{R})$; por lo tanto, $\Phi(x-ct), \Phi(x+ct)$ y $\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y)dy$ pertenecen a $C^1(\mathbb{R}^2)$. De aquí, por (3.60) $u|_{\overline{\mathbb{R}_+^2}} \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$.

Por otro lado $\Phi(x+ct) \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ (vease la demostración del Lema 3.1.4) y por la Observación 3, $\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y)dy \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$. Por último, $\Phi(x-ct) \in C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma_1)$ por que $\Phi(\xi) \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, por el Lema 3.1.2.

3. Ahora demostraremos que la expresión (3.60) satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 , en el sentido débil. En efecto, por el Lema 3.1.4 tenemos que $\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)$ satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 , en el sentido débil. Por otro lado, de las Observaciones 3, 5 y 6 tenemos que $\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y)dy$, también satisface la ecuación de D'Alembert (3.5) en \mathbb{R}_+^2 , en el sentido débil.
4. Por último, verificaremos que la expresión (3.58) satisface las condiciones iniciales y de frontera dadas en (3.55). En efecto, si $x > 0$, (3.58) implica:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(x)) = \varphi(x). \quad (3.63)$$

Diferenciando (3.58) con respecto a t obtenemos:

$$u_t(x, t) = \begin{cases} \frac{c}{2}[\varphi'(x+ct) - \varphi'(x-ct)] + \frac{1}{2}[\psi(x+ct) + \psi(x-ct)], & 0 \leq t < \frac{x}{c}, \\ \frac{c}{2}[\varphi'(x+ct) - \varphi'(ct-x)] + \frac{1}{2}[\psi(x+ct) - \psi(ct-x)], & t > \frac{x}{c} \geq 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Por lo tanto si $x > 0$, por (3.64) tenemos:

$$u_t(x, 0) = \frac{c}{2}(\varphi'(x) - \varphi'(x)) + \frac{1}{2}(\psi(x) + \Psi(x)) = \psi(x). \quad (3.65)$$

Por último, de (3.58), concluimos:

$$u(0, t) = \frac{1}{2}(\varphi(ct) - \varphi(ct)) + \frac{1}{2c} \int_{ct}^{ct} \Psi(y)dy = 0. \quad (3.66)$$

Entonces, por (3.63), (3.65) y (3.66) vemos que (3.58) satisface las condiciones iniciales dadas en (3.55). ■

3.3. Unicidad de la solución del problema mixto

En esta sección demostraremos que la solución encontrada es única en un espacio apropiado. Para esto demostramos los siguientes lemas:

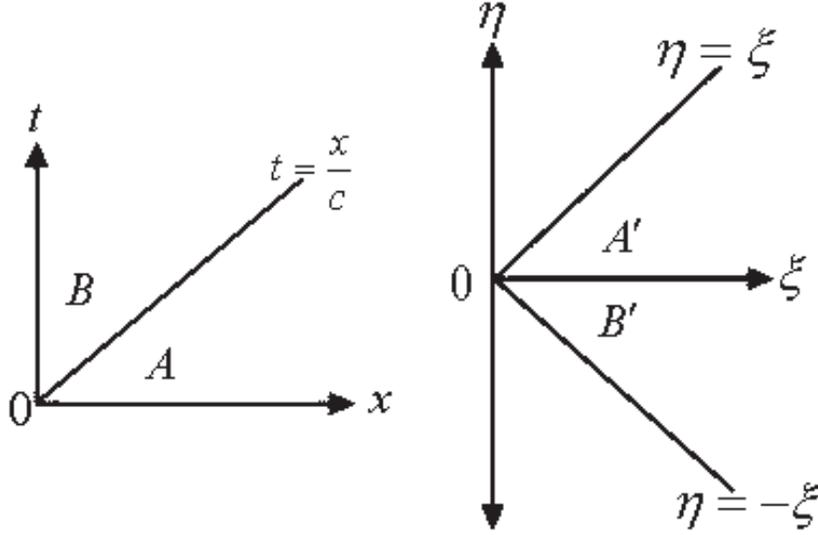


Figura 7

Lema 3.3.1 Sea $u_A(x, t) \in C^2(A) \cap C^1(\bar{A})$ (ver Figura 7) una solución de la ecuación de onda en A . Entonces existen $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ tal que:

$$u_A(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (x, t) \in \bar{A}. \quad (3.67)$$

Demostración. Definimos una transformación lineal no degenerada similarmente a (1.36), dada por:

$$\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct, \quad (3.68)$$

con $(x, t) \in A$. Bajo esta transformación, la región A se transforma en la región $A' := \{(\xi, \eta) : 0 < \eta < \xi\}$. En esta región, la ecuación de onda tiene la forma canónica:

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad (3.69)$$

Notemos que $u(\xi, \eta) \in C^2(A') \cap C^1(\bar{A}')$, ya que $u(x, t) \in C^2(A) \cap C^1(\bar{A})$ y (3.68) es una transformación de la clase C^∞ . Evidentemente (3.69) implica que u_ξ no depende de η , por lo tanto,

$$u_\xi := U(\xi), \quad (3.70)$$

donde $U(\xi) \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$. Integrando (3.70) con respecto a ξ , obtenemos:

$$u_A(\xi, \eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi), \quad (3.71)$$

donde $f_2(\xi) := \int U(\xi) d\xi \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ y la constante de integración con respecto a ξ es, en general, una función de η , entonces también $f_1(\eta) \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ por (3.71). Sustituyendo (3.70) en (3.71) obtenemos (3.67). ■

Es fácil verificar que el recíproco es cierto, es decir, (3.67) satisface la ecuación de onda en A y pertenece a $C^2(A) \cap C^1(\overline{A})$.

Considerando el problema de Cauchy en A enunciamos el siguiente:

Lema 3.3.2 Sean $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Entonces, la única solución del sistema

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in A, \quad c > 0, \quad (3.72)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

en la clase $C^2(A) \cap C^1(\overline{A})$ se expresa por la fórmula

$$u_A(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \quad (3.73)$$

Demostración. Sea $u_A(x, t) \in C^2(A) \cap C^1(\overline{A})$ una solución de la ecuación de onda en A . Entonces, por el Lema 3.3.1 existen funciones $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ tal que $u(x, t)$ admite (3.67).

Determinemos las funciones f_1 y f_2 dadas por (3.67) de modo que se cumplan las condiciones iniciales indicadas en (3.72), es decir:

$$u_A(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (3.74)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} u_A(x, 0) = c f_2'(x) - c f_1'(x) = \psi(x). \quad (3.75)$$

Integrando (3.75) obtenemos:

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + k, \quad (3.76)$$

donde x_0 y k son constantes arbitrarias. Por (3.74) y (3.76) tenemos:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - \frac{k}{2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + \frac{k}{2}. \quad (3.77)$$

Sustituyendo (3.77) en (3.67), obtenemos (3.73). De esta manera demostramos que si $u(x, t)$ satisface (3.72), entonces u necesariamente tiene la forma (3.73), esto implica que u es única solución en A . Es fácil ver que (3.73) satisface el problema (3.72). ■

Lema 3.3.3 Sea $u_B(x, t) \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ (ver Figura 7) una solución de la ecuación de onda en B . Entonces existen $f_1 \in C^2(\mathbb{R}_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_-})$ y $f_2 \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ tales que:

$$u_B(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (x, t) \in \overline{B}. \quad (3.78)$$

Demostración. Definimos una transformación lineal no degenerada similarmente a (1.36), dada por (3.68) con $(x, t) \in B$.

Bajo esta transformación, la región B se transforma en la región $B' := \{(\xi, \eta) : \xi > 0, -\xi < \eta < 0\}$. En esta región, la ecuación de onda tiene la forma canónica:

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0. \quad (3.79)$$

Notemos que $u(\xi, \eta) \in C^2(B') \cap C^1(\overline{B'})$, ya que $u(x, t) \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ y (3.68) es una transformación de la clase C^∞ . Evidentemente (3.79) implica que u_ξ no depende de η , por lo tanto,

$$u_\xi := U(\xi), \quad (3.80)$$

donde $U(\xi) \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$. Integrando (3.80) con respecto a ξ , obtenemos:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi), \quad (3.81)$$

donde $f_2(\xi) := \int U(\xi) d\xi \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ y la constante de integración con respecto a ξ es, en general, una función de η , entonces $f_1(\eta) \in C^2(\mathbb{R}_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_-})$ por (3.71). Sustituyendo (3.68) en (3.81) obtenemos (3.78). ■

Es fácil verificar que el recíproco es cierto, es decir, (3.78) satisface la ecuación de onda en B y pertenece a $C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$.

Considerando el problema de Cauchy en B enunciamos el siguiente:

Lema 3.3.4 Sean φ, ψ tales que las condiciones del Teorema 3.1 se satisfacen y $u_A(x, t)$ se determina por (3.73). Entonces, la única solución del sistema

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) &= 0, & (x, t) \in B, \\ u(0, t) &= 0, & t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \\ u|_{\gamma_1} &= u_A|_{\gamma_1}, & \gamma_1 := \{(x, t) : t = \frac{x}{c}\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

en la clase $C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ se expresa por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy. \quad (3.83)$$

Demostración. Sea $u_B(x, t) \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ una solución de la ecuación de onda en B . Entonces, por el Lema 3.3.3 existen funciones $f_1 \in C^2(\mathbb{R}_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_-})$ y $f_2 \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ tales que $u_B(x, t)$ admite (3.78). Por lo tanto, de (3.78) y la condición de frontera en (3.82) tenemos:

$$0 = u(0, t) = f_1(-ct) + f_2(ct). \quad (3.84)$$

Entonces, tomando $\xi := ct$ en (3.84) tenemos:

$$f_2(\xi) = -f_1(-\xi), \quad \xi \geq 0. \quad (3.85)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.85) en (3.78) tenemos:

$$u_B(x, t) = f_1(x - ct) - f_1(-x - ct). \quad (3.86)$$

Como $u|_{\gamma_1} = u_A|_{\gamma_1}$, por (3.82); las expresiones (3.73) y (3.86) implican:

$$u_A(x, \frac{x}{c}) = \frac{1}{2} [\varphi(2x) + \varphi(0)] + \frac{1}{2c} \int_0^{2x} \psi(y) dy = f_1(0) - f_1(-2x) = u_B(x, \frac{x}{c}). \quad (3.87)$$

Usando (3.57) y tomando $\xi := 2x$ en (3.87) tenemos:

$$f_1(-\xi) = f_1(0) - \frac{1}{2} \varphi(\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^\xi \psi(y) dy, \quad \xi \geq 0. \quad (3.88)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.88) en (3.86) tenemos (3.83). De esta manera demostramos que si $u(x, t)$ satisface (3.82), entonces u necesariamente tiene la forma (3.83), esto implica que u es única solución en B . ■

Teorema 3.2 (De unicidad) Sean φ, ψ tales que se satisfacen las condiciones del Teorema 3.1. Entonces, el problema (3.55) tiene a lo más una solución en $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma_1)$.

Demostración. Sea $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma_1)$ una función que satisface el problema (3.55). Entonces $u(x, t)|_A = u_A(x, t)$ es única por el Lema 3.3.2, mientras que $u(x, t)|_B = u_B(x, t)$ es única por el Lema 3.3.4. Por lo tanto, dado que $u_A(x, t) = u_B(x, t)$ sobre la característica γ_1 , concluimos que $u(x, t)$ es única en $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma_1)$. ■

Observación 7 Aún en esta sección nuestra meta no fue obtener la solución del problema 3.55, sino solamente demostrar la unicidad, vemos que las fórmulas (3.73) y (3.83) coinciden con las fórmulas (3.58). Por lo tanto, realmente hemos dado otro método para obtener las soluciones del problema (3.55).

Capítulo 4

Problema de Cauchy en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

4.1. Método de promediación

La experiencia física de que las ondas se propagan esféricamente, sugirió a Poisson el llamado *método de promediación* para resolver el *problema de Cauchy* de la ecuación de onda en tres dimensiones:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (4.1)$$

donde: $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+}$, $c > 0$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Este método consiste en buscar una expresión de la solución que permita usar la fórmula de D'Alembert de la ecuación de onda en una dimensión (vease el Teorema 2.1):

$$u(x, t) = A\left(t + \frac{x}{c}\right) + B\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (4.2)$$

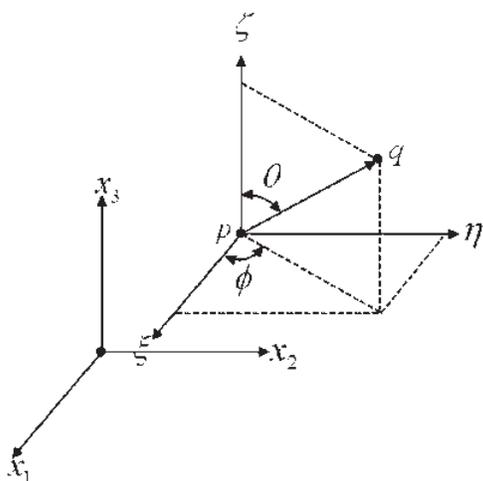


Figura 8

Sean $p = (x_1, x_2, x_3)$, $q = (\xi, \eta, \zeta)$ un punto fijo y uno variable, respectivamente. Introduzcamos el sistema esférico de coordenadas con centro en el punto p (ver Figura 8):

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 + \alpha\rho, \\ \eta &= x_2 + \beta\rho, \\ \zeta &= x_3 + \gamma\rho, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde: $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$; y, $\alpha = \cos \phi \sin \theta$, $\beta = \sin \phi \sin \theta$, $\gamma = \cos \theta$. Con esta notación $q = q(\rho, \theta, \phi) := q(\rho, \omega)$, con $\omega := \omega(\theta, \phi)$.

Sea $B_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^3 : \|q - p\| \leq r\}$ y $S_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^3 : \|q - p\| = r\}$ la bola y esfera de radio r y centro p , respectivamente. Para cada t , si $p \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, el valor promedio de $u(q, t)$ sobre $S_r(p)$ es:

$$v(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(p)} u(r, \omega, t) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(p)} u(r, \omega, t) d\Omega, \quad (4.4)$$

donde: $dS = r^2 d\Omega$.

Observación 8 Sea $u \in C(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$, entonces $u(r, \omega, t) \rightarrow u(p, t)$ cuando $r \rightarrow 0$. Por lo tanto, $v(r, t) \rightarrow u(p, t)$ cuando $r \rightarrow 0$.

En efecto, cuando $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} v(r, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(p)} u(r, \omega, t) d\Omega \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(p)} u(p, t) d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} u(p, t) \int_{S_1(p)} d\Omega = u(p, t). \blacksquare \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sea D es una región acotada¹ con frontera ∂D , $F \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ un campo vectorial (mapeo diferenciable $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$) sobre D y asumamos que el Teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_D \operatorname{div} F dV = \int_{\partial D} F \cdot \nu dS \quad (4.6)$$

es válido en D . Las regiones para las cuales es válido el Teorema de la divergencia de Gauss son llamadas *regiones normales*². Suponiendo que $F := \nabla u$, $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, obtenemos:

$$\int_D \Delta u dV = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \quad (4.7)$$

ya que $\Delta u := \operatorname{div}(\nabla u)$. La relación (4.7) es conocida como *tercer identidad de Green*, respectivamente.

Lema 4.1.1 Sea $u(q, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$ una solución de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 , entonces $v(r, t)$ definida por (4.4) es solución de onda con simetría esférica:

$$r^2 v_{tt}(r, t) = c^2 (r^2 v_r(r, t))_r, \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.8)$$

Demostración. Sea $u(q, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$ una solución de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 (ver (4.1)). Entonces, integrando la ecuación de onda sobre la bola $B_r(p)$ tenemos:

$$\int_{B_r(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) dV = c^2 \int_{B_r(p)} \Delta u(\rho, \omega, t) dV. \quad (4.9)$$

¹La restricción a la región acotada no es esencialmente una regla, pero evita la necesidad de emplear hipótesis especiales sobre el comportamiento en el infinito.

²Entre las regiones normales están incluidas bolas, elipsoides sólidos, conos, etc.

Dado que $dV := \rho^2 d\Omega d\rho = dS d\rho$; la integral del lado izquierdo de (4.9) puede ser escrita en la forma:

$$\int_{B_r(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) dV = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{S_1(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) d\Omega. \quad (4.10)$$

La parte derecha de (4.10) es integrable con respecto a r , por el Teorema de Newton-Leibnitz y por que $\int_{S_1(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) d\Omega$ es continua con respecto de ρ . Esto implica que la parte izquierda de (4.10) también tiene derivada con respecto de r . Por lo tanto, diferenciando (4.10) con respecto a r y usando el Teorema de la diferenciación con respecto del límite superior de la integral, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) dV = r^2 \int_{S_1(p)} u_{tt}(r, \omega, t) d\Omega. \quad (4.11)$$

Consideremos $v(r, t)$ definida por (4.4). Ya que $u(q, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$, entonces

$$v(r, t) \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}). \quad (4.12)$$

Diferenciando (4.4) dos veces con respecto a t (es posible por (4.12)), tenemos:

$$v_{tt}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(p)} u_{tt}(r, \omega, t) d\Omega. \quad (4.13)$$

Por lo tanto, de (4.11) y (4.13) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r(p)} u_{tt}(\rho, \omega, t) dV = 4\pi r^2 v_{tt}(r, t). \quad (4.14)$$

Ahora, usando (4.7) para $B_r(p)$ y $S_r(p)$ tenemos:

$$\int_{B_r(p)} \Delta u(\rho, \omega, t) dV = \int_{S_r(p)} \frac{\partial u(r, \omega, t)}{\partial r} dS = r^2 \int_{S_1(p)} \frac{\partial u(r, \omega, t)}{\partial r} d\Omega, \quad (4.15)$$

donde: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, ya que la normal exterior ν a $S_r(p)$ tiene la misma dirección e igual sentido que el radio r .

Ya que $u \in C^2$ y la última integral en la parte derecha de (4.15) converge (pues, $\frac{\partial u}{\partial \xi} \in C^1(\mathbb{R}^3)$), por el Teorema de derivación bajo el signo de la integral tenemos:

$$\int_{S_1(p)} \frac{\partial u(r, \omega, t)}{\partial r} d\Omega = \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_1(p)} u(r, \omega, t) d\Omega. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.16) en (4.15) tenemos:

$$\int_{B_r(p)} \Delta u(\rho, \omega, t) dV = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_1(p)} u(r, \omega, t) d\Omega. \quad (4.17)$$

Por otro lado, diferenciando (4.4) con respecto a r (es posible por (4.12)) tenemos:

$$v_r(r, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S_1(p)} u(r, \omega, t) d\Omega, \quad (4.18)$$

por lo tanto, sustituyendo (4.18) en (4.17) tenemos:

$$\int_{B_r(p)} \Delta u(\rho, \omega, t) dV = 4\pi r^2 v_r(r, t). \quad (4.19)$$

La parte derecha de (4.19) tiene derivada continua con respecto de r , por (4.12); por lo tanto, la parte izquierda también tiene derivada continua con respecto de r . Así, diferenciando (4.19) con respecto a r tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r(p)} \Delta u(\rho, \omega, t) dV = 4\pi (r^2 v_r(r, t))_r. \quad (4.20)$$

Las identidades (4.14), (4.20) y (4.9) implican (4.8). ■

Usando el resultado anterior, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *Sea $u(q, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$ una solución del problema de Cauchy (4.1). Entonces $u(p, t)$ admite una representación integral*

$$u(p, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(p)} \frac{\varphi(q)}{t} dS + \int_{S_{ct}(p)} \frac{\psi(q)}{t} dS \right), \quad (4.21)$$

para cualquier punto $p \in \mathbb{R}^3$.

Demostración. Por el Lema 4.1.1, si $u(q, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \overline{\mathbb{R}_+})$ es una solución de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 , entonces $v(r, t)$ es solución de la ecuación de onda (4.8). Por lo tanto, usando las identidades

$$(rv)_r = rv_r + v, \quad (rv)_{rr} = rv_{rr} + 2v_r,$$

en (4.8) obtenemos:

$$rv_{tt} = c^2(rv)_{rr}, \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.22)$$

Haciendo

$$w(r, t) := rv(r, t), \quad (4.23)$$

en (4.22) obtenemos:

$$w_{tt}(r, t) = c^2 w_{rr}(r, t), \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.24)$$

Notemos que (4.12) y (4.23) implican $w(r, t) \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+})$. Similarmente a (4.2), la ecuación (4.24) tiene solución en la forma:

$$w(r, t) = F\left(t + \frac{r}{c}\right) + G\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (4.25)$$

donde $F, G \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, o bien, usando (4.23) en (4.25) tenemos:

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \left[F \left(t + \frac{r}{c} \right) + G \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.26)$$

En $r = 0$, por (4.23) y (4.25) obtenemos:

$$0 = w(0, t) = F(t) + G(t). \quad (4.27)$$

Por lo tanto,

$$G(t) = -F(t), \quad t \geq 0. \quad (4.28)$$

Sustituyendo ésta expresión en (4.26) obtenemos

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \left[F \left(t + \frac{r}{c} \right) - F \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.29)$$

Cuando $r \rightarrow 0$, la parte derecha de (4.29) tiende a $\frac{2}{c} F'(t)$. La parte izquierda tiende a $u(p, t)$ por (4.5). De este modo obtenemos la identidad

$$u(p, t) = \frac{2}{c} F'(t). \quad (4.30)$$

Por otro lado, dado que $u(q, t)$ es solución del problema de Cauchy (4.1), por (4.4) y (4.23) tenemos:

$$v(r, 0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(p)} \varphi(q) dS \quad \text{y} \quad w(r, 0) = r v_t(r, 0), \quad (4.31)$$

respectivamente. Así (4.31) implica:

$$w(r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(p)} \varphi(q) dS. \quad (4.32)$$

Más aun, diferenciando (4.4) y (4.23) con respecto a t obtenemos:

$$v_t(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(p)} u_t(r, \omega, t) dS \quad \text{y} \quad w_t(r, t) = r v_{tt}(r, t), \quad (4.33)$$

respectivamente. Nuevamente, como $u(q, t)$ es solución del problema de Cauchy (4.1), por (4.33) tenemos:

$$w_t(r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(p)} \psi(q) dS. \quad (4.34)$$

Finalmente, por (4.25) y (4.29) tenemos:

$$w(r, t) = \left[F \left(t + \frac{r}{c} \right) - F \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.35)$$

Por lo tanto, en $t = 0$ obtenemos:

$$w(r, 0) = F\left(\frac{r}{c}\right) - F\left(-\frac{r}{c}\right). \quad (4.36)$$

Así, diferenciando (4.36) con respecto de r tenemos:

$$w_r(r, 0) = \frac{1}{c} \left[F'\left(\frac{r}{c}\right) + F'\left(-\frac{r}{c}\right) \right]. \quad (4.37)$$

Por otro lado, diferenciando (4.35) con respecto de t obtenemos:

$$w_t(r, t) = \left[F'\left(t + \frac{r}{c}\right) - F'\left(t - \frac{r}{c}\right) \right]. \quad (4.38)$$

Por lo tanto, en $t = 0$ obtenemos:

$$w_t(r, 0) = \left[F'\left(\frac{r}{c}\right) - F'\left(-\frac{r}{c}\right) \right]. \quad (4.39)$$

Entonces, por (4.37) y (4.39) obtenemos:

$$\frac{2}{c} F'\left(\frac{r}{c}\right) = w_r(r, 0) + \frac{1}{c} w_t(r, 0). \quad (4.40)$$

Sustituyendo (4.32) y (4.34) en (4.40) obtenemos:

$$\frac{2}{c} F'\left(\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int_{S_r(p)} \varphi(q) dS \right) + \frac{1}{cr} \int_{S_r(p)} \psi(q) dS \right]. \quad (4.41)$$

Haciendo $r = ct$ (esto implica $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$) en la ecuación (4.41) obtenemos:

$$\frac{2}{c} F'(t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{S_{ct}(p)} \varphi(q) dS \right) + \frac{1}{t} \int_{S_{ct}(p)} \psi(q) dS \right]. \quad (4.42)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.42) en (4.30) obtenemos (4.21). ■

4.2. Método de Descenso

Una vez resuelto el problema de Cauchy para la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 , obtendremos fórmulas explícitas para la solución del problema de Cauchy en \mathbb{R}^2 :

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x_1, x_2, t) &= c^2 \Delta u(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2, t) &\in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ u(x_1, x_2, 0) &= \phi(x_1, x_2), & u_t(x_1, x_2, 0) &= \psi(x_1, x_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

donde $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. La idea (debida a Hadamard) para obtener la solución en \mathbb{R}^2 es considerar los datos iniciales dados en (4.43) como funciones definidas en $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ independientes de x_3 y utilizar la solución (4.21) de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 .

Observación 9 Si las funciones φ y ψ no dependen de x_3 , entonces (4.21) implica que u no depende de x_3 (es suficiente hacer el cambio de variable $q \leftrightarrow q + (0, 0, c)$). Por lo tanto, u será solución del problema de Cauchy (4.43).

Observación 10 Dado que φ y ψ dependen solamente de x_1 y x_2 , podemos proyectar $S_{ct}(p)$ sobre $C_{ct}(p)$ (ver Figura 9). Mas aún, $S_{ct}(p)$ consta de $\hat{S}_{ct}(p)$ (semiesfera superior) y $\hat{S}_{ct}(p)$ (semiesfera inferior); y ambas superficies pueden ser proyectadas sobre $C_{ct}(p)$ conduciendo al mismo resultado.

Teorema 4.2 Sea $u(p, t) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ una solución del problema de Cauchy (4.43). Entonces $u(p, t)$ admite una representación integral

$$u(p, t) = \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_{ct}(p)} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\zeta} + \int_{C_{ct}(p)} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\zeta} \right), \quad (4.44)$$

para cualquier punto $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, donde $\zeta = \sqrt{(ct)^2 - (\xi - x_1)^2 - (\eta - x_2)^2}$.

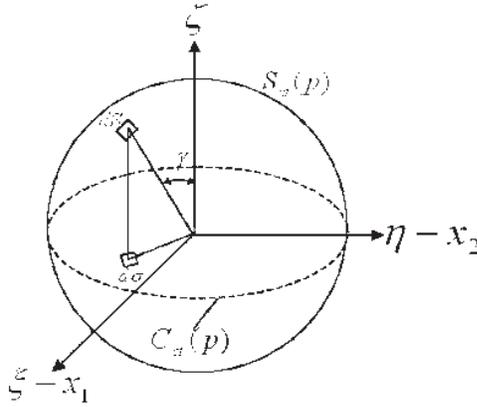


Figura 9

Por lo tanto, tomando en cuenta la Observación 10 y sustituyendo las expresiones (4.45) y (4.46) en (4.21) obtenemos (4.44). ■

Demostración. Sea p un punto en el plano $x_3 = 0$, dS un elemento de superficie y $C_{ct}(p)$ la proyección de la esfera $S_{ct}(p)$ sobre el plano $x_3 = 0$ (ver Figura 9). Entonces:

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos \gamma} = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma}, \quad (4.45)$$

donde:

$$\cos \gamma = \frac{\zeta}{ct}, \quad (4.46)$$

$$\zeta = \sqrt{(ct)^2 - (\xi - x_1)^2 - (\eta - x_2)^2}.$$

Apéndice A

A.1. Ejemplo de una función prueba

Una función prueba que es positiva en una vecindad de $y \in \mathbb{R}^n$ e igual a cero fuera de ésta, es dada explícitamente por:

$$\phi_{y,\epsilon}(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x - y|^2}\right), & |x - y| < \epsilon \\ 0, & |x - y| \geq \epsilon. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde $|z|^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demostraremos que la función dada por (A.1) es efectivamente una función prueba, considerando sin pérdida de generalidad, $\epsilon = 1$ y $y = 0$. Verificaremos que en una vecindad de 0, $\phi_{0,0}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.1 *La función*

$$\phi(x) := \phi_{0,0}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar el Teorema A.1 nos auxiliaremos del siguiente

Lema A.1 *Existe un polinomio $P(x)$ y $N \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que*

$$\partial^\alpha \exp\left(-\frac{1}{1 - \|x\|^2}\right) = \frac{P(x)}{(1 - \|x\|^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{1 - \|x\|^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

donde $\alpha \in \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0}_{n \text{ veces}}$, y $\partial^\alpha := \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_{x_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \dots \partial_{x_1}^{\alpha_1}$.

Demostración. Usaremos el método de la inducción matemática. Para $\alpha = 0$ es evidente, pues, es la función misma y $P \equiv 1$, $N \equiv 0$. Para $\alpha = (0, \dots, \underbrace{1}_k, \dots, 0)$,

$\partial^\alpha = \partial_{x_k}$ y derivando $\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)$ con respecto a x_k tenemos

$$\partial_{x_k} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) = \frac{-2x_k}{(1-|x|^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right). \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto (A.3) se cumple para α con $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

Supongamos que (A.3) se cumple para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)$ y demostremos que (A.3) se cumple para $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_k + 1, \dots, \alpha_n)$.

Derivando $\frac{P(x)}{(1-|x|^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)$ con respecto a x_k tenemos

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} \left[\frac{P(x)}{(1-|x|^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \right] &= \frac{P_1(x)}{(1-|x|^2)^{N_1}} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \\ &+ \frac{P_2(x)}{(1-|x|^2)^{N_2}} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \\ &= \frac{P_3(x)}{(1-|x|^2)^{N_3}} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= 2N, \\ P_1(x) &= (1-|x|^2)^N \partial_{x_k} P(x) - P(x)[N((1-|x|^2)^{N-1})(-2x_k)], \\ N_2 &= N + 2, \\ P_2(x) &= -2x_k P(x), \\ N_3 &= N_1 + N_2, \\ P_3(x) &= P_1(x)(1-|x|^2)^{N_2} + P_2(x)(1-|x|^2)^{N_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Demostración del Teorema A.1. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, con $|a| = 1$ arbitrario. Demostraremos que para $\alpha \in \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{x \rightarrow a, |x| < 1} \partial^\alpha \phi(x) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Por el Lema A.1 es suficiente mostrar

$$\lim_{x \rightarrow a, |x| < 1} \left[\frac{P(x)}{(1 - |x|^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \right] \rightarrow 0. \quad (\text{A.8})$$

Ya que $P(x) \rightarrow P(a)$, cuando $x \rightarrow a$ y $|x| < 1$; entonces es suficiente demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a, |x| < 1} \frac{\exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right)}{(1 - |x|^2)^N} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Haciendo el cambio de variables

$$t = \frac{1}{1 - |x|^2}, \quad (\text{A.10})$$

en suficiente demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^N}{e^t} \rightarrow 0. \quad (\text{A.11})$$

Esto es cierto por la regla de L'Hopital. ■

Bibliografía

- [1] TIJONOV A. N. y SAMARSKY A. A.: *Ecuaciones de la Física Matemática*, Ed. Mir, Moscú, 1980.
- [2] GUENTHER R. B. y LEE J. W.: *Partial Differential Equations and Integral Equations*, Dover, U.S.A., 1988.
- [3] BITSADZE A. V.: *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [4] RENARDY M. y ROGERS R. C.: *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, U.S.A., 1996.
- [5] WEINBERGGER H. F.: *Curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales con Métodos de Variable Compleja y de Transformaciones Integrales*, Reverté, España, 1970.
- [6] ZACHMANOGLU E. C. y THOE D. W.: *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover, U.S.A., 1991.
- [7] PETROVSKY I. G.: *Lectures on Partial Differential Equations*, Dover, U.S.A., 1986.
- [8] FIGUEROA C. A.: *Curso Básico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A., 1997.

Índice alfabético

- características, 21
- condición de frontera, 35
- derivada parcial débil, 23
- discriminante, 8
- ecuación de onda, 12
 - homogénea, 15
 - no homogénea, 15
- Ecuación Diferencial Parcial (EDP), 6
 - cuasilineal, 7
 - lineal, 7
 - no lineal, 7
 - orden, 6
 - solución, 6
- Fórmula de D'Alembert, 18
- forma canónica, 8
 - elíptica, 9
 - hiperbólica, 8
 - parabólica, 9
- función prueba, 22
 - ejemplo, 22, 49
- método de imágenes, 35
- método de promediación, 42
- parte principal, 8
- plano fase, 20
- problema de Cauchy
 - mixto en la semirrecta, 35
- problema bien planteado, 19
- problema de Cauchy, 16
 - en dos dimensiones, 47
 - en la recta, 17
 - en tres dimensiones, 42
- problema mal planteado, 19
- regiones normales, 43
- solución débil de la ecuación de onda, 23
 - ejemplo, 24
 - generalización, 32
- soporte, 22
- Teorema de la divergencia de Gauss, 43
- tercer identidad de Green, 43
- transformaciones no degeneradas, 8
- triángulo característico, 21