



# Estudios Numéricos de la Ecuación de Onda y Algunas Aplicaciones

Tesis

para obtener el grado de

**Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas**

presenta

**Marco Vinicio Llanes Rueda**

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas*

*Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

Agosto del 2008

Director de tesis:

Dr. José Antonio González Cervera

Instituto de Física y Matemáticas,

UMSNH.

A Sandra y Juan D.

A Blanca

---

# Agradecimientos

---

La realización de esta tesis pudo ser posible gracias gracias a muchas personas que me apoyaron a lo largo de todo este tiempo.

En particular quiero agradecer enormemente al Dr. José Antonio González, porque además de ser un excelente profesor, es un excelente amigo; le agradezco también por aceptar dirigir esta tesis, por atender siempre todas las dudas que surgieron y por toda la disposición y paciencia que me ha tenido.

Igualmente quiero agradecer a mis Padres Sandra y Juan D., a mis hermanos Julio y Cesar que me han dado su apoyo incondicional desde el principio.

Agradezco a Blanca quien su apoyo a sido invaluable, y quien siempre has estado presente en los detalles importantes de mi vida.

Por último quiero agradecer a mis profesores de licenciatura y mis amigos por sus enseñanzas y consejos, que han sido una base importante para mi formación profesional y personal.

---

# Índice general

---

Agradecimientos	III
Índice general	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Métodos Numéricos</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. El Método de Diferencias Finitas . . . . .	5
2.3. Condiciones de Frontera . . . . .	7
2.4. Consistencia, Convergencia y Estabilidad . . . . .	9
<b>3. Distintos Métodos Numéricos para Resolver la Ecuación de Onda</b>	<b>13</b>
3.1. Método Explícito . . . . .	13
3.2. Métodos Implícitos . . . . .	18
3.3. Método de Integración Runge - Kutta . . . . .	22
3.4. Condición de Estabilidad de Von Neumann . . . . .	24
<b>4. Ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1</b>	<b>33</b>
4.1. Relatividad Numérica . . . . .	33
4.2. El Formalismo 3+1 . . . . .	34
4.3. Curvatura Extrínseca . . . . .	37
4.4. Ecuaciones de Einstein en el Formalismo 3+1 . . . . .	38
4.5. Concepto de Hiperbolicidad . . . . .	40
4.6. Ecuaciones de Einstein en una Dimensión Espacial y una Dimensión Temporal . . . . .	42
<b>5. Relatividad Numérica en Simetría Esférica</b>	<b>49</b>
5.1. Espacio-Tiempos con Simetría Esférica . . . . .	49

---

5.2. Espacio de Minkowski en Coordenadas no Triviales . . . . .	53
5.3. Agujero Negro de Schwarzschild en Coordenadas Isotrópicas . . . . .	56
<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>A. Inversión de Matrices Tridiagonales</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

El Análisis numérico es una rama de las matemáticas cuyos límites no son del todo precisos. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos.

La ciencia y la tecnología describen los fenómenos reales mediante modelos matemáticos. El estudio de estos modelos permite un conocimiento más profundo del fenómeno, así como de su evolución futura. La matemática aplicada es la rama de las matemáticas que se dedica a buscar y aplicar las herramientas más adecuadas a los problemas basados en estos modelos. Desafortunadamente, no siempre es posible aplicar métodos analíticos clásicos (manipulaciones algebraicas, teoría de ecuaciones diferenciales, métodos de integración, etc...) por diferentes razones:

- No se adecúan al modelo concreto.
- Su aplicación resulta excesivamente compleja.
- La solución formal es tan complicada que hace imposible cualquier interpretación posterior.
- Simplemente no existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema.

En estos casos son útiles las técnicas numéricas, que mediante una labor de cálculo más o menos intensa, conducen a soluciones aproximadas que son siempre numéricas. Debe recordarse que la física experimental, por ejemplo, nunca arroja valores exactos sino intervalos que engloban la gran mayoría de resultados experimentales obtenidos, ya que no es habitual que dos medidas del mismo fenómeno arrojen valores exactamente iguales. El importante esfuerzo de cálculo que implica la mayoría de estos métodos hace que su uso esté íntimamente ligado al empleo de computadoras.

Más aún, los problemas continuos deben a veces ser reemplazados por un problema discreto, cuyas soluciones son conocidas por aproximar aquellas del problema continuo, este proceso es conocido como

discretización. Por ejemplo, la solución de una ecuación diferencial es una función. Ésta función debe estar representada por una cantidad finita de datos, por ejemplo por su valor en un número finito de puntos en su dominio, aun cuando este dominio sea un continuo.

Esta tesis tiene como propósito ilustrar los distintos procedimientos para obtener soluciones numéricas de la ecuación de onda, seleccionar algunos métodos numéricos que sean más eficientes y permitan sentar un precedente en la aplicación de los métodos numéricos a la enseñanza y a la resolución de problemas de investigación. Con la finalidad de que éstos sirvan para la resolución de problemas físicos más complicados.

Con este objetivo en claro se conforma la tesis con los capítulos siguientes.

Para el capítulo 2 se da una introducción general a los métodos numéricos. Se sabe que existen distintas maneras de modelar una ecuación diferencial parcial numéricamente, muchas formas de hacer estas aproximaciones, entre las más populares se encuentran, el *método de diferencias finitas*, el *método de elementos finitos* y los *métodos espectrales*. Para el trabajo de esta tesis siempre se hará uso de la aproximación por diferencias finitas.

A lo largo del capítulo 3 se presentan los métodos más conocidos como son el Método Implícito y Método Explícito, en particular el método explícito Runge-Kutta, los cuales nos permiten dar solución a diferentes problemas físicos según sea su problemática específica, por tanto no podemos decir que un método es mejor que otro, sino simplemente utilizar el apropiado para cada caso.

Con el objetivo de utilizar los métodos en problemas más complejos se presentan las Ecuaciones de Einstein, en el capítulo 4, las cuales se consideran como engañosas, ya que de hecho forman un sistema acoplado de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden altamente no lineales para la métrica.

Para el capítulo 5 parte del reconocimiento del hecho de que solo a través de simulaciones numéricas podemos estudiar tales sistemas físicos complicados, dio origen al campo de la *Relatividad Numérica* para buscar soluciones de las Ecuaciones de Einstein, antes presentadas. Se incluye al igual, aplicaciones de estos métodos numéricos a problemas físicos más complicados; como lo son los agujeros negros en simetría esférica. Para este capítulo se parte de programas previamente realizados con la finalidad de comenzar el trabajo partiendo de ahí para problemas más complejos.

Y finalmente en el capítulo 6 podremos ver algunas conclusiones de este trabajo y recomendaciones para próximas investigaciones.

---

## Capítulo 2

# Métodos Numéricos

---

### 2.1. Introducción

El tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales parciales (**EDP**) es, por si mismo un tema bastante amplio. Las ecuaciones diferenciales parciales son la parte central de muchas, sino es que de la mayoría, de las aplicaciones de análisis computacional o simulaciones de sistemas físicos continuos, tales como los fluidos, campos magnéticos, el cuerpo humano, astrofísica, relatividad numérica, etc.

Los matemáticos normalmente clasifican las ecuaciones diferenciales parciales en tres categorías, *hiperbólicas*, *parabólicas* y *elípticas*, tomando como base las curvas de propagación de la información[15]. Una forma de ver esta clasificación, es la siguiente: dada una ecuación diferencial de segundo orden en dos dimensiones:

$$A\partial_x^2\phi + 2B\partial_{xy}^2\phi + C\partial_y^2\phi + D\partial_x\phi + E\partial_y\phi + F = 0,$$

donde los coeficientes  $A, B, C, D$  y  $F$  pueden depender de  $x$  y  $y$ , decimos que:

- La ecuación es *elíptica* si:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} > 0.$$

- Es *parabólica* si:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = 0.$$

- Es *hiperbólica* si:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} < 0.$$

Un ejemplo de una ecuación hiperbólica es la ecuación de onda en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda y es una constante[19]. Un ejemplo de una ecuación parabólica es la ecuación de *difusión* en una dimensión, que está dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (2.2)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión que puede depender de  $x$ [19]. Y por último un ejemplo de una ecuación elíptica es la ecuación de *Poisson* en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (2.3)$$

donde  $\rho$  es un término de una fuente dada que depende de  $x$  y  $y$ . Si el término de la fuente es igual a cero, entonces la ecuación se convierte en la ecuación de *Laplace*[19].

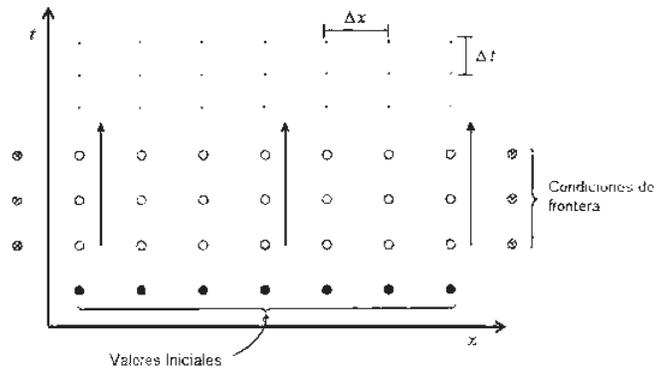
Las ecuaciones (2.1) y (2.2), ambas definen problemas de *valores iniciales* o problemas de *Cauchy*. Esto último quiere decir que si alguna información sobre  $\phi$  está dada en un tiempo inicial  $t_0$  para toda  $x$ , entonces las ecuaciones describirían como  $\phi(x, t)$  se propaga en el tiempo[15]. En otras palabras, las ecuaciones (2.1) y (2.2) describen una evolución temporal de la variable  $\phi$ . Entonces la meta de un código numérico que aproxime ecuaciones hiperbólicas o parabólicas debe ser la exploración de esa evolución temporal con alguna aproximación deseada.

En contraste con las ecuaciones (2.1) y (2.2), la ecuación (2.3) nos lleva a encontrar una sola función  $\phi(x, y)$  que satisfice a la ecuación dentro de alguna región de interés  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  y  $y_{min} \leq y \leq y_{max}$ , y que además tiene algún comportamiento deseado en la frontera de esta región. Este tipo de problemas son llamados *problemas de valores en la frontera*[14, 18]. En general no es posible integrar de manera estable hacia adentro desde los puntos de la frontera en el mismo sentido de que un problema de valores iniciales puede ser integrado en el tiempo. Por lo tanto la meta de un código numérico que aproxime ecuaciones elípticas es, de alguna manera, converger a la solución correcta en todos los puntos del espacio al mismo tiempo.

Hoy en día, la mayoría de las teorías físicas modernas tienen como base la idea de un espacio-tiempo continuo. Esta idea tiene fuertes implicaciones, no sólo en el entendimiento general del Universo, sino también en la estructura básica de las matemáticas que pueden ser usadas para describirlo. La descripción del Universo hecha por estas teorías está necesariamente descrita por el lenguaje de las ecuaciones diferenciales parciales.

Las ecuaciones diferenciales parciales con las que uno se enfrenta en las teorías físicas son, en general, imposibles de resolver analíticamente (excepto en los casos más simples, en los que se asumen ciertas simetrías). El tipo de dificultades que pueden presentarse van desde la presencia de fronteras irregulares,

hasta la existencia de ecuaciones no lineales. Para tratar estas dificultades y poder estudiar problemas más generales, uno tiene entonces que hacer uso de los métodos numéricos. Existen distintas maneras de modelar una ecuación diferencial parcial numéricamente. Hay muchas formas de hacer estas aproximaciones, entre las más populares se encuentran, el *método de diferencias finitas*[18, 19], el *método del elementos finitos*[12] y los *métodos espectrales*[7]. Para el trabajo de esta tesis siempre se hará uso de la aproximación por diferencias finitas. En la siguiente sección se dará una breve introducción a este método.



**Figura 2.1:** Discretización del espacio-tiempo usado en diferencias finitas en una dimensión espacial y una temporal.

## 2.2. El Método de Diferencias Finitas

Cuando se estudia un campo en un espacio-tiempo continuo, uno se enfrenta con la consideración de un número infinito de variables desconocidas, es decir, el valor del campo en cada punto del espacio para todos los tiempos. Lo primero que debemos tener en mente desde al principio, es que cuando se hace uso del método de diferencias finitas, uno está asumiendo que el dominio de las **EDP's** está discretizado. Esto supone que las funciones involucradas en una **EDP** están evaluadas sólo en un número finito de puntos. La implicación de una restricción como esta, es que no es posible calcular la soluciones con una precisión infinita, y debido a esto tendremos un *error de discretización*[21, 8, 13]. Aunque si se piensa en la gran variedad de problemas que se pueden resolver numéricamente y que aún no pueden ser resueltos por métodos analíticos, se puede pensar que el error de discretización es un buen precio a pagar.

La idea básica de las aproximaciones por diferencias finitas es sustituir el problema en el continuo por un conjunto de puntos discretos. Este conjunto de puntos es conocido como *malla computacional*. El intervalo de tiempo entre dos niveles de tiempo sucesivos es conocido como "*paso temporal*" y es representado por  $\Delta t$ , mientras que la distancia espacial entre dos puntos adyacentes en el mismo nivel

de tiempo es llamado “*espaciamiento de malla*” y es representado por  $\Delta x$ . La Figura 2.1 muestra la representación de un espacio-tiempo discretizado en una dimensión espacial y una temporal.

Una vez establecida la malla, procederemos con la aproximación de la **EDP** por medio de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para poder ilustrar como es que la discretización funciona, suponemos el caso de un dominio finito hipotético con una coordenada temporal  $t$  y una coordenada espacial  $x$ . Las coordenadas espaciales están definidas como un conjunto discreto de puntos dados por  $x_m = m\Delta x$  (con  $m$  entero), y las fronteras están dadas por los puntos  $x_0$ , para la frontera izquierda y  $x_N$  para la frontera derecha. El tiempo  $t^n = n\Delta t$  (con  $n$  entero) también está definido sólo para ciertos valores del continuo del tiempo. Por lo que una función está definida sólo por los valores de  $x$  y  $t$  que corresponden a los puntos sobre la malla, de tal manera que para una función continua  $f$  dada, sólo hay valores disponibles de ésta en los puntos  $(t^n, x_m)$ . A dichos valores los denotaremos por  $f_m^n$ . Para un dominio uniformemente discretizado, tenemos que  $\Delta x = x_{m+1} - x_m$  y  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ , indicándonos la resolución en las coordenadas espacial y temporal respectivamente. En la aproximación de diferencias finitas se asume que las funciones involucradas pueden expandirse en una serie de Taylor alrededor de cada punto de la malla y hasta un orden deseado [19, 18]. Siendo así, consideramos entonces que la función está definida en el punto espacial  $x_m$  al tiempo  $t^n$ , por lo que el valor de la función en los puntos vecinos más cercanos en la dirección espacial, puede ser calculado como sigue:

$$f_{m-1}^n = f_m^n - \Delta x \partial_x f_m^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_x^2 f_m^n - \frac{(\Delta x)^3}{6} \partial_x^3 f_m^n + \mathcal{O}[(\Delta x)^4], \quad (2.4)$$

$$f_{m+1}^n = f_m^n + \Delta x \partial_x f_m^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_x^2 f_m^n + \frac{(\Delta x)^3}{6} \partial_x^3 f_m^n + \mathcal{O}[(\Delta x)^4]. \quad (2.5)$$

donde  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ . Tomando estas aproximaciones podemos construir operadores diferenciales para las derivadas espaciales de  $f_m^n$ . Por ejemplo, restando la ecuación (2.4) de la ecuación (2.5) obtenemos una expresión para la primera derivada en el punto  $(t^n, x_m)$ :

$$\partial_x f_m^n = \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]. \quad (2.6)$$

Como en esta aproximación estamos despreciando los términos de orden  $(\Delta x)^2$  la llamamos una aproximación con error a segundo orden. Vale la pena notar que para calcular la derivada  $\partial_x f_m^n$  a segundo orden necesitamos el valor de la función en los puntos  $x_{m-1}$  y  $x_{m+1}$ , y es por esto que a esta aproximación se le llama diferenciación finita centrada. Para poder obtener la segunda derivada de  $f_m^n$ , basta con hacer un cálculo similar al anterior sumando las ecuaciones (2.4) y (2.5) para obtener:

$$\partial_x^2 f_m^n = \frac{f_{m+1}^n - 2f_m^n + f_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2], \quad (2.7)$$

la cual nos da como resultado la expresión deseada para la segunda derivada con una precisión de segundo orden, y al igual que en el caso anterior ésta también es una aproximación de diferencias finitas centradas para la segunda derivada.

De manera análoga tomando en cuenta los puntos en el tiempo, es posible construir la expresión para la primera derivada temporal a segundo orden:

$$\partial_t f_m^n = \frac{f_m^{n+1} - f_m^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]. \quad (2.8)$$

Para la segunda derivada temporal a segundo orden y centrada en  $(x_m, t^n)$ , tenemos que

$$\partial_t^2 f_m^n = \frac{f_m^{n+1} - 2f_m^n + f_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]. \quad (2.9)$$

Como ya se mencionó anteriormente, cuando se usan diferencias finitas, las aproximaciones hechas para los operadores diferenciales involucrados en las **EDP's**, introducen un error debido a la truncación de la serie de Taylor hasta el orden dado. De hecho, el término del error disminuye al disminuir la separación entre los puntos en el tiempo y en el espacio.

## 2.3. Condiciones de Frontera

Como ya se mencionó en la sección anterior, al momento de usar diferencias finitas uno asume que el dominio de las **EDP's** está discretizado, por lo que las funciones involucradas con éstas, están evaluadas en un número finito de puntos. Ahora si tomamos el caso de las ecuaciones (2.6) y (2.7), podemos ver que para poder obtener información de las derivadas  $\partial_x f_m^n$  y  $\partial_x^2 f_m^n$  en el punto  $x_m$ , se necesita evaluar la función en los puntos vecinos más cercanos a  $x_m$ , es decir,  $x_{m-1}$  y  $x_{m+1}$ . Entonces en el caso de las fronteras espaciales, es decir en los puntos  $x_0$  y  $x_N$ , uno de los puntos vecinos más cercanos nos haría falta para poder obtener el valor de la derivada, pero es un punto que no está dentro del dominio. Necesitamos imponer lo que se conoce como condiciones de frontera. A continuación definimos algunas condiciones de frontera:

1. **Unilateral** En este caso, uno puede considerar que sólo los puntos hacia la derecha del dominio espacial están disponibles (para el caso de la frontera izquierda), entonces procedemos a escribir la aproximación de la función considerando sólo puntos a la derecha de la frontera izquierda  $x_0$  como sigue:

$$f_m^n = f_m^n, \quad (2.10)$$

$$f_{m+1}^n = f_m^n + \Delta x \partial_x f_m^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_x^2 f_m^n + \mathcal{O}[(\Delta x)^3], \quad (2.11)$$

$$f_{m+2}^n = f_m^n + 2\Delta x \partial_x f_m^n + 2(\Delta x)^2 \partial_x^2 f_m^n + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]. \quad (2.12)$$

Entonces la combinación

$$f_{m+2}^n - 4f_{m+1}^n + 3f_m^n = 2\Delta x \partial_x f_m^n + \mathcal{O}[(\Delta x)^3], \quad (2.13)$$

nos da la expresión deseada para la primera derivada espacial de la función, que cuando se aplica a la frontera izquierda nos daría la siguiente expresión:

$$\partial_x f_0^n = \frac{f_2^n - 4f_1^n + 3f_0^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]. \quad (2.14)$$

Uno puede obtener una expresión similar para la frontera derecha considerando sólo los puntos a la izquierda de  $x_N$ . Si consideramos una discretización para el tiempo y aplicamos las operaciones hechas anteriormente, podemos encontrar las derivadas temporales de la misma manera.

2. **Fijas** Otro ejemplo de condiciones de frontera sería al modelar una cuerda que oscila con los extremos fijos, donde se requiere que los cálculos en las fronteras del dominio sean de tal forma que se logre un efecto de reflexión íntegra de la información que las alcance; en este caso se tienen “*condiciones de frontera fijas*”.

$$\begin{aligned} f_0^n &= a, \\ f_N^n &= b. \end{aligned}$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes.

3. **Periódicas** El tipo más simple de condiciones en los extremos es el de condiciones periódicas, es decir que los extremos, por ejemplo izquierdo del dominio, se “pega” con el extremo derecho, es decir que es posible imaginar que el dominio espacial es cerrado. En este caso el efecto producido consiste en que si la onda viaja hacia la derecha del dominio, cuando llega al extremo derecho desaparece y reaparece por el lado izquierdo del dominio, lo cual se repite periódicamente. En este caso tenemos lo que se conoce como “*condiciones de frontera periódicas*”.

$$f_0^n \equiv f_N^n.$$

4. **Radiativas** Las condiciones más usuales para un sistema que se estudia en un dominio finito involucran condiciones de frontera que necesitan que el sistema sea semiabierto, es decir, que permita la salida de información del dominio finito. En el caso de la ecuación de onda pensamos en condiciones de frontera que permitan que la onda salga del dominio finito y continúe su viaje hacia  $\pm\infty$ . En este caso la mayor preocupación consiste en evitar que la información que se supone que debería salir del dominio se refleje y cause interferencia con los valores de las funciones que están siendo calculados en el interior del dominio. De ahí que el planteamiento e implementación de condiciones de frontera de este tipo sean fundamentales para que el cálculo de las soluciones sea preciso.

Puede verse claramente que al improvisar sobre las condiciones de frontera, se tienen resultados poco convenientes, por lo que debe de ponerse mucho cuidado en la manera que uno impone las condiciones de frontera. Debemos tomar en cuenta que por las limitaciones computacionales, sabemos que el dominio es finito y no se le puede extender arbitrariamente como uno quiera para tener siempre disponible la información de los puntos vecinos cuando sea necesario. Por lo que se debe incluir en el algoritmo una manera de calcular las funciones en los extremos del dominio. Como ya vimos anteriormente, a esto se le llama imponer “*condiciones de frontera*”.

## 2.4. Consistencia, Convergencia y Estabilidad

El objetivo principal de los métodos numéricos es encontrar la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales para todo tiempo. Pero como ya se mencionó con anterioridad, sabemos que cuando se resuelven ecuaciones usando diferencias finitas uno discretiza la ecuación, entonces las ecuaciones para las cuales estamos calculando su solución, no son exactamente aquellas que asumimos correctas o validas en el caso continuo. Un error de truncación en la expansión de serie de Taylor es introducido, debido al simple hecho de discretizar. Más aún, aunque el error involucrado en la versión discretizada de una ecuación decrece cuando se incrementa la resolución, es necesario establecer como dicho error debe decrecer. La convergencia es una noción que relaciona el error que decrece en términos de la exactitud de la discretización. Sin embargo existe un concepto que está detrás de todo esto, el cual lleva el nombre de “*consistencia*” [13, 18, 19]. Consideremos ahora una cierta aproximación de diferencias finitas para una ecuación diferencial. Cuando uno refina la malla, esto quiere decir que el intervalo espacial  $\Delta x$  y temporal  $\Delta t$  entre dos puntos, se hace más pequeño manteniendo las dimensiones espaciales y temporales del dominio. Hecho lo anterior uno esperaría que la aproximación fuera mejorando, ya que el error de truncación tendría que disminuir. Por ejemplo: si tenemos una aproximación a segundo orden y una malla numérica que va de  $x = 0$  a  $x = 1$  con 11 puntos y  $\Delta x_1 = 0,1$ , el error esperado es del orden de  $(\Delta x_1)^2 = (0,1)^2 = 0,01$ . Si ahora refinamos la malla aumentando de 11 a 21 puntos con  $\Delta x_2 = 0,05$  el error esperado será de  $(\Delta x_2)^2 = (0,05)^2 = 0,0025$ . Por lo que nos enfocamos a encontrar una aproximación que en el límite del continuo, se aproxime más a la ecuación diferencial original y no a una diferente. Cuando esto pasa localmente se dice que la aproximación es *consistente*. La consistencia es claramente fundamental para cualquier aproximación de diferencias finitas. Cuando la consistencia falla, incluso si es en un solo punto, no seremos capaces de recobrar la solución correcta a la ecuación diferencial original. Como la consistencia es una propiedad que sólo se cumple localmente, no nos sirve para fines prácticos. Lo que uno realmente busca es una aproximación que se vaya mejorando después de un cierto tiempo  $T$  finito, mientras la malla es refinada. Esto quiere decir que la diferencia entre la solución exacta y la solución numérica a un tiempo fijo  $T$  debe hacerse cero en el límite del continuo. A esta condición

se lo conoce como “*convergencia*”[18, 8, 13, 10]. La convergencia es claramente una propiedad que no siempre coincide con la consistencia ya que esquemas perfectamente consistentes puede que no converjan. Por ejemplo, en el limite cuando  $\Delta t$  tiende a cero un tiempo finito  $T$  puede ser alcanzado después de un número infinito de pasos temporales. Esto implica que incluso si el error en cada paso temporal es infinitesimal la integración total de éste podría bien ser finita. La solución numérica puede incluso diverger y de hecho volverse infinita en ese limite. Verificar analíticamente si cierta aproximación puede ser convergente o no, puede resultar bastante complejo, sin embargo en el caso numérico es mas simple cotejar que la aproximación de la solución converja. La parte difícil es saber si la solución numérica esta convergiendo a la solución exacta.

Otra propiedad muy importante dentro de las aproximaciones diferenciales finitas, es la teoría de la *estabilidad*[18, 13, 15, 19]. Independientemente del comportamiento de la solución numérica de la ecuación diferencial, debemos exigir que las soluciones exactas a las ecuaciones diferenciales finitas permanezcan limitadas después de un cierto tiempo  $T$  para cualquier paso temporal  $\Delta t$ . Esta condición es conocida como *estabilidad*, la cual es una medida del incremento de los valores de la función que esta siendo calculada. Pero en general la estabilidad esta relacionada con el algoritmo de la integración temporal e implica que ninguna componente de la información inicial debería de ser amplificada arbitrariamente. Una aproximación diferencial finita inestable carece de importancia práctica.

Si las dos condiciones, estabilidad y consistencia, se satisfacen se dice que el algoritmo converge. Esto es conocido como el Teorema de Lax [18].

**TEOREMA:** *Considerando un problema de valores iniciales que matemáticamente está bien planteado, y una aproximación de diferencia finita que es consistente, entonces la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia.*

Sea  $f_m$  una función que tiene una precisión a segundo orden, tal que  $f_m(x) = f_0(x) + E(x)(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x^3)$ , donde  $f_0(x)$  denota la solución exacta en el continuo y  $E$  es el termino desconocido del error que se comete al calcular  $f_m$ , el cual no depende de la resolución. Si conocemos  $f_0(x)$ , es suficiente comparar esta con los resultados obtenidos de dos resoluciones distintas, la de  $f_1$  obtenida usando  $\Delta x$  y la de  $f_2$  obtenida con  $\Delta x/2$ . Entonces la teoría predice que

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{E(x)\Delta x^2 + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]}{E(x)\frac{1}{4}\Delta x^2 + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]} = 4 + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]. \quad (2.15)$$

Esta fórmula nos proporciona un manera práctica para comprobar que un método calcula soluciones convergentes. Cuando se obtiene el factor de convergencia esperado, el cual es el número cuatro con este ejemplo se dice que se tiene convergencia a segundo orden.

En el caso mas general cuando la solución exacta es desconocida, uno puede hacer una *prueba de*

*convergencia de Cauchy*, calculando la función  $f$  a tres resoluciones:  $\Delta x$ ,  $\Delta x/2$  y  $\Delta x/4$  y llamándolas  $f_1, f_2$  y  $f_3$  respectivamente. Entonces tenemos que la discretización de la función para un esquema de orden  $m$  en estas tres resoluciones:

$$f_1(x) = f_0(x) + E(x) \left( \Delta x \right)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}], \quad (2.16)$$

$$f_2(x) = f_0(x) + E(x) \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}], \quad (2.17)$$

$$f_3(x) = f_0(x) + E(x) \left( \frac{\Delta x}{4} \right)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}], \quad (2.18)$$

entonces de estas tres últimas ecuaciones podemos obtener una formula general para el factor de convergencia, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} &= \frac{E(x)(\Delta x)^m - E(x)\frac{1}{2^m}(\Delta x)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}]}{E(x)\frac{1}{2^m}(\Delta x)^m - E(x)\frac{1}{4^m}(\Delta x)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}]} \\ &= \frac{E(x) \left[ \frac{2^m - 1}{2^m} \right] (\Delta x)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}]}{E(x) \left[ \frac{2^m - 1}{4^m} \right] (\Delta x)^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}]} = 2^m + \mathcal{O}[(\Delta x)^{m+1}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $m$  es la precisión a la que uno aproxima la función. Esto quiere decir que si tenemos una función que tiene una precisión a primer orden, entonces el factor de convergencia que deberíamos obtener es el valor dos, por lo que para una precisión a segundo orden obtendríamos el valor cuatro y así sucesivamente para las precisiones de orden mayor. De esta misma ecuación se puede ver que el factor de convergencia no depende de la resolución usada en cada una las funciones. El factor de dos obtenido en la ecuación anterior viene de que se toma la mitad de la resolución  $\Delta x_1 = \Delta x/2$  y la mitad de  $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$ .

Este tipo de estimaciones nos proporciona indicios para saber si el cálculo es bueno o malo. Sin embargo si uno encuentra que el factor de convergencia (número 4) resulta ser un número más pequeño, entonces se debe esperar que la convergencia de la solución no sea tan buena como se esperaba. Las posibles razones para que tal situación suceda seria que haya un error en la implementación del algoritmo o el mismo algoritmo no converge al rango de la resolución  $\Delta x$  usada.

Los resultados presentados en este capítulo nos muestran las diferentes técnicas y análisis requeridos para realizar estudios de ecuaciones diferenciales parciales con métodos numéricos. En el siguiente capítulo presentaremos diferentes formas de implementar estos métodos y analizaremos como se comportan al resolver la ecuación de onda.

---

## Capítulo 3

# Distintos Métodos Numéricos para Resolver la Ecuación de Onda

---

En este capítulo plantearemos los distintos métodos numéricos que son más frecuentemente utilizados para resolver numéricamente la ecuación de onda. Esto con la finalidad de compararlos y ver la efectividad de cada uno, para posteriormente aplicar el más óptimo en el caso de los problemas planteados más adelante en esta tesis.

### 3.1. Método Explícito

Comenzaremos dando la forma simple de la ecuación de onda en una dimensión espacial y una temporal, la cual es:

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 \phi = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\phi$  es la función de onda y  $c$  es la velocidad de la onda [8, 13, 1, 19, 15]. Para poder encontrar una aproximación diferencial finita a esta ecuación primero retomaremos la siguiente notación para los valores de  $\phi$  en la malla computacional:

$$\phi_m^n \equiv \phi(n\Delta t, m\Delta x). \quad (3.2)$$

Ahora podemos aproximar los operadores diferenciales que aparecen en la ecuación (3.1) simplemente usando una expansión de Taylor de  $\phi$  alrededor del punto  $(n, m)$ . Usando los métodos explicados en el capítulo 2 la segunda derivada toma la siguiente forma:

$$\partial_x^2 \phi \simeq \frac{\phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.3)$$

El que tan buena es esta aproximación dependerá del tamaño del espaciado de la malla  $\Delta x$ , el cual si es pequeño, en el sentido de que la función  $\phi$  es casi constante en la región del tamaño de  $\Delta x$ ; esto indica

que la aproximación será muy buena. El error de truncación involucrado en esta última aproximación esta dado por:

$$E = \frac{(\Delta x)^2}{12} \partial_x^4 \phi + \dots \quad (3.4)$$

El primer término en la ecuación anterior es llamado la “*parte principal*” del error de truncación. Es claro ver que en el límite cuando  $\Delta x$  tiende a cero, el error también tenderá a cero como  $\Delta x^2$ , por lo que se dice que tiene precisión a segundo orden.

La segunda derivada de  $\phi$  con respecto a  $t$  puede ser aproximada exactamente de la misma manera. De esta forma encontramos la siguiente aproximación diferencial finita a segundo orden para la ecuación de onda:

$$\frac{\phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\phi_m^{n+1} - 2\phi_m^n + \phi_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} = 0. \quad (3.5)$$

Podemos reescribir esta ecuación en una forma más compacta introduciendo el “*factor de Courant*”:  $\lambda \equiv c\Delta t/\Delta x$ . Por lo que nuestra aproximación toma la forma final de:

$$\lambda^2 \left( \phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n \right) - \left( \phi_m^{n+1} - 2\phi_m^n + \phi_m^{n-1} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación tiene una propiedad muy importante, la cuál es que involucra un solo valor de la función de onda para el último nivel de tiempo, el valor es  $\phi_m^{n+1}$ . Por lo que podemos entonces resolver para este valor en términos de valores en niveles de tiempo anteriores para obtener esta ecuación:

$$\phi_m^{n+1} = 2\phi_m^n - \phi_m^{n-1} + \lambda^2 \left( \phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n \right). \quad (3.7)$$

Es por esta propiedad que la aproximación dada en la ecuación anterior es conocida como aproximación *explícita*. Si nosotros conocemos los valores de la función  $\phi$  en los niveles  $n$  y  $n-1$ , podemos entonces usar la ecuación para calcular directamente los valores de  $\phi$  en el nuevo nivel de tiempo  $n+1$ . Este proceso puede ser iterado tantas veces como uno quiera.

Claramente se puede ver que lo único que se necesita para iniciar la evolución es conocer los valores de la función en los dos primeros niveles de tiempo para toda  $x$ . Encontrar estos dos primeros niveles de tiempo es algo sencillo de obtener ya que estamos resolviendo ecuaciones de segundo orden, entonces los datos iniciales deben incluir:

$$f(x) \equiv \phi(0, x), \quad g(x) \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (3.8)$$

El conocimiento de  $f(x)$  evidentemente nos da el primer nivel de tiempo, que es:

$$\phi_m^0 = f(m\Delta x). \quad (3.9)$$

El segundo nivel de tiempo puede ser aproximado usando diferencias finitas a segundo orden en la derivada temporal de la ecuación (3.8). Tal aproximación es:

$$g(m\Delta x) \approx \frac{\phi_m^1 - \phi_m^{-1}}{2\Delta t}. \quad (3.10)$$

Ahora podemos ver que esta última expresión involucra valores de  $\phi_m^{-1}$ , los cuales son desconocidos. Esta dificultad se puede resolver si recordamos que en la aproximación de la ecuación de onda (3.6) se hace referencia a ambos valores  $\phi_m^1$  y  $\phi_m^{-1}$ , evaluando en  $n = 0$ . Por lo que podemos usar estas dos ecuaciones, (3.6) y (3.10), para eliminar los valores de  $\phi_m^{-1}$  y resolver para los valores de  $\phi_m^1$ . De esta manera encontramos que la aproximación de segundo orden para el segundo nivel de tiempo es [13, 1]:

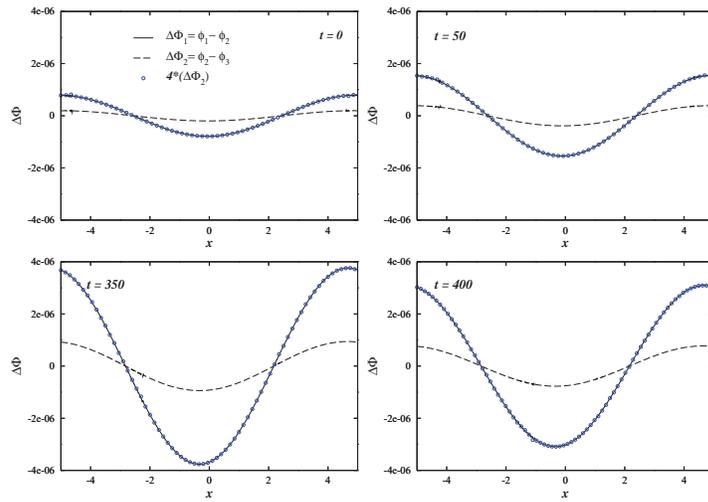
$$\phi_m^1 = \phi_m^0 + \frac{\lambda^2}{2} \left( \phi_{m+1}^0 - 2\phi_m^0 + \phi_{m-1}^0 \right) + \Delta t g(m\Delta x). \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.11) nos proporcionan toda la información que requerimos para iniciar la evolución. Para finalizar hay un punto importante que debe ser mencionado. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, para poder reducir el número de variables desconocidas a un número finito, es necesario considerar una región finita del espacio con un número de puntos finitos  $N$ , conocido como “*dominio computacional*”. Por lo que se convierte en un tema importante el tipo de condiciones de frontera que deben de ser aplicados a las orillas del dominio computacional. Es claro que la aproximación de la ecuación de onda (3.6) no puede ser usada en las fronteras ya que involucraría la evaluación de puntos que están fuera del dominio computacional. Existen muchas maneras de imponer las condiciones de frontera para la ecuación de onda, las cuales ya fueron discutidas en el capítulo 2; en los ejemplos de este capítulo utilizamos la condición de frontera periódica, es decir,

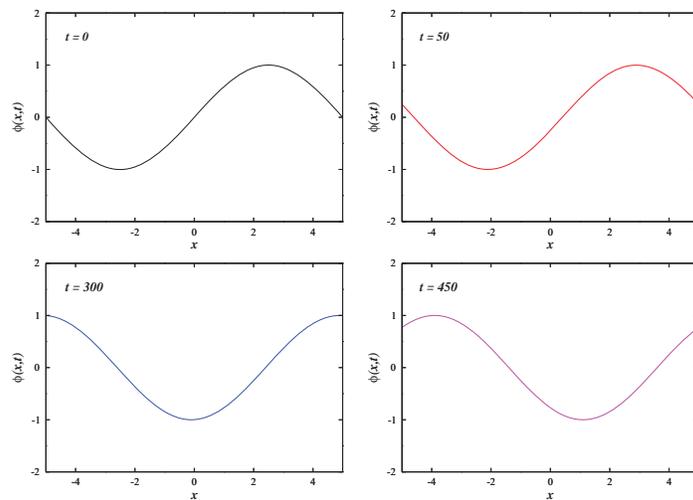
$$\phi_0^n \equiv \phi_N^n. \quad (3.12)$$

Aparte de ser extremadamente simple la elección de esta condición, es equivalente a tener un espacio cerrado sin fronteras lo cuál nos deja usar la aproximación interior en cualquier lugar. Entonces esto permite concentrarnos en las propiedades del método interior sin tener que preocuparnos de posibles efectos introducidos por las fronteras.

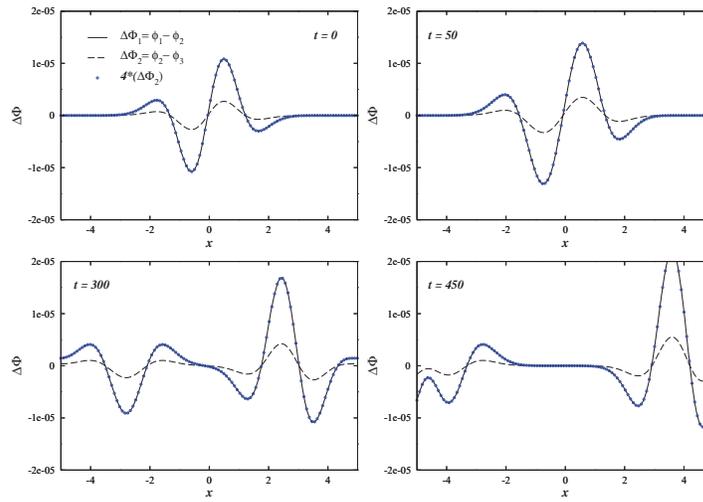
A continuación consideramos algunos ejemplos numéricos para el método explícito que se mencionó anteriormente. Como primer ejemplo tomaremos como datos iniciales la función *seno* para su evolución en el tiempo. Del método explicado anteriormente podemos ver que las condiciones iniciales están dadas por las ecuaciones (3.8) donde  $f(x)$  en este caso es la función  $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$  y la función  $g(x) = -\frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ , las cuales salen de evaluar en  $t = 0$  las condiciones iniciales dadas por las funciones  $f(x, t) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}[x - t]\right)$  y  $g(x, t) = \partial_t f(x, t) = -\frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L}[x - t]\right)$  donde  $L = N_x \Delta x$  que en nuestro caso es la longitud del dominio computacional. En particular, tomaremos  $L = 10$  y centraremos la función de onda en medio del dominio computacional. También, para esta simulación, tomaremos un intervalo espacial de  $\Delta x = 0,01$  y un factor de Courant  $\lambda = 0,8$ . Con el fin de poder probar que el método converge, tomaremos tres resoluciones distintas dadas por  $\Delta x_1 = 0,01$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$  y  $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$ . La figura 3.1 muestra la prueba de convergencia para el método explícito a cuatro distintos tiempos, donde  $\Delta\Phi_1 = \phi_1 - \phi_2$  es la diferencia de las soluciones numéricas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con resoluciones  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  respectivamente. Esto se



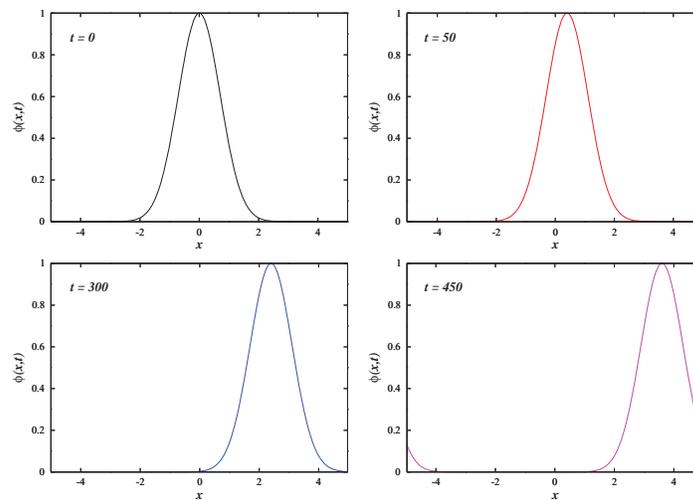
**Figura 3.1:** Evolución de la prueba de convergencia para el método explícito usando como datos iniciales una función  $f = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$  y  $g = \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ , donde  $L = 10$  que es el tamaño del dominio computacional.



**Figura 3.2:** Evolución de la solución numérica para la función  $f(x)=\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$  y  $g(x) = -\frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x-t)\right)$ , con  $L = 10$ , para cuatro distintos tiempos.



**Figura 3.3:** Evolución de la prueba de convergencia para el método explícito usando como datos iniciales la función  $f(x) = Ae^{(-\frac{x-x_0}{\sigma})^2}$  y  $g(x) = -2(x-x_0)f(x)$ , donde  $A = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $x_0 = 0$ , para cuatro tiempos distintos



**Figura 3.4:** Evolución de la solución numérica para la función  $f(x) = Ae^{(-\frac{x-x_0}{\sigma})^2}$  y  $g(x) = -2(x-x_0)f(x)$ , para cuatro distintos tiempos.

repite para el caso donde  $\Delta\Phi_2 = \phi_2 - \phi_3$ , sólo que en este caso las resoluciones de la diferencia de las soluciones numéricas están dadas por  $\Delta x_2$  y  $\Delta x_3$  para las soluciones numéricas  $\phi_2$  y  $\phi_3$  respectivamente. Teniendo en cuenta que el factor de convergencia está dado como en la ecuación (2.19), que para nuestro caso tenemos una aproximación a segundo orden, por lo que esperaríamos un factor de convergencia igual a cuatro, lo cual nos queda como sigue:

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_2 - \phi_3} = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2} = 4,$$

donde podemos ver que la diferencia de las soluciones numéricas  $\phi_1 - \phi_2$  debe de ser cuatro veces la diferencia de las soluciones numéricas  $\phi_2 - \phi_3$ . De las gráficas presentadas en la figura (3.1), la línea representada por círculos pequeños muestra como al multiplicar la curva de la diferencia  $\Delta\Phi_2$  por el factor de convergencia cuatro, queda sobrepuesta exactamente sobre la curva que representa a la diferencia  $\Delta\Phi_1$ , que es la línea discontinua. Esto nos indica que el código, entonces, converge a segundo orden como esperábamos. Ahora la figura (3.2) representa la evolución de la solución numérica a la ecuación de onda, a cuatro tiempos distintos, con la función  $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{L})$ , el cual vimos anteriormente que converge. Por lo que podemos confiar que el código numérico nos dará una buena aproximación de la solución numérica a la solución exacta, en caso de que la ecuación diferencial tenga solución analítica exacta. En las figuras (3.3) y (3.4) se presentan las gráficas de evolución del factor de convergencia y la solución numérica, respectivamente, pero esta vez usando una función gaussiana de la forma  $f(x) = Ae^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$  y  $g(x) = \partial_t f(x) = -2(x - x_0)f(x)$  donde  $A = 1$ ,  $\sigma = 1$  y donde  $x_0 = 0$  representa el centro de la función, que en este caso está centrado en medio del dominio computacional. En la gráfica (3.3) se muestra convergencia del código a segundo orden.

## 3.2. Métodos Implícitos

En la sección 3.1 se introdujeron las ideas básicas del método de diferencias finitas y se aplicaron para encontrar una aproximación a la ecuación de onda en una dimensión. La aproximación que se encontró está lejos de ser única ya que en principio existe una infinidad de maneras distintas de aproximar la misma ecuación diferencial usando diferencias finitas con distintas propiedades cada una [18, 12].

A continuación presentaremos una generalización de la aproximación explícita. Para simplificar las cosas introduciremos una notación más compacta para las diferencias finitas. Empezaremos por definir los operadores “*primarios diferenciales centrados*”  $\delta_x$  y  $\delta_t$  de la siguiente manera:

$$\delta_x \phi_m^n \equiv \frac{1}{2} \left( \phi_{m+1}^n - \phi_{m-1}^n \right), \quad (3.13)$$

$$\delta_t \phi_m^n \equiv \frac{1}{2} \left( \phi_m^{n+1} - \phi_m^{n-1} \right), \quad (3.14)$$

y los operadores “*secundarios diferenciales centrados*” como:

$$\delta_x^2 \phi_m^n \equiv \phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n, \quad (3.15)$$

$$\delta_t^2 \phi_m^n \equiv \phi_m^{n+1} - 2\phi_m^n + \phi_m^{n-1}. \quad (3.16)$$

Habiendo definido estos operadores ahora podemos regresar a la aproximación diferencial finita de los operadores diferenciales que aparecen en la ecuación de onda. Considerando de nuevo la expansión de serie de Taylor, uno puede probar que la segunda derivada espacial puede en general ser aproximada a segundo orden por:

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \simeq \frac{1}{(\Delta x)^2} \delta_x^2 \left[ \frac{\theta}{2} (\phi_m^{n+1} + \phi_m^{n-1}) + (1 - \theta) \phi_m^n \right], \quad (3.17)$$

donde  $\theta$  es un parámetro arbitrario. Esta última ecuación es simplemente una generalización de la ecuación (3.3), la cuál se puede recuperar tomando  $\theta = 0$ . Esta nueva aproximación corresponde a tomar un promedio, con cierto peso, de los operadores diferenciales finitos actuando en distintos niveles de tiempo. En el caso particular cuando  $\theta = 1$  la contribución nivel de tiempo central desaparece por completo.

Si ahora usamos esta nueva aproximación para la segunda derivada espacial, pero mantenemos la misma aproximación utilizada anteriormente para la derivada temporal, encontramos la siguiente aproximación diferencial finita para la ecuación de onda

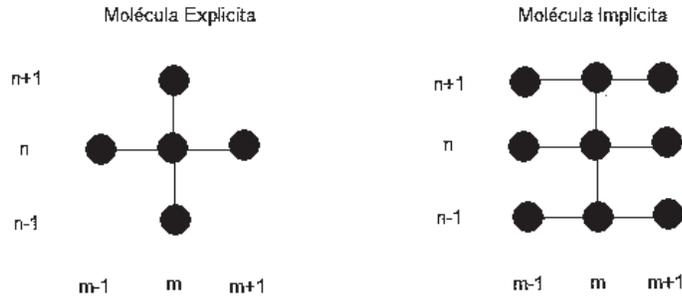
$$\lambda^2 \delta_x^2 \left[ \frac{\theta}{2} (\phi_m^{n+1} + \phi_m^{n-1}) + (1 - \theta) \phi_m^n \right] - \delta_t^2 \phi_m^n = 0. \quad (3.18)$$

Esta ecuación es una posible generalización de la ecuación (3.7) pero no es la única. Para  $\theta \neq 0$  la aproximación dada por la ecuación anterior tiene una nueva propiedad importante, esta hace referencia no solo a un solo valor, sino de hecho a tres distintos valores de  $\phi$  en el último nivel de tiempo:  $\phi_{m-1}^{n+1}$ ,  $\phi_m^{n+1}$  y  $\phi_{m+1}^{n+1}$ . Esto quiere decir que no podemos resolver explícitamente para los valores de  $\phi$  en el último nivel de tiempo, en términos de sus valores en los dos niveles de tiempo anteriores. Por esta razón la aproximación (3.18) es conocida como una “*aproximación implícita*” [13, 15, 18].

Cuando uno considera las ecuaciones para todos los puntos en la malla, hasta las fronteras, es posible resolver el sistema completo invirtiendo una matriz no trivial, la cual es una operación que consumiría mucho mas tiempo que el necesitado para aproximación explícita. Sin embargo en muchos casos las aproximaciones implícitas resultan tener mejores propiedades que las de las aproximaciones explícitas, relacionadas en particular con la estabilidad del método numérico, el cual se ejemplificará en la sección 3.4.

La diferencia entre un método explícito y uno implícito, puede verse mas claro introduciendo el concepto de “*molécula computacional*”, que no es mas que un diagrama que muestra la relación entre los distintos puntos de la malla usados en la aproximaciones diferenciales finitas. La figura (3.5) muestra

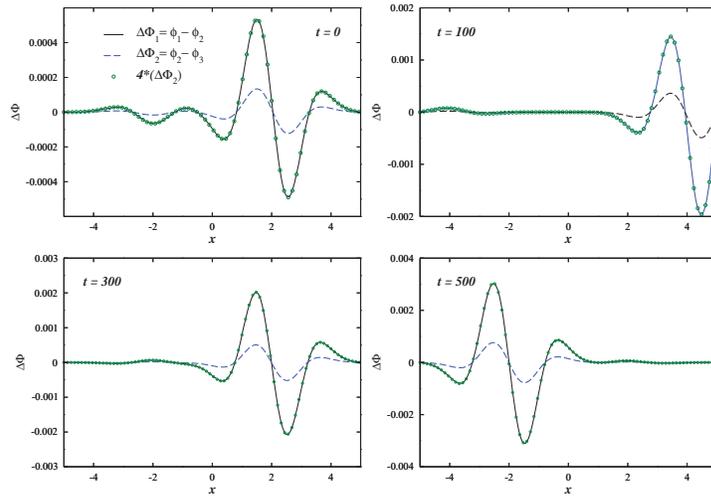
las moléculas computacionales para las aproximaciones explícita e implícita que hemos considerado. De la figura es evidente que en la aproximación explícita se puede resolver para  $\phi_m^{n+1}$  mientras que en el caso implícito se debe resolver para 3 valores desconocidos simultáneamente. Para este método, en



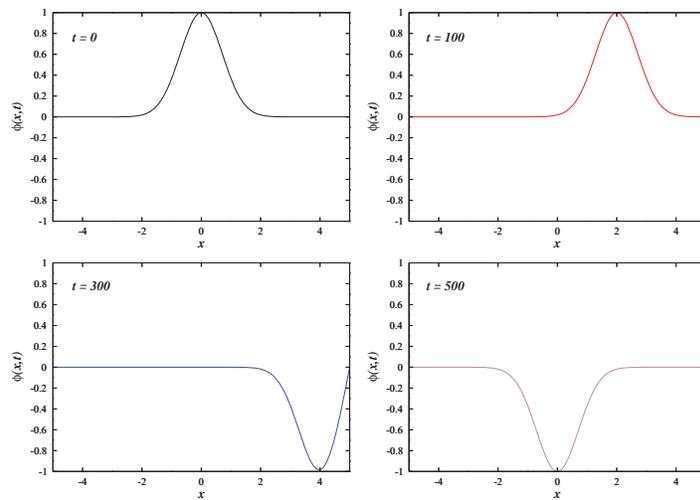
**Figura 3.5:** Moléculas computacionales para los métodos explícito e implícito. Las líneas horizontales conectan aquellos puntos de la malla usados para aproximar la segunda derivada espacial y las líneas verticales son las usadas para aproximar la segunda derivada temporal.

particular, no se utilizaron condiciones de frontera periódicas como en el método explícito, en lugar de estas se utilizaron condiciones de frontera de extrapolación lineal, las cuales consisten en tomar dos puntos interiores a las fronteras  $X_0$  y  $X_N$ , que se utilizan para extrapolar el valor de las fronteras  $X_0$  y  $X_N$ . La implementación de las condiciones de frontera puede introducir errores a primer orden que se reflejan en la inestabilidad del código cerca de las fronteras. Si se quiere implementar condiciones de frontera periódicas, la matriz a invertir es una matriz tridiagonal cíclica (ver apéndice), la cuál resulta más complicada de invertir y nos tomaría más tiempo para los propósitos de esta tesis en específico, por lo que nos enfocaremos únicamente a condiciones de frontera con extrapolación.

En las figuras (3.6) y (3.7) se muestra el mismo ejemplo numérico descrito en la sección anterior, con la diferencia de que en este caso se utiliza un método implícito, el cuál se muestra en la ecuación (3.18) donde se usa un parámetro  $\theta = 1/2$  y un factor de Courant  $\lambda = 2$ . De nuevo se utilizan como condiciones iniciales una función  $f(x) = Ae^{-(x-x_0/\sigma)^2}$ , con  $\sigma = 1$ ,  $A = 1$  y  $X_0 = 0$ . También para esta simulación, se tomó un intervalo espacial  $\Delta x = 0,01$ . Al igual que en el método anterior, para probar que el método converge, se toman tres resoluciones distintas dadas por  $\Delta x_1 = 0,01, \Delta x_2 = \Delta x_1/2$  y  $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$ . La figura 3.6. muestra la prueba de convergencia para el método implícito a cuatro distintos tiempos donde  $\Delta\Phi_1 = \phi_1 - \phi_2$  y  $\Delta\Phi_2 = \phi_2 - \phi_3$ , por lo que de la gráfica se puede ver que el código para un método implícito también converge.



**Figura 3.6:** Evolución de la prueba de convergencia para el método implícito usando una función inicial  $f(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$  para cuatro tiempos distintos



**Figura 3.7:** Evolución de la solución numérica para el método implícito usando datos iniciales de función  $f(X) = Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$  para cuatro tiempos.

### 3.3. Método de Integración Runge - Kutta

Es probable que uno de los procedimientos más difundidos y a la vez más exactos para obtener soluciones aproximadas al problema de valor inicial  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  sea el método de “Runge-Kutta” de cuarto orden. Como indica el nombre, hay métodos de Runge-Kutta de distintos órdenes, los cuales se deducen a partir del desarrollo de  $y(x_n + h)$  en serie de Taylor con residuo:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(c),$$

en donde  $c$  es un número entre  $x_n$  y  $x_n + h$ .

Para hacer la integración en el tiempo, o lo que es lo mismo para evolucionar los datos de las funciones involucradas en un sistema de **EDP** del tiempo  $t^n$  al tiempo  $t^{n+1}$  es conveniente identificar para un valor fijo de la coordenada espacial (o en general de las coordenadas espaciales involucradas), una ecuación diferencial ordinaria. Esto quiere decir que para cada punto del espacio, hay una regla de evolución dictada por la ecuación diferencial parcial. A esta descripción se le conoce como *método de líneas*[16, 21, 8, 12]. Una vez considerado que es posible esta interpretación, basta con elegir el integrador de ecuaciones ordinarias preferido para lograr la integración en el tiempo.

El método de integración Runge-Kutta es uno entre otros métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias numéricamente[12, 21, 16]. En los ejemplos numéricos que usaremos más tarde utilizaremos el de tercer orden (*RK3*), ya que este algoritmo es estable y es muy simple ya que solo requiere de tres iteraciones, lo que ahorra tiempo al hacer los cálculos en la computadora. Para ilustrar como funciona este algoritmo pondremos como ejemplo el Runge-Kutta de cuarto orden, ya que es una generalización del *RK3*.

Definamos un problema de valor inicial como:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (3.19)$$

Entonces el método *RK4* para este problema esta dado por la siguiente ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.20)$$

donde los valores de las  $k$ 's están dados por

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (3.21)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (3.22)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (3.23)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + k_3). \quad (3.24)$$

De aquí se puede ver que el valor en el siguiente nivel de tiempo  $y_{n+1}$  está determinado por el valor  $y_n$  en el nivel de tiempo anterior mas el producto del tamaño del intervalo temporal  $\Delta t$  por una pendiente

estimada. La pendiente es un promedio ponderado de las pendientes  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ . Donde el valor de  $k_1$  es la pendiente al principio del intervalo, luego el valor de  $k_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo usando la pendiente  $k_1$  para determinar el valor de  $y$  en el punto  $t_n + \Delta t/2$  usando el método de Euler; el valor  $k_3$  es la pendiente en el punto medio pero ahora usando la pendiente de  $k_2$ , el cual se usa para determinar el valor de  $y$ . Y por último el valor de  $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de  $y$  determinado por la pendiente de  $k_3$ .

El método  $RK4$  es un método de cuarto orden lo cual significa que el error por paso de tiempo es del orden de  $\mathcal{O}[(\Delta x)^5]$ , mientras que el error total acumulado tiene el orden  $\mathcal{O}[(\Delta x)^4]$ .

Para el caso de la ecuación de onda escribimos la ecuación (3.1) de segundo orden, con  $c = 1$ , como una ecuación de primer orden, definiendo las nuevas variables como sigue:

$$\Pi \equiv \partial_t \phi \quad \psi \equiv \partial_x \phi \quad (3.25)$$

donde se puede ver que  $\Pi$  es el argumento de la derivada de primer orden en el tiempo (3.1). La idea es separar la ecuación de onda (3.1) en un sistema de ecuaciones para estas dos nuevas variables; la primera de éstas resulta evidentemente de la ecuación 3.1 y resulta ser:

$$\partial_t \Pi = \partial_x \psi \quad (3.26)$$

las otras dos ecuaciones vienen dadas por la definición de la ecuación  $\psi \equiv \partial_x \phi$  y del hecho de que las derivadas conmutan.

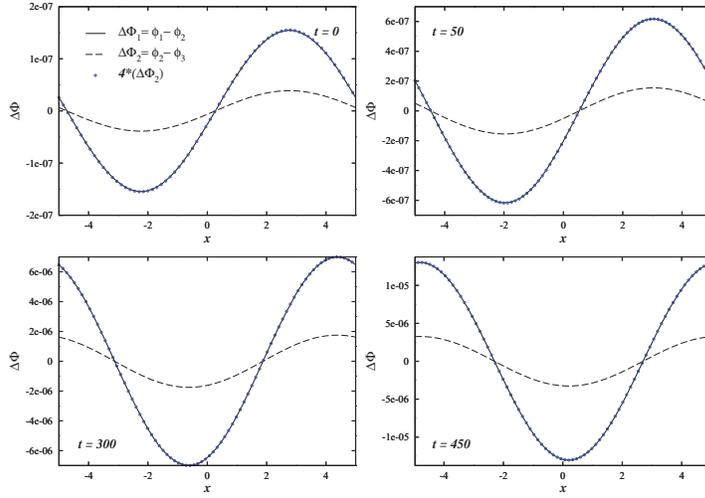
Ahora tenemos la ecuación de onda en términos de las variables de primer orden  $\Pi$  y  $\psi$ . Como estamos interesados en calcular la función original  $\phi$ , es posible conocer el valor de este campo a partir de la definición de la variable  $\Pi$ , es decir:

$$\partial_t \phi = \Pi \quad (3.27)$$

Las ecuaciones (3.25) y (3.26) constituyen la ecuación de onda completa, y una vez resueltas, la relación (3.27) puede ser integrada al mismo tiempo que las otras ecuaciones para obtener valores de  $\phi$  en cualquier tiempo y en cualquier punto del espacio.

Las figuras (3.8) y (3.9) muestran la evolución de la prueba de convergencia y la solución numérica para la función  $f(x) = \sin(2\pi x/L)$  respectivamente. En las figuras (3.10) y (3.11) se refieren a la misma evolución mencionada de las figuras anteriores, pero en estas gráficas se muestra la prueba de convergencia y la evolución numérica para  $\pi(x) = \frac{2\pi}{L} \cos(2\pi x/L)$  respectivamente. Para la evolución de este método, se usó un factor de Courant  $\lambda = 0,8$  y de nuevo se utilizó un intervalo espacial  $\Delta x = 0,001$ . Al igual que en los métodos anteriores, para mostrar que el código converge, se toman tres resoluciones distintas dadas por  $\Delta x_1 = 0,01$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$  y  $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$ . De las figuras (3.8) y (3.10) donde se muestra la evolución de la prueba de convergencia, se puede ver que multiplicando la curva (línea discontinua) de la diferencia  $\Delta\Phi_2$  por el factor de convergencia cuatro, queda sobrepuesta exactamente sobre la curva (línea continua)

que representa a la diferencia  $\Delta\Phi_1$  por lo que una vez más el código converge. Ahora de las gráficas representadas en las figuras 3.12 a la 3.15 se muestra de nuevo la evolución de la prueba de convergencia y solución numérica, pero ahora usando como datos iniciales una función  $f(x) = Ae^{-(x-x_0/\sigma)^2}$  y  $\pi(x) = -2(x-x_0)f(x)$  donde  $\sigma = 1$  y  $A = 1$  donde  $x_0 = 0$  representa el centro de la función. En las figuras 3.12-3.15 se puede ver de nuevo que el código converge, por lo que se puede confiar en el código para darnos una buena aproximación de la solución numérica a la solución exacta.



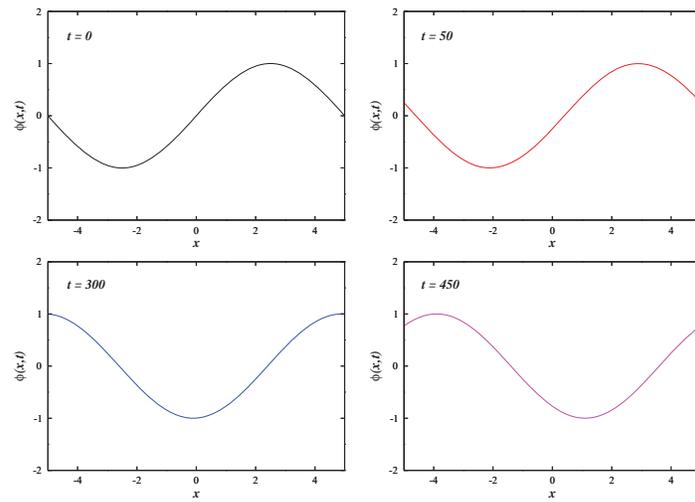
**Figura 3.8:** Evolución de la prueba de convergencia para el método Runge-Kutta (**RK3**) de tercer orden usando una función  $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{L})$ .

### 3.4. Condición de Estabilidad de Von Neumann

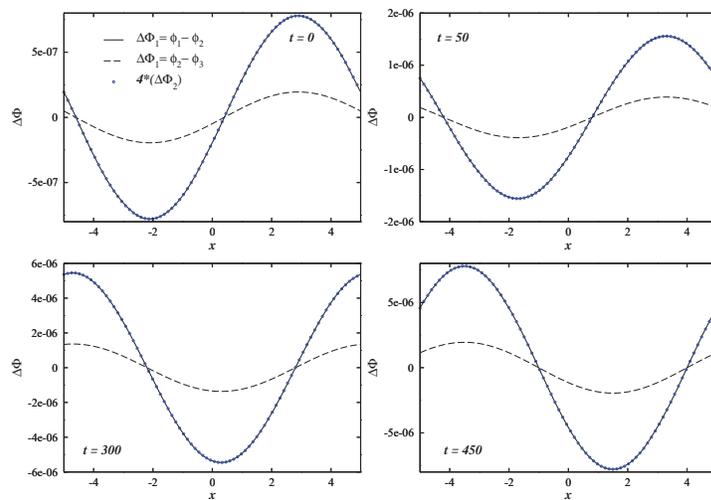
Un método general para estudiar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales finitas puede ser obtenido directamente de la definición de estabilidad. Primero escribimos las ecuaciones finitas como:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{v}^n, \quad (3.28)$$

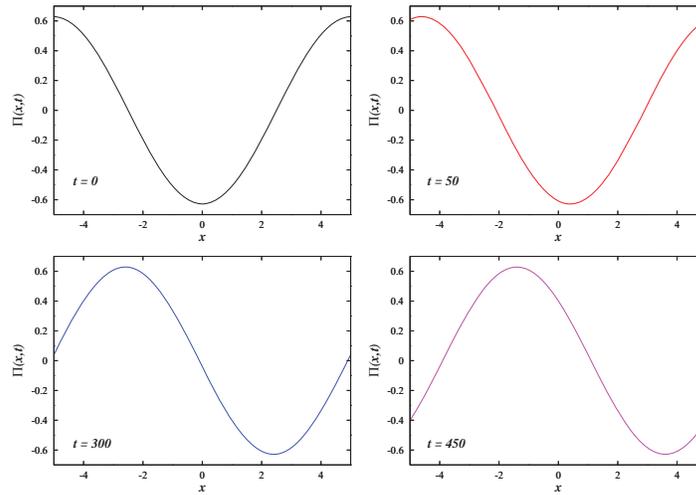
donde  $\mathbf{v}^n$  es el vector solución a nivel de tiempo  $n$ , y  $\mathbf{B}$  una matriz. Ya que el vector  $\mathbf{v}^n$  puede ser escrito como una combinación lineal de eigenvectores de la matriz  $\mathbf{B}$ , el requisito de estabilidad puede ser reducido de manera que la matriz  $\mathbf{B}$  no amplifique ninguno de sus eigenvectores, esto quiere decir que debemos requerir que la magnitud de su eigenvalor más grande sea menor o igual a uno. Este método originalmente introducido por Von Neumann está basado en una descomposición de Fourier[18, 15, 13].



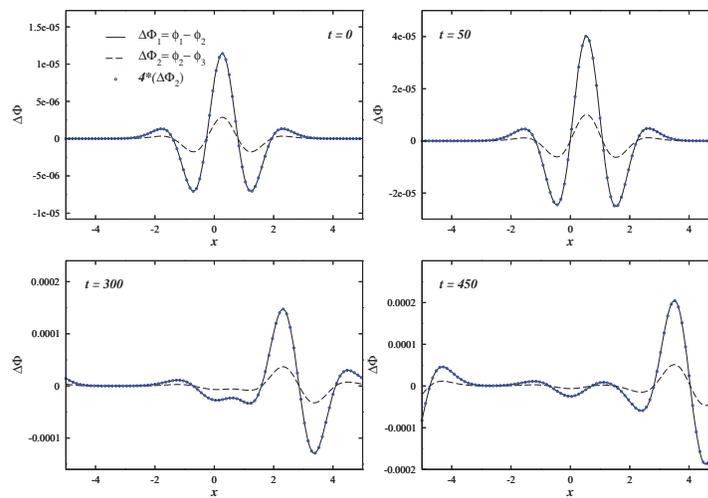
**Figura 3.9:** Evolución de la solución numérica para la función  $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ , usando (RK3), para cuatro distintos tiempos.



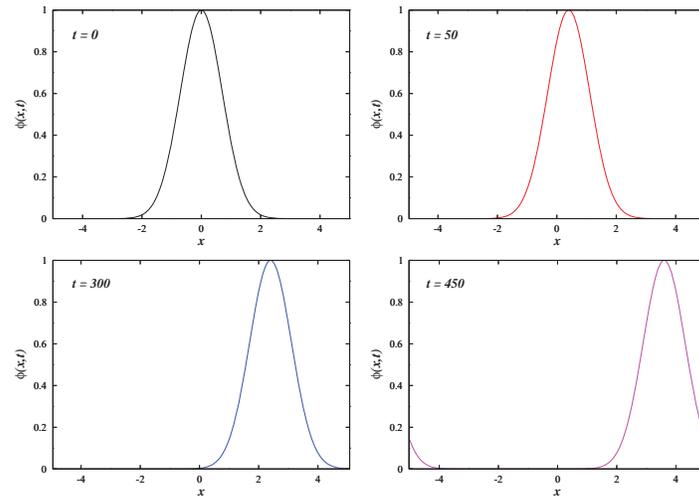
**Figura 3.10:** Evolución de la prueba de convergencia para el método Runge-Kutta (RK3) de tercer orden para la función  $\Pi$  usando una función  $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$



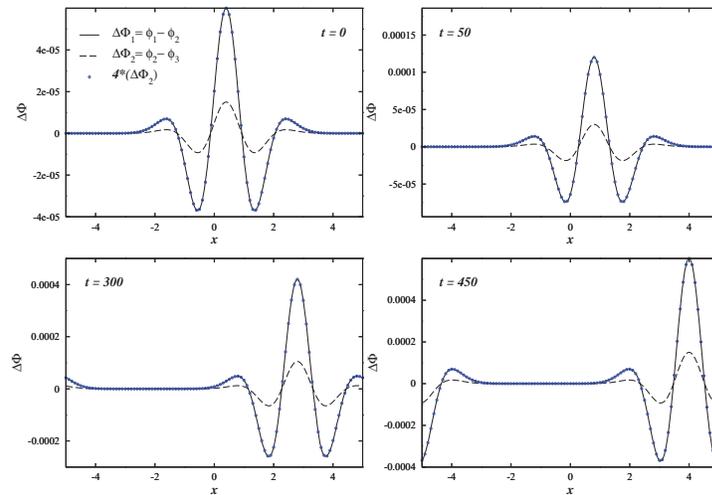
**Figura 3.11** : Solución numérica para la función  $\Pi$ , de la función  $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ , usando el método Runge-Kutta (**RK3**).



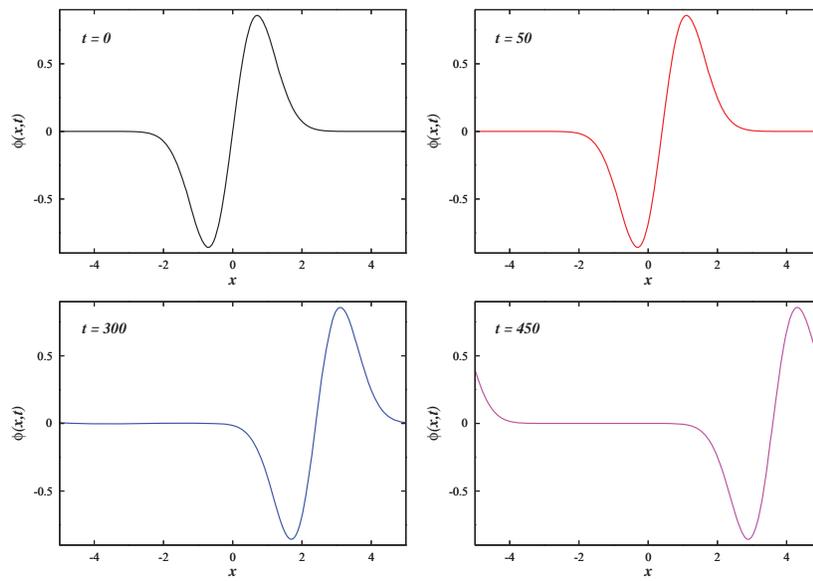
**Figura 3.12** : Evolución de la prueba de convergencia para el método Runge-Kutta (**RK3**) de tercer orden usando una función  $f(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$



**Figura 3.13:** Evolución de la solución numérica para la función  $f(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$ , usando (RK3), para cuatro distintos tiempos.



**Figura 3.14:** Evolución de la prueba de convergencia para el método Runge-Kutta (RK3) de tercer orden para la función  $\Pi$  usando una función  $f(x) = Ae^{-(\frac{x-x_0}{\sigma})^2}$



**Figura 3.15:** Evolución numérica para la función  $\Pi$ , de la función Gaussiana  $f(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$

Para establecer este método de Fourier, debemos empezar por expandir la solución de la ecuación (3.25) como una serie de Fourier, como sigue

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{v}}^n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.29)$$

donde la suma es sobre todos los vectores de onda que pueden ser representados en la malla. Ahora si sustituimos esta última ecuación en la ecuación original (3.25) encontramos que:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{G}(\Delta x, \Delta t, \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{v}}^n. \quad (3.30)$$

La matriz  $\mathbf{G}$  es conocida como la “*Matriz de Amplificación*”. La condición de estabilidad ahora corresponde a que ningún modo de Fourier sea amplificado, esto quiere decir, que para el radio espectral\* de  $\mathbf{G}$  esté sea menor o igual a uno. A esto se le conoce como la condición de estabilidad de Von Neumann[18, 1, 13].

Es importante remarcar que para poder usar este criterio de estabilidad hemos supuesto dos cosas: 1) que las condiciones de frontera sean periódicas ya que de otra manera no podríamos hacer una expansión de Fourier, y 2) que las entradas de la matriz  $\mathbf{B}$  sean constantes puesto que de otra manera no sería posible desacoplar los diferentes modos de Fourier.

Para ejemplificar el análisis de la estabilidad de Von Neumann, estudiaremos la estabilidad de la aproximación general implícita para la ecuación de onda introducida en la sección 3.2., la cual es como sigue:

$$\lambda^2 \delta_x^2 \left[ (\theta/2) (\phi_m^{n+1} + \phi_m^{n-1}) + (1 - \theta) \phi_m^n \right] - \delta_t^2 \phi_m^n = 0. \quad (3.31)$$

Ahora consideraremos el modo discreto de Fourier de la forma:

$$\phi_m^n = \xi^n e^{imk\Delta x}. \quad (3.32)$$

Después de desarrollar la ecuación (3.28) y sustituyendo la anterior en esta, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \lambda^2 \xi^n e^{imk\Delta x} \left[ \xi (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}) + \xi^{-1} (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}) \right] \\ & + \lambda^2 (1 - \theta) \xi^n e^{imk\Delta x} [e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}] - \xi^n e^{imk\Delta x} [\xi - 2\xi^{-1}] = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

luego de hacer un poco de álgebra llegamos a una ecuación cuadrática de para  $\xi$

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 \theta [\cos(k\Delta x) - 1] - 1) \xi^2 + \\ & + (2\lambda^2 (1 - \theta) [\cos(k\Delta x) - 1] + 2) \xi \\ & + (\lambda^2 \theta [\cos(k\Delta x) - 1] - 1) = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

---

\*En matemáticas, el radio espectral de una matriz es el valor más grande, en módulo, de entre todos los elementos de su espectro. Es decir los eigenvalores de la matriz, el cual se denota como  $\rho(\cdot)$  [18, 19]

donde los coeficientes están dados por:

$$A = \lambda^2 \theta [\cos(k\Delta x) - 1] - 1, \quad (3.35)$$

$$B = 2\lambda^2(1 - \theta) [\cos(k\Delta x) - 1] + 2, \quad (3.36)$$

$$C = \lambda^2 \theta [\cos(k\Delta x) - 1] - 1. \quad (3.37)$$

Entonces las dos raíces de la ecuación cuadrática son:

$$\xi_{\pm} = \frac{-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A}. \quad (3.38)$$

Ahora, del hecho de que  $A = C$  se puede mostrar fácilmente que al multiplicar  $\xi_+$  y  $\xi_-$  obtenemos:

$$\xi_+ \xi_- = 1 \quad (3.39)$$

Como queremos que sea estable, necesitamos que  $|\xi_{\pm}(k)| \leq 1$ . Entonces tomando la ecuación anterior, tenemos:

$$|\xi_+| |\xi_-| = 1 \quad (3.40)$$

Lo que nos lleva a que la única opción, para que este esquema sea estable es:

$$|\xi_+(k)| = |\xi_-(k)| = 1. \quad (3.41)$$

Esta condición de estabilidad implica que el esquema sea no disipativo, esto es, que los modos no sólo no crezcan sino que tampoco decaigan. Entonces para que la condición anterior se cumpla debemos pedir que:

$$B^2 - 4AC \leq 0. \quad (3.42)$$

Ahora, sustituyendo los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  en esta última ecuación, encontramos que la condición de estabilidad es:

$$\lambda^2(1 - 2\theta)[1 - \cos(k\Delta x)] - 2 \leq 0. \quad (3.43)$$

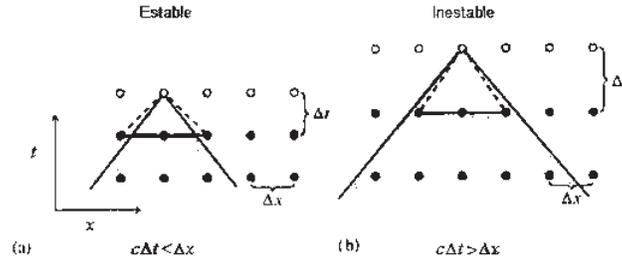
Ya que queremos que la condición se cumpla para toda  $k$ , entonces debemos considerar el caso cuando el lado izquierdo de la desigualdad alcanza su valor máximo. Si ahora tomamos  $\theta < 1/2$ , entonces alcanzará su máximo cuando  $k = \pi/\Delta x$ , para el cual la condición de estabilidad tomará la forma:

$$\lambda^2 \leq 1/(1 - 2\theta). \quad (3.44)$$

En el caso de un método explícito tenemos que  $\theta = 0$ , por lo que la condición de estabilidad se reduce entonces a la muy conocida condición *Courant-Friedrich-Lewy* (**CFL**)

$$c\Delta t \leq \Delta x. \quad (3.45)$$

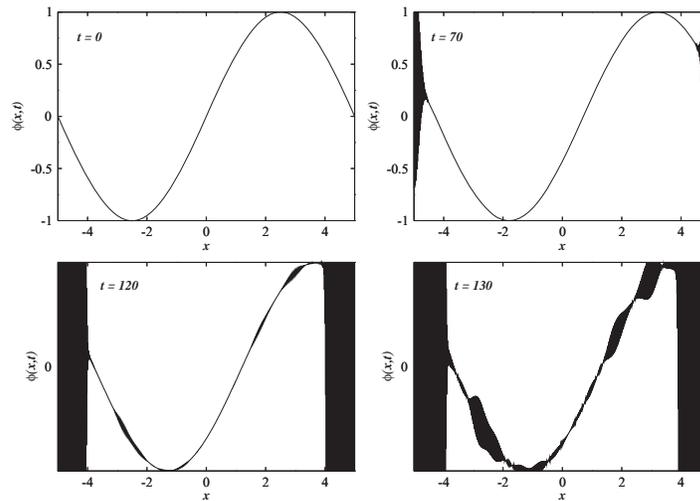
Para poder obtener la condición de estabilidad dada en (3.44), asumimos que  $\theta < 1/2$ . Si por otro lado tomamos  $\theta \geq 1/2$ , es fácil ver que la condición (3.42) siempre se satisface. Esto quiere decir que para un método implícito con  $\theta \geq 1/2$ , el método es estable para todo valor de  $\lambda$ , esto quiere decir que es “*incondicionalmente estable*” [18, 13, 15].



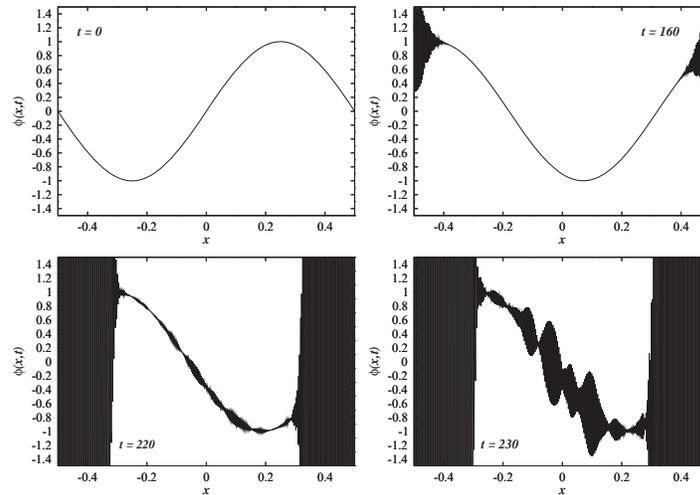
**Figura 3.16:** Condición de Estabilidad (CFL). Para  $c\Delta t \leq \Delta x$ , el dominio numérico de la dependencia es más grande que el dominio físico de la dependencia (región sombreada), y el sistema es estable. Para  $c\Delta t > \Delta x$  tenemos la situación opuesta, y el sistema es inestable.

De la condición de estabilidad de Von Neumann realizada para la aproximación general implícita, dada por la ecuación (3.44), donde si tomamos  $\theta = 0$  regresamos al método explícito descrito en la sección 3.1, podemos ver que el método es estable usando un factor de Courant  $\lambda \leq 1$ , lo cual resulta de igual manera para el método explícito Runge-Kutta, por lo que si tomamos un factor de Courant  $\lambda > 1$  entonces los métodos se volvería inestables. Las figuras (3.17) y (3.18) son los ejemplos numéricos realizados para los métodos explícito y Runge-Kutta, con las resoluciones dadas por  $\Delta x_1 = 0,01$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$  y  $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$ , pero tomando un factor de Courant  $\lambda > 1$ . Esto con la finalidad de mostrar que para un método explícito, como se vio en la sección 3.1 y en la sección 3.3, el código se vuelve inestable y explota después de un cierto tiempo. Esto se puede ver claramente en las figuras (3.17) y (3.18) las cuales representan el método explícito con un factor de Courant  $\lambda = 1,01$  y el método explícito Runge-Kutta con un factor de Courant  $\lambda = 1,1$  respectivamente. De las figuras se puede ver como después de un cierto tiempo los códigos se vuelven inestables en la frontera y luego de muy poco tiempo esa inestabilidad se propaga al resto de la onda.

Como pudimos ver a lo largo de este capítulo, los métodos descritos nos proporcionan una herramienta muy poderosa para resolver problemas que pueden ir desde los más sencillos hasta los más complejos como aquellos que no pueden ser resueltos analíticamente y es ahí donde entra el uso de los métodos numéricos. En los siguientes capítulos podremos ver algunas de sus aplicaciones para mostrar el poderío de estos métodos numéricos.



**Figura 3.17:** Solución a la ecuación de onda usando el método explícito a distintos tiempos con un factor de Courant  $\lambda = 1,01$ , muestra de que un método explícito como este es inestable para valores de Courant mayores a uno.



**Figura 3.18:** Solución a la ecuación de onda usando el método de integración Runge-Kutta a distintos tiempos con un factor de Courant  $\lambda = 1,1$ , muestra de que un método explícito como este es inestable para valores de Courant mayores a uno.

---

## Capítulo 4

# Ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1

---

### 4.1. Relatividad Numérica

Las ecuaciones de campo de Einstein para el campo gravitacional, se escriben de la siguiente manera:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica del espacio-tiempo,  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci de curvatura,  $R$  es la curvatura escalar y  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento de la materia que actúa como una fuente para el campo gravitacional[17, 20, 1].

Como es bien sabido, la elegancia y belleza de las ecuaciones de Einstein puede ser engañosa, ya que de hecho forman un sistema acoplado de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden altamente no lineales para la métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Más aún, están escritas de una manera completamente covariante, donde no hay una clara distinción entre el espacio y el tiempo, lo cual quiere decir que podemos escoger cualquier sistema coordinado para resolver las ecuaciones. Esta enorme libertad de “norma” puede ser muy útil al momento de buscar soluciones para estas ecuaciones, pero también puede complicar considerablemente la interpretación física de las soluciones encontradas.

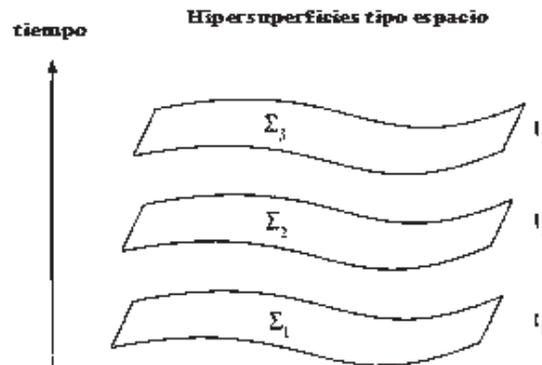
Esto no quiere decir que la Relatividad General ha sido incapaz de hacer predicciones de relevancia física. Al contrario, no nada mas nos ha provisto con una manera completamente diferente de ver el Universo Físico, si no que también ha hecho impresionantes predicciones en distintas áreas. Estas predicciones van desde los grandes y exitosos modelos cosmológicos hasta el profundo entendimiento del colapso gravitacional de objetos compactos. También ha pasado las llamadas pruebas “clásicas”, como el avance del perihelio de Mercurio, la desviación de la luz por el Sol, y algunos otros.

A pesar de sus grandes logros, la Relatividad General no ha sido capaz de describirlos escenarios astrofísicos más interesantes, donde la presencia de campos gravitacionales altamente dinámicos hace absolutamente imposible obtener soluciones analíticas. El reconocimiento del hecho de que solo a través de simulaciones numéricas podemos estudiar tales sistemas físicos complicados, dio origen al campo de la *Relatividad Numérica*.

Existen diferentes formalismos usados en relatividad numérica. En cada caso, lo que se necesita hacer para separar a las ecuaciones de campo de Einstein de una manera que nos permita dar cierta información inicial, y de ahí obtener la subsecuente evolución del campo gravitacional. Los diversos formalismos difieren en una manera específica en la cuál está separación se puede llevar a cabo. El formalismo 3+1 es uno de los más usados en relatividad numérica, pero no ciertamente el único. Este formalismo se refiere a la división del espacio-tiempo en tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal. Formalismos alternativos son conocidos como “*Formalismo Característico*”, y el “*Formalismo Conforme*”. Los distintos formalismos tienen ventajas y desventajas que dependen del sistema físico específico que se está estudiando [13, 1, 20].

## 4.2. El Formalismo 3+1

Para poder estudiar la evolución en el tiempo de un sistema físico, lo primero que se necesita hacer es formular tal evolución como un “*valor inicial*” o un “*problema de Cauchy*”. Dándose las condiciones iniciales y de frontera adecuados, las ecuaciones fundamentales deben predecir el futuro o pasado evolutivo del sistema.

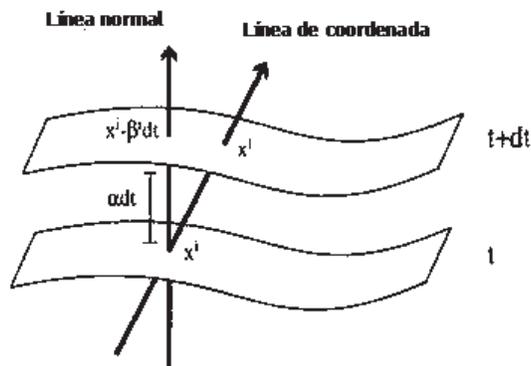


**Figura 4.1:** Foliación del Espacio-Tiempo en tres hipersuperficies del tipo espacio tres-dimensional.

Al momento de escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy, inmediatamente nos encontramos con una dificultad: las ecuaciones de campo están escritas en tal manera que el espacio y tiempo son tratados de igual manera. Esta “*covariancia*” es muy importante desde el punto de vista teórico, pero no permite pensar claramente acerca de la evolución del campo gravitacional en el tiempo. Por lo tanto, la primera cosa que debemos hacer para reescribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy es dividir los roles del espacio y tiempo de una manera clara. La formulación de relatividad general que resulta de esta segmentación es conocido como el formalismo 3+1[1, 13].

Empezamos considerando un espacio-tiempo con una métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Si tal espacio-tiempo puede ser completamente foliado (esto es como cortado en cortes tres-dimensionales) de tal manera que cada corte tres-dimensional es del tipo espacial, esto quiere decir que el vector normal a la superficie es del tipo tiempo, por lo que entonces decimos que el espacio es “*globalmente hiperbólico*”[20]. Un espacio-tiempo globalmente hiperbólico no tiene curvas del tipo temporal, lo cual quiere decir que esto no permite el viaje en el tiempo hacia el pasado. No todos los posibles espacio-tiempos tienen esta propiedad, pero el formalismo 3+1 asume que todos los espacio-tiempos físicamente razonables son de este tipo.

Una vez que tenemos el espacio-tiempo globalmente hiperbólico, por definición podemos cortar en una serie de hipersuperficies del tipo espacial tres-dimensional. Esta foliación, por supuesto, no es única. Podemos parametrizar la foliación con un parámetro  $t$  que identifica cada uno de los cortes tal que,  $t$  puede ser considerado como una “*función tiempo universal*”, pero debemos ser cuidadosos, ya que  $t$  no necesariamente coincide con el tiempo propio de cualquier observador,  $t$  es un tiempo coordenado. Consideremos una foliación específica y tomemos dos hipersuperficies adyacentes  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$ . La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre estas dos hipersuperficies puede ser determinada por los siguientes tres puntos:



**Figura 4.2:** Dos hipersuperficies adyacentes tipo espacio . La figura muestra las definiciones de la función de lapso  $\alpha$  y el vector de corrimiento  $\beta^i$ .

1. La métrica tri-dimensional  $\gamma_{ij}$  ( $i,j=1,2,3$ ) que mide distancias propias dentro de la hipersuperficie está dada por:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.2)$$

2. El lapso del tiempo propio entre ambas hipersuperficies medido por aquellos observadores que se mueven a lo largo de la dirección normal de las hipersuperficies (los observadores Eulerianos) es:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (4.3)$$

Aquí  $\alpha$  es conocida como la “función del lapso”.

3. La velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores Eulerianos y las líneas que corresponden a coordenadas espaciales constantes, se escribe de la siguiente manera:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j) dt. \quad (4.4)$$

El 3-vector  $\beta^i$  es conocido como el “vector de corrimiento”.

La manera en que el espacio-tiempo es foliado claramente no es único, y también en que las coordenadas espaciales se propagan de una hipersuperficie a la siguiente no es única. Esto significa que ambas, la función del lapso  $\alpha$  y el vector de corrimiento  $\beta^i$  pueden ser libremente especificadas. Estas funciones determinan nuestra elección del sistema de coordenadas y son conocidas como “funciones de norma”.

En términos de las funciones  $\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}$ , la métrica del espacio-tiempo toma la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.5)$$

donde se ha definido  $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$ . Esta última ecuación es conocida como la descomposición 3+1 de la métrica.

Más explícitamente tenemos la representación matricial de esta métrica y esta dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

De la expresión anterior se puede mostrar también que el elemento de volumen cuatro-dimensional en el formalismo 3+1 resulta estar dado por:

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}, \quad (4.8)$$

donde  $g$  y  $\gamma$  son los determinantes de  $g_{\mu\nu}$  y  $\gamma_{ij}$  respectivamente.

De la misma manera, no es difícil mostrar que las componentes del vector normal unitario  $n^\mu$  a la hipersuperficie están dados por:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0), \quad n^\mu n_\mu = -1. \quad (4.9)$$

Notemos que este vector normal unitario corresponde por definición a la 4-velocidad de los observadores Eulerianos.

### 4.3. Curvatura Extrínseca

Cuando hablamos acerca de hipersuperficies espaciales que forman la foliación del espacio-tiempo, uno necesita distinguir entre la “*curvatura intrínseca*” de aquellas hipersuperficies que vienen de su geometría interna, y la “*curvatura extrínseca*” que viene de la forma en la que esas hipersuperficies están encajonadas en el espacio cuatro-dimensional.

La curvatura intrínseca esta dada por el tensor de Riemann tres-dimensional definido en términos de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . Por otro lado la curvatura extrínseca esta definida en términos de lo que le pasa al vector  $n^\alpha$  mientras es transportado paralelamente de un punto a otro en la hipersuperficie. En general, uno encontrará que mientras transportamos paralelamente este vector hacia un punto cercano, el nuevo vector ya no será normal a la hipersuperficie. El “*tensor de curvatura extrínseca*”  $K_{\alpha\beta}$  es una medida del cambio del vector normal bajo un transporte paralelo. Por ejemplo: una hoja de papel tiene curvatura intrínseca y extrínseca igual a cero, y un cilindro que se obtiene de enrollar la hoja tiene la misma curvatura intrínseca (cero) pero ahora la extrínseca es diferente a cero.

Para poder definir la curvatura extrínseca, debemos introducir el “*operador de proyección*”  $P_\beta^\alpha$  sobre la hipersuperficie espacial como sigue:

$$P_\beta^\alpha \equiv \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta, \quad (4.10)$$

donde  $n^\alpha$  es el vector normal unitario. Es fácil mostrar que para cualquier vector  $v^\alpha$  tenemos que:

$$(P_\beta^\alpha v^\beta) n_\alpha = 0, \quad (4.11)$$

Esto significa que cualquier vector proyectado sobre la hipersuperficie será ortogonal a  $n^\alpha$ . También es posible proyectar los tensores de rango arbitrario, simplemente se tiene que contraer los índices libres con el operador de proyección, de esta manera tenemos:

$$PT_{\alpha\beta} \equiv P_\alpha^\mu P_\beta^\nu T_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Usando el operador de proyección, el tensor de curvatura extrínseca esta definido como:

$$K_{\alpha\beta} \equiv -P\nabla_\alpha n_\beta = -(\nabla_\alpha n_\beta + n_\alpha n^\mu \nabla_\mu n_\beta), \quad (4.13)$$

donde  $\nabla_\alpha$  es la derivada covariante, que esta dada en términos de los símbolos de Christoffel como:

$$\nabla_\alpha n_\beta = \partial_\alpha n_\beta - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda n_\lambda. \quad (4.14)$$

Como se definió anteriormente  $K_{\alpha\beta}$  puede mostrarse que es simétrico:  $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$ .

Sustituyendo ahora la forma explícita del vector normal de la ecuación (4.9) en la definición de la curvatura extrínseca, uno puede demostrar que  $K_{ij}$  esta dado en términos de la métrica espacial como:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} [-\partial_t \gamma_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i], \quad (4.15)$$

donde  $D_i$  representa la derivada covariante tres-dimensional, esto es, la que esta asociada a la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . Entonces la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i. \quad (4.16)$$

Podemos ver entonces que la curvatura extrínseca  $K_{ij}$  nos da el cambio en el tiempo de la métrica espacial.

#### 4.4. Ecuaciones de Einstein en el Formalismo 3+1

Para poder escribir las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1, usaremos el operador de proyección definido anteriormente, junto con el vector normal para poder separar las ecuaciones de Einstein en tres grupos los cuales se enumeran a continuación:

1. Proyección normal (1 ecuación):

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.17)$$

2. Proyecciones Mixta (3 ecuaciones):

$$P[n^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})] = 0. \quad (4.18)$$

3. Proyección sobre la hipersuperficie (6 ecuaciones):

$$P(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.19)$$

Para poder reescribir este grupo de ecuaciones en el lenguaje 3+1 se necesita de un extenso proceso algebraico. De la proyección normal, obtenemos la siguiente ecuación:

$$R^{(3)} + (tr K)^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (4.20)$$

donde  $R^{(3)}$  es el escalar de Ricci asociado con la 3-métrica,  $trK \equiv \gamma^{ij}K_{ij}$  es la traza del tensor de curvatura extrínseco, y  $\rho$  es la densidad de energía de la materia medida por los observadores Eulerianos, la cual está definida por:

$$\rho \equiv n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (4.21)$$

La ecuación (4.20) no contiene derivadas temporales. Es por esto que la ecuación no es una ecuación dinámica es más bien una constricción del sistema. Como esta relacionada con la densidad de energía, es conocido como la constricción “*Hamiltoniana*” o de “*energía*”.

De la proyección mixta de las ecuaciones de Einstein se encuentra que:

$$D_j[K^{ij} - \gamma^{ij}trK] = 8\pi j^i, \quad (4.22)$$

donde ahora  $j^i$  es el flujo de momento de la materia medido por los observadores Eulerianos, la cual esta dada por:

$$j^i \equiv P_\beta^i(n_\alpha T^{\alpha\beta}). \quad (4.23)$$

Se puede ver de nuevo que la ecuación (4.22) no tiene derivadas temporales, por lo que sería otra constricción (de hecho son tres constricciones). Estas ecuaciones son conocidas como constricciones de “*momento*”.

La existencia de las constricciones implica que en relatividad general no es posible especificar arbitrariamente las 12 cantidades dinámicas  $\gamma_{ij}, K_{ij}$  como condiciones iniciales. Los datos iniciales ya deben de satisfacer las constricciones, de otra manera no estaríamos resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Las 6 ecuaciones restantes son obtenidas de la proyección sobre la hipersuperficie y contienen la verdadera dinámica del sistema. Estas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^a \partial_a K_{ij} + K_{ia} \partial_j \beta^a + K_{ja} \partial_i \beta^a \\ & - D_i D_j \alpha + \alpha [R_{ij}^{(3)} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} trK] \\ & + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(trS - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $S_{ij}$  es el tensor de tensión de la materia, definido como:

$$S_{ij} \equiv PT_{ij} \quad (4.25)$$

Las ecuaciones (4.16) y (4.24) forman un sistema cerrado de las ecuaciones de evolución y son conocidas como las ecuaciones Arnowitt-Deser-Misner (ADM). Estas ecuaciones finalmente nos permiten escribir las ecuaciones de Einstein para la relatividad general como un problema de Cauchy[15, 1].

Es importante notar que no tenemos ecuaciones de evolución para las cantidades de norma  $\{\alpha, \beta^i\}$ . Como se menciono anteriormente, estas cantidades representan nuestra libertad para elegir las coordenadas y por lo tanto pueden ser libremente escogidas[4, 1].

También es posible mostrar que usando las identidades de Bianchi, las ecuaciones de evolución garantizan que si las construcciones se satisfacen inicialmente, entonces continuarán satisfechas durante la evolución.[17, 20, 1]

## 4.5. Concepto de Hiperbolicidad

En esta sección discutiremos brevemente al concepto de hiperbolicidad de los sistemas de ecuaciones de evolución, un concepto que resulta ser crucial para el análisis de las propiedades matemáticas de los sistemas de ecuaciones de evolución usados en distintas áreas de la física, en particular en relatividad numérica.

Consideremos un sistema de ecuaciones de evolución en una dimensión espacial de la forma:

$$\partial_t u_i + \partial_x F_i = q_i \quad i \in 1, \dots, N_u, \quad (4.26)$$

donde  $F_i$  y  $q_i$  son funciones arbitrarias, posiblemente no lineales, de las  $u$ 's pero no de sus derivadas. Ahora, el término  $\partial_x F_i$  de la ecuación anterior lo podemos escribir en términos de una matriz. Utilizando la regla de la cadena tenemos:

$$\partial_x F_i = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} = M_{ij} \partial_x u_j, \quad (4.27)$$

donde  $M_{ij} \equiv \partial F_i / \partial u_j$  es la llamada “matriz Jacobiana”, por lo que la ecuación (4.26) se puede reescribir la siguiente manera:

$$\partial_t u_i + \sum_j M_{ij} \partial_x u_j = q_i \quad i \in 1, \dots, N_u, \quad (4.28)$$

Es importante mencionar que la mayoría de las ecuaciones diferenciales de evolución en física pueden ser escritas de esta manera. En el caso cuando hay derivadas de orden mayor, uno siempre puede definir variables auxiliares para obtener un sistema de primer orden. Sean  $\lambda_i$  los eigenvalores de la matriz Jacobiana  $M$ . El sistema de ecuaciones de evolución es llamado “hiperbólico” si todas las  $\lambda_i$  resultan ser funciones reales. Además el sistema es llamada “fuertemente hiperbólico” si existe un conjunto completo de eigenvectores. En el caso en el que los eigenvalores son reales, pero el conjunto completo de eigenvectores no existe, el sistema es llamado “débilmente hiperbólico”.

Asumamos ahora que tenemos un sistema fuertemente hiperbólico. En este caso, definimos las “eigenfunciones”  $\omega_i$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = R\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = R^{-1}\mathbf{u}, \quad (4.29)$$

donde  $R$  es la matriz columna de eigenvectores  $\mathbf{e}_i$ . Es posible mostrar que la matriz  $R$  es tal que:

$$RMR^{-1} = \Lambda \quad (4.30)$$

con  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ . Esto quiere decir que la matriz  $R$  diagonaliza a la matriz Jacobiana  $M$ , lo cual es esencialmente un cambio de los vectores base.

Las ecuaciones de evolución para los eigenfunciones resultan ser:

$$\partial_t \omega_i + \lambda_i \partial_x \omega_i = q'_i, \quad (4.31)$$

con  $q'_i$  funciones de las  $\omega$ 's pero no de sus derivadas.

La hiperbolicidad es de vital importancia en el estudio de las ecuaciones de evolución asociadas con un problema de Cauchy. En un sentido físico, la hiperbolicidad implica que un sistema de ecuaciones es causal y local, esto es que la solución en cierto punto dado del espacio-tiempo depende solo de la información dentro de una región compacta al pasado de aquel punto, el llamado “*cono característico*” o cono de luz en relatividad.

El concepto de hiperbolicidad puede ser fácilmente extendido a un sistema tres-dimensional considerando las ecuaciones de la forma:

$$\partial_t u_i + \partial_x F_i^x + \partial_y F_i^y + \partial_z F_i^z = q_i \quad i \in 1, \dots, N_u, \quad (4.32)$$

donde las tres matrices Jacobianas están dadas por  $M_{ij}^k = \partial F_i^k / \partial u_j$ , donde  $(k = x, y, z)$ .

Para mostrar un ejemplo simple de hiperbolicidad, consideraremos la ampliamente mencionada, ecuación de onda en una dimensión como sigue:

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0, \quad (4.33)$$

donde  $\phi$  es la función de onda y  $c$  la velocidad de la onda. Esta ecuación es una ecuación de segundo orden, pero, como hicimos anteriormente, podemos transformarla en un sistema de ecuaciones de primer orden introduciendo las siguientes variables auxiliares:

$$\Pi \equiv \partial_t \phi, \quad \psi \equiv \partial_x \phi. \quad (4.34)$$

La ecuación de onda, en términos de estas variables, se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\partial_t \phi = \Pi, \quad \partial_t \Pi - c^2 \partial_x \psi = 0, \quad \partial_t \psi - \partial_x \Pi = 0, \quad (4.35)$$

donde la primera ecuación es justamente la definición de  $\Pi$ , la segunda ecuación es la ecuación de onda, y la tercera ecuación es el requerimiento de que las derivadas parciales de  $\phi$  deben conmutar. Este último sistema de ecuaciones, claramente se puede ver que toma la forma de la ecuación (4.26). Por lo que comparando con las ecuaciones (4.26) y (4.33) y escogiendo:

$$u_i = \begin{pmatrix} \Pi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos la matriz jacobiana para la ecuación de onda, como sigue:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Ahora si diagonalizamos la matriz jacobiana encontramos que los eigenvalores son reales y están dados por  $\lambda_{\pm} = \pm c$ , esto quiere decir que las ondas pueden viajar en ambas direcciones, (a la izquierda y a la derecha), con velocidad  $c$ . Ahora con estos eigenvalores podemos obtener los eigenvectores, los cuales forman un conjunto completo por lo que en adición a los eigenvalores reales, tenemos que el sistema es fuertemente hiperbólico. Los eigenvectores resultan ser  $\vec{e}_{\pm} = (\mp c, 1)$ , de los cuales se puede encontrar fácilmente que las eigenfunciones, están dadas por la ecuación:

$$\mathbf{w} = R^{-1}\mathbf{u}. \quad (4.37)$$

Para encontrar la matriz inversa  $R^{-1}$ , es necesario construir la matriz  $R$  por medio de los eigenvectores, obteniendo como resultado:

$$R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/c & 1 \\ 1/c & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Una vez obtenida la matriz inversa, procedemos a calcular las eigenfunciones con la ecuación (4.37) la cual nos queda como sigue:

$$\omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/c & 1 \\ 1/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

De esta última ecuación encontramos que las eigenfunciones son:

$$\tilde{\omega}_+ = 1/2\left(-\frac{\Pi}{c} + \psi\right) \Rightarrow -2c\tilde{\omega}_+ = \Pi - c\psi, \quad (4.40)$$

$$\tilde{\omega}_- = 1/2\left(\frac{\Pi}{c} + \psi\right) \Rightarrow -2c\tilde{\omega}_- = \Pi + c\psi. \quad (4.41)$$

Ahora si llamamos  $\omega_+ = -2c\tilde{\omega}_+$  y  $\omega_- = 2c\tilde{\omega}_-$  tenemos que las eigenfunciones son  $\omega_{\pm} = \Pi \mp c\psi$ . Entonces las ecuaciones de evolución para las eigenfunciones son:

$$\partial_t \omega_{\pm} \pm c \partial_x \omega_{\pm} = 0. \quad (4.42)$$

En estas últimas ecuaciones podemos ver que las eigenfunciones se propagan en direcciones opuestas independientemente de cada una.

## 4.6. Ecuaciones de Einstein en una Dimensión Espacial y una Dimensión Temporal

En esta sección tomaremos como ejemplo de simulación en relatividad numérica, las ecuaciones de Einstein en 1+1, esto es, una sola dimensión espacial y una dimensión temporal. Ahora la geometría diferencial nos dice que para un espacio dos-dimensional (el que estamos considerando, o sea, una superficie),

el tensor de curvatura de Riemann tiene sólo una componente independiente, dada esencialmente por la curvatura Gaussiana de la superficie. Más aún, si asumimos que estamos en el vacío, la ecuaciones de campo de Einstein nos dicen que ésta única componente debe ser cero, lo cual nos lleva al muy conocido caso de que no hay gravedad en 1+1 dimensiones. Entonces uno podría asumir que el estudio de este sistema es completamente trivial y que no hay nada mas que aprender de él. Sin embargo, resulta que este sistema es ideal para el estudio de las propiedades de distintas condiciones de norma. Esto es porque, aún si en una dimensión espacial estamos limitados al espacio de Minkowski, no hay nada que nos force a usar las coordenadas usuales. De hecho podemos tener evoluciones altamente no triviales de las coordenadas que se reflejarán en la evolución de la métrica espacial y la curvatura extrínseca. Empezaremos por considerar la condición de foliación, para eso utilizaremos la familia de condiciones de foliación Bona-Masso[5], la cual es:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (4.43)$$

donde  $f(\alpha)$  la consideraremos una constante y la traza de la curvatura extrínseca esta dada por  $K = K^x_x = \gamma^{xx} K_{xx}$ . Ahora como ya vimos en la sección 3.2, que la forma general de la métrica del espacio-tiempo en 3+1 es como se indica en la ecuación (4.5), donde hemos escogido el vector de corrimiento  $\beta^x$  igual a cero y la 3-métrica  $\gamma_{xx} = g$ , por lo que para nuestro caso en 1+1 tenemos:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g dx^2. \quad (4.44)$$

Ahora calculamos los símbolos de Christoffel con la 3-métrica, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= 1/2 \gamma^{kl} (\partial_i \gamma_{jl} + \partial_j \gamma_{il} - \partial_l \gamma_{ij}) \\ \Gamma_{xx}^x &= 1/2 \gamma^{xx} (\partial_x g + \partial_x g - \partial_x g) \\ &= 1/2 \gamma^{xx} \partial_x g \end{aligned} \quad (4.45)$$

El tensor de Ricci está dado por:

$$R_{ij} = R_l^{ilj} = \partial_l \Gamma_{ij}^l - \partial_j \Gamma_{il}^l + \Gamma_{ml}^l \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{il}^m, \quad (4.46)$$

que para nuestro caso el tensor de Ricci es igual a cero  $R_{xx} = 0$ .

Ahora, usaremos las ecuaciones para la descomposición 3+1 dadas en las ecuaciones (4.16) y (4.24), conocidas como las ecuaciones de evolución de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)[1, 3], las cuales son:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^a \partial_a K_{ij} + K_{ia} \partial_j \beta^a + K_{ja} \partial_i \beta^a \\ &\quad - D_i D_j \alpha + \alpha [R_{ij}^{(3)} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} \text{tr} K] \\ &\quad + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (\text{tr} S - \rho) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

De la ecuación (4.47) obtenemos una ecuación de evolución para  $g$  que para nuestro caso es como sigue:

$$\partial_t g = -2\alpha K g, \quad (4.49)$$

y de la ecuación (4.48) tenemos que para la descomposición 1+1 la ecuación nos queda de la siguiente forma:

$$\partial_t K_{xx} = -D_x D_x \alpha + \alpha [-2K_{xx} K^x_x + K_{xx} K]. \quad (4.50)$$

Entonces desarrollando término a término y definiendo  $D_\alpha \equiv \frac{\partial_x \alpha}{\alpha}$  y  $Dg \equiv \frac{\partial_x g}{g}$  tenemos como resultado una ecuación de evolución para  $K$ , que es como sigue:

$$\partial_t K + \partial_x \left( \alpha \frac{D_\alpha}{g} \right) = \alpha \left[ K^2 - \frac{D_\alpha Dg}{2g} \right]. \quad (4.51)$$

Ahora tenemos que las constricción Hamiltoniana del sistema es:

$$R^{(3)} + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho = H, \quad (4.52)$$

donde sabemos que  $R^{(3)} = 0$ , y además  $K_{ij} K^{ij} = K_{xx} K^{xx} = K^x_x \gamma_{xx} K^x_x \gamma^{xx} = K^2$  por lo que para 1+1 tenemos que la constricción Hamiltoniana es  $H = 0$ , lo cual siempre se cumple para el caso 1+1. La constricción de momento está dada por la ecuación (4.22). Desarrollándola para 1+1 tenemos que la constricción de momento también es cero.

Ahora necesitamos ecuaciones de evolución para las variables  $Dg$  y  $D_\alpha$ . Para  $D_\alpha$  se puede obtener fácilmente de la ecuación (4.43) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t \alpha}{\alpha} + \alpha f K &= 0, \\ \partial_t \ln \alpha + \alpha f K &= 0, \\ \partial_x (\partial_t \ln \alpha + \alpha f K) &= 0, \\ \partial_t D_\alpha + \partial_x (\alpha f K) &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Haciendo un cálculo similar tenemos que para la variable  $Dg$ , la ecuación de evolución es:

$$\partial_t Dg + \partial_x (2\alpha K) = 0. \quad (4.54)$$

De la ecuación (4.52) resulta que la ecuación de evolución para  $K$  se puede reescribir como una ley de conservación de la siguiente manera:

$$\partial_t (g^{1/2} K) + \partial_x (\alpha D_\alpha / g^{1/2}) = 0. \quad (4.55)$$

Si ahora definimos el vector  $\vec{v} \equiv (D_\alpha, Dg, \tilde{K})$ , con  $\tilde{K} \equiv g^{1/2} K$ , entonces las ecuaciones de evolución para las variables de primer orden, pueden ser reescritas como un sistema conservativo de la forma

$$\partial_t \vec{v} + \partial_x (\mathbf{M} \vec{v}) = 0, \quad (4.56)$$

con la matriz característica  $\mathbf{M}$  dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha f/g^{1/2} \\ 0 & 0 & 2\alpha/g^{1/2} \\ \alpha/g^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

La matriz característica tiene los siguientes eigenvalores:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm} = \pm\alpha\sqrt{\frac{f}{g}}, \quad (4.58)$$

con los eigenvectores correspondientes

$$\vec{e}_0 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_{\pm} = (f, 2, \pm f^{1/2}). \quad (4.59)$$

Ya que los eigenvalores son reales para  $f > 0$  y los eigenvectores son linealmente independientes, el sistema (4.57) es fuertemente hiperbólica. Las eigenfunciones están dadas por:

$$\vec{\omega} = \mathbf{R}^{-1}\vec{v}, \quad (4.60)$$

con  $\mathbf{R}$  la matriz columna de los eigenvectores. Encontramos que (usando un elección adecuada de normalización):

$$\omega_0 = D_{\alpha}/f - Dg/2, \quad \omega_{\pm} = \tilde{K} \pm D_{\alpha}/f^{1/2}, \quad (4.61)$$

la cual puede ser fácilmente invertida para darnos lo siguiente:

$$\tilde{K} = \frac{(\omega_+ + \omega_-)}{2}, \quad (4.62)$$

$$D_{\alpha} = \frac{f^{1/2}(\omega_+ - \omega_-)}{2}, \quad (4.63)$$

$$Dg = \frac{(\omega_+ - \omega_-)}{f^{1/2}} - 2\omega_0. \quad (4.64)$$

Claramente, la eigenfunción  $\omega_0$  se “propaga” con velocidad cero, mientras que las otras dos se propagan con la “velocidad de norma”  $\lambda_{\pm}^f = \pm\alpha\sqrt{f/g}$ . Dada una perturbación inicial podemos esperar que en general esto de lugar a dos pulsos que se mueven en direcciones contrarias.

Es importante notar que con las eigenfunciones escaladas, como antes se mencionó, sus ecuaciones de evolución también resultan ser conservativas y tiene la siguiente forma simple:

$$\partial_t \vec{\omega} + \partial_x (\mathbf{\Lambda} \vec{\omega}) = 0, \quad (4.65)$$

con  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$ . Sin embargo, si las eigenfunciones son reescaladas de la forma  $\omega'_i = F_i(\alpha, g)\omega_i$ , entonces las ecuaciones de evolución para  $\omega'_i$  en general no serán conservativas y se presentarán fuentes no triviales. El punto crucial es que existe de hecho una normalización para la cuál las ecuaciones son conservativas, a saber la que se dio en la ecuación (4.62).

Ahora consideraremos algunos ejemplos numéricos. Para tener una evolución no trivial, tomamos la información inicial que corresponde a una superficie curva en el espacio-tiempo de Minkowski dado en términos de las coordenadas usuales  $(t_M, x_M)$  como:

$$t_M = h(x_M) \quad (4.66)$$

Si tomamos la coordenada espacial  $x$  de tal manera que inicialmente coincide con la coordenada de Minkowski  $x_M$ , entonces no es difícil mostrar que los valores iniciales para la métrica y la curvatura extrínseca son:

$$g = 1 - h'^2 \quad \Rightarrow \quad Dg = -2h'h''/g, \quad (4.67)$$

$$K \equiv K^x_x = -h''/g^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{K} = -h''/g. \quad (4.68)$$

Para completar la información inicial, tomamos como lapso inicial  $\alpha = 1$ .

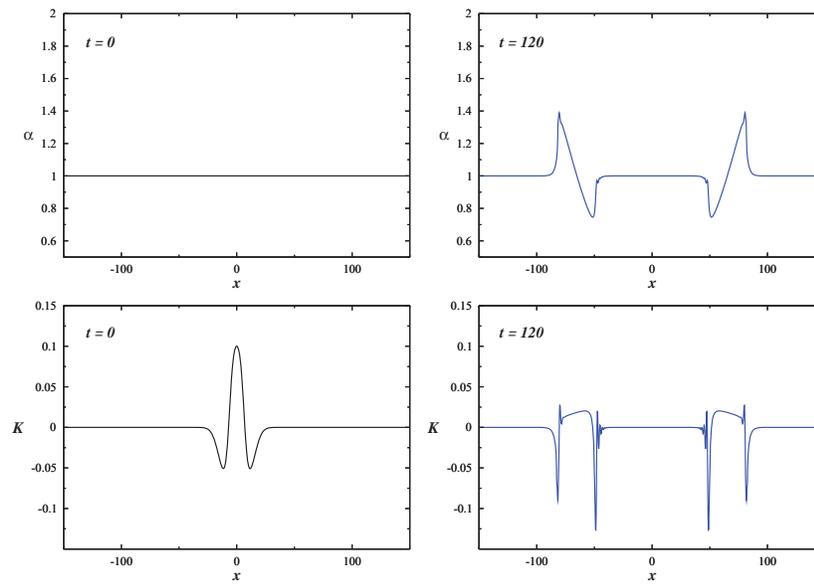
En las simulaciones que se presentan a continuación, la función  $h(x)$  tiene un perfil Gaussiano como sigue:

$$h = Ae^{(x-x_c)^2/\sigma^2}. \quad (4.69)$$

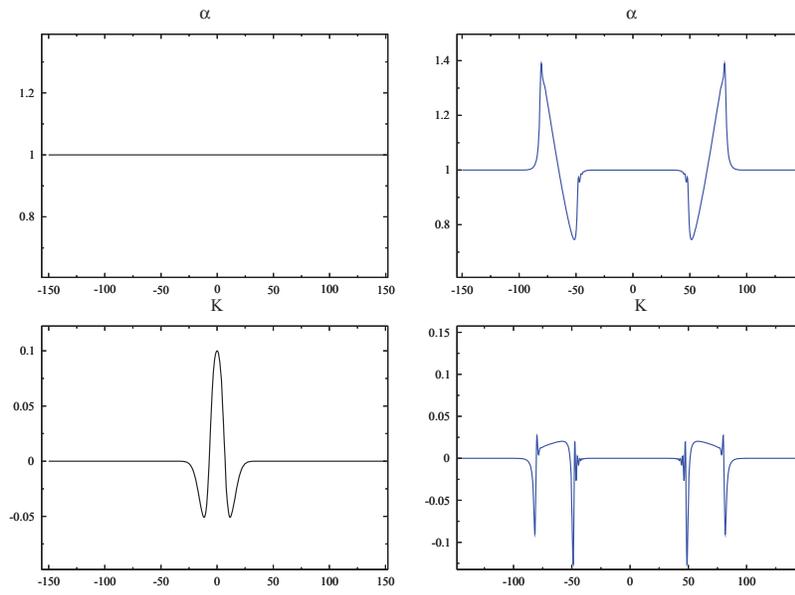
Particularmente tomaremos  $A = 5$ ,  $\sigma = 10$  y centraremos la perturbación inicial en medio del dominio computacional. En todas las simulaciones mostradas aquí, también se usará, un paso temporal y un intervalo espacial dados por  $\Delta t = 0,125$  y  $\Delta x = 0,25$ , y un dominio computacional con intervalo de  $[-150, 150]$ .

Primero consideraremos el caso  $f = 1$ , a esto se le llama la foliación armónica. En la figura (4.3) se muestran los datos iniciales para  $\alpha$  y  $K$ , y sus valores finales a un tiempo  $t = 300$ . De esta misma figura podemos ver que el pulso inicial se ha separado en dos pulsos más pequeños que viajan en direcciones opuestas con una velocidad constante y manteniendo su forma.

Cuando  $f$  es una constante diferente de 1, la situación ya no es tan simple. La perturbación inicial se separa en dos pulsos como antes, pero estos dos pulsos no mantienen su forma mientras se propagan, y de hecho después de algún tiempo dejan de ser curvas suaves. Esto se puede ver como ejemplo, en la figura (4.4) que muestra resultados de una simulación con  $f = 1,69$ . A un tiempo  $t = 120$  se puede ver que los pulsos en la función de lapso han desarrollado unos gradientes muy grandes al frente y atrás, mientras los pulsos en la curvatura extrínseca  $K$  han desarrollado unos picos muy pronunciados. A esto se le conoce como choques de norma y se producen por el hecho de que las coordenadas se cruzan mostrando que aún en un espacio-tiempo tan simple una mala elección de coordenadas puede hacer que nuestra simulación numérica falle. Esto nos muestra la importancia que tiene la elección de coordenadas en relatividad numérica. Si en un espacio-tiempo tan sencillo como este, podemos desarrollar discontinuidades que hacen que nuestra simulación falles, en espacios-tiempos más complicados debemos de tener cuidado de que esto no pase.



**Figura 4.3:** Evolución del lapso  $\alpha$  y la traza de la curvatura extrínseca  $K$  para una simulación con  $f = 1$ . En la columna izquierda se dan los datos iniciales y en la derecha se dan los valores a un tiempo  $t = 300$ . Podemos ver que la evolución se desarrolla sin ningún problema



**Figura 4.4:** Evolución del lapso  $\alpha$  y la traza de la curvatura extrínseca  $K$  para una simulación con  $f = 1,69$ . En la columna izquierda se dan los datos iniciales y en la derecha se dan los valores a un tiempo  $t = 120$ . Podemos ver que la evolución desarrolla discontinuidades y falla después de un tiempo finito. Estas discontinuidades se presentan debido a que las coordenadas se cruzan.

---

## Capítulo 5

# Relatividad Numérica en Simetría Esférica

---

### 5.1. Espacio-Tiempos con Simetría Esférica

Como segundo ejemplo de una aplicación en relatividad numérica, consideraremos el caso de espacio-tiempos con simetría esférica, un caso que, a pesar de ser relativamente simple, tiene muchas aplicaciones físicas importantes. Este caso es interesante por varias razones. En primer lugar, a pesar de que ya representa un espacio-tiempo tridimensional completo (contrario al caso 1+1 estudiado en el capítulo anterior), las variables dinámicas dependen solo de la coordenada radial, por lo que los códigos numéricos siguen siendo solo unidimensionales. Debido a esto, es estándar en relatividad numérica referirse a los códigos para espacios-tiempo con simetría esférica como códigos unidimensionales. Por otro lado, muchos sistemas astrofísicos interesantes, en particular estrellas y agujeros negros, tienen como una muy buena aproximación simétrica esférica, de modo que la simetría esférica ya nos permite estudiar problemas físicos interesantes tales como la estabilidad de estrellas, colapso gravitacional, dinámica de horizontes, etc. Quizás la desventaja principal de la simetría esférica es el hecho de que en tal caso no hay ondas gravitacionales, por lo que estaríamos perdiendo un elemento clave de la relatividad general. Pero aún así fue precisamente con la simetría esférica que se hizo la primera gran contribución de la relatividad numérica para el entendimiento de la relatividad general, la cuál fue: el descubrimiento de fenómenos críticos en el colapso gravitacional asociados con la formación de agujeros negros por Choptuik[6].

Cuando se desarrollan códigos de simetría esférica en relatividad numérica, la singularidad de las coordenadas en el origen puede ser una fuente de problemas serios causados por la falta de regularidad de las variables geométricas en el origen. El problema surge por que la presencia de los términos en las

ecuaciones de evolución va como  $1/r$  cerca del origen. La regularidad de la métrica garantiza la exacta cancelación de tales términos en el origen, asegurando así el buen comportamiento de las soluciones. Sin embargo, la exacta cancelación, a pesar de ser cierto para soluciones analíticas, usualmente falla para las soluciones numéricas. Se encuentra entonces que el término  $1/r$  no se cancela y la solución numérica no se comporta bien en  $r = 0$ . Esto quiere decir que no solo no falla en converger en el punto de origen, sino que también puede resultar fácil ser violentamente inestable en solo pocos pasos de tiempo[3, 4].

La manera usual de tratar con este problema es a través del uso de la llamada norma *areal* (o *radial*), donde la coordenada radial  $r$  se escoge de tal manera que el área propia de las esferas con radio constante  $r$  siempre es  $4\pi r^2$ . Mas aún, si uno escoge que el vector de corrimiento sea cero, uno termina con la norma *polar/areal* estándar, para el cuál el vector del lapso es forzado para satisfacer una cierta ecuación diferencial ordinaria en  $r$ . El nombre de *polar* viene del hecho de que la elección para esta norma solo hay una componente no cero en el tensor de curvatura extrínseca, el cual es  $K_{rr}$ . Para la norma *polar/areal* el problema de obtener la exacta cancelación del término  $1/r$  se reduce imponiendo la condición de frontera  $g_{rr} = 1$  en  $r = 0$ , la cuál puede ser fácilmente hecha si uno resuelve para  $g_{rr}$  de la restricción hamiltoniana (que en este caso es una ecuación diferencial ordinaria en  $r$ ) e ignorando su ecuación de evolución. Si se hace esto en el vacío, uno termina inevitablemente con un espacio-tiempo de Minkowski en las coordenadas usuales (se puede también recuperar Schwarzschild trabajando en coordenadas isotrópicas y factorizando el factor analítico conforme).

La principal desventaja de la aproximación estándar es que la elección de norma ha sido completamente agotada. En particular, la norma *polar/areal* no puede penetrar horizontes aparentes, ya que dentro de un horizonte aparente es imposible mantener las áreas de esferas fijas sin un vector de corrimiento no trivial. Sin embargo la norma *polar/areal* ha sido usada satisfactoriamente incluso en el estudio de colapso crítico hacia un agujero negro, donde la presencia del agujero negro es identificada por el familiar “colapso del lapso” incluso sin ningún horizonte aparente puede ser encontrado[6].

Aun así, uno quisiera tener una manera de tratar con los temas de regularidad que permitan hacer elecciones de norma más genéricas, ya se porque uno este interesado en estudiar la región dentro de un horizonte aparente o porque uno quiere probar algunas condiciones de norma interesantes en el caso simple de simetría esférica.

Un fenómeno en particular interesante que puede ser estudiado en simetría esférica es el colapso gravitacional de diferentes tipos de materia, y la subsiguiente formación de agujeros negros. Para empezar nuestro análisis, primero escribimos la forma general de la métrica espacial en simetría esférica de la siguiente manera:

$$dl^2 = A(r, t)dr^2 + r^2 B(r, t)d\Omega^2, \quad (5.1)$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones positivas y donde  $d\Omega^2$  es el elemento estándar de ángulo sólido  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Nótese que ya se ha factorizado la dependencia en  $r^2$  de las funciones métricas angulares.

Esto tiene la ventaja de hacer explícita la dependencia en  $r$  de las cantidades geométricas y hacer el procedimiento de regularización más sencillo. Como estamos tratando con las ecuaciones Einstein a primer orden, se sigue con un procedimiento similar al utilizado en el capítulo anterior, en el formalismo 1+1. Por lo que introduciremos las siguientes cantidades auxiliares:

$$D_A \equiv \partial_r \ln A, \quad D_B \equiv \partial_r \ln B. \quad (5.2)$$

También trabajaremos con los componentes mezclados de la curvatura extrínseca:  $K_A \equiv K^r_r$ ,  $K_B \equiv K^\theta_\theta = K^\phi_\phi$ .

De hecho, existen dos diferentes tipos de condiciones de regularidad que las variables  $\{A, B, D_A, D_B, K_A, K_B\}$  deben satisfacer en  $r = 0$ . El primer tipo de condiciones son simples, aquellas impuestas por el requerimiento de que las diferentes variables deberían de estar bien definidas en el origen, e implican el siguiente comportamiento para  $r$  pequeña:

$$A \sim A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (5.3)$$

$$B \sim B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (5.4)$$

$$D_A \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (5.5)$$

$$D_B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (5.6)$$

$$K_A \sim K_A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (5.7)$$

$$K_B \sim K_B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (5.8)$$

con  $\{A^0, B^0, K_A^0, K_B^0\}$  quizás funciones del tiempo, pero no de  $r$ . Estas condiciones de regularización son de hecho muy fáciles de implementar numéricamente. Por ejemplo, se puede usar una malla diferencial finita que evita el origen, y entonces obteniendo información sobre el punto ficticio en  $r = -\Delta r/2$  demandando que  $\{A, B, K_A, K_B\}$  sean en funciones pares en  $r = 0$  y que para  $\{D_A, D_B\}$  sean funciones impares.

Es el segundo tipo de condiciones de regularidad el que es más problemático. Para poder ver el problema, primero describiremos las ecuaciones ADM a primer orden para el caso de simetría esférica. Las ecuaciones son (en el caso de vector de corrimiento igual a cero):

$$\partial_t A = -2\alpha A K_A, \quad (5.9)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (5.10)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha [K_A D_\alpha + \partial_r K_A], \quad (5.11)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha [K_B D_\alpha + \partial_r K_B], \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A &= -\frac{\alpha}{A} \left[ \partial_r (D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_B^2}{2} - \frac{D_A D_B}{2} - A K_A (K_A + 2K_B) \right] \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{r}(D_A - 2D_B)], \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B &= -\frac{\alpha}{2A} \left[ \partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} \right. \\ &\quad - \frac{1}{r}(D_A - 2D_\alpha - 4D_B) - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \\ &\quad \left. + \alpha K_B (K_A + 2K_B) \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde se ha definido  $D_\alpha \equiv \partial_r \ln \alpha$ . Las constricciones hamiltonianas y de momento, toman la forma:

$$\begin{aligned} \partial_r D_B &= \frac{1}{r^2 B} (A - B) + AK_B (2K_A + K_B) \\ &\quad + \frac{1}{r} (D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\partial_r K_B = (K_A - K_B) \left[ \frac{1}{2} + \frac{D_B}{2} \right]. \quad (5.16)$$

Ya que  $\{D_\alpha, D_A, D_B\}$  son proporcionales a  $r$  cerca del origen, vemos que términos de la forma  $\{D_{\{\alpha, A, B\}}/r\}$  en las ecuaciones ADM son regulares y no causan problemas. Sin embargo, todavía se mantiene un problema más serio. Podemos ver que en ambos, la restricción Hamiltoniana y la ecuación de evolución para  $K_B$  hay un término de la forma  $(A - B)/r^2$ , mientras que en la restricción del momento hay un término de la forma  $(K_A - K_B)/r$ . Dado el comportamiento de estas variables cerca de  $r = 0$  estos términos parecerían que divergen en el origen. La razón por la cual esto, de hecho no pasa es que, cerca del origen, debemos pedir unas condiciones de regularidad extras

$$A - B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad K_A - K_B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (5.17)$$

esto es

$$A^0 = B^0, \quad K_A^0 = K_B^0. \quad (5.18)$$

No es difícil entender de donde vienen estas condiciones. Éstas son una consecuencia del hecho de que el espacio debe permanecer localmente plano[9] en  $r = 0$ . Esta condición indica que, cerca de  $r = 0$ , debe de ser posible escribir la métrica como

$$dl_{R \sim 0}^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (5.19)$$

con  $R$  una coordenada radial que mide distancias propias desde el origen. Una transformación local de coordenadas de  $R$  a  $r$  entonces transforma la métrica en la forma

$$dl_{r \sim 0}^2 = \left( \frac{dR}{dr} \right)_{r=0}^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (5.20)$$

la cuál implica que  $A^0 = B^0$  y, como esto se debe cumplir para todo tiempo, también que  $K_A^0 = K_B^0$ .

Resulta que no es trivial implementar numéricamente ambas, las condiciones de regularidad de simetría (5.3)-(5.8) y las condiciones de regularidad plana local (5.17) al mismo tiempo en  $r = 0$ . La razón de

esto es porque de hecho tenemos más condiciones de regularidad que unidades, por lo que el sistema está sobre determinado. Las derivadas de  $A$  y  $B$  deben ser cero, y además  $A$  y  $B$  deben ser iguales entre sí (lo mismo debe pasar para  $K_A$  y  $K_B$ ). Las condiciones de frontera para las ecuaciones exactas están, por su puesto, también sobre determinadas, pero en ese caso la consistencia de las ecuaciones implica que si estas se satisfacen inicialmente así se mantendrán para todo tiempo. Sin embargo, en el caso numérico, esto no es verdad debido a errores de truncación, y muy rápidamente unas de las tres condiciones de frontera falla. Es fácil convencerse que simplemente ignorando una condición e imponiendo las otras dos, no funcionará. Si imponemos la condición de derivada cero e ignorando la condición  $A = B$ , entonces el término  $(A - B)/r^2$  las ecuaciones de evolución rápidamente se vuelven singular. Por otro lado, si imponemos la condición  $A = B$  e ignoramos una de las condiciones de simetría, entonces introduciríamos una inconsistencia con la versión diferencial finita de las ecuaciones de evolución, ya que para  $\Delta r$  finita es muy difícil garantizar que la diferencia entre  $\partial_t K_A$  y  $\partial_t K_B$  se aproxime a cero en el origen. Esta inconsistencia entonces varía muy rápidamente causando enormes (y no convergentes) gradientes que se desarrollan cerca del origen. Existen métodos generales para la regularización de las ecuaciones en simetría esférica los cuales se pueden consultar en la referencia [3].

Sin embargo, es importante mencionar que hay una manera muy simple, y debido a esto a menudo utilizada en la práctica, de evitar el problema de regularidad. Este método consiste en restringir la elección de foliación y usar la llamada “Área de Norma”, con la cuál uno fuerza la métrica angular variable a ser  $B = 1$ . Esto implica que  $g_{\theta\theta} = r^2$ , entonces el área de esferas es siempre  $4\pi r^2$ . Es por esto que en este caso  $r$  es llamado el “Radio de Área”. Si se hace esta elección, es fácil ver que tomando la condición de frontera  $A(r = 0) = 1$ , uno puede resolver para  $A(r)$  simplemente integrando la constricción hamiltoniana tomando  $B = 1$  y  $D_B = 0$ . En este caso el término  $(A - B)/r^2$  deja de ser un problema. Pidiendo  $B = 1$  durante toda la evolución, implica que se debe tener  $K_B = \partial_t K_B = 0$ , lo cual da lugar a una ecuación diferencial para  $\alpha$  en términos de  $r$  que debe resolverse para cada paso temporal dando lugar a lo que se conoce como “Foliación Polar”.

Otro punto importante es el hecho de que las ecuaciones de evolución ADM en simetría esférica, que se describieron anteriormente, no son fuertemente hiperbólicas cuando se usan en conjunción con condiciones de foliación comunes (maximal, Bona-Masso, etc.). Este problema no es difícil de resolver y en la referencia [3] se muestra un ejemplo simple de como construir una formulación fuertemente hiperbólica en simetría esférica usando las constricciones.

## 5.2. Espacio de Minkowski en Coordenadas no Triviales

Para este ejemplo se utilizarán las ecuaciones ADM regularizadas a primer orden, la derivación de estas ecuaciones puede ser consultada en la referencia [3]. Aquí se ejemplifican las evoluciones numéricas

usando un sistema regularizado.

En la simulación numérica se tomará como dato inicial el espacio-tiempo de Minkowski en las coordenadas usuales por lo que:

$$A = B = 1, \quad (5.21)$$

$$D_A = D_B = 0, \quad (5.22)$$

$$K_A = K_B = 0. \quad (5.23)$$

Para poder tener una evolución no trivial, se escogerá un perfil inicial del lapso de la forma:

$$\alpha(t=0) = 1 + r^2 \hat{C} e^{-\frac{(r-\hat{r})^2}{\hat{\sigma}^2}}, \quad (5.24)$$

esto es, se añade una pequeña contribución gaussiana al lapso inicial de Minkowski. Se evolucionará entonces el lapso usando una condición de foliación Bona-Masso (BM), por lo que la ecuación de evolución para el lapso será:

$$\partial_t = -\alpha^2 f(\alpha)(K_A + 2K_B). \quad (5.25)$$

La simulación siguiente tomará los parámetros gaussianos como:  $\hat{C} = 0,001$ ,  $\hat{r} = 5,0$ ,  $\hat{\sigma} = 1,0$ . También se ha restringido a foliación armónica, esto es,  $f(\alpha) = 1$ . Como primer ejemplo se tiene un sistema hiperbólico resultante de las ecuaciones ADM y de las condiciones de foliación *BM*, pero ahora en vez de usar  $D_A$  y  $K_A$  como variables fundamentales, se ha usado de  $\tilde{D} = D_A - 2D_B$  y  $K \equiv trK \equiv K_A + 2K_B$ . Para hacer el sistema hiperbólico se remueven los términos proporcionales a  $\partial_r D_B$  y  $\partial_r D_K$  de las ecuaciones de evolución de  $K$  y  $\tilde{D}$  usando las constricciones. Obtenemos entonces un nuevo sistema fuertemente hiperbólico.

Para el procedimiento de regularización se introduce la variable auxiliar  $\lambda$  [1] la cuál está dada por

$$\lambda = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{A}{B} \right). \quad (5.26)$$

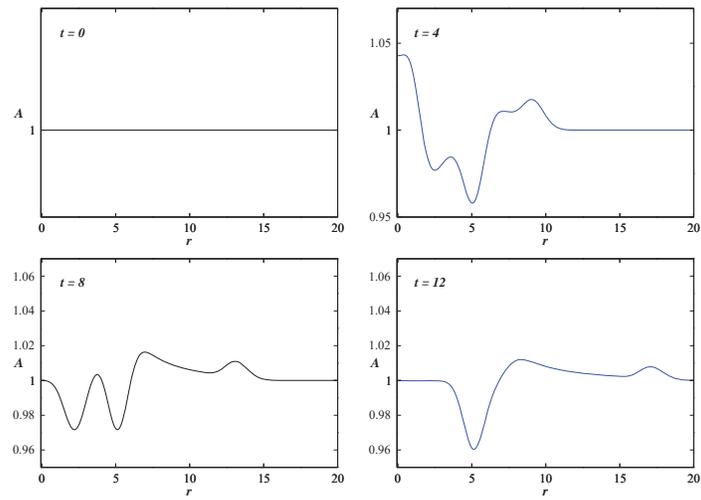
Ya que en este caso se ha usado en la restricción de momento para modificar la ecuación de evolución para  $\tilde{D}$ , necesitamos reemplazar esta variable con

$$\tilde{U} \equiv \tilde{D} - 4 \frac{4B\lambda}{A}. \quad (5.27)$$

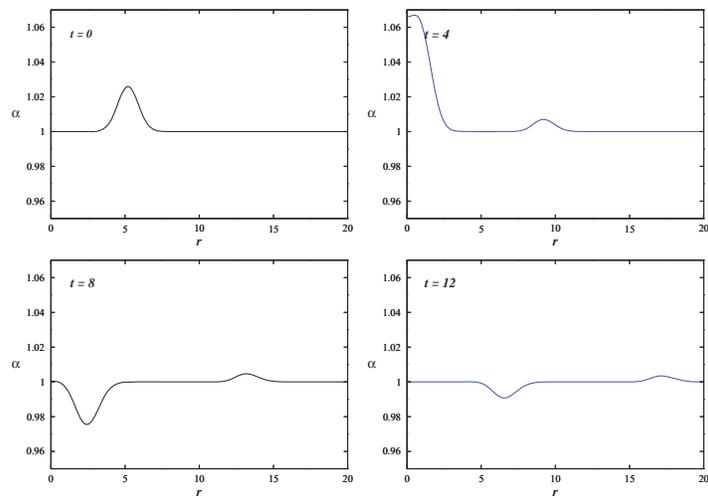
El conjunto final de variables dinámicas es entonces

$$\{\alpha, A, B, D_\alpha, \tilde{U}, D_B, K, K_B, \lambda\}, \quad (5.28)$$

y sus ecuaciones de evolución son



**Figura 5.1:** Las gráficas muestran la evolución de la función métrica  $A$  a distintos tiempos, en el sistema con simetría esférica.



**Figura 5.2:** Las gráficas muestran la evolución de la función lapso  $\alpha$  a diferentes tiempos, en el sistema con simetría esférica.

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K, \quad (5.29)$$

$$\partial_t A = 2\alpha A(2K_B - K), \quad (5.30)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (5.31)$$

$$\partial_t D_\alpha = -\partial_r(\alpha f K), \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U} &= -2\partial_r(\alpha K) + 4\alpha D_B(K - 3K_B) \\ &+ 8\alpha \left[ D_\alpha K_B + \frac{B\lambda}{A}(3K_B - K) \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\partial_t D_B = -2\partial_r(\alpha K_B), \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \alpha \left[ -4K K_B + 6K_B^2 - \frac{2D_\alpha}{Ar} + K^2 \right. \\ &+ \left. \frac{D_\alpha}{2A} \left( \tilde{U} + \frac{4\lambda B}{A} \right) - \frac{D_\alpha^2}{A} - \frac{\partial_r D_\alpha}{A} \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B &= \frac{\alpha}{Ar} \left[ \frac{\tilde{U}}{2} + \frac{2\lambda B}{A} - D_B - \lambda - D_\alpha \right] \\ &+ \frac{\alpha}{A} \left[ -\frac{D_\alpha D_B}{2} - \frac{\partial_r D_B}{2} \right. \\ &+ \left. \frac{D_B}{4} \left( \tilde{U} + \frac{4\lambda B}{A} \right) + AK K_B \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

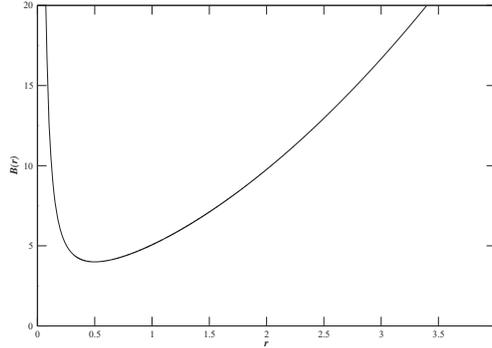
$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[ \partial_r K_B - \frac{D_B}{2}(K - 3K_B) \right]. \quad (5.37)$$

Las figuras (5.1) y (5.2) muestran la evolución de  $A$  y  $\alpha$ . Para este caso regularizado, el sistema puede dejarse evolucionar por mucho tiempo y el origen permanece bien comportado.

### 5.3. Agujero Negro de Schwarzschild en Coordenadas Isotrópicas

Para terminar consideraremos como un ejemplo de una simulación numérica en el caso de un agujero negro simple de Schwarzschild. Se podría pensar que ya que el espacio-tiempo de Schwarzschild es estático, no habría evolución en una simulación numérica. Esto no es verdad por dos razones: en primer lugar, el espacio-tiempo de Schwarzschild solo es estático fuera del horizonte del agujero negro, dentro del horizonte la solución es dinámica y la singularidad es alcanzada en un tiempo propio finito. Segundo, como ya hemos visto, incluso en espacios-tiempos estáticos es interesante estudiar la evolución artificial inducida por una elección de norma no trivial. Estudiando el caso de Schwarzschild, nos permite adquirir una experiencia valuable que luego puede ser usada en situaciones claramente dinámicas como el colapso gravitacional o la colisión de objetos compactos, donde uno esperaría encontrar agujeros negros durante la evolución

incluso si ninguno estaba presente al principio.



**Figura 5.3:** Función métrica angular  $B = r^2\psi^2$  para un agujero negro Schwarzschild con  $M = 1$  en coordenada isotrópicas.

Como siempre debemos empezar por la elección de los datos iniciales. Es claro que simplemente tomando la métrica de Schwarzschild en  $t = 0$  no es una buena elección ya que esta métrica es singular en el horizonte. Una mucho mejor elección es usar la métrica en coordenadas isotrópicas, las cuales son obtenidas de las coordenadas estándar de Schwarzschild a través del cambio de la coordenada radial  $R = r(1 + M/2r)^2$ , donde  $R$  es la coordenada radial de Schwarzschild y  $r$  es el llamado radio isotrópico (ver el ejemplo en [11]). La métrica espacial en este caso es

$$dl^2 = \psi^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (5.38)$$

donde el factor conforme  $\psi$  es simplemente:

$$\psi = 1 + M/2r, \quad (5.39)$$

con  $M$  la masa del agujero negro. Esta es la elección mas común para los datos iniciales de Schwarzschild, pero ciertamente no la única.

Es importante mencionar que aunque la métrica, antes mencionada, es singular en  $r = 0$ , de hecho esta singularidad, no corresponde a la singularidad del espacio-tiempo de Schwarzschild, es mas bien, una singularidad de coordenadas. La singularidad física de Schwarzschild esta en el futuro, y no está contenida en los datos iniciales. Hay que recordar que en coordenadas isotrópicas un agujero negro es representado topológicamente por un agujero de gusano (un puente de Einstein-Rosen) entre dos diferentes universos. Esto es fácil de ver si uno gráfica la métrica angular  $g_{\theta\theta} = r^2\psi^4$ , la cual resulta estar aumentando desde  $r = M/2$  hasta el infinito, y decreciendo desde  $r = 0$  hacia  $r = M/2$ (véase figura 5.3).

En situaciones como esta, cuando uno tiene un factor conforme singular en los datos iniciales, es común extraer analíticamente este factor de la evolución para poder trabajar con variables regulares dinámicas.

Entonces se definen las nuevas variables como:

$$\tilde{A} \equiv A/\psi^4, \quad (5.40)$$

$$\tilde{B} \equiv B/\psi^4, \quad (5.41)$$

$$\tilde{D}_A \equiv D_A - 4\partial_r \ln \psi, \quad (5.42)$$

$$\tilde{D}_B \equiv D_B - 4\partial_r \ln \psi, \quad (5.43)$$

(las variables  $K_A$  y  $K_B$  no están rescaladas). Ahora se reescriben las ecuaciones ADM, o una reformulación fuertemente hiperbólica equivalente, en términos de las nuevas variables. Esta técnica, basada en la evolución de las variables rescaladas regulares junto con un factor conforme regular estático, es llamada “Evolución de Puntura”, y el punto  $r = 0$  es común mente llamado ”Puntura” (Véase por ejemplo [2]).

En términos de las variables rescaladas, los datos iniciales para Schwarzschild son simplemente:

$$\tilde{A} = \tilde{B} = 1, \quad \tilde{D}_A = \tilde{D}_B = 0. \quad (5.44)$$

Como la métrica de Schwarzschild es estática y el vector de corrimiento es cero en coordenadas isotrópicas, la curvatura extrínseca es simplemente:

$$K_A = k_B = 0. \quad (5.45)$$

Todavía tendremos que escoger las condiciones de norma. Para el vector de corrimiento  $\beta$  simplemente se escoge igual a cero, mientras que para el lapso  $\alpha$  usaremos condición de “Foliación Maxima”, que en este caso se reduce a

$$\frac{1}{\tilde{A}\psi^4} \left[ \partial_r^2 \alpha + \left( \frac{2}{r} + \tilde{D}_B - \frac{\tilde{D}_A}{2} + 2\partial_r \ln \psi \right) \partial_r \alpha \right] = K_A^2 + 2K_B^2. \quad (5.46)$$

Esta ecuación debe ser integrada numéricamente a cada paso de tiempo. Como es una ecuación de segundo orden en  $r$ , se requieren dos condiciones de frontera. La condición de frontera en el infinito (en la práctica esto es, en la frontera exterior del dominio computacional) es simplemente:

$$\partial_r \alpha|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1 - \alpha}{r}. \quad (5.47)$$

Esto es una condición de frontera tipo “Robin” que exige que conforme  $r \rightarrow \infty$ , el lapso se comporta como  $\alpha = 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$ . Esto quiere decir, que el lapso se aproxima a uno como  $1/r$ .

La otra condición de frontera tiene que estar dada en el interior, y hay tres posibilidades interesantes. La primera posibilidad es pedir que para  $\alpha(r = 0) = -1$ . En este caso es posible mostrar que existe una solución exacta para el máximo dado por la ecuación:

$$\alpha = \frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}. \quad (5.48)$$

Esta función de lapso es anti-simétrica con respecto a la garganta del agujero de gusano en  $r = M/2$ , y es precisamente el lapso el que nos da una solución estática, esto es que el lapso de Schwarzschild estándar está escrito en términos del radio isotrópico.

Otra posibilidad es pedir que:

$$\partial_r \alpha|_{r=0} = 0, \quad (5.49)$$

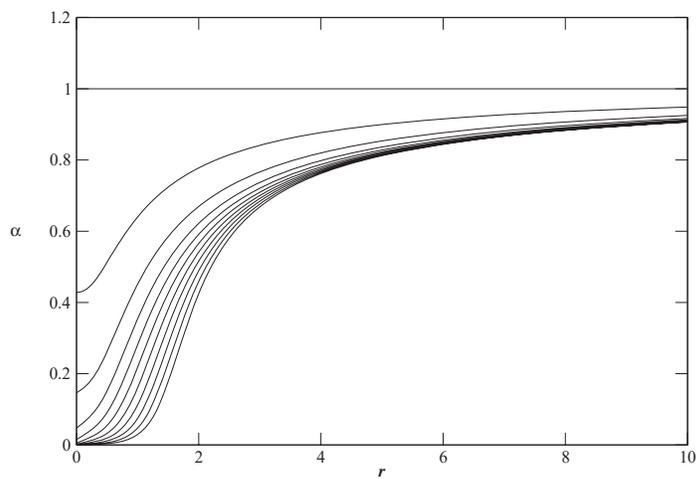
esta última condición ya no resulta para el lapso de Schwarzschild y nos da una situación dinámica. También, este caso penetra en el horizonte del agujero negro.

Una tercera posibilidad es pedir que el lapso sea simétrico en la garganta del agujero de gusano en  $r = M/2$ . Esta elección también resulta en la evolución dinámica y penetra el horizonte. En el caso de una evolución de “puntura” la garganta no es una frontera natural del dominio computacional, y esto hace difícil usar el lapso simétrico. Sin embargo, siempre es posible cambiar las cosas para que el dominio computacional comience precisamente en  $r = M/2$ , de esta manera el lapso simétrico se vuelve una elección natural. Esta elección de condición de frontera es de hecho muy común en la práctica y corresponde a mantener la isometría entre ambos universos para todo tiempo.

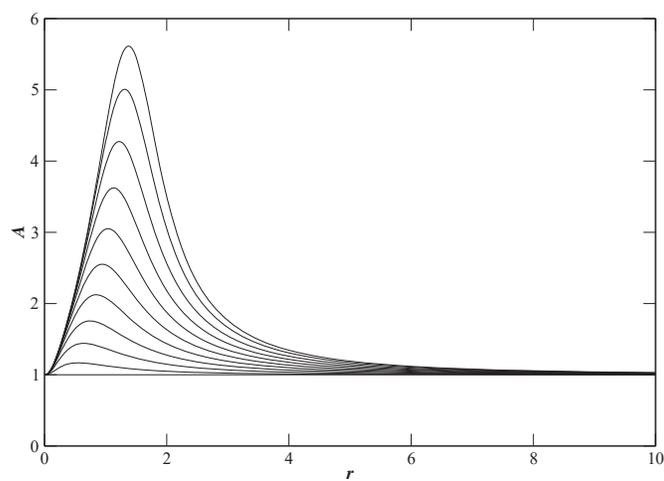
Dados los elementos anteriores podemos ahora hacer una simulación numérica. La simulación mostrada aquí, ha sido desarrollada usando una malla de 1000 puntos en la dirección radial, y un intervalo de  $\Delta r = 0,01$ . El paso temporal usado fue  $\Delta t = \Delta r/2 = 0,005$ . Los datos iniciales corresponden a un agujero negro de masa  $M = 1$ , por lo que en estas unidades la simulación alcanza un tiempo igual a  $t = 10M$ . Los resultados de la simulación se muestran en las figuras (5.4) y (5.5), donde se puede ver la evolución de lapso  $\alpha$  y la métrica radial  $A$  cada  $t = 1$ . De la figura (5.4) se puede ver como el lapso evoluciona rápidamente hacia cero en la región cerca de la “puntura” ( $r = 0$ ). Este fenómeno es el conocido como “colapso del lapso”, y resulta porque la condición de máxima foliación no permite cambiar los elementos de volumen, y cerca de la singularidad la única forma de lograr esto es detener la evolución temporal. En las regiones centrales el lapso de hecho se aproxima a cero, exponencialmente.

La figura (5.5) muestra la evolución de la métrica radial  $A$ . Se puede ver como la métrica radial crece en la región cercana al horizonte del agujero negro. Este fenómeno es conocido como “alargamiento de la foliación”. Lo que pasa en este caso, es la combinación de dos efectos. En primer lugar, como el lapso ha colapsado en las regiones centrales el tiempo deja de avanzar, mientras que en las regiones externas sigue avanzando, por lo que el resultado es el alargamiento de las hipersuperficies. También se puede ver que incluso si el lapso permanece igual a uno durante toda la evolución, se esperaría un crecimiento en la métrica radial debido al hecho de que los observadores normales, a diferentes distancias del agujero negro, caen con distintas aceleraciones, por lo que la distancia entre ellos se incrementa (hay que recordar que como el vector de corrimiento es cero, las coordenadas están ligadas a estos observadores).

De las figuras, es claro ver que con las condiciones de norma, que se han escogido, el espacio-tiempo de Schwarzschild no aparece estático.



**Figura 5.4:** Evolución de la función lapso  $\alpha$ . El valor de  $\alpha$  se muestra cada  $t = 1$ . Se puede ver claramente el derrumbamiento del lapso.



**Figura 5.5:** Evolución de la métrica radial  $A$ . El valor de  $A$  es mostrado cada  $t = 1$ . La extensión de foliación es evidente.

---

## Capítulo 6

# Conclusiones

---

En estas tesis, se ha mostrado a través de ejemplos elementales, cuya solución analítica es conocida, que los métodos numéricos con diferencias finitas, son efectivos para resolver la ecuación de onda. Se realizó especial énfasis en la ecuación de onda ya que, es una ecuación para la cuál conocemos su solución exacta, por lo que es posible corroborar que los cálculos numéricos son correctos, lo cuál es una parte importante cuando se requiere resolver ecuaciones mucho más complicadas, como las presentadas en los capítulos 4 y 5.

Se programaron los códigos para resolver todos los casos antes mencionados, los cuales son de libre acceso. Está es una aportación significativa, ya que será posible usar esto programas para iniciar otros trabajos de investigación a partir de un grado de complejidad más alto.

Otra aportación fundamental, es el concepto de convergencia y estabilidad, ya que si un código no converge, es un código que no sirve. Aprender esto es de vital importancia para toda persona que quiera resolver ecuaciones diferenciales parciales usando métodos numéricos.

Uno de los resultados más relevantes de los métodos presentados en está tesis, es el de que dependiendo del problema físico que uno elija, uno podrá usar un método explícito o implícito. Por ejemplo, en el capítulo 4, para las ecuaciones de Einstein se uso un método explícito (Runge-Kutta), debido a que es un método estable y resulta ser más veloz puesto que utiliza menor cantidad de operaciones que la contraparte implícita, además de utilizar menos memoria.

---

## Apéndice A

# Inversión de Matrices Tridiagonales

---

En este apéndice, se discutirá el método usado para la inversión de matrices tridiagonales. Empecemos primero considerando un sistema general de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{M}\vec{x} = \vec{r}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz arbitraria. Generalmente  $\mathbf{M}$  se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}, \quad (\text{A.2})$$

con  $\mathbf{L}$  una matriz triangular inferior y  $\mathbf{U}$  una matriz triangular superior. Si ahora definimos un vector  $\vec{y}$  de tal manera que:

$$\mathbf{L}\vec{y} = \vec{r}, \quad (\text{A.3})$$

tendremos que:

$$\mathbf{U}\vec{x} = \vec{y}. \quad (\text{A.4})$$

Los métodos de solución para el sistema dado en la ecuación (A.1), basado en la descomposición “ $\mathbf{LU}$ ”, son generalmente mucho más eficientes computacionalmente que aquellos basados en la eliminación Gauss-Jordan. Para encontrar la solución general del sistema, empezaremos por escribir las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & & & & \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & & & \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \alpha_{N,1} & \dots & \alpha_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,N} \\ & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \cdots & \beta_{2,N} \\ & & \beta_{3,3} & \cdots & \beta_{3,N} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \beta_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

Uno puede mostrar que:

$$y_1 = \frac{r_1}{\alpha_{1,1}}, \quad y_i = \frac{1}{\alpha_{i,i}} \left[ r_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} y_j \right]. \quad (\text{A.7})$$

y

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{N,N}}, \quad x_i = \frac{1}{\beta_{i,i}} \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{i,j} x_j \right]. \quad (\text{A.8})$$

Ahora, para poder encontrar los elementos  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ , debemos primero resolver las ecuaciones:

$$\begin{aligned} i < j & \quad \sum_{k=1}^i \alpha_{i,k} \beta_{k,j} = M_{i,j} \\ i = j & \quad \sum_{k=1}^i \alpha_{i,k} \beta_{k,i} = M_{i,i} \\ i > j & \quad \sum_{k=1}^j \alpha_{i,k} \beta_{k,j} = M_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

No es difícil ver que de hecho tenemos  $N^2 + N$  incógnitas y sólo  $N^2$  ecuaciones. Esto quiere decir que podemos especificar arbitrariamente  $N$  de las incógnitas. La opción más común es tomar:

$$\alpha_{i,i} = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.10})$$

Ahora las ecuaciones se pueden resolver mediante el algoritmo de Crout [15]. El algoritmo se implementa calculando para cada  $j = 1, \dots, N$ , lo siguiente:

- Para  $i = 1, \dots, j$ :

$$\beta_{i,j} = M_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{i,k} \beta_{k,j}. \quad (\text{A.11})$$

- Para  $i = j+1, \dots, N$ :

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{\beta_{j,j}} \left[ M_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-i} \alpha_{i,k} \beta_{k,j} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Asumamos ahora que  $\mathbf{M}$  es una matriz tridiagonal cíclica de la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ c_N & & & & a_N & b_N \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

El método anterior puede ahora ser simplificado considerablemente. En el caso particular cuando  $a_1 = c_N = 0$ , el procedimiento resultante es el bien conocido algoritmo de Thomas [15], el cual puede ser escrito concisamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1, \\ y_i &= r_i - \frac{a_i}{\beta_{i-1,i-1}} y_{i-1}, \quad 1 < i \leq N, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{y_N}{\beta_{N,N}}, \\ x_i &= \frac{1}{\beta_{i,i}} \left[ y_i - c_i x_{i+1} \right], \quad 1 \leq i < N, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= b_1, \\ \beta_{i,i} &= b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{i-1} \quad 1 < i \leq N. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nótese que, en este caso, uno no necesita conocer la forma explícita de los coeficientes  $\alpha_{ij}$ . El algoritmo antes mencionado, cuando se le codifica eficientemente, sólo requiere del orden de  $5 \times N$  operaciones (multiplicaciones y divisiones).

Cuando los elementos  $a_1$  y  $c_N$  no son cero, las cosas se ponen un poquito más complicadas. Es de hecho no muy difícil probar que en este caso:

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1, \\ y_i &= r_i - \frac{a_i}{\beta_{i-1,i-1}} y_{i-1}, \quad 1 < i \leq N-1, \\ y_N &= r_N - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N,j} y_j, \\ x_N &= \frac{y_N}{\beta_{N,N}}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}
x_{N-1} &= \frac{1}{\beta_{N-1,N-1}} [y_{N-1} - \beta_{N-1,N} x_N], \\
x_i &= \frac{1}{\beta_{i,i}} [y_i - c_i x_{i+1} - \beta_{i,N} x_N], \quad 1 \leq i < N-1,
\end{aligned} \tag{A.18}$$

donde ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
\beta_{1,1} &= b_1, \\
\beta_{i,i} &= b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1,i-1}}, \quad 1 < i \leq N-1,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{1,N} &= a_1, \\
\beta_{i,N} &= -\frac{a_i}{\beta_{i-1,i-1}} \beta_{i-1,N}, \quad 1 < i < N-1,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{N,1} &= \frac{c_N}{b_1}, \\
\alpha_{N,i} &= -\frac{c_{i-1}}{\beta_{i,i}} \alpha_{N,i-1}, \quad 1 < i < N-1,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

y:

$$\begin{aligned}
\beta_{N-1,N} &= c_{N-1} - \frac{a_{N-1}}{\beta_{N-2,N-2}} \beta_{N-2,N}, \\
\alpha_{N,N-1} &= \frac{1}{\beta_{N-1,N-1}} [a_N - c_{N-2} \alpha_{N,N-2}],
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\beta_{N,N} = b_N - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_{N,k} \beta_{k,N}. \tag{A.23}$$

El número de operaciones necesitado cuando el algoritmo es codificado eficientemente es ahora de  $11 \times N$ , lo cual es cerca del doble del anterior. Nótese como, para  $a_1 = c_N = 0$ , la expresión anterior se reduce a aquellos usados en el algoritmo de Thomas.

---

# Bibliografía

---

- [1] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [2] Miguel Alcubierre et al. Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision. *Phys. Rev.*, D67:084023, 2003.
- [3] Miguel Alcubierre and José A. González. Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity. *Comput. Phys. Commun.*, 167:76–84, 2005.
- [4] Miguel Alcubierre, José A. González, and Marcelo Salgado. Dynamical evolution of unstable self-gravitating scalar solitons. *Phys. Rev.*, D70:064016, 2004.
- [5] Carles Bona, Joan Masso, Edward Seidel, and Joan Stela. A New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 75:600–603, 1995.
- [6] Matthew W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9–12, 1993.
- [7] Clive A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 1. Springer, second edition, 2007.
- [8] F.S. Guzmán. Introduction to numerical relativity through examples. *Rev. Mex. Fis.*, S53(4):78–93, 2007.
- [9] James B. Hartle. *Gravity an introduction to Einstein's general relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [10] Néstor Enrique Ortiz Madrigal. Métodos de alta resolución para la solución numérica de leyes de conservación en hidrodinámica clásica. Tesis de licenciatura, U.M.S.N.H, 2008.
- [11] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [12] K. W. Morton and D. F. Mayers. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, first edition, 1995.

- 
- [13] Miguel Alcubierre Moya. *Investigations in Numerical Relativity*. PhD thesis, University of Wales, 1993.
- [14] David L. Powers. *Boundary Value Problems*. Harcourt Academic Press, fourth edition, 1999.
- [15] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, third edition, 2007.
- [16] Antonio Rendón Romero. Solución de la ecuación de schrödinger dependiente del tiempo y algunas aplicaciones. Tesis de licenciatura, U.M.S.N.H, 2006.
- [17] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University press, 1985.
- [18] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, volume 1. Springer, 1995.
- [19] John A. Trangenstein. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, first edition, 2007.
- [20] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [21] Dennis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales, con Aplicaciones de Modelado*. International Thomson Editores, sixth edition, 1997.