



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS  
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

*CARÁCTER DE LA CONVERGENCIA  
A LA AMPLITUD LÍMITE EN LA  
DISPERSIÓN SOBRE CUÑAS*

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

*LIC. EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS*

PRESENTA

*ANAHI RAMOS MATA*

ASESOR

*DR. ANATOLI MERZON*

AGOSTO 2008

# Índice general

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                                                           | <b>3</b>  |
| <b>1. Propiedades del núcleo de Sommerfeld-Malyuzhinets</b>                                                   | <b>9</b>  |
| 1.1. La función $H(\beta)$ . . . . .                                                                          | 9         |
| 1.2. Asintótica del núcleo de Sommerfeld-Malyuzhinets . . . . .                                               | 14        |
| <b>2. La Onda Dispersa como la solución del problema de Cauchy mixto y el Principio de la Amplitud Límite</b> | <b>17</b> |
| 2.1. Justificación de la definición de $u_d(\rho, \theta, t)$ . . . . .                                       | 17        |
| 2.2. La función $u_d(\rho, \theta, t)$ como la solución de la ecuación de onda . . . . .                      | 18        |
| 2.3. Valores de frontera de la función $u_d(\rho, \theta, t)$ y valor inicial . . . . .                       | 21        |
| 2.4. El principio de amplitud límite . . . . .                                                                | 23        |
| <b>3. El carácter de la convergencia de la solución a la amplitud límite</b>                                  | <b>25</b> |
| 3.1. Estimaciones para $A_d(\rho, \theta) - e^{i\omega_0 t} u_d(\rho, \theta, t)$ . . . . .                   | 25        |
| 3.2. Asintóticas auxiliares . . . . .                                                                         | 27        |
| 3.3. Carácter de convergencia de la amplitud de la onda dispersa. . . . .                                     | 32        |
| <b>4. Conclusiones</b>                                                                                        | <b>34</b> |
| <b>A.</b>                                                                                                     | <b>35</b> |
| A.1. Propiedades de la solución óptica. . . . .                                                               | 35        |
| A.2. O- Simbolismo . . . . .                                                                                  | 36        |

# Introducción

Esta tesis está dedicada al análisis de la onda dispersa que aparece en el problema de dispersión de onda plana sobre una cuña recta  $W$ , donde

$$W := \{y = (y_1, y_2) : y_1 = \rho \cos \xi, y_2 = \rho \sin \xi, \rho \geq 0, 0 \leq \xi \leq \pi/2\}.$$

El caso cuando  $W$  no es recta se analiza similarmente.

Consideremos el problema de dispersión de una onda plana incidente  $u_{in}$ , que tiene la forma

$$u_{in}(y, t) = e^{i(\vec{k}_0 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - \vec{n}_0 \cdot y) \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ y } y \in Q := \mathbb{R}^2 \setminus W. \quad (0.0.1)$$

Esta onda incidente es la onda periódica con respecto de  $t$  con la frecuencia  $\omega_0 > 0$  (véase figura 1.1). La onda se propaga en la dirección del vector  $\vec{n}_0$  el cual es unitario con las coordenadas  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . El vector  $\vec{k}_0$  se llama el vector de onda y es colineal al vector  $\vec{n}_0$  y  $|\vec{k}_0| = \omega_0$ . El perfil de onda  $f(s)$  es una función que pertenece a  $C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $|f(s)| \leq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y para alguna  $\tau_0 > 0$

$$f(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s \geq \tau_0. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

El papel, de este perfil es el que sigue: la onda incidente  $u_{in}(y, t)$  es la función suave en  $\mathbb{R}^2$  y es idénticamente 0 frente a la frontera que se describe como  $\vec{n}_0 \cdot y = t$ , además esta onda satisface la ecuación de onda  $\square u_{in}(y, t) = 0$  donde  $\square := \partial_t^2 - \Delta$  (véase Apéndice, Corolario A.1.1). Notemos que para el caso  $\tau_0 = 0$ , cuando  $f(s)$  es la función de Heaviside el problema fue considerado en la tesis [5] donde fue obtenida la formula explícita de Soboleff para la solución. Consideremos el caso

$$\alpha \in (0, \pi/2). \quad (0.0.3)$$

En este caso la onda incidente se refleja de ambos lados y genera la onda reflejada  $u_{ref}$  que se construye por las leyes de la óptica. Esta onda se expresa como

$$u_{ref}(y, t) := \begin{cases} u_{r,1}(y, t), & \pi/2 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ u_{r,2}(y, t), & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (0.0.4)$$

donde  $y = \rho e^{i\theta}$ ,

$$\theta_1 := \pi - \alpha, \quad \theta_2 = 2\pi - \alpha \quad (0.0.5)$$

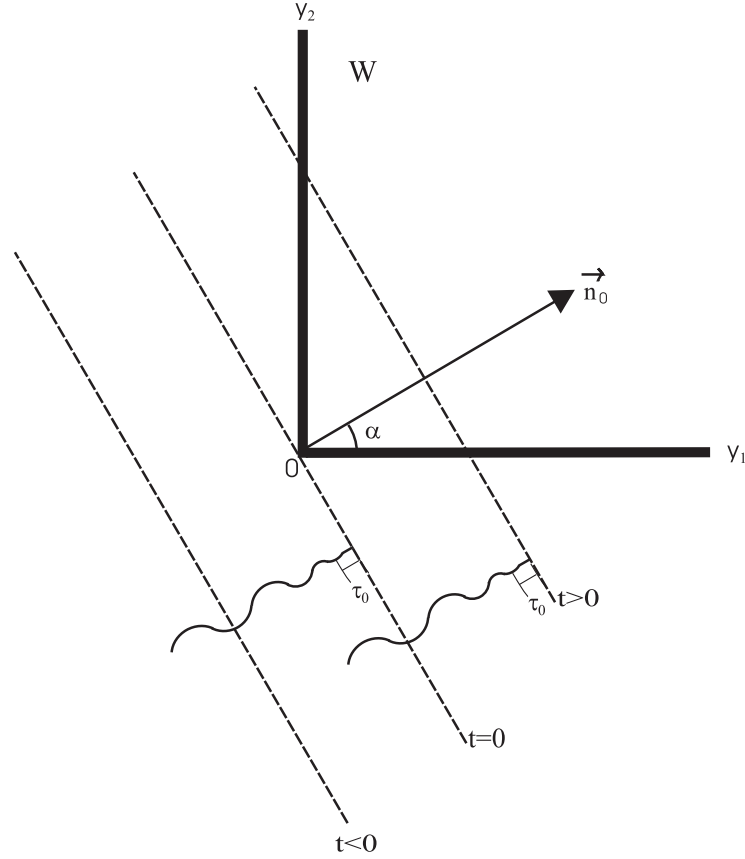


Figura 1: La función incidente  $u_{in}$

y

$$u_{r,1}(y, t) = -e^{i(\vec{k}_1 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - \vec{n}_1 \cdot y), \quad u_{r,2}(y, t) = -e^{i(\vec{k}_2 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - \vec{n}_2 \cdot y), \quad (0.0.6)$$

$$\vec{k}_1 = \omega_0 \vec{n}_1, \quad \vec{n}_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1); \quad \vec{k}_2 = \omega_0 \vec{n}_2, \quad \vec{n}_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$$

Notemos que (0.0.4) implica que en general la onda  $u_{ref}$  es discontinua sobre los rayos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , estos rayos que nombramos *rayos críticos* determinan las direcciones que llamamos direcciones críticas (ver figura 1.2). En el apéndice A.1, Corolario A.1.2 demostramos que la onda  $u_{ref}$  también satisface la ecuación de onda en los puntos donde es continua, es decir en todo el plano  $\mathbb{R}^2$  menos los rayos críticos  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\theta = \theta_1, \theta = \theta_2\}$ .

La onda incidente y la onda reflejada definen la solución óptica, la cual es su suma:

$$u_o(y, t) := u_{in} + u_{ref} \quad (0.0.7)$$

Es fácil ver que (véase el apéndice A.1, Proposición A.1.1) la suma de la onda incidente y la onda reflejada satisface el siguiente problema de Cauchy mixto

$$\begin{cases} \square u_o(y, t) = 0, & y \in \mathbb{R}^2 \setminus W, \quad t > 0 \\ u_o(y, t)|_{\partial W} = 0, & t > 0 \\ u_o(y, t)|_{t=0} = u_{in}(y, 0), & y \in \mathbb{R}^2 \setminus W \end{cases} \quad (0.0.8)$$

Es evidente que  $u_0(y, t)$  es discontinua con las discontinuidades a lo largo de los rayos críticos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , pues  $u_{ref}$  es discontinua.

Por otro lado es conocido (ver [4]) que la solución  $u(y, t)$  del problema de dispersión que también se describe por el sistema (0.0.8) tiene que ser continua en  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus W$ . Entonces la solución óptica no es la solución del problema de dispersión. Por lo tanto tiene que existir una onda discontinua  $u_d(y, t)$  que compense las discontinuidades de la onda  $u_o(y, t)$ . Esta onda realmente existe y se llama la onda dispersa (ver figura 1.3). Para la dispersión estacionaria sobre semiplanos esta onda fué descrita por primera vez por Sommerfeld [4]. En el caso no estacionario esta onda fué construida en [1] y [2].

Definamos

$$u := u_o + u_d$$

Ya que  $u$  satisface (0.0.8) y  $u_o$  también satisface (0.0.8) entonces  $u_d$  satisface el siguiente problema de Cauchy mixto homogéneo

$$\begin{cases} \square u_d(y, t) = 0 \\ u_d(y, t)|_{\partial W} = 0 \\ u_d(y, t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (0.0.9)$$

**Observación 0.0.1.** *Se puede pensar que la solución de este problema es trivial. Pero esto no es así. Estamos buscando la solución discontinua cuyas discontinuidades son contrarias a las discontinuidades de  $u_{ref}$ .*

En el artículo [2] la fórmula para  $u_d$  se obtuvo por el Método de Las Características Complejas. En nuestra tesis vamos a analizar más ampliamente esta función posteriormente. Como veremos, esta onda no estacionaria converge a la onda estacionaria cuando  $t \rightarrow \infty$ . Encontraremos el carácter de esta convergencia. Para presentar la fórmula para  $u_d$  introducimos las siguientes funciones:

1) La función  $H(\beta)$

$$H(\beta) = H(\beta, \alpha) = \coth\left(\frac{1}{3}(\beta + \pi i/2 - i\alpha)\right) - \coth\left(\frac{1}{3}(\beta - 3\pi i/2 + i\alpha)\right), \beta \in \mathbb{C}. \quad (0.0.10)$$

donde  $\alpha$  es como en (0.0.3)

2) El núcleo de la integral del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets como:

$$Z(\beta, \theta) = -H(-i\pi/2 + \beta + i\theta) + H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta), \quad (0.0.11)$$

donde

$$\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ahora podemos definir (véase [1] y [2]) la onda dispersa  $u_d$  como sigue

$$u_d(\rho, \theta, t) := \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta, \quad (0.0.12)$$

donde

$$h(\beta, \rho, t) := f(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (0.0.13)$$

Esta función es el objeto principal de nuestra tesis pues queremos analizar el carácter de convergencia de esta solución cuando el tiempo tiende al infinito, encontraremos la asintótica de la diferencia entre  $u_d(\rho, \theta)$  y  $u_d(\rho, \theta, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En lo sucesivo demostraremos que  $u_d$  está bien definida y que realmente satisface (0.0.9), esto lo haremos directamente, sin usar el Método de Las Características Complejas, además en la sección **2.3** y Capítulo **3** analizaremos el Principio de la Amplitud Límite para esta onda.

Este principio para el problema de dispersión fué demostrado por primera vez en [2], además es muy importante en muchos problemas de la Física Matemática. A grosso modo este principio significa que el proceso no estacionario se estabiliza con el tiempo.

En el caso que consideramos esto último significa lo siguiente: representamos la expresión (0.0.12) como el producto de  $e^{-i\omega_0 t}$  por cierta función  $A_d(\rho, \theta, t)$  la cual es la Amplitud de  $u_d(\rho, \theta, t)$  :

$$u_d(\rho, \theta, t) = e^{-i\omega_0 t} A_d(\rho, \theta, t)$$

Según (0.0.12)

$$A_d(\rho, \theta, t) = \frac{i}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta$$

La cuestión principal es si existe el límite de la Amplitud  $A_d(\rho, \theta, t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  y si es cierto que este límite satisface el problema estacionario correspondiente.

Resulta (véase [2]) que realmente este límite existe y satisface el siguiente problema estacionario

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2) A_d(\rho, \theta) = 0, & (\rho, \theta) \in Q \\ A_d(\rho, \theta)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (0.0.14)$$

Además  $A_d(\rho, \theta)$  tiene discontinuidades determinadas por las discontinuidades de  $u_{ref}$ .

Precisamente este problema estacionario usualmente se considera en la literatura de difracción.

La solución de este problema fué encontrado por primera vez en [3].

En los trabajos [1], [2] y [5] se considera el problema no estacionario cuyas soluciones convergen en un sentido a la solución clásica del problema (0.0.14).

En este trabajo también demostraremos la existencia del límite y además investigaremos el carácter de esta convergencia, es decir encontraremos la asintótica de la diferencia entre  $A_d(\rho, \theta, t)$  y  $A_d(\rho, \theta)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , esta asintótica nunca ha sido considerada en la literatura. Demostraremos que esta diferencia tiene orden  $t^{-5/3}$ ,  $t \rightarrow \infty$  (véase la sección **3.3**). Este es el resultado principal de la tesis.

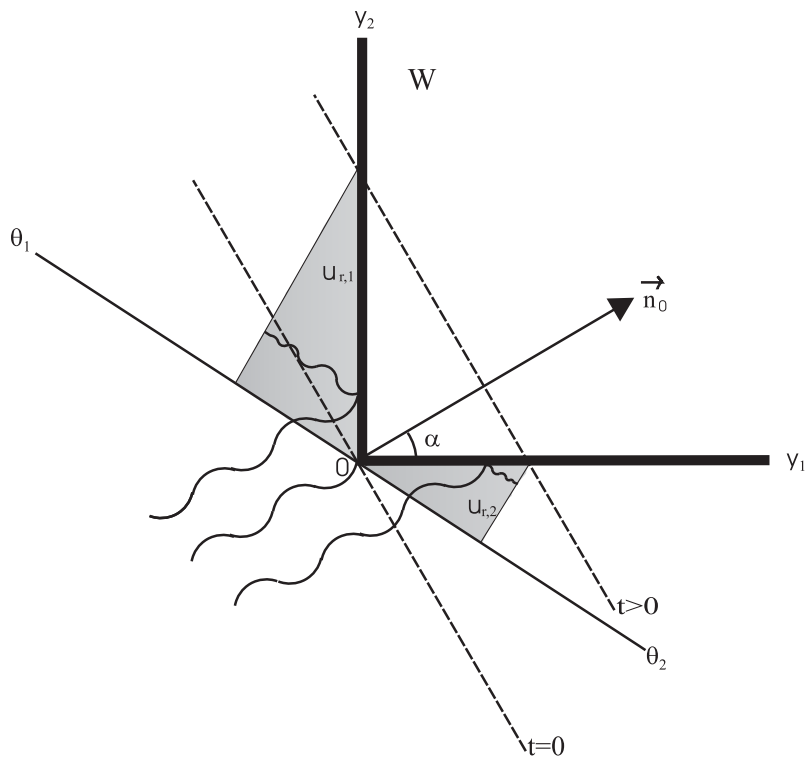


Figura 2: La onda reflejada  $u_{ref}$

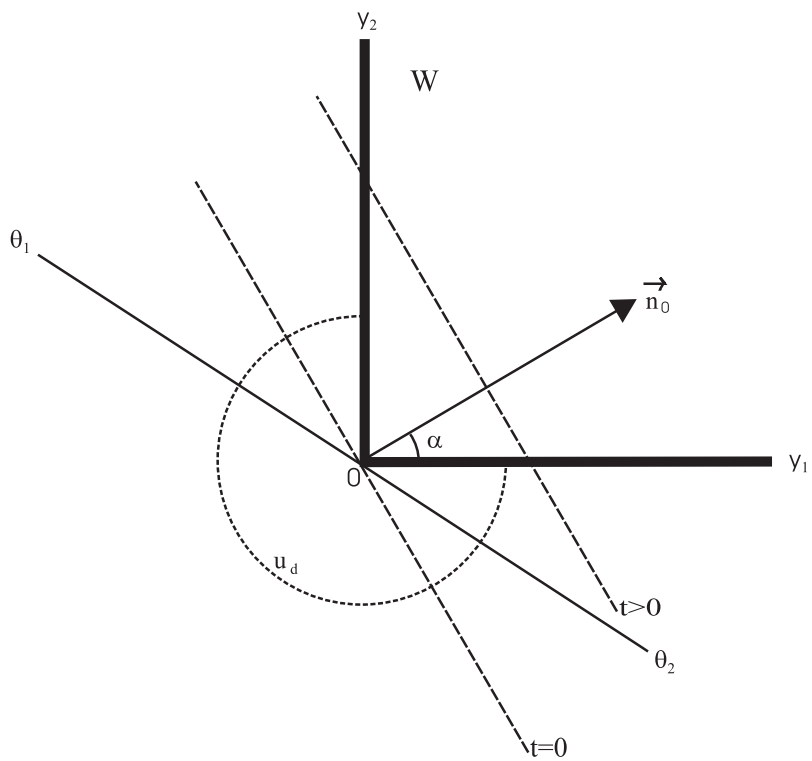


Figura 3: La función  $u_d$

# Capítulo 1

## Propiedades del núcleo de Sommerfeld-Malyuzhinets

### 1.1. La función $H(\beta)$

En esta sección veremos algunas propiedades de la función  $H(\beta)$  de (0.0.10), la cual es un componente importante de la función  $u_d$

Sea

$$P = \{i(3k\pi - \pi/2 + \alpha), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i(3k\pi + 3\pi/2 - \alpha), k \in \mathbb{Z}\}, \quad (1.1.1)$$

un conjunto de puntos en  $\mathbb{C}$ . En la siguiente proposición establecemos algunas propiedades fundamentales para  $H(\beta)$ . De ahora en adelante consideramos el número complejo  $\beta \in \mathbb{C}$  como

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

**Proposición 1.1.1.** i)  $H(\beta)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus P$

ii)  $H(\beta)$  es periódica con periodo  $3\pi i$

iii)  $H(\beta) \xrightarrow{\text{Re } \beta \rightarrow \pm\infty} 0$

**Demostración i)** Obviamente, los polos de  $H(\beta)$  son los ceros de las funciones

$$\sinh\left(\frac{1}{3}(\beta + \pi i/2 - i\alpha)\right) \quad y \quad \sinh\left(\frac{1}{3}(\beta - 3\pi i/2 + i\alpha)\right). \quad (1.1.3)$$

Calculando los ceros de estas funciones obtenemos que el conjunto  $P$  coincide con el conjunto de los ceros. Por lo tanto  $H(\beta)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus P$ .

ii) Notemos que si  $f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , es periódica con un periodo  $p$ , entonces  $f(az + b)$  es periódica con periodo  $p/a$  ( $a \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ). Ya que la función  $\coth z$  tiene periodo  $i\pi$ , entonces  $\cot(\frac{1}{3}(\beta + \pi i/2 - i\alpha))$  y  $\coth(\frac{1}{3}(\beta - 3\pi i/2 + i\alpha))$  tienen periodo  $3i\pi$ , por lo tanto  $H(\beta)$  tiene periodo  $3i\pi$  según (0.0.10).

iii) Veamos que para  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  constantes,  $\coth(a\beta + ib) \xrightarrow{\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty} 1$  y  $\coth(a\beta + ib) \xrightarrow{\operatorname{Re} \beta \rightarrow -\infty} -1$ .  
Sea  $\beta$  como en (1.1.2) entonces

$$\coth(a\beta + ib) = \frac{e^{i(2a\beta_2+b)} + e^{-2a\beta_1}}{e^{i(2a\beta_2+b)} - e^{-2a\beta_1}}. \quad (1.1.4)$$

Ya que  $|e^{-2a\beta_1}| \xrightarrow{\beta_1 \rightarrow +\infty} 0$ , entonces  $\coth(a\beta + ib) \xrightarrow{\beta_1 \rightarrow +\infty} 1$ . Similarmente

$\coth(a\beta + ib) \xrightarrow{\beta_1 \rightarrow -\infty} -1$ . Entonces  $\coth(\frac{1}{3}(\beta + \pi i/2 - i\alpha))$  y  $\coth(\frac{1}{3}(\beta - 3\pi i/2 + i\alpha))$  tienden a 1, cuando  $\beta_1 \rightarrow +\infty$  y tienden a -1 cuando  $\beta_1 \rightarrow -\infty$ . Por lo tanto iii) se cumple por (0.0.10).  
■

El siguiente Lema es necesario para demostrar la asintótica (1.1.5) para  $H(\beta)$ .

**Lema 1.1.1.** *Sea  $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  impar. Entonces*

$$g^{(2k)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Demostración.** Dado que  $g(x)$  es impar entonces  $g(x) = -g(-x)$ . Ahora

$$g^{(2k)}(x) = -g^{(2k)}(-x)(-1)^{2k} = -g^{(2k)}(-x).$$

Entonces  $g^{(2k)}(0) = -g^{(2k)}(0)$ , por lo tanto  $g^{(2k)}(0) = 0$  ■

En la siguiente proposición encontraremos la asintótica y la cota para  $H(\beta)$

**Proposición 1.1.2.** *i)  $H(\beta)$  admite las siguientes asintóticas:*

$$H(\beta) = H_\pm(\beta_2)e^{\mp \frac{2}{3}\beta_1} + h_\pm(\beta_2)e^{\mp \frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{\mp 2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow \pm\infty, \quad (1.1.5)$$

donde

$$H_\pm(\beta_2) = 4i \sin \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \pi) \right] e^{\mp \frac{i}{3}(2\beta_2 - \pi)} \quad (1.1.6)$$

y  $h_\pm(\beta_2) \in \mathbb{C}$  y no depende de  $\beta_1$

ii)  $H(\beta)$  admite la siguiente cota:

$$|H(\beta)| \leq Ce^{-\frac{2}{3}|\beta_1|}, \quad |\beta_1| \geq 1 \quad (1.1.7)$$

**Demostración.** i) Tomemos  $\beta$  como en (1.1.2). Por (0.0.10),

$$H(\beta) = \coth(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1) - \coth(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2),$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{3}(\pi/2 - \alpha + \beta_2) \quad y \quad c_2 = \frac{1}{3}(-3\pi/2 + \alpha + \beta_2). \quad (1.1.8)$$

Reescribimos  $H(\beta)$  en estos términos:

$$H(\beta) = \frac{\cosh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1)}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1)} - \frac{\cosh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)}.$$

Haciendo los cálculos elementales y usando la formula  $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ , obtenemos

$$H(\beta) = \frac{\sinh[i(c_2 - c_1)]}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1) \sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)} \quad (1.1.9)$$

Calculemos la asintótica cuando  $\beta_1 \rightarrow +\infty$ . En la formula

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1)} = \frac{2}{e^{\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1} - e^{-\frac{1}{3}\beta_1 - ic_1}} \quad (1.1.10)$$

hacemos el siguiente cambio de variable

$$e^{\frac{1}{3}\beta_1} = \frac{1}{s}, \quad \text{entonces} \quad s \rightarrow +0 \quad \text{si y slo si} \quad \beta_1 \rightarrow \infty. \quad (1.1.11)$$

Sea  $a = e^{ic_1}$ , entonces

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1)} = \frac{2}{\frac{1}{s}a - s\frac{1}{a}} = \frac{2sa}{a^2 - s^2}.$$

Analicemos la función

$$g_1(s) := \frac{2sa}{a^2 - s^2}, \quad s \rightarrow 0, \quad |s| \leq \frac{1}{2}|a|. \quad (1.1.12)$$

La función  $g_1(s)$  es analítica en  $\{|s| \leq \frac{1}{2}|a|\}$  e impar. Por el Lema 1.1.1 la función  $g_1(s)$  admite el desarrollo en series de Taylor y obtenemos

$$g_1(s) = g_1'(0)s + \frac{g_1'''(0)}{3!}s^3 + O(s^5) \quad |s| \leq \frac{1}{2}|a|,$$

donde por (1.1.12)

$$g_1'(0) = \frac{2a(a^2 + s^2)}{(a^2 - s^2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2a^3}{a^4} = \frac{2}{a}.$$

Como  $a = e^{ic_1}$  entonces

$$g_1'(0) = 2e^{-ic_1}$$

por lo tanto

$$g_1(s) = 2se^{-ic_1} + b_3(a)s^3 + O(s^5), \quad s \rightarrow 0. \quad (1.1.13)$$

De manera similar para  $g_2(s) := \frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)}$  obtenemos

$$g_2(s) = 2se^{-ic_2} + b'_3(a)s^3 + O(s^5). \quad (1.1.14)$$

Entonces, usando el Lema A.2.1 del Apéndice, obtenemos

$$g_1(s)g_2(s) = 4s^2e^{-i(c_1+c_2)} + b_4(a)s^4 + O(s^6), \quad s \rightarrow 0.$$

Deshaciendo el cambio de variable (1.1.11) obtenemos que

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1) \sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)} = 4e^{-i(c_1+c_2)}e^{-\frac{2}{3}\beta_1} + b_4(a)e^{-\frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{-2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow +\infty,$$

entonces, por (1.1.9)

$$H(\beta) = \sinh[i(c_2 - c_1)] \left[ 4e^{-i(c_1+c_2)}e^{-\frac{2}{3}\beta_1} + b_4(a)e^{-\frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{-2\beta_1}) \right] \quad \beta_1 \rightarrow +\infty.$$

Utilizando nuevamente el Lema A.2.1 y el hecho de que  $\sinh[i(c_2 - c_1)] = i \sin(c_2 - c_1)$  obtenemos

$$H(\beta) = 4i \sin(c_2 - c_1) e^{-i(c_1+c_2)} e^{-\frac{2}{3}\beta_1} + h_+(\beta_2) e^{-\frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{-2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow +\infty.$$

Por (1.1.8),  $c_2 - c_1 = \frac{2}{3}(\alpha - \pi)$  y  $c_1 + c_2 = \frac{1}{3}(2\beta_2 - \pi)$ , por lo tanto obtenemos la asintótica (1.1.5) y (1.1.6) para  $\beta_1 \rightarrow \infty$ .

Ahora veamos cual es la asintótica para  $H(\beta)$  cuando  $\beta_1 \rightarrow -\infty$ .

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$e^{\frac{1}{3}\beta_1} = s, \quad \text{entonces} \quad s \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \beta_1 \rightarrow -\infty \quad (1.1.15)$$

y sea  $a = e^{-ic_1}$ . Sustituimos en (1.1.10)

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1)} = \frac{2}{\frac{1}{a}s - a\frac{1}{s}} = \frac{2sa}{s^2 - a^2} = -g_1(s).$$

De manera similar obtenemos

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)} = -g_2(s), \quad s \rightarrow 0.$$

Entonces usando (1.1.13) y (1.1.14) y deshaciendo el cambio de variable (1.1.15) obtenemos

$$\frac{1}{\sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_1) \sinh(\frac{1}{3}\beta_1 + ic_2)} = 4e^{i(c_1+c_2)}e^{\frac{2}{3}\beta_1} + b_4(a)e^{\frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow -\infty,$$

entonces

$$H(\beta) = \sinh[i(c_2 - c_1)] \left[ 4e^{i(c_1+c_2)}e^{\frac{2}{3}\beta_1} + b_4(a)e^{\frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{2\beta_1}) \right] \quad \beta_1 \rightarrow -\infty$$

Utilizando el Lema A.2.1 y (1.1.8) obtenemos (1.1.5) y (1.1.6) para  $\beta_1 \rightarrow -\infty$

ii) Demostremos la cota (1.1.7), por el inciso i) existe  $k > 0$  tal que:

$$|H(\beta)| \leq C_1 e^{-\frac{2}{3}\beta_1} + C_2 e^{-\frac{4}{3}\beta_1} \quad \beta_1 \geq k$$

debido a que  $e^{-\frac{4}{3}\beta_1} \leq e^{-\frac{2}{3}\beta}$ ,  $\beta_1 > 0$ , entonces

$$|H(\beta)| \leq C_3 e^{-\frac{2}{3}\beta_1} \quad \beta_1 \geq k. \quad (1.1.16)$$

Además

$$C_3 e^{-\frac{2}{3}\beta_1} \geq C_4 > 0, \quad \beta_1 \in [1, k]$$

$H(\beta)$  es continua sobre  $[1, k]$  ya que los polos de  $H(\beta)$  son polos imaginarios por Proposición 1.1.1, entonces existe  $C_5 > 0$  tal que

$$|H(\beta)| \leq C_5, \quad \beta_1 \in [1, k]$$

Por lo tanto

$$|H(\beta)| \leq \frac{C_5}{C_4} C_3 e^{-\frac{2}{3}\beta_1} \quad \beta_1 \in [1, k].$$

Llamamos  $\frac{C_5}{C_4} C_3 = C$ , entonces

$$|H(\beta)| \leq C e^{-\frac{2}{3}\beta_1} \quad \beta_1 \in [1, k]. \quad (1.1.17)$$

Las desigualdades (1.1.16) y (1.1.17) implican (1.1.7) para  $\beta_1 \geq 1$ . Similarmente se demuestra que

$$|H(\beta)| \leq C e^{\frac{2}{3}\beta_1} \quad \beta_1 \leq -1.$$

Por lo tanto

$$|H(\beta)| \leq C e^{-\frac{2}{3}|\beta_1|} \quad |\beta_1| \geq 1. \quad \blacksquare$$

**Corolario 1.1.1.**  $H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)$  y  $H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)$  admiten las siguientes asintóticas

$$H(-i\pi/2 + \beta + i\theta) = H_{\pm} \left( \beta_2 - \frac{\pi}{2} + \theta \right) e^{\mp \frac{2}{3}\beta_1} + h_{\pm}(\beta_2, \theta) e^{\mp \frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{\mp 2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow \pm\infty,$$

donde

$$H_{\pm} \left( \beta_2 - \frac{\pi}{2} + \theta \right) = 4i \sin \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \pi) \right] e^{\mp \frac{2i}{3}(\beta_2 - \theta - \pi)}.$$

$$H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta) = H_{\pm} \left( \beta_2 - \frac{5\pi}{2} + \theta \right) e^{\mp \frac{2}{3}\beta_1} + h_{\pm}(\beta_2, \theta) e^{\mp \frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{\mp 2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow \pm\infty,$$

donde

$$H_{\pm} \left( \beta_2 - \frac{5\pi}{2} + \theta \right) = 4i \sin \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \pi) \right] e^{\mp \frac{2i}{3}(\beta_2 + \theta - 3\pi)}$$

**Demostración.** Se sigue de la Proposición 1.1.2, inciso i). \blacksquare

## 1.2. Asintótica del núcleo de Sommerfeld-Malyuzhinets

Nuestro siguiente paso para analizar la onda dispersa  $u_d$  es obtener la asymptótica de la función  $Z(\beta, \theta)$  de (0.0.11) la cual entra en el integrando para la función  $u_d$  (véase 0.0.12). Ya que  $u_d$  esta definida fuera de  $W$ , el parámetro  $\theta$  en (0.0.11) es

$$\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.2.1)$$

Sea  $Q'(\theta)$  el conjunto de los polos de la función  $H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)$ ,  $Q''(\theta)$  el conjunto de los polos de la función  $H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)$ . Entonces  $Q(\theta) = Q'(\theta) \cup Q''(\theta)$  es el conjunto de los polos de  $Z(\beta, \theta)$ .

**Lema 1.2.1.** *Se cumple que:*

$$\begin{aligned} Q'(\theta) &= \{i(3k\pi - \theta + \alpha), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i(3k\pi - \theta + 2\pi - \alpha), k \in \mathbb{Z}\}, \\ Q''(\theta) &= \{i(3k\pi - \theta + \alpha + 2\pi), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i(3k\pi - \theta + \pi - \alpha), k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

**Demostración.**  $Q'(\theta)$  es la unión de los ceros de las funciones

$$\sinh \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta - \alpha)) \right] \quad y \quad \sinh \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta + \alpha - 2\pi)) \right],$$

ya que

$$H(-i\pi/2 + \beta + i\theta) = \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta - \alpha)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta + \alpha - 2\pi)) \right] \quad (1.2.3)$$

por (0.0.10).

De igual manera  $Q''(\theta)$  es la unión de los ceros de las funciones

$$\sinh \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta - \alpha - 2\pi)) \right] \quad y \quad \sinh \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta + \alpha - 4\pi)) \right],$$

pues

$$H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta) = \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta - \alpha - 2\pi)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\theta + \alpha - 4\pi)) \right]. \quad (1.2.4)$$

■

En adelante vamos a considerar  $Z(\beta, \theta)$  para  $\beta \in \mathbb{R}$  e integrar esta función sobre  $\mathbb{R}$ . Esto no es posible para toda  $\theta$ , por que para algunas  $\theta - s$ ,  $Z(\beta, \theta)$  tiene polo en 0. Por (1.2.2) esto va a ser para las  $\theta - s$  tales que  $0 \in Q(\theta)$ .

Vamos a nombrar a estas  $\theta - s$  como las *direcciones críticas*. Calculemos estas  $\theta - s$ , tomando en cuenta que  $\theta \in (\pi/2, 2\pi)$ .

- 1)  $0 \in Q''(\theta) \Leftrightarrow \theta = 3k\pi + \alpha + 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ó } \theta = 3k\pi + \pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$ , tomando en cuenta las condiciones (1.2.1) y (0.0.3) no encontramos dirección crítica para la primera expresión y así la única dirección crítica para  $Q''(\theta)$  es:  $\theta_1 = \pi - \alpha$ .

- 2)  $0 \in Q'(\theta) \Leftrightarrow \theta = 3k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ó } \theta = 3k\pi + 2\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$ . De manera similar tomando en cuenta las condiciones (1.2.1) y (0.0.3) para la primera expresión no se obtienen soluciones, entonces la única dirección crítica para  $Q'(\theta)$  es:  $\theta_2 = 2\pi - \alpha$

**Lema 1.2.2. i)** *La función  $Z(\beta, \theta)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus Q(\theta)$ , para todo  $\theta$  que satisface (1.2.1)*

ii)  $Z(\beta, \theta)$  es periódica con periodo  $3\pi i$

iii)  $\lim Z(\beta, \theta) = 0$  cuando  $\operatorname{Re} \beta \rightarrow \pm\infty$

iv) Para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$   $Z(\beta, \theta)$  admite las siguientes asintóticas

$$Z(\beta, \theta) = Z_{\pm}(\beta_2, \theta)e^{\mp \frac{2}{3}\beta_1} + z_{\pm}(\beta_2, \theta)e^{\mp \frac{4}{3}\beta_1} + O(e^{\mp 2\beta_1}) \quad \beta_1 \rightarrow \pm\infty,$$

donde

$$Z_{\pm}(\beta_2, \theta) = 4i \sin \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \pi) \right] [e^{\mp \frac{2i}{3}(\beta_2 + \theta - 3\pi)} - e^{\mp \frac{2i}{3}(\beta_2 - \theta - \pi)}]$$

y  $z_{\pm}(\beta_2, \theta) \in \mathbb{C}$ , no depende de  $\beta_1$ .

v) Para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$  se cumple que  $Z(\beta, \theta) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  y existe  $C(\theta)$  tal que:

$$|Z(\beta, \theta)| \leq C(\theta)e^{-\frac{2}{3}|\beta|}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.2.5)$$

**Demostración. i)** Se sigue del Lema 1.2.1.

ii) Haciendo referencia a la demostración de inciso ii de la Proposición 1.1.1 se demuestra que  $H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)$  y  $H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)$  tienen periodo  $3i\pi$ . Por lo tanto  $Z(\beta, \theta)$  también tiene periodo  $3i\pi$ .

iii) Ya que  $\coth(a\beta + ib) \xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 1$ , cuando  $a > 0$ , entonces  $\coth[\frac{1}{3}(\beta + i(\theta - \alpha))]$   $\xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 1$ , y

$\coth[\frac{1}{3}(\beta + i(\theta + \alpha - 2\pi))]$   $\xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 1$ , entonces  $H(-i\pi/2 + \beta + i\theta) \xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 0$ . De igual manera

$H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta) \xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 0$ . Por lo tanto  $Z(\beta, \theta) \xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Por lo tanto  $Z(\beta, \theta) \xrightarrow[\operatorname{Re} \beta \rightarrow -\infty]{} 0$ .

iv) Se sigue del Corolario 1.1.1 y de la representación (0.0.11).

v) Del inciso i) se sigue que  $Z(\beta, \theta) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$ . Por (1.1.7)  $|H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)| \leq C_1 e^{-\frac{2}{3}|\beta|}$  para  $|\beta| \geq 1$ , pues  $\operatorname{Re}(-i\pi/2 + \beta + i\theta) = \operatorname{Re} \beta = \beta$ . De la misma manera  $|H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)| \leq C_2 e^{-\frac{2}{3}|\beta|}$  para  $|\beta| \geq 1$ .

Entonces

$$\begin{aligned} |Z(\beta, \theta)| &= |-H(-i\pi/2 + \beta + i\theta) + H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)| \\ &\leq |H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)| + |H(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)| \\ &\leq C_1 e^{-\frac{2}{3}|\beta|} + C_2 e^{-\frac{2}{3}|\beta|} \\ &= C e^{-\frac{2}{3}|\beta|}, \quad |\beta| \geq 1, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

donde  $C = C_1 + C_2$ . Por lo tanto  $|Z(\beta, \theta)| \leq Ce^{-\frac{2}{3}|\beta|}$ ,  $|\beta| \geq 1$ .

Consideremos  $\beta \in [-1, 1]$ . Cuando  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$  la función  $Z(\beta, \theta)$  es continua en  $\mathbb{R}$  con respecto de  $\beta$ , por inciso i) del Lema 1.2.2 y del hecho que  $0 \notin Q(\theta)$  para estas  $\theta$  - s. Ya que cada función continua sobre un conjunto compacto es acotada por Teorema de Weierstrass, entonces

$$|Z(\beta, \theta)| \leq C_1(\theta), \quad |\beta| \leq 1.$$

Notemos que existe  $C(\theta)$  tal que

$$C_1(\theta) \leq C(\theta)e^{-\frac{2}{3}|\beta|}, \quad |\beta| \leq 1. \quad (1.2.7)$$

En efecto es suficiente tomar  $C(\theta) \geq C_1(\theta)e^{\frac{2}{3}}$ . Por lo tanto (1.2.6) y (1.2.7) implican la afirmación (1.2.5) para  $\theta$  que no es dirección crítica. ■

En lo que sigue vamos a usar la función  $Z(\beta, \theta)$  para  $\beta \in \mathbb{R}$ . En este caso la asintótica tiene la forma que se representa en el siguiente Corolario.

**Corolario 1.2.1.** *Sea*

$$Z_{\pm}(\theta) = Z_{\pm}(0, \theta) = 4i \sin \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \pi) \right] [e^{\mp \frac{2i}{3}(\theta - 3\pi)} - e^{\mp \frac{2i}{3}(\theta - \pi)}] \quad (1.2.8)$$

*Entonces la función  $Z(\beta, \theta)$  admite las siguientes asintóticas*

$$Z(\beta, \theta) = Z_{\pm}(\theta)e^{\mp \frac{2}{3}\beta} + z_{\pm}(\theta)e^{\mp \frac{4}{3}\beta} + O(e^{\mp 2\beta}) \quad \beta \rightarrow \pm\infty \quad (1.2.9)$$

**Demostración.** Se sigue del lema (1.2.2), inciso iv) para  $\beta_2 = 0$ . ■

**Observación 1.2.1.** *Notemos que la asintótica (1.2.9) existe también en los puntos críticos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$  con  $Z_{\pm}(\theta_{1,2})$ . Esto es bastante importante ya que la influencia del polo  $\beta = 0$  desaparece para la asintótica cuando  $\beta \rightarrow \pm\infty$ .*

## Capítulo 2

# La Onda Dispersa como la solución del problema de Cauchy mixto y el Principio de la Amplitud Límite

### 2.1. Justificación de la definición de $u_d(\rho, \theta, t)$

En esta sección demostraremos que la función  $u_d$  (la onda dispersa) esta bien definida. Notemos que

$$h(\beta, \rho, t) = 0 \quad \text{para} \quad t \leq \rho \quad (2.1.1)$$

por (0.0.13) y (0.0.2).

Es conocido que  $\operatorname{arccosh} z$  que es la inversa de la función  $\cosh x$ ,  $x \geq 0$  para  $z \geq 1$  y se expresa como

$$\operatorname{arccosh} z = \ln \nu(z), \quad (2.1.2)$$

donde

$$\nu(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \geq 1. \quad (2.1.3)$$

Sea

$$\beta_0 := \beta_0(\rho, t) := \operatorname{arccosh} \frac{t}{\rho}, \quad t \geq \rho \quad (2.1.4)$$

**Lema 2.1.1.** *La función  $h(\beta, \rho, t)$  es de clase  $C^\infty(\mathbb{R})$  con respecto de  $\beta \in \mathbb{R}$ , para  $\rho \geq 0$  y  $t \geq 0$  y el soporte de  $h(\beta, \rho, t)$  para  $t \geq \rho$  esta contenido en  $[-\beta_0, \beta_0]$ , es decir*

$$\operatorname{supp} h(\beta, \rho, t) \subset [-\beta_0, \beta_0], \quad (2.1.5)$$

donde  $\beta_0$  es como en (2.1.4)

**Demostración. 1) a)** Para  $t \leq \rho$   $h(\beta, \rho, t) = 0$  para  $\beta \in \mathbb{R}$  por (0.0.13). **b)** Para  $t \geq \rho$   $h(\beta, \rho, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_\beta)$  por (0.0.13) y (0.0.2) ya que  $e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} \in C^\infty(\mathbb{R}_\beta)$ .

**2)** Sea  $t \geq \rho$ . Supongamos que  $|\beta| > \beta_0$ , por ejemplo  $\beta > \beta_0$ . En este caso por (2.1.4)

$$\cosh \beta > \cosh \beta_0 = \frac{t}{\rho}.$$

Por lo tanto

$$t - \rho \cosh \beta < t - t = 0 \quad \text{y} \quad f(t - \rho \cosh \beta) = 0$$

por (0.0.2). De aquí  $h(t - \rho \cosh \beta) = 0$  por (0.0.13), es decir (2.1.5) se cumple. ■

**Corolario 2.1.1.** *La función  $u_d(\rho, \theta, t)$  esta bien definida para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$ .*

**Demostración.** Por el Lema 2.1.1 la integral de la función (0.0.12) converge por que la integración se realiza sobre un intervalo finito que esta contenido en  $[-\beta_0, \beta_0]$  (vease (2.1.5)). Además  $Z(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  ya que  $Z(\beta, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R})$  por el Lema 1.2.2 *v*). Por lo tanto la integral (0.0.12) converge y esta bien definida. ■

## 2.2. La función $u_d(\rho, \theta, t)$ como la solución de la ecuación de onda

En esta sección demostraremos que la función  $u_d$  (la onda dispersa) es la solución de la ecuación de onda en la region  $W$ .

**Proposición 2.2.1.** *Se cumple que*

$$\square u_d(\rho, \theta, t) = 0, \tag{2.2.1}$$

donde

$$\square u_d(\rho, \theta, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_d(\rho, \theta, t) - \Delta u_d(\rho, \theta, t).$$

**Demostración.** Basta demostrar que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_d(\rho, \theta, t) = \Delta u_d(\rho, \theta, t).$$

1) Primero derivemos la función  $u_d(\rho, \theta, t)$  respecto de  $t$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_d(\rho, \theta, t) \\ &= \frac{i}{6\pi} \left[ (-i\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta + e^{-i\omega_0 t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta \right] \\ &= \frac{i}{6\pi} e^{-i\omega_0 t} \left[ \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) \left[ (-i\omega_0) h(\beta, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} h(\beta, \rho, t) \right] d\beta \right], \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

de (0.0.13) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\beta, \rho, t) := f'(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}. \tag{2.2.3}$$

Sustituimos (2.2.3) en (2.2.2) y obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_d(\rho, \theta, t) \\ &= \frac{i}{6\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} Z(\beta, \theta) \left[ (-i\omega_0) f(t - \rho \cosh \beta) + f'(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

De (2.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_d(\rho, \theta, t) \\ &= \frac{i}{6\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} Z(\beta, \theta) \left[ -\omega_0^2 f(t - \rho \cosh \beta) - 2i\omega_0 f'(t - \rho \cosh \beta) + \right. \\ & \quad \left. f''(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

2) Calculemos el Laplaciano de  $u_d$ . En coordenadas polares el Laplaciano está dado por:

$$\Delta u_d(\rho, \theta, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} u_d(\rho, \theta, t) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u_d(\rho, \theta, t) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_d(\rho, \theta, t). \quad (2.2.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} u_d(\rho, \theta, t) &= \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\rho\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} Z(\beta, \theta) \cosh \beta \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - \right. \\ & \quad \left. f'(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u_d(\rho, \theta, t) \\ &= \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\rho\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} Z(\beta, \theta) \cosh^2 \beta \left[ -\omega_0^2 f(t - \rho \cosh \beta) - 2i\omega_0 f'(t - \rho \cosh \beta) + \right. \\ & \quad \left. f''(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

y

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_d(\rho, \theta, t) = -\frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\rho^2\pi} \int_{\mathbb{R}} Z''_{\beta}(\beta, \theta) f(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} d\beta. \quad (2.2.9)$$

Transformemos la última integral usando la integración por partes.

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} Z''_{\beta}(\beta, \theta) f(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} d\beta \\ &= -Z'_{\beta}(\beta, \theta) f(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} Z'_{\beta}(\beta, \theta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} \rho \sinh \beta \\ & \quad \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Tenemos que  $-Z'_\beta(\beta, \theta)f(t - \rho \cosh \beta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}\Big|_{-\infty}^\infty = 0$ , pues  $f(t - \rho \cosh \beta)$  tiene soporte compacto por Lema 2.1.1.

Otra vez usando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} Z'_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \rho \sinh \beta \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta \\
&= Z_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \rho \sinh \beta \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta) \right] \Big|_{-\infty}^\infty \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} Z_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \left[ \rho^2 \sinh^2 \beta \left[ f''(t - \rho \cosh \beta) - 2i\omega_0 f'(t - \rho \cosh \beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \omega_0^2 f(t - \rho \cosh \beta) \right] + \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta) \right] \rho \cosh \beta \right] d\beta,
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Similarmente por Lema 2.1.1

$$Z_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \rho \sinh \beta \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta) \right] \Big|_{-\infty}^\infty = 0.$$

Dado que  $\sinh^2 \beta = \cosh^2 \beta - 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_d(\rho, \theta, t) &= \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \left[ (1 - \cosh^2 \beta) \left[ f''(t - \rho \cosh \beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2i\omega_0 f'(t - \rho \cosh \beta) - \omega_0^2 f(t - \rho \cosh \beta) \right] + \frac{1}{\rho} \cosh \beta \left[ i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. f'(t - \rho \cosh \beta) \right] \right] d\beta.
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Sumamos (2.2.7), (2.2.8) y (2.2.12) y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta u_d(\rho, \theta, t) &= \\
&\quad \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z_\beta(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh \beta} \left[ f''(t - \rho \cosh \beta) - \right. \\
&\quad \left. 2i\omega_0 f'(t - \rho \cosh \beta) - \omega_0^2 f(t - \rho \cosh \beta) \right] d\beta
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Comparamos (2.2.13) y (2.2.5) y obtenemos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_d(\rho, \theta, t) = \Delta u_d(\rho, \theta, t).$$

Por lo tanto (2.2.1) se cumple y así queda demostrada la Proposición. ■

## 2.3. Valores de frontera de la función $u_d(\rho, \theta, t)$ y valor inicial

En esta sección se demostrará que los valores de  $u_d(\rho, \theta, t)$  en la frontera de  $W$  se anulan y que el valor inicial es cero.

**Lema 2.3.1.** *Se cumple que  $h(\beta, \rho, t)$  es par respecto a  $\beta$ .*

**Demostración.** Ya que  $\cosh \beta$  es par entonces  $h(\beta, \rho, t)$  es par por (0.0.13). ■

**Proposición 2.3.1.** *Se satisface que:*

$$u_d(\rho, 2\pi, t) = 0 \quad y \quad u_d(\rho, \pi/2, t) = 0 \quad \forall \quad \rho, t \geq 0.$$

**Demostración. 1)** Por demostrar que  $u_d(\rho, 2\pi, t) = 0$ . Por (0.0.12)

$$u_d(\rho, 2\pi, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, 2\pi) h(\beta, \rho, t) d\beta,$$

donde por (0.0.11)

$$Z(\beta, 2\pi) = -H\left(\frac{3}{2}i\pi + \beta\right) + H\left(-\frac{1}{2}i\pi + \beta\right) \quad (2.3.1)$$

y por (0.0.10)

$$H\left(\frac{3}{2}i\pi + \beta\right) = \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(2\pi - \alpha)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i\alpha) \right], \quad (2.3.2)$$

$$H\left(-\frac{1}{2}i\pi + \beta\right) = \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i\alpha) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\alpha - 2\pi)) \right].$$

Veamos que  $Z(\beta, 2\pi)$  es un función impar, es decir  $Z(-\beta, 2\pi) = -Z(\beta, 2\pi)$ , (2.3.1) implica que:

$$Z(-\beta, 2\pi) = -H\left(\frac{3}{2}i\pi - \beta\right) + H\left(-\frac{1}{2}i\pi - \beta\right).$$

(2.3.2) implica que:

$$H\left(\frac{3}{2}i\pi - \beta\right) = \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i(2\pi - \alpha)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i\alpha) \right],$$

$$H\left(-\frac{1}{2}i\pi - \beta\right) = \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta - i\alpha) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i(\alpha - 2\pi)) \right].$$

Por la imparidad de la función cotangente hiperbólica obtenemos que:

$$H\left(\frac{3}{2}i\pi - \beta\right) = -\coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(2\pi - \alpha)) \right] + \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i\alpha) \right] \quad (2.3.3)$$

$$H\left(-\frac{1}{2}i\pi - \beta\right) = -\coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i\alpha) \right] + \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(\alpha - 2\pi)) \right].$$

Comparando (2.3.2) y (2.3.3)

$$\begin{aligned} H\left(\frac{3}{2}i\pi - \beta\right) &= H\left(-\frac{1}{2}i\pi + \beta\right) \\ H\left(-\frac{1}{2}i\pi - \beta\right) &= H\left(\frac{3}{2}i\pi + \beta\right), \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Dado que  $-Z(\beta, 2\pi) = H(\frac{3}{2}i\pi + \beta) - H(-\frac{1}{2}i\pi + \beta)$  y por (2.3.4)  $Z(-\beta, 2\pi) = -Z(\beta, 2\pi)$ . Por lo tanto  $Z(\beta, 2\pi)$  es una función impar. Ya que  $Z(\beta, 2\pi)$  es impar y por Lema 2.3.1,  $h(\beta, \rho, t)$  es par entonces su producto es impar, por tal motivo:

$$\int_{\mathbb{R}} Z(\beta, 2\pi) h(\beta, \rho, t) d\beta = 0$$

Por lo tanto  $u_d(\rho, 2\pi, t) = 0$ .

2) Ahora vamos a demostrar que  $u_d(\rho, \pi/2, t) = 0$ .  
por (0.0.12)

$$u_d(\rho, \pi/2, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \pi/2) h(\beta, \rho, t) d\beta, \tag{2.3.5}$$

en donde por (0.0.11)

$$Z(\beta, \pi/2) = -H(\beta) + H(-2i\pi + \beta) \tag{2.3.6}$$

y por (0.0.10)

$$\begin{aligned} H(\beta) &= \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\pi/2 - \alpha)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\alpha - \frac{3}{2}\pi)) \right], \\ H(-2i\pi + \beta) &= \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(\alpha + \frac{3}{2}\pi)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\alpha - \frac{7}{2}\pi)) \right]. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Demostremos que  $Z(\beta, \pi/2)$  es un función impar, es decir  $Z(-\beta, \pi/2) = -Z(\beta, \pi/2)$ , por (2.3.6)

$$Z(-\beta, \pi/2) = -H(-\beta) + H(-2i\pi - \beta)$$

y por (2.3.7)

$$\begin{aligned} H(-\beta) &= \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i(\pi/2 - \alpha)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i(\alpha - \frac{3}{2}\pi)) \right], \\ H(-2i\pi - \beta) &= \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta - i(\alpha + \frac{3}{2}\pi)) \right] - \coth \left[ \frac{1}{3}(-\beta + i(\alpha - \frac{7}{2}\pi)) \right]. \end{aligned}$$

Debido a la imparidad de la función cotangente hiperbólica obtenemos que:

$$\begin{aligned} H(-\beta) &= -\coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(\pi/2 - \alpha)) \right] + \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(\alpha - \frac{3}{2}\pi)) \right] \\ H(-2i\pi - \beta) &= -\coth \left[ \frac{1}{3}(\beta + i(\alpha + \frac{3}{2}\pi)) \right] + \coth \left[ \frac{1}{3}(\beta - i(\alpha - \frac{7}{2}\pi)) \right]. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

De comparar (2.3.7) y (2.3.8) y debido a que la función cotangente hiperbólica tiene período  $i\pi$  obtenemos que

$$\begin{aligned} H(-\beta) &= H(-2i\pi - \beta) \\ H(-2i\pi - \beta) &= H(-\beta). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Dado que  $-Z(\beta, \pi/2) = H(\beta) - H(-2i\pi + \beta)$  y por (2.3.9)  $Z(-\beta, \pi/2) = -Z(\beta, \pi/2)$ . Por lo tanto  $Z(\beta, \pi/2)$  es una función impar. Ya que  $Z(\beta, \pi/2)$  es impar y por Lema 2.3.1,  $h(\beta, \rho, t)$  es par entonces su producto es impar, por tal motivo:

$$\int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \pi/2) h(\beta, \rho, t) d\beta = 0$$

Por lo tanto  $u_d(\rho, \pi/2, t) = 0$ . Y la proposición queda demostrada. ■

**Proposición 2.3.2.** *Se cumple que*

$$u_d(\rho, \theta, 0) = 0$$

**Demostración.** Por (0.0.12)

$$u_d(\rho, \theta, 0) := \frac{ie^{-i\omega_0 0}}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, 0) d\beta,$$

y por (0.0.13)

$$h(\beta, \rho, 0) := f(0 - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0,$$

en donde por (0.0.2)  $f(-\rho \cosh \beta) = 0$ , entonces  $h(\beta, \rho, 0) = 0$ . Por lo tanto

$$u_d(\rho, \theta, 0) = 0. \quad \text{■}$$

## 2.4. El principio de amplitud límite

En esta sección encontraremos la amplitud límite para la función  $u_d(\rho, \theta, t)$ . Sea  $\beta_0$  como (2.1.4) entonces

$$\beta_0(\rho, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$$

y

$$-\beta_0(\rho, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$$

**Lema 2.4.1.** *Se satiface que*

$$h(\beta, \rho, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} d\beta.$$

**Demostración. 1)** Por (0.0.13) y por (0.0.2)

$$h(\beta, \rho, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}.$$

**2)** Por lo anterior

$$Z(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} Z(\beta, \theta)e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}$$

además

$$|Z(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t)| \leq C(\theta)e^{-2|\beta|/3}, \quad t \geq 0, \quad \rho \geq 0 \quad \beta \in \mathbb{R} \quad y \quad \theta \neq \theta_1, \theta_2,$$

ya que

$$|e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}| = 1. \quad (2.4.1)$$

Por el teorema de Lebesgue obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t)d\beta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta)e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}d\beta.$$

Por lo tanto el lema queda demostrado. ■

Nombramos

$$A_d(\rho, \theta) := \frac{i}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} Z(\beta, \theta)e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}d\beta. \quad (2.4.2)$$

Esta función se llama **amplitud límite** de la onda dispersa  $u_d(\rho, \theta, t)$ . De esta manera demostramos el así llamado Principio de la Amplitud Límite.

Este principio significa que la solución del problema no estacionario se estabiliza con el tiempo y tiene un límite cuando  $t \rightarrow \infty$ . En nuestro caso la amplitud de  $u_d$  que es  $e^{i\omega_0 t}u_d(\rho, \theta, t)$  tiende a  $A_d(\rho, \theta)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir

$$e^{i\omega_0 t}u_d(\rho, \theta, t) \rightarrow A_d(\rho, \theta), \quad t \rightarrow \infty \quad (2.4.3)$$

## Capítulo 3

# El carácter de la convergencia de la solución a la amplitud límite

### 3.1. Estimaciones para $A_d(\rho, \theta) - e^{i\omega_0 t} u_d(\rho, \theta, t)$

En esta sección analizamos el carácter de la convergencia de (2.4.3). Sea

$$R(\rho, \theta, t) = A_d(\rho, \theta) - e^{i\omega_0 t} u_d(\rho, \theta, t). \quad (3.1.1)$$

La meta principal de la tesis es encontrar la asintótica de  $R(\rho, \theta, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\rho \rightarrow 0$  en las direcciones no críticas. En esta sección nos limitaremos del descubrimiento de la cota para  $R(\rho, \theta, t)$ , después veremos que esta cota se mejora, este mejoramiento se logra por medio del método de las asintóticas.

Cuando  $f(t - \rho \cosh \beta) = 1$ , por (0.0.2)  $t - \rho \cosh \beta \geq \tau_0$ , entonces  $\cosh \beta \leq \frac{t - \tau_0}{\rho}$ .

Por (2.1.2) y (2.1.3)

$$\operatorname{arccosh} \frac{t - \tau_0}{\rho} = \ln \nu \left( \frac{t - \tau_0}{\rho} \right),$$

denotemos

$$\begin{aligned} \nu_0(t, \rho) &= \nu \left( \frac{t}{\rho} \right) \\ \nu_1(t, \rho) &= \nu \left( \frac{t - \tau_0}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Sea

$$\cosh \beta_1 = \frac{t - \tau_0}{\rho}$$

Entonces

$$\beta_1(\rho, t) = \operatorname{arccosh} \frac{t - \tau_0}{\rho} = \ln \nu_1(t, \rho). \quad (3.1.3)$$

Usando las funciones (0.0.12) y (2.4.2) obtenemos que

$$R(\rho, \theta, t) = \frac{i}{6\pi} \int_{|\beta| \geq \beta_1(\rho, t)} Z(\beta, \theta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} [1 - f(t - \rho \cosh \beta)] d\beta. \quad (3.1.4)$$

**Proposición 3.1.1.** *Existe  $C(\theta)$  tal que la cota  $|R(\rho, \theta, t)| \leq \frac{C(\theta)}{\pi} \left(\frac{t}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}}$  se cumple*

**Demostración.** Por (3.1.4)

$$|R(\rho, \theta, t)| = \left| \frac{i}{6\pi} \int_{|\beta| \geq \beta_1(\rho, t)} Z(\beta, \theta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} [1 - f(t - \rho \cosh \beta)] d\beta \right|$$

y por (2.4.1) obtenemos

$$|R(\rho, \theta, t)| \leq \frac{1}{6\pi} \int_{|\beta| \geq \beta_1(\rho, t)} |Z(\beta, \theta)| [1 - f(t - \rho \cosh \beta)] d\beta$$

Dado que  $1 - f(t - \rho \cosh \beta) \leq 1$  y por Lema 1.2.2 inciso **iv**), obtenemos

$$|R(\rho, \theta, t)| \leq \frac{1}{6\pi} C(\theta) \int_{|\beta| \geq \beta_1(\rho, t)} e^{-\frac{2}{3}|\beta|} d\beta = \frac{1}{3\pi} C(\theta) \int_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}\beta} d\beta$$

Haciendo la última integral obtenemos

$$\frac{1}{3\pi} C(\theta) \int_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}\beta} d\beta = -\frac{1}{2\pi} C(\theta) e^{-\frac{2}{3}\beta} \Big|_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty}$$

Usando los límites de integración

$$-\frac{1}{2\pi} C(\theta) e^{-\frac{2}{3}\beta} \Big|_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} C(\theta) [e^{-\frac{2}{3}\beta_1} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\frac{2}{3}\beta}]$$

debido a que  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\frac{2}{3}\beta} = 0$  y por (3.1.3) obtenemos

$$-\frac{1}{2\pi} C(\theta) e^{-\frac{2}{3}\beta} \Big|_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} C(\theta) \nu_1(t, \rho)^{-\frac{2}{3}}$$

Ahora veamos que

$$\nu_1(t, \rho) \leq 2 \frac{t}{\rho}$$

Primero por (3.1.2) y (2.1.3)

$$\nu_1(t, \rho) \leq \left( \frac{t - \tau_0}{\rho} + \sqrt{\left( \frac{t - \tau_0}{\rho} \right)^2} \right) = 2 \frac{t - \tau_0}{\rho} \leq 2 \frac{t}{\rho}.$$

Por lo tanto

$$|R(\rho, \theta, t)| \leq \frac{1}{\pi} C(\theta) \left( \frac{t}{\rho} \right)^{-\frac{2}{3}}$$

y el lema queda demostrado ■

De esta manera nosotros acotamos la diferencia entre la Amplitud Límite  $A_d(\rho, \theta)$  y la amplitud de  $u_d(\rho, \theta, t)$  que es  $A_d(\rho, \theta, t)$ . Veamos que esta diferencia decrece como  $t^{-2/3}$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

**En las siguientes secciones veremos que esta cota no es muy precisa. Resulta que podemos precisarla y obtener  $t^{-5/3}$ . Para esto necesitamos hacer un análisis más detallado de la función  $R(\rho, \theta, t)$ .**

## 3.2. Asintóticas auxiliares

En esta sección queremos encontrar el término principal de la asintótica de  $R(\rho, \theta, t)$  (ver (3.1.4)) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para este fin es suficiente encontrar la asintótica de (3.1.4) con el cambio de  $Z(\beta, \theta)$  por el término principal en el desarrollo 1.2.9. Pero resulta que esto no es suficiente, necesitamos también la misma asintótica con el cambio de  $Z(\beta, \theta)$  por el segundo término en (1.2.9). Para unir estos dos casos consideramos la asintótica de la expresión (3.2.1) introduciendo el parámetro  $p > 0$ .

**Teorema 3.1.** *Sea*

$$R_p(\rho, \theta, t) = \int_{\beta \geq \beta_1(\rho, t)} e^{-p\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta, \quad p > 0. \quad (3.2.1)$$

*entonces*

$$R_p(\rho, \theta, t) = R_{p,+}(\rho, t) t^{-(p+1)} + o(t^{-(p+1)}). \quad (3.2.2)$$

*donde*

$$R_{p,+}(\rho, t) = i \frac{\rho^p}{2^p} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0} \quad (3.2.3)$$

**Demostración.** Para la demostración necesitamos de los siguientes Lemas:

**Lema 3.2.1.** *Sea*

$$R_1(\rho, t) = \int_1^\infty s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 s t} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} ds, \quad p > 0.$$

*Entonces*

$$R_1(\rho, t) = i e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0 t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.2.4)$$

**Demostración.** Integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
R_1(\rho, t) &= \\
s^{-(p+1)} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} \frac{e^{i\omega_0 st}}{i\omega_0 t} \Big|_1^\infty - \frac{1}{i\omega_0 t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} \left[ -(p+1) s^{-(p+2)} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} + s^{-(p+1)} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} \frac{i\omega_0 \rho^2}{4t} \left( -\frac{1}{s^2} \right) \right] ds \\
&= -e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}} \frac{e^{i\omega_0 t}}{i\omega_0 t} + \frac{1}{i\omega_0 t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} \left[ (p+1) s^{-(p+2)} + s^{-(p+3)} \frac{i\omega_0 \rho^2}{4t} \right] ds.
\end{aligned}$$

Entonces para demostrar (3.2.4) es suficiente demostrar que

$$\int_1^\infty e^{i\omega_0 st} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad (3.2.5)$$

y

$$\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+3)} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.2.6)$$

La demostración de (3.2.6) es evidente ya que el integrando es sumable y acotado. Demostremos (3.2.5). Otra vez integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{i\omega_0 st} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} ds &= \frac{e^{i\omega_0 st}}{i\omega_0 t} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} \Big|_1^\infty - \frac{1}{i\omega_0 t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} \left[ e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} \right]' ds \\
&= -\frac{e^{i\omega_0 t} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}}}{i\omega_0 t} - \frac{1}{i\omega_0 t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} \left[ e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} \right]' ds.
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\frac{e^{i\omega_0 t} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}}}{i\omega_0 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Además,

$$\frac{1}{i\omega_0 t} \int_1^\infty e^{i\omega_0 st} \left[ e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4st}} s^{-(p+2)} \right]' ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

ya que después de la diferenciación obtenemos la función integrable y por lo tanto el Lema queda probado. ■

**Lema 3.2.2.** *Sea*

$$R_2(\rho, t) = \int_{2t/\rho}^{\infty} s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{s+\frac{1}{s}}{2}} ds, \quad p > 0. \quad (3.2.7)$$

*entonces*

$$R_2(\rho, t) = R_{p,+}(\rho, t) t^{-(p+1)} + o(t^{-(p+1)}). \quad (3.2.8)$$

*donde*

$$R_{p,+}(\rho, t) = i \frac{\rho^p}{2^p} e^{\frac{i\omega_0 \rho^2}{4t}} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0} \quad (3.2.9)$$

**Demostración.** Haciendo el cambio de variable  $s = \frac{2ut}{\rho}$ ,  $ds = \frac{2t}{\rho} du$ , obtenemos

$$R_2 = \int_1^{\infty} \left( \frac{2ut}{\rho} \right)^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{\frac{2ut}{\rho} + \frac{\rho}{2ut}}{2}} \frac{2t}{\rho} du = \left( \frac{2t}{\rho} \right)^{-p} \int_1^{\infty} u^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{\frac{2ut}{\rho} + \frac{\rho}{2ut}}{2}} du = \left( \frac{2t}{\rho} \right)^{-p} R_1(t).$$

Usando el Lema 3.2.1 obtenemos (3.2.8) y así el Lema queda demostrado. ■

**Lema 3.2.3.** *Sea*

$$R_3(\rho, \theta, t) = \int_{\nu_0(t, \rho)}^{\infty} s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{s+\frac{1}{s}}{2}} ds, \quad p > 0 \quad (3.2.10)$$

*entonces*

$$R_3(\rho, \theta, t) = R_{p,+}(\rho, t) t^{-(p+1)} + o(t^{-(p+1)}). \quad (3.2.11)$$

*donde  $R_{p,+}(\rho, t)$  es como en (3.2.9).*

**Demostración.** (3.2.10) y (3.2.7) implican que

$$R_3(\rho, \theta, t) = R_2(\rho, \theta, t) - \int_{\nu_0(t, \rho)}^{2t/\rho} s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{s+\frac{1}{s}}{2}} ds.$$

Ya que  $R_2(\rho, \theta, t)$  admite la asintótica (3.2.8), entonces nos falta demostrar que

$$\int_{\nu_0(t, \rho)}^{2t/\rho} s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{s+\frac{1}{s}}{2}} ds = o(t^{-(p+1)}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\nu_0(t, \rho)}^{2t/\rho} s^{-(p+1)} e^{i\omega_0 \rho \frac{s+\frac{1}{s}}{2}} ds \right| &\leq \int_{\nu_0(t, \rho)}^{2t/\rho} s^{-(p+1)} ds = -\frac{s^{-p}}{p} \Big|_{\nu_0(t, \rho)}^{2t/\rho} \\ &= -\frac{1}{p} \left[ \left( \frac{2t}{\rho} \right)^{-p} - (\nu_0(t, \rho))^{-p} \right] = -\frac{1}{p} \rho^p [(2t)^{-p} - (t + \sqrt{t^2 - \rho^2})^{-p}]. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Lagrange

$$(2t)^{-p} - \left(t + \sqrt{t^2 - \rho^2}\right)^{-p} = -p\xi^{-(p+1)} \left(t - \sqrt{t^2 - \rho^2}\right),$$

donde  $\xi \in \left[t + \sqrt{t^2 - \rho^2}, 2t\right]$ . Ya que la función  $s^{-(p+1)}$  decrece, entonces

$$\xi^{-(p+1)} \leq \left(t + \sqrt{t^2 - \rho^2}\right)^{-(p+1)} \leq t^{-(p+1)}.$$

Nos falta demostrar que

$$t - \sqrt{t^2 - \rho^2} = o(t), \quad t \rightarrow \infty$$

Tenemos que

$$t - \sqrt{t^2 - \rho^2} = \frac{\rho^2}{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto Lema (3.2.3) esta probado. ■

**Lema 3.2.4.** *Sea*

$$R_4(\rho, \theta, t) = \int_{\beta \geq \beta_0(\rho, t)} e^{-p\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} d\beta, \quad p > 0. \quad (3.2.12)$$

entonces

$$R_4(\rho, \theta, t) = R_{p,+}(\rho, t)t^{-(p+1)} + o(t^{-(p+1)}). \quad (3.2.13)$$

donde  $R_{p,+}(\rho, t)$  es como (3.2.9).

**Demostración.** Haciendo el cambio de variable  $s = e^\beta$ ;  $d\beta = \frac{ds}{s}$ , si  $\beta = \beta_0(\rho, \theta)$  entonces  $s = \frac{t}{\rho} + \sqrt{(t/\rho)^2 - 1}$  por (2.1.2) y (2.1.4). Sustituyendo en (3.2.12) obtenemos que  $R_4(\rho, \theta, t) = R_3(\rho, \theta, t)$ . Por lo tanto obtenemos la afirmación del Lema. ■

Ahora siguiendo la demostración del Teorema, las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.12) implican que

$$R_p(\rho, \theta, t) = R_4(\rho, \theta, t) + \int_{\beta_1(\rho, t)}^{\beta_0(\rho, t)} e^{-p\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta.$$

Por el Lema 3.2.4 es suficiente demostrar que

$$\int_{\beta_1(\rho, t)}^{\beta_0(\rho, t)} e^{-p\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta = o(t^{-(p+1)}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Tenemos que

$$\left| \int_{\beta_1(\rho,t)}^{\beta_0(\rho,t)} e^{-p\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta \right| \leq \int_{\beta_1(\rho,t)}^{\beta_0(\rho,t)} e^{-p\beta} d\beta = -\frac{1}{p} e^{-p\beta} \Big|_{\beta_1(\rho,t)}^{\beta_0(\rho,t)}$$

$$= (\nu_0(t, \rho))^{-p} - (\nu_1(t, \rho))^{-p}.$$

Por el Teorema de Lagrange

$$(\nu_0(t, \rho))^{-p} - (\nu_1(t, \rho))^{-p} = [\nu_0(t, \rho) - \nu_1(t, \rho)] \xi^{-(p+1)},$$

donde  $\xi \in (\nu_1(t, \rho), \nu_0(t, \rho))$ .

Por el decrecimiento de  $\xi^{-(p+1)}$ , tenemos

$$\xi^{-(p+1)} \leq (\nu_0(t, \rho))^{-(p+1)}.$$

Además,

$$\begin{aligned} \nu_0(t, \rho) - \nu_1(t, \rho) &= \frac{\tau_0}{\rho} + \sqrt{(t/\rho)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{t - \tau_0}{\rho}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{\rho} [\tau_0 + \sqrt{t^2 - \rho^2} - \sqrt{(t - \tau_0)^2 - \rho^2}]. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\tau_0 + \sqrt{t^2 - \rho^2} - \sqrt{(t - \tau_0)^2 - \rho^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty.$$

En efecto, esto se sigue de las siguientes afirmaciones

$$\sqrt{t^2 - \rho^2} - t \rightarrow 0$$

$$\sqrt{(t - \tau_0)^2 - \rho^2} - (t + \tau_0) = \sqrt{t^2 - 2t\tau_0 + \tau_0^2 - \rho^2} - (t + \tau_0) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto el Teorema 3.1 esta probado. ■

**Corolario 3.2.1.** *i) Sea*

$$R_{\frac{2}{3}}(\rho, \theta, t) = \int_{\beta \geq \beta_1(\rho, t)} e^{-\frac{2}{3}\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta. \quad (3.2.14)$$

*entonces*

$$R_{\frac{2}{3}}(\rho, \theta, t) = R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}). \quad (3.2.15)$$

*donde*

$$R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) = R_{p,+}(\rho, t) \quad \text{para} \quad p = 2/3$$

veáse (3.2.3)

ii)

$$R_{\frac{4}{3}}(\rho, \theta, t) = \int_{\beta \geq \beta_1(\rho, t)} e^{-\frac{4}{3}\beta + i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta = o(t^{-5/3}) \quad (3.2.16)$$

**Demostración.** i) Se sigue del Teorema 3.1, para  $p = \frac{2}{3}$ .

ii) Por Teorema (3.1) tenemos que para  $p = \frac{4}{3}$

$$R_{\frac{4}{3}}(\rho, \theta, t) = R_{\frac{4}{3},+}(\rho, t)t^{-7/3} + o(t^{-7/3}).$$

Por el lema A.2.2  $t^{-7/3} = o(t^{-5/3})$  y también  $o(t^{-7/3}) = o(t^{-5/3})$ . Por lo tanto obtenemos (3.2.16). ■

**Lema 3.2.5.** *Se cumple que*

$$r(\rho, \theta, t) = \int_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} \varphi(\beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} (1 - f(t - \rho \cosh \beta)) d\beta = o(t^{-5/3}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.2.17)$$

donde

$$\varphi(\beta) = o(e^{-2\beta}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

**Demostración.** Debido a que  $\varphi(\beta) = o(e^{-2\beta})$ , por definición  $|\varphi(\beta)| \leq C e^{-2\beta}$ ,  $\beta \geq k$ . Entonces para  $\beta_1(\rho, t) \geq k$

$$|r(\rho, \theta, t)| \leq C \int_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} e^{-2\beta} d\beta = -\frac{C}{2} e^{-2\beta} \Big|_{\beta_1(\rho, t)}^{\infty} = C_1 e^{-2\beta_1(\rho, t)}$$

y dado que  $\beta_1$  es como en (3.1.3) entonces

$$C_1 e^{-2\beta_1(\rho, t)} = \frac{C_2(\rho)}{t^2} = o(t^{-5/3}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto (3.2.17) se cumple.

### 3.3. Cárácter de convergencia de la amplitud de la onda dispersa.

Esta es la sección principal de la tesis. Aquí formulamos y demostramos el resultado principal declarado en la introducción. De manera más precisa escribimos la asintótica de  $R(\rho, \theta, t)$ , que es la diferencia entre la amplitud de la onda dispersa en el momento  $t$  y la amplitud límite.

**Teorema 3.2.** Para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$ ,  $R(\rho, \theta, t)$  admite la siguiente asintótica :

$$R(\rho, \theta, t) = \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}) \right] \quad t \rightarrow \infty \quad (3.3.1)$$

donde  $Z_+(\theta)$  se define (1.2.8) y  $R_{2/3}(\rho, \theta, t)$  se define en (3.2.15).

**Demostración.** Por la ecuación (3.1.4) y el Lema 1.2.2 inciso **iv**)

$$R(\rho, \theta, t) = \frac{i}{6\pi} \int_{|\beta| \geq \beta_1(\rho, t)} [Z_+(\theta) e^{-\frac{2}{3}\beta} + z_+(\theta) e^{-\frac{4}{3}\beta} + O(e^{-2\beta})] e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} [1 - f(t - \rho \cosh \beta)] d\beta$$

Por la ecuaciones (3.2.14) y (3.2.16) obtenemos que

$$R(\rho, \theta, t) = \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3}}(\rho, \theta, t) + z_+(\theta) R_{\frac{4}{3}}(\rho, \theta, t) + r(\rho, \theta, t) \right]$$

y por el Corolario 3.2.1 y el Lema A.2.2 del apéndice obtenemos que

$$\begin{aligned} R(\rho, \theta, t) &= \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) \left( R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}) \right) + z_+(\theta) o(t^{-5/3}) + o(t^{-5/3}) \right] \\ &= \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}) + o(t^{-5/3}) + o(t^{-5/3}) \right] \\ &= \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto el Teorema se cumple. ■

**Corolario 3.3.1.**

$$|R(\rho, \theta, t)| \leq C(\theta, \rho) t^{-5/3}$$

**Demostración.** Del teorema

$$|R(\rho, \theta, t)| = \left| \frac{i}{6\pi} \left[ Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) t^{-5/3} + o(t^{-5/3}) \right] \right| \leq \left| \frac{i}{6\pi} Z_+(\theta) R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) \right| t^{-5/3} \leq C(\theta, \rho) t^{-5/3}$$

Por lo tanto la afirmación se cumple ya que  $\left| R_{\frac{2}{3},+}(\rho, t) \right| \leq \frac{\rho^{2/3}}{2^{2/3}}$  por (3.2.3). ■

# Capítulo 4

## Conclusiones

En la tesis hemos considerado el carácter de la dispersión de la onda plana incidente viajera (0.0.1) por una cuña recta. Las características físicas de la cuña son tal que el problema se describe por un problema mixto de Cauchy con los datos de frontera de la cuña del tipo Dirichlet (veáse 0.0.8). Es bien conocido que la solución óptica  $u_o$  que es la suma de la onda incidente  $u_{in}$  y la onda reflejada  $u_{ref}$  satisface a este sistema, pero no es continua, tiene discontinuidades a lo largo de los rayos críticos. Por lo tanto se considera usualmente la solución completa  $u$  que es la suma de la solución óptica y la onda dispersa la cual se genera por el vértice de la cuña y es una onda cilíndrica.

Resulta que la amplitud de la onda dispersa tiene límite en cada punto  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus W$ , esto significa que se cumple el principio de la amplitud límite (veáse sección **2.4**). Encontramos la asintótica de la diferencia  $R_d = A_d(\rho, \theta) - A_d(\rho, \theta, t)$  (veáse (3.3.1)), esta asintótica determina el carácter de convergencia y resulta que el orden de esta convergencia es  $t^{5/3}$ , además se ve que esta cota se mejora por este método y esta asintótica es continua, es decir, no depende de las discontinuidades de  $u_d$  sobre los rayos críticos (esto corresponde a la observación (1.2.1))

# Apéndice A

## A.1. Propiedades de la solución óptica.

En este apéndice demostraremos que la solución óptica satisface el problema mixto de Cauchy (0.0.8). Primero demostraremos que la onda viajera es la solución de la ecuación de onda.

**Lema A.1.1.** *Sea  $g(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$ . Entonces la función  $g(t - \vec{n}_0 \cdot y)$  satisface la ecuación de D'Alembert*

$$\square g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus W \quad (\text{A.1})$$

**Demostración.** Basta demostrar que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = \Delta g(t - \vec{n}_0 \cdot y).$$

Tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = g''(t - \vec{n}_0 \cdot y)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = g''(t - \vec{n}_0 \cdot y) \cos^2 \alpha, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = g''(t - \vec{n}_0 \cdot y) \sin^2 \alpha.$$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos que

$$\Delta g(t - \vec{n}_0 \cdot y) = g''(t - \vec{n}_0 \cdot y).$$

Por lo tanto (A.1) se cumple . ■

**Corolario A.1.1.** *La onda incidente  $u_{in}$  satisface la ecuación de onda (A.1)*

**Demostración.** Por (0.0.1)  $u_{in}$  tiene la forma de la onda viajera. En efecto la exponente  $e^{i(\vec{k}_0 \cdot y - \omega_0 t)} = e^{i(\omega_0 \cdot \vec{n}_0 \cdot y - \omega_0 t)} = e^{-i\omega_0(t - \vec{n}_0 \cdot y)}$  de donde sigue la afirmación, ya que  $f(t - \vec{n}_0 \cdot y)$  también toma la misma forma entonces  $u_{in}$  satisface la ecuación de onda por el Lema A.1.1. ■

**Corolario A.1.2.** *La onda reflejada satisface la ecuación de onda en  $\mathbb{R}^2$  fuera de los rayos críticos.*

**Demostración.** Se sigue de las representaciones (0.0.4) y (0.0.6) la demostración es similar a la del Corolario A.1.1 ■

Ahora demostraremos que la solución óptica satisface el problema de Cauchy mixto .

**Proposición A.1.1.** *La solución óptica  $u_o$  dada por (0.0.7) satisface el sistema (0.0.8) fuera de los rayos críticos.*

**Demostración. 1)** Veamos que  $\square u_o(y, t) = 0$ , es decir que  $\square u_{in}(y, t) + \square u_{ref}(y, t) = 0$ . Se sigue de los Corolarios A.1.1 y A.1.2.

**2)** Ahora demostremos que  $u_o(y, t)|_{\partial W} = 0$ , es decir  $u_o(0, y_2, t) = 0$  y  $u_o(y_1, 0, t) = 0$ .  
 $u_o(0, y_2, t) = u_{in}(0, y_2, t) + u_{ref}(0, y_2, t)$ , de (0.0.1) obtenemos que

$$u_{in}(0, y_2, t) = e^{i(\omega_0 y_2 \sin \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_2 \sin \alpha)$$

y por (0.0.5) y (0.0.6) obtenemos

$$u_{r,1}(0, y_2, t) = -e^{i(\omega_0 y_2 \sin \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_2 \sin \alpha), \quad u_{r,2}(0, y_2, t) = -e^{i(\omega_0 y_2 \sin \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_2 \sin \alpha),$$

esto implica que  $u_o(0, y_2, t) = 0$ . De igual manera por (0.0.1) se obtiene que

$$u_{in}(y_1, 0, t) = e^{i(\omega_0 y_2 \cos \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_1 \cos \alpha),$$

por (0.0.5) y (0.0.6) obtenemos

$$u_{r,1}(y_1, 0, t) = -e^{i(\omega_0 y_1 \cos \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_1 \cos \alpha), \quad u_{r,2}(y_1, 0, t) = -e^{i(\omega_0 y_1 \cos \alpha - \omega_0 t)} f(t - y_1 \cos \alpha),$$

esto demuestra que  $u_o(y_1, 0, t) = 0$ . Por lo tanto  $u_o(y, t)|_{\partial W} = 0$ .

**3)** Demostremos que  $u_o(y, 0) = u_{in}(y, 0)$ . Por (0.0.7)  $u_o(y, 0) = u_{in}(y, 0) + u_{ref}(y, 0)$  y por (0.0.4), (0.0.6)  $u_{ref}(y, 0) = 0$ . Por lo tanto  $u_o(y, 0) = u_{in}(y, 0)$ . ■

## A.2. O- Simbolismo

**Definición A.2.1.** *El simbolo  $O(s^k)$ ,  $s \rightarrow 0$  denota cualquier función  $\varphi(s)$ , que esta definida en una venciad de 0 y existe  $c > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que*

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^k} \right| \leq c, \quad |s| < \epsilon$$

**Lema A.2.1.** *Sea  $O(s^n)$  y  $O(s^m)$ ,  $s \rightarrow 0$  para  $m, n \in \mathbb{Z}$ , se cumple lo siguiente*

- 1)  $O(s^n)O(s^m) = O(s^{n+m})$ , en particular  $O(s^n)s^m = O(s^{n+m})$
- 2)  $cO(s^n) = O(s^n)$  para  $c$  constante
- 3) Si  $\varphi(s) = O(s^m)$ , entonces  $\varphi(s) = O(s^n)$ , cuando  $m \geq n$
- 4)  $O(s^n) + O(s^n) = O(s^n)$ .

**Demostración. 1)** Sea  $O(s^n) = \varphi(s)$  y  $O(s^m) = \psi(s)$  entonces por definición existen  $c_1, c_2 > 0$  y  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tal que

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| \leq c_1, \quad |s| < \epsilon_1$$

$$\left| \frac{\psi(s)}{s^m} \right| \leq c_2, \quad |s| < \epsilon_2$$

Entonces

$$\left| \frac{\varphi(s)\psi(s)}{s^{n+m}} \right| = \left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| \left| \frac{\psi(s)}{s^m} \right| \leq c_1 c_2 \leq c, \quad |s| < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$$

Por lo tanto  $O(s^n)O(s^m) = O(s^{n+m})$ .

**2)** Sea  $O(s^n) = \varphi(s)$ , por definición existe  $c_1 > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| \leq c_1, \quad |s| < \epsilon$$

Entonces

$$\left| \frac{c\varphi(s)}{s^n} \right| = c \left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| \leq cc_1 = c_2, \quad |s| < \epsilon$$

Por lo tanto  $cO(s^n) = O(s^n)$

**3)** Como  $\varphi(s) = O(s^m)$ , por definición existe  $c > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^m} \right| \leq c, \quad |s| < \epsilon$$

ya que  $m \geq n$  entonces

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| = \left| \frac{\varphi(s)}{s^m} \right| |s^{m-n}| \leq c |s^{m-n}| \leq c, \quad \text{pues } m \geq n, \quad |s| < \epsilon$$

Por lo tanto  $\varphi(s) = O(s^n)$

**4)** Sea  $O(s^n) = \varphi(s)$  y  $O(s^n) = \psi(s)$  entonces por definición existen  $c_1, c_2 > 0$  y  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tal que

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| \leq c_1, \quad |s| < \epsilon_1$$

$$\left| \frac{\psi(s)}{s^n} \right| \leq c_2, \quad |s| < \epsilon_2$$

Entonces

$$\left| \frac{\varphi(s)}{s^n} + \frac{\psi(s)}{s^n} \right| \leq \left| \frac{\varphi(s)}{s^n} \right| + \left| \frac{\psi(s)}{s^n} \right| \leq c_1 + c_2 = c \quad |s| < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$$

Por lo tanto  $O(s^n) + O(s^n) = O(s^n)$  ■

**Definición A.2.2.** El simbolo  $o(t^k)$ ,  $t \rightarrow \infty$  denota una función  $g(t)$  tal que  $g(t) \cdot t^k \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

**Lema A.2.2.** Sea  $o(t^p)$  y  $o(t^q)$ ,  $t \rightarrow \infty$ , para  $p, q \in \mathbb{R}$  se cumple las siguientes afirmaciones

1.  $t^p = o(t^q)$  si  $p < q < 0$
2.  $o(t^p) = o(t^q)$  si  $p < q < 0$
3.  $f(t) = Ct^{-k} + O(t^{-k})$ ,  $t \rightarrow \infty$ , entonces existe  $K > 0$  y existe  $D > 0$  tal que  $|f(t)| \leq Dt^{-k}$ ,  $t \geq K$

**Demostración.**

1. Veamos que  $t^p \cdot t^q = t^{p+q} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ya que  $p + q < 0$  por lo tanto se cumple la afirmación.
2. Por definición existe  $g(t) = o(t^p)$ . Vemos que  $g(t) \cdot t^q = g(t) \cdot t^q \frac{t^p}{t^p} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ya que por definición  $g(t) \cdot t^p \rightarrow 0$  y  $t^{q-p} \rightarrow 0$  pues  $q > p$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto se cumple la afirmación.
3. Por definición  $\frac{f(t) - Ct^{-k}}{t^{-k}} \leq C_1$ ,  $t \geq K$ , entonces  $f(t) - Ct^{-k} \leq C_1 t^k$ ,  $t \geq K$ . Por lo tanto  $|f(t)| = |f(t) - Ct^{-k} + Ct^{-k}| \leq C_1 t^{-k} + Ct^k \leq Dt^{-k}$ ,  $t \geq K$ . ■

# Bibliografía

- [1] A.I.Komech , N.J.Mauser, A.E.Merzon. On Sommerfeld representation and uniqueness in diffraction by wedges, *Mathematical Methods in the Apllyed Sciences* **2005**; 28:147-183.
- [2] A.I.Komech , A.E.Merzon. Limiting amplitude principle in the scatterind by wedges, *Mathematical Methods in the Apllyed Sciences* **2006**; Vol. 29, issue 10, pp. 1147-1185.
- [3] G.D. Maliuzhinetz, Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedges with given phase impedance. Sov. Phys. Doul., 3, 752-755 (1953).
- [4] Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction. *Math. Ann.* 1896; **47** : 317-341.
- [5] Tanya Jannette Villalba Vega. Solución explícita del problema de difracción no estacionaria de la onda plana del tipo función de Heaviside sobre una cuña, Tesis de Licenciatura , 2005.