

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“ANÁLISIS CLÁSICO Y CUÁNTICO DE UN SISTEMA SOLUBLE CON PROBLEMAS DE
FIJACIÓN DE NORMA (GAUGE FIXING).”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
DANIEL PACHECO SAN ROMÁN

BAJO LA ASESORÍA DEL:
DR. VICTOR MANUEL VILLANUEVA SANDOVAL

Morelia, Mich. Octubre 2008.

Agradecimientos

A todas aquellas personas que han hecho posible este trabajo, mi asesor Víctor y mis sinodales: Mary Carmen, Eduardo y Mariano.

A todos los que me han apoyado mi familia, mis amigos, profesores y de manera muy especial a esas personas que han sido la luz en mi vida.

Ali.
Rufinita.
Chon.

Índice general

1. Revisión del formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano	7
1.1. Coordenadas generalizadas	7
1.2. Ligaduras	8
1.3. Principio de D' Alembert y Ecuaciones de Lagrange	8
1.4. Principio de Hamilton	11
1.5. Hamiltoniano	12
1.5.1. Transformaciones de Legendre	12
1.5.2. Ecuaciones de movimiento de Hamilton	13
2. Sistemas dinámicos con ligaduras	14
2.1. EL Lagrangiano como punto de partida	14
2.2. El formalismo Hamiltoniano	15
2.2.1. Ligaduras de Primera y Segunda clase	16
2.3. Paréntesis de Dirac	17
2.4. Orbitas de Norma	20
2.4.1. Condiciones de norma	20
3. Un modelo Soluble	22
3.1. El Rotor Rígido	23
3.2. Un modelo soluble	24
3.3. Solución clásica del modelo	25
3.3.1. Análisis de las normas de FLPR	31
3.4. Cuantización del modelo de FLPR	36
3.4.1. Cuantización canónica de Dirac	36
3.4.2. Cuantización de espacio fase reducido (Faddeev-Popov)	38
3.4.3. Cuantización canónica del modelo	39
3.4.4. Cuantización de Faddeev del modelo	41
3.4.5. Un bosquejo del método BFV	42
3.4.6. Un bosquejo del método de proyectores de Klauder	45

4. Conclusiones	48
A. Teorema de Noether	49
B. Oscilador Armónico	53
B.1. Cuantización del álgebra de Heisenberg en variedades de Riemannianas	53
B.2. La integral de camino	57
B.3. El oscilador armónico	58

Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la física moderna es la cuantización de las teorías de norma, ya que la invariancia de norma abarca todas las interacciones fundamentales de la naturaleza desde la electrodinámica, el modelo estándar de las interacciones electrodébiles, QCD y la gravitación. A pesar de ello no se ha podido implementar un método que describa de manera exacta la cuantización de teorías como gravitación y QCD.

Es muy importante mencionar que la idea original de este trabajo era estudiar la cuantización de Teorías de Yang-Mills (no Abelianas), en particular QCD a bajas dimensiones.

Sin embargo, sobre la marcha, adverbimos la complejidad del problema, razón por la cual decidimos hacer una revisión de un sistema análogo a QCD no relativista pero mucho más simple, propuesto por T.D. Lee et al [11] ,y para ello haremos uso de algunos de los métodos de cuantización de teorías de norma. Como lo son el método de Dirac, el de Faddeev-Popov, brevemente mencionaremos BRST-BFV. Esta revisión esta basada en los siguientes artículos [8], [12], [13], [14] y [20]

Dada su importancia, en el Capítulo 1 se hace una breve revisión de los formalismos de Lagrange y Hamilton. Esto radica en su importancia de aplicacion en los campos más avanzados como mecánica cuántica, mecánica estadística, electrodinámica, etc.

En el Capítulo 2 nos introduciremos a las teorías de norma, las cuales se caracterizan por tener un Lagrangiano singular, motivo por el cual se les llama sistemas singulares. En los sistemas singulares no todos los momentos canónicos son independientes, en decir, deben de existir ligaduras entre las variables y éstas se clasifican como: primarias, secundarias, y otra como ligaduras de primera clase, segunda clase, teniendo particular interés por la de primera clase, pues de acuerdo a Dirac éstas son generadoras de norma.

En el Capítulo 3 se analizara un modelo análogo a un sistema de QCD no relativista. Desde un enfoque clásico se comenzará analizando las condiciones de norma, y mostrará que padece de ambigüedades de Gribov (propias de Yang-Mills: teorías no abelianas), se resolverá el sistema y se clasificaran las orbitas de norma de acuerdo con el parámetro de Teichmüller

$$\gamma \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t), \quad (1)$$

donde γ clasifica las orbitas de norma.

Después se analizará las condiciones de norma

- $\xi = 0$, Norma temporal.

Para esta norma $\gamma = 0$, implicara que se tiene una ambigüedad de Gribov

- $Z=0$, Norma Axial.

Al restringir a $Z(t) = 0$ para todo tiempo t , entonces γ siempre tendrá un valor fijo, entonces la condición de norma no es global.

- $Z = \lambda x$, Norma lambda

Se mostrara que no es más que una copia de la norma axial $Z = 0$

En este mismo Capítulo, la cuantización canónica de Dirac y el calculo del propagador a través de una suma sobre estados da el resultado completo. Por otra parte en la cuantización de Faddeev del modelo, el calculo del propagador utilizado las otras normas en

$$K = \int \mathcal{D}Z_A e^{\frac{i}{\hbar}S}, \quad (2)$$

muestra una ambigüedad ya que el propagador queda truncado.

Se hace mención del hecho de que en otros enfoques, tales como la cuantización de BFV-BRST y proyectores físicos (ambos en la modalidad de integral de camino) producen resultados consistentes con la cuantización de Dirac. Sin embargo, hay que hacer mención que en el enfoque de Faddeev-Popov hay que reducir el espacio fase (ambigüedad de Gribov de segundo tipo). En el enfoque BRST hay que aumentar el espacio fase (introducción de fantasmas y antifantasmas) lo cual generalmente con lleva a fijar la norma un sobreconteo de órbitas de norma (ambigüedad de Gribov de primer tipo). En cambio el enfoque de proyectores da el resultado de manera directa, sin necesidad de fijar la norma. El análisis de este resultado y su aplicación a sistemas de mayor complejidad serán el tema de trabajo a futuro.

Finalmente se han agregado dos apéndices, en el **A** se ha incluido el Teorema de Noether tanto para sistemas regulares como sistemas singulares.

Así como en el **B** se ha desarrollado el análisis clásico y cuántico del oscilador armónico que es central para nuestro análisis.

Capítulo 1

Revisión del formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano

En el presente Capítulo se revisarán brevemente los formalismos debidos a Lagrange y Hamilton. Estos tratan a la mecánica desde puntos de vista alternativos, aunque se reducen a las leyes de Newton, se caracterizan por la relativa facilidad con que muchos problemas se pueden formular. Es importante mencionar que una de sus mayores atribuciones es la relativa facilidad que nos permite ir del formalismo clásico al cuántico y *viceversa*.

1.1. Coordenadas generalizadas

La aplicación directa de las leyes de Newton a un sistema mecánico da un conjunto de ecuaciones de movimiento en función de coordenadas cartesianas. En muchos casos estas coordenadas no son las más convenientes para resolver el problema o describir la evolución de un sistema físico. Por lo que resulta conveniente la implementación de otro sistema de coordenadas (polares, cilíndricas, esféricas) a las cuales denominaremos como coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n , donde también van incluidas las coordenadas cartesianas,

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.1)$$

Recurriendo a una representación vectorial en donde \mathbf{r} sea el vector posición de una partícula

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (1.2)$$

la velocidad se escribirá:

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_k^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad (1.3)$$

denotamos la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i^2. \quad (1.4)$$

1.2. Ligaduras

Las ligaduras relaciones entre las variables que limitan o vinculan el movimiento del sistema, ejemplo: las cuentas de un ábaco están constreñidas a un movimiento unidimensional por las varillas que las atraviesan. Una canica que rueda en un plano inclinado.

Las ligaduras pueden clasificarse de la manera siguiente. Si las condiciones de ligadura pueden expresar en forma de ecuaciones que relacionen las coordenadas de las partículas cuya forma sea

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0, \quad (1.5)$$

diremos que las ligaduras son holónomas. Las ligaduras que no puedan expresarse de esta manera se denominan no holónomas.

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de los problemas mecánicos. Primero, las coordenadas \mathbf{r}_i ya no son todas independientes puesto que están relacionadas por las ecuaciones de ligadura; luego las ecuaciones de movimiento no serán todas independientes. Segundo, las fuerzas de ligadura, se cuenta entre las incógnitas del problema y debe obtenerse de la solución que buscamos, por ejemplo, la fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta no se da a priori.

Un sistema de N partículas, exento de ligaduras, tiene $3N$ coordenadas independientes o grados de libertad. Si existen ligaduras holónomas, expresadas por k ecuaciones (1.5), que son utilizadas para eliminar k de las $3N$ coordenadas y nos quedarán $3N - k$ coordenadas independientes y diremos que el sistema posee $3N - k$ grados de libertad. Introduciendo $3N - k$ variables independientes nuevas $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ en función de las cuales, las antiguas coordenadas \mathbf{r}_i se expresan mediante ecuaciones de la forma

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad (1.6)$$

que contiene implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de transformación del sistema de variables (\mathbf{r}_i) al sistema de las (q_i).

1.3. Principio de D' Alembert y Ecuaciones de Lagrange

Desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas δr_i , compatible con las fuerzas y ligaduras al sistema en el instante dadá t . Se le llama desplazamiento virtual para distinguirlo del desplazamiento real del sistema en un intervalo de tiempo dt , durante el cual pueden variar las fuerzas y las ligaduras. Supongamos que el sistema está en equilibrio, o sea $F_i = 0$ para cada partícula, entonces el trabajo virtual dado por el producto vectorial $F_i \cdot \delta r_i = 0$. La suma del trabajo de todas las partículas sera nulo

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (1.7)$$

descompongamos F_i en la fuerza aplicada F_i^a y la fuerza de ligadura f_i .

$$F_i = F_i^a + f_i,$$

al sustituirla en la ecuación (1.5) queda en la forma:

$$\sum_i F_i^a \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.8)$$

Limitemos el sistema para los cuales el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura sea cero. Por ejemplo se cumple cuando se obliga a una partícula a moverse sobre una superficie, la fuerza de ligadura es perpendicular a dicha superficie, mientras que el desplazamiento virtual sea tangente a la fuerza, el trabajo virtual sera cero. Tenemos, como condición de equilibrio de un sistema que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea cero.

$$\sum_i F_i^a \cdot \delta r_i = 0, \quad (1.9)$$

a esta ecuación se le conoce como principio de los trabajos virtuales. Para obtener tal principio utilizaremos un recurso pensado por Jaques Bernoulli y desarrollado por D' Alembert. La ecuación de movimiento

$$F_i - \dot{p}_i = 0,$$

que dice que las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una fuerza efectiva invertida $-\dot{p}_i$. Sustituimos en la ecuación 1.4 quedando de la forma.

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0, \quad (1.10)$$

ahora haciendo la descomposición en fuerzas aplicadas y de ligadura, tenemos

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0,$$

limitando de nuevo a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea cero, tenemos

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0, \quad (1.11)$$

que constituye el principio de D' Alembert. Se logró que las fuerzas de ligadura no figuren y se pondrá el superíndice a . Ahora debemos transformar el principio en una expresión que contenga desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son entonces independientes entre si (para ligadura holónomas), con lo cual se podrán hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las δq_i .

La traducción del lenguaje de las r_i al de las q_j parte de las ecuaciones de transformación (1.5) y se calcula la v por medio de la regla de la cadena

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (1.12)$$

calcularemos el desplazamiento virtual arbitrario δr_i se puede relacionar con los desplazamientos virtuales δr_j tenemos

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.13)$$

El trabajo en función de las coordenadas generalizadas

$$\sum F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \cdot \delta q_j, \quad (1.14)$$

donde las Q_j son las componentes de las llamadas fuerzas generalizadas, las cuales tienen la forma

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \quad (1.15)$$

Pasemos ahora al otro término de la ecuación (1.9), que puede escribirse de la forma

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

considerando

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\}, \quad (1.16)$$

en el último término de la ecuación anterior podemos permutar las derivadas respecto a t y q_j y en analogía con la ecuación (1.3)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial v_i}{\partial q_j},$$

al derivar parcialmente la ecuación (1.3) con respecto a \dot{q}_j obtenemos

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \quad (1.17)$$

a lo que algunos libros suelen llamar cancelación de puntos. Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación (1.16) obtenemos

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} (m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}) - m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\},$$

y el segundo miembro de la ecuación (1.9) al desarrollarse:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j,$$

donde se identifica $\sum \frac{1}{2} m_i v_i$ como la energía cinética T del sistema, entonces el principio de D'Alembert se entiende como:

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (1.18)$$

Si todos los desplazamiento virtuales δq_j son independientes, entonces para que se cumpla la ecuación anterior es necesario que se anulen por separado los coeficientes. Teniendo en total n ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.19)$$

Cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar $U=U(q_1, \dots, q_n, t)$, entonces la F_i se escribe como $F_i = -\nabla_i U$, entonces las fuerzas generalizadas pueden escribirse de la forma:

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j},$$

de donde

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (1.20)$$

Entonces la ecuación (1.19) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0, \quad (1.21)$$

ya hemos definido aquí U tal que no depende de las velocidades generalizadas, entonces podemos incluir U en la parcial con respecto de \dot{q}_j , la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0,$$

y además definimos la lagrangiana L en la forma:

$$L \equiv T - U, \quad (1.22)$$

entonces la ecuación (1.19) toma la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q_j} = 0, \quad (1.23)$$

expresión que es conocida como ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.4. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton es un principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas pueden derivarse de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas, velocidad y del tiempo. A dichos sistemas los llamaremos monógenos¹. Para sistemas monógenos, el principio de Hamilton se enuncia diciendo que el movimiento del sistema entre el t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea donde $L = T - U$ tiene un valor estacionario

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1.24)$$

se recorre en realidad el camino para el cual el valor de la integral sea estacionario. Significa que a lo largo del camino la integral tiene el mismo valor, salvo infinitésimos de primer orden. Podemos

¹sistema monógeno significa que todas las fuerzas se generan a partir de una sola función

resumir el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la variación de la integral curvilínea I para t_1 y t_2 fijos, es nula

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0, \quad (1.25)$$

a S se le da el nombre de acción o integral de acción.

1.5. Hamiltoniano

En la formulación de Lagrange, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de movimiento de la forma de la ecuación (1.19), desde el punto de vista de Lagrange, un sistema con n grados de libertad independientes es un problema de n variables independientes $\frac{dq_i}{dt}$ y $\frac{d\dot{q}_i}{dt}$.

La formulación de Hamilton se desea describir el movimiento mediante ecuaciones de movimiento de primer orden. Como el número de condiciones iniciales que determinan el movimiento es $2n$, deberá haber $2n$ ecuaciones independientes de primer orden expresadas en función de $2n$ variables independientes, las cuales podemos tomar la mitad de ellas de las n coordenadas generalizadas q_j y la otra mitad de las cantidades de movimiento conjugados o generalizados.

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.26)$$

Las cantidades (q, p) se denominan variables canónicas. Tratado como problema matemático la transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton corresponde a cambiar las variables de nuestras funciones mecánicas de $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, p, t)$, donde p esta relacionada con q y \dot{q} mediante la ecuación anterior. El método para conmutar las variables de esta manera lo proporciona la transformada de Legendre.

1.5.1. Transformaciones de Legendre

Consideremos una función de sólo dos variables $f(x, y)$, la diferencial de f

$$df = u dx + v dy \quad (1.27)$$

donde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Queremos cambiar la base de descripción de x, y a un nuevo conjunto distinto de variables u, y de manera que las cantidades diferenciales se expresen en función de las diferenciales du y dy . Sea g una función de u e y definida por la ecuación

$$g = f - ux, \quad (1.28)$$

entonces, la diferencial de g es

$$dg = df - u dx - x du,$$

al sustituir la diferencial de f tenemos

$$dg = vdy - xdu,$$

que tiene la forma buscada. Las cantidades x y v son ahora funciones de u e y dadas por las relaciones

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (1.29)$$

1.5.2. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

Ahora la transformación de $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, p, t)$ se diferencia de las ecuaciones anteriores en que hay que transformar más de una variable, entonces nos encontramos ante una función definida en analogía con la ecuación (1.25) tenemos:

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (1.30)$$

donde H recibe el nombre de hamiltoniana. Considerada función de q, p y t la diferencial de H se ve

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (1.31)$$

diferenciando la ecuación (1.27) tenemos

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.32)$$

los términos que aparece $d\dot{q}_i$ se anula a consecuencia de la definición de la cantidad generalizada, o sea $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ y de la ecuación de Lagrange $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ por lo tanto la ecuación (1.28) se reduce

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.33)$$

comparando las ecuaciones (1.31) y (1.30) obtenemos las siguientes relación:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.34)$$

y

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Donde las ecuaciones (1.31) son las llamadas ecuaciones canónicas de Hamilton, y constituyen el sistema de $2n$ ecuaciones de movimiento de primer orden que constituyen las ecuaciones de Lagrange.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos con ligaduras

En este Capítulo trataremos de entender qué es una teoría de norma, y lo haremos desde el punto de vista del hamiltoniano, donde se vera que toda teoría de norma está caracterizada por un Lagrangiano singular, a lo que se le llama un sistema singular. Ahora en los sistemas singulares no todos los momentos canónicos son independientes, entonces deben de existir ligaduras entre las variables. Y estas se pueden clasificar como: Ligaduras primarias y secundarias, Ligaduras de primera y segunda clase. Pondremos nuestro interés en las Ligaduras de primera clase, pues según Dirac estas son generadoras de transformaciones de norma.

Además se vera la importancia de tener cuidado en imponer las condiciones de norma, ya que una mala elección puede dar lugar a ambigüedades de Gribov.

2.1. EL Lagrangiano como punto de partida

Considerando un sistema físico descrito por N variables dinámicas $q_j(t), j = 1, 2, 3, \dots, n$ que depende del tiempo t . La evolución dinámica se obtiene al considerar la funcional de acción

$$S[q_j] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j) dt, \quad (2.1)$$

como estacionaria ante variaciones $\delta q_j(t)$. Considerándose el caso en que las variaciones $\delta q_j(t)$ se anulen en los puntos extremos $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Fijando las condiciones de frontera para $\delta q_i(t)$.

Las condiciones para que la acción sea mínima son las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.2)$$

escribiendo la ecuación con mayor detalle como:

$$\sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_j}. \quad (2.3)$$

De la ecuación anterior, podemos ver inmediatamente que las aceleraciones están unívocamente determinadas por las posiciones y las velocidades siempre y cuando la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_j}$ (Hessiano de

L) sea invertible. Esto es, sólo si el Hessiano tiene determinante distinto de cero.

En el caso de cumplirse este requisito, el sistema se le llama regular, si por el contrario, el determinante del Hessiano es cero (se le llama singular), las aceleraciones no están unívocamente determinadas por posiciones y velocidades y las soluciones a las ecuaciones de las ecuaciones de movimiento pueden contener funciones arbitrarias del tiempo. En este caso se dice que el sistema es singular.

2.2. El formalismo Hamiltoniano

En el caso de sistemas singulares, no todos los momentos canónicos son independientes, lo cual significa que deben de existir ciertas relaciones (ligaduras ó constricciones) entre las variables del espacio fase

$$\dot{\phi}_m(q_j, p_j), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.4)$$

Estas ligaduras son consecuencias de la definición de los momentos canónicos y se denominan primarias para enfatizar que las ecuaciones de movimiento no han sido usadas para obtenerlas.

Se dice que un sistema de ligaduras es irreducible cuando ninguna de ellas se obtiene como combinación lineal de otras, en caso contrario, el sistema es reducible. Se dice que las ligaduras son regulares si la matriz de las derivadas de las ligaduras con respecto a las variables del espacio fase tiene rango maximal, éste es si el rango de la matriz iguala al número de ligaduras irreducibles.

Aun cuando no todos los momentos son independientes, siempre es posible obtener el Hamiltoniano canónico:

$$H_0(q_j, P_j) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L \quad (2.5)$$

sin embargo el Hamiltoniano canónico está bien definido sólo en el subespacio fase de las constricciones $\phi_m = 0$ y por tanto se puede extender arbitrariamente fuera de esta superficie de ligaduras. De tal forma, el Hamiltoniano será el mismo si realizamos la sustitución

$$H_0 \longrightarrow H_\star = H_0 + \sum_m u^m(q, p; t) \phi_m, \quad (2.6)$$

donde $u^m(q, p; t)$ son funciones arbitrarias del tiempo y de las variables del espacio fase.

La evolución dinámica para cualquier variable $f(q, p; t)$ está dada por las ecuaciones de movimiento

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_\star\}. \quad (2.7)$$

Por consistencia, las ligaduras deben conservarse durante la evolución dinámica del sistema. Por lo tanto las ecuaciones de movimiento aplicadas a las ligaduras mismas conducen a:

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_0\} + \sum_{m'} u^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0. \quad (2.8)$$

Si debido a la relación de consistencia (2.8) se obtienen nuevas ligaduras sobre las variables, éstas reciben el nombre de ligaduras secundarias. En principio, se sigue analizando la consistencia (2.8) para cada nueva ligadura hasta que ya no surjan más de ellas.

Para poder hacer una mejor distinción entre las ligaduras, se definen las igualdades fuertes y débiles. Se introduce el símbolo de igualdad débil \approx par denotar las ecuaciones de las ligaduras. Así una cantidad que es numéricamente cero pero que no es nula idénticamente, como es el caso de las ligaduras, se escribe $\phi_j \approx 0$. Esto significa que su paréntesis de Poisson con las variables del espacio fase puede ser diferente de cero. En general, dos funciones A y B que coinciden en la subvariedad definida por las ligaduras son débiles igualmente: $A \approx B$. Nótese que en particular

$$A \approx B \iff A - B = \sum_j c^j(q, p) \phi_j. \quad (2.9)$$

una relación que se cumple en todo el espacio fase y no sólo en la subvariedad $\phi_j \approx 0$ recibe el nombre de igualdad fuerte, y se denota por el símbolo usual de igualdad.

una consecuencia importante de las relaciones de consistencia (2.8) sobre las funciones u^m es que están determinadas en general por

$$u^m(q, p; t) = U^m(q, p) + \sum_a v^a(t) V_a^m(q, p), \quad (2.10)$$

donde U^m es una solución particular de la ecuación no homogénea en (2.8) y V_a^m es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación homogénea

$$\sum_m V_a^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.10), las funciones $v^a(t)$ son completamente arbitrarias y dependientes del tiempo. Nótese que el Hamiltoniano ecuación(2.6) puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} H_\star &= H_0 + \sum_m [U^m + \sum_a v^a V_a^m] \phi_m, \\ &= H + \sum_a v^a \phi_a, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con las identificaciones $H = H_0 + \sum_m U^m \phi_m$ y $\phi_a = \sum_m V_a^m \phi_m$. Esta estructura nos será de utilidad a continuación.

2.2.1. Ligaduras de Primera y Segunda clase

La distinción de ligaduras primarias y secundarias no es relevante, todas ellas son vistas como elementos de un mismo conjunto. Una clasificación alternativa se realiza introduciendo los conceptos de funciones de primera y segunda clase. Se dice que una función $F(q, p)$ es de primera clase si su paréntesis de Poisson con cada ligadura se anula débilmente:

$$\{F, \phi_m\} \approx 0; \quad j = 1, 2 \dots J. \quad (2.13)$$

Cualquier función de las variables canónicas que no sea de primera clase se denomina de segunda clase. De tal forma, si una cantidad es de segunda clase, entonces hay al menos una ligadura con la cual su paréntesis de Poisson no se anula débilmente. Una propiedad importante de las funciones de primera clase, es que esta se conserva cuando calculamos paréntesis de Poisson entre

ellas. Es fácil ver que el Hamiltoniano H_* (ecuación(2.12)) es una cantidad de primera clase, puesto que cada uno de sus componentes lo son:

$$\begin{aligned} \{H, \phi_j\} &\approx \{H_0, \phi_j\} + \sum_m U^m \{\phi_m, \phi_j\} \approx 0, \\ \{\phi_a, \phi_j\} &\approx \left\{ \sum_m V_a^m \phi_m, \phi_j \right\} \approx \sum_m V_a^m \{\phi_m, \phi_j\} \approx 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

de (2.12) vemos que el número de funciones arbitrarias $v^a(t)$ es igual al número de ligaduras primarias de primera clase y que el Hamiltoniano H es la suma del Hamiltoniano canónico y una combinación específica de las ligaduras primarias. Ahora consideraremos el tratamiento de las ligaduras de segunda clase

2.3. Paréntesis de Dirac

Las ligaduras de segunda clase surgen cuando la matriz

$$\Delta_{ss'} = \{\phi_s, \phi_{s'}\}, \quad (2.15)$$

no se anula sobre la superficie de las ligaduras.

Denotamos por $C^{ss'}$ la inversa de $\Delta_{ss'}$:

$$C^{ss'} = (\Delta^{-1})^{ss'}. \quad (2.16)$$

El paréntesis de Dirac para dos funciones de las variables del espacio fase se define como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \sum_{ss'} \{F, \chi_s\} C^{ss'} \{\chi_{s'}, G\}. \quad (2.17)$$

Puede mostrarse que estos paréntesis tienen las mismas propiedades que los paréntesis de Poisson, excepto que los paréntesis canónicos de las variables pueden verse modificados debido a la forma de las ligaduras. en términos de estos paréntesis las ecuaciones de movimiento se calculan de acuerdo a la regla

$$\{F, H\}_D = \{F, H\} - \sum_{ss'} \{F, \chi_s\} C^{ss'} \{\chi_{s'}, H\} \approx \dot{F} - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.18)$$

donde se ha usado el hecho de que H es de primera clase. La característica más importante de los paréntesis de Dirac es que el paréntesis de una variable arbitraria con las ligaduras de segunda clase es idénticamente cero (relación fuerte):

$$\{F, \chi_{s''}\}_D = \{F, \chi_{s''}\} - \sum_{ss'} \{F, \chi_s\} C^{ss'} \{\chi_{s'}, \chi_{s''}\} = 0. \quad (2.19)$$

Esta propiedad muestra que los paréntesis de Dirac son efectivamente una relación de los paréntesis de Poisson de tal forma que los grados de libertad redundante son excluidos de la dinámica del sistema. Podemos pues afirmar que las ligaduras de segunda clase (constricciones fuertes) pueden

imponerse exactamente y no como igualdades débiles, siempre y cuando se trabaje con paréntesis de Dirac.

•**Ligaduras de primera clase: transformaciones de norma.** A partir de este punto, suponemos que se han resuelto las ligaduras de segunda clase, de modo que no haremos distinción entre paréntesis de Dirac y de Poisson.

Denotamos por q_A a las variables del espacio fase y suponemos que los paréntesis fundamentales de estas variables son de la forma

$$\{q_A, q_B\} = C_{AB}(q_A), \quad (2.20)$$

donde $C_{AB}(q_A)$ define una matriz regular de las variables.

La evolución dinámica está generada por un Hamiltoniano de primera clase; el Hamiltoniano canónico H_0 sujeto a cierto número de ligaduras de primera clase ϕ_α (se suponen regulares). Todas estas cantidades tienen las siguientes paréntesis:

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma, \quad (2.21)$$

$$\{H, \phi_\alpha\} = V_\alpha^\beta \phi_\beta, \quad (2.22)$$

donde $C_{\alpha\beta}^\gamma$ y V_α^β son en general funciones de las variables del espacio fase q_A .

Un posible generador de evolución en el tiempo está dado por el Hamiltoniano

$$H_\star = H + \sum_a v^a(t) \phi_a, \quad (2.23)$$

donde ϕ_a son todas las ligaduras de primera clase, H en el Hamiltoniano de primera clase y $v^a(t)$ son funciones arbitrarias del tiempo. Dada la arbitrariedad de estas funciones en el Hamiltoniano, no todas las variables q_A son observables. El sistema está unívocamente determinado una vez que se da un conjunto de q 's y p 's. Sin embargo, la situación inversa no es válida: hay más de un conjunto de variables canónicas que representan el estado físico.

Debido a la cerradura del álgebra de las ligaduras de primera clase (ecs. (2.21) y (2.22)), se sigue que la aplicación sucesiva de dos transformaciones de norma es también una transformación de norma; de modo que eso permite concluir que todas las ligaduras que se obtienen del álgebra de las ligaduras primarias de primera clase generan también transformaciones de norma. Esto parece indicarnos que todas las ligaduras de primera clase y no solo las primarias son generadoras de tales transformaciones. Según Dirac, supondremos **que todas las ligaduras de primera clase son generadoras de transformaciones de norma locales**. Más aún, pedimos que el Hamiltoniano total, definido por

$$H_T = H + \sum_\alpha \lambda^\alpha(t) \phi_\alpha, \quad (2.24)$$

describa la evolución temporal del sistema, así como las transformaciones de norma locales, esto es que incluya todas las ligaduras de primera clase. En la expresión (2.24), $\lambda^\alpha(t)$ son multiplicadores de Lagrange para las ligaduras de primera clase $\phi_\alpha(q_A)$.

El siguiente paso es construir una acción en términos de este Hamiltoniano para investigar tanto la dinámica como las simetrías asociadas a esta descripción Hamiltoniana. Este paso debe

realizarse con especial cuidado ya que si bien es cierto que dada una acción de primer orden el Hamiltoniano correspondiente es inmediatamente obtenible, la situación de primer orden el Hamiltoniano correspondiente es inmediatamente obtenible, la situación inversa no es válida en general. El punto sutil de esta situación es que para poder escribir una acción de primer orden dado un Hamiltoniano, es necesario que el álgebra de paréntesis de Poisson de las variables del espacio fase sea invertible, esto es: si las variables del espacio fase tienen el álgebra dado en (2.20), entonces puede escribirse una acción de primer orden:

$$S[q_A, \lambda^\alpha] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\sum_A \dot{q}_A p^A(q_A) - H(q_A) - \sum_\alpha \lambda^\alpha(t) \phi_\alpha(q_A) \right], \quad (2.25)$$

donde $p^A(q_A)$ son las variables canónicas conjugadas a q_A y satisfacen la ecuación

$$\delta_{AB} = \{q_A, p_B\} = \frac{\partial p^B}{\partial q_A} - \frac{\partial p^A}{\partial q_B} = (C^{-1})^{AB}, \quad (2.26)$$

con C_{AB} dada en los paréntesis fundamentales (2.20), de modo que en los casos en que la matriz C_{AB} es singular, no puede obtenerse tal acción de primer orden [6, 15]

Las variables infinitesimales generadas por las ligaduras *i. e.* las variaciones de la forma

$$\delta_\zeta q_A = \left\{ q_A, \sum_\alpha \zeta^\alpha \phi_\alpha \right\}, \quad (2.27)$$

dan lugar a la siguiente variación de la acción.

$$\begin{aligned} \delta_\zeta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sum_\alpha \zeta^\alpha \left(\sum_{A,B} p^A C_{AB} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q_B} - \phi_\alpha \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_\alpha \left(\dot{\zeta}^\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \lambda^\gamma \zeta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_\beta \zeta^\beta V_\beta^\alpha - \delta_\zeta \lambda^\alpha \right) \phi_\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde ζ^α son los parámetros infinitesimales de la transformación.

Nótese que las condiciones:

$$\zeta^\alpha(t_i) = 0; \quad \zeta^\alpha(t_f) = 0, \quad (2.29)$$

aseguran que los términos de superficie en (2.28) se anulen. Por otra parte, la invariancia de la acción implica que los multiplicadores de Lagrange deben transformarse de acuerdo a la relación [6, 15]:

$$\delta_\zeta \lambda^\alpha = \dot{\zeta}^\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \lambda^\gamma \zeta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_\beta \zeta^\beta V_\beta^\alpha. \quad (2.30)$$

Vemos entonces que las ligaduras de primera clase (todas ellas) generan las transformaciones de norma del sistema. Este es el significado de las ligaduras de primera clase, independientemente del Lagrangiano original usado para realizar el análisis de las ligaduras.

Desde el punto de vista Lagrangiano las simetrías de la acción de primer orden (2.25) pueden ser analizadas a la luz del segundo teorema de Noether. Resulta que en ese caso las cantidades conservadas son precisamente las ligaduras de primera clase ϕ_α [6]. Este punto es desarrollado en el **Apéndice A**.

2.4. Orbitas de Norma

Supongamos que se está trabajando en una formulación Hamiltoniana, donde la acción es invariante bajo las transformaciones de norma generadas por las ligaduras de primera clase:

$$\begin{aligned}\delta_\zeta Z_A &= \{Z_A, \sum_\alpha \zeta^\alpha \phi_\alpha\}, \\ \delta_\zeta \lambda^\alpha &= \dot{\zeta}^\alpha + \sum_{\beta, \gamma} \lambda^\gamma \zeta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_\beta \zeta^\beta V_\beta^\alpha,\end{aligned}$$

donde ζ^α son los parámetros (infinitesimales) de la transformación y las funciones $C_{\beta\gamma}^\alpha, V_\beta^\alpha$ están definidas en (2.21, 2.22). En general $C_{\beta\gamma}^\alpha$ y V_β^α son dependientes de Z_A .

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{Z}_A = \{Z_A, H + \lambda^\alpha \phi_\alpha\}, \quad (2.31)$$

y las trayectorias físicas de sistema están descritas por forma integral de las ecuaciones anteriores. Dada la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange, las trayectorias clásicas pueden diferir en redefiniciones de los multiplicadores de Lagrange, de tal forma que los multiplicadores de Lagrange pueden ser interpretados como funciones que parametrizan la libertad de norma local intrínseca del sistema. Esto también puede verse como una consecuencia de la invariancia de la acción bajo transformaciones de norma generadas por las ligaduras de primera clase.

Se define una órbita de norma para una función $F(Z_A; \lambda_\alpha)$ como el conjunto de todas las funciones $\{F(Z_A^\zeta; \lambda_\zeta^\alpha)\}$ donde las variables $(Z_A^\zeta; \lambda_\zeta^\alpha)$ se han obtenido a partir de las $(Z_A; \lambda^\alpha)$ por medio de transformaciones de norma definidas en (2.27) y (2.30). El espacio de órbita de norma conectadas del sistema está dado por el cociente de todas las configuraciones $\{Z_A; \lambda^\alpha\}$ módulo el grupo de norma¹ y el significado físico del espacio de órbitas conectadas por transformaciones de norma es el siguiente: Cualquier elemento de este espacio corresponde a las clases de equivalencia de todas las funciones $(Z_A^\zeta; \lambda_\zeta^\alpha)$ que están relacionadas por medio de transformaciones de norma. De esta forma, el espacio de órbitas conectadas del sistema representa el conjunto de todas las posibles configuraciones físicas que no están relacionadas por medio de transformaciones de norma.

El caso en que las transformaciones de los multiplicadores de Lagrange sean independientes de las variables del espacio fase es de particular interés. Esto sucede en el caso de un álgebra cerrada, es decir cuando las funciones de estructura $C_{\beta\gamma}^\alpha$ y V_β^α son independientes de las Z_A . En tales circunstancias, la libertad de norma del sistema físico queda totalmente caracterizada por el conjunto de los multiplicadores de Lagrange $\{\lambda^\alpha\}$ y el conjunto de norma.

El modelo analizado posee un álgebra cerrada de las ligaduras lo que nos permite afrontar todos los tópicos mencionados hasta ahora desde la perspectiva del espacio Teichmüller. (esto no se si deba mencionarlo ya que nose que características tiene un espacio Teichmüller)

2.4.1. Condiciones de norma

La presencia de las ligaduras de primera clase y libertad de norma asociada a ellas implican que hay más de un conjunto de variables canónicas que corresponden a un estado físico dado.

¹El grupo de norma es el conjunto de todas las transformaciones de norma generadas por las ligaduras.

Es necesario eliminar esta ambigüedad, lo cual se consigue imponiendo restricciones sobre las variables físicas las cuales reciben el nombre de condiciones de norma canónicas.

Así, las condiciones para fijar la norma no son una consecuencia de la teoría, más bien son ecuaciones traídas desde fuera de la teoría. Sin embargo, al imponer la condición de norma debe tenerse cuidado, ya que una mala elección puede dar lugar a ambigüedades de dos tipos:

- La condición de norma selecciona algunas órbitas del sistema de manera múltiple (problema de Gribov de primer tipo)
- La condición de norma es tal que se omiten algunas órbitas del sistema (problema de Gribov de segundo tipo)

La importancia de asegurarse de que una condición de norma no tenga problemas de Gribov es una mala selección de la condición de norma puede conducir a resultados incorrectos en el proceso de cuantización de la teoría.

Faddeev y Popov [9] propusieron que las condiciones de norma transversas (por ejemplo en QCD: $A_a^3 = 0$ ó $A_a^0 = 0$) podían remediar el problema de múltiples conteos de órbitas. El mecanismo general es imponer condiciones de norma de tal modo que estas condiciones $\chi_\alpha = C_\alpha(Z_A) = 0$ y las ligaduras del sistema $\chi_\beta = \phi_\beta(Z_A) = 0$ sean tratadas como ligaduras de segunda clase. Si la matriz obtenida de los paréntesis de Poisson entre estas ligaduras de segunda clase es no singular:

$$C_{\chi_\alpha \chi_\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \neq 0, \quad (2.32)$$

esto permite resolver para las variables dinámicas por medio de paréntesis de Dirac y además determina unívocamente los multiplicadores de Lagrange, terminando de este modo con la libertad de norma del sistema. Usualmente se entiende que cuando esto se logra, entonces se ha logrado fijar la norma de manera admisible.

Sin embargo, V. Gribov [10] advirtió que las condiciones transversas del tipo de de Faddeev-Popov no fijan la libertad de norma en QCD. De hecho, mostraron que las condiciones de norma de Lorentz para para QCD ($\partial_\mu A^\mu = 0$) o de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) incluyen varias veces la misma órbita en la integral funcional.

Dada la importancia, enfatizando que una condición de norma admisible será: **aquella que nos permita la inclusión de todas y cada una de las órbitas del sistema una y sólo una vez** de tal modo que se eviten problemas de Gribov de cualquier tipo.

Para el modelo de Friedberg et al (**FLPR**) que se analizara en el capítulo 3, las condiciones de norma canónicas sufren de este tipo de ambigüedades. Resulta práctico caracterizar las órbitas del sistema en términos del espacio de Teichmüller. Más aún, una condición de norma admisible (en el sentido definido previamente) se puede lograr en el espacio de los multiplicadores de Lagrange y la inclusión de todas y cada una de las órbitas estará caracterizada por una relación uno a uno entre los espacio de los multiplicadores de Lagrange y el espacio de Teichmüller.

Capítulo 3

Un modelo Soluble

Como mencionamos al inicio de este trabajo, uno de los problemas fundamentales de la física teórica es la cuantización de las teorías de norma, ya que la invariancia de norma abarca todas las interacciones fundamentales desde la electrodinámica, el modelo estandar de las interacciones electrodébiles, QCD y la gravitación. A pesar de ello no se ha podido implementar un método que describa de manera adecuada la cuantización de teorías como gravitación y QCD, debido a su complejidad. Estas teorías invariantes ante transformaciones locales de norma se caracterizan por tener constricciones o ligaduras.

En el presente capítulo se analizará un modelo análogo a un sistema de QCD no relativista. Desde un enfoque clásico se comenzara analizando las condiciones de norma, y mostrara que padece de ambigüedades de Gribov (propias de Yang-Mills: teorías no abelianas), se resolverá el sistema y se clasificaran las orbitas de norma

$$\gamma \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t). \quad (3.1)$$

Donde γ clasifica las orbitas de norma.

Después se analizará las condiciones de norma, comenzando por la norma temporal $\xi = 0$, lo que conduce aun sistema libre de ligaduras, dependerá de la forma del potencial. Además el parámetro de Teichmüller para esta norma $\gamma = 0$, implicara que se tiene una ambigüedad de Gribov.

La Norma Axial, para esta norma al restringir a $Z(t) = 0$ para todo tiempo t , entonces γ siempre tendrá un valor fijo, entonces la condición de norma no es global. Después se revisará norma lambda $Z = \lambda_x$, esta condición es del tipo de espacio reducido, y se mostrara que no es mas que una copia de la norma axial $Z = 0$

La cuantización canónica de Dirac y el calculo del propagador a través de una suma sobre estados da el resultado completo. Por otra parte en la cuantización de Faddeev del modelo, el calculo del propagador utilizado las otras normas en

$$K = \int \mathcal{D}Z_A e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (3.2)$$

muestra una ambigüedad ya que el propagador queda truncado. Al final de está sección veremos el método de proyectores de Klauder que se caracteriza por ser más simple, al no tener que restringir o aumentar el espacio fase como en los métodos anteriores

3.1. El Rotor Rígido

Este no es un sistema que inicialmente posee invariancia de norma, pero lo podemos convertir en uno de este tipo adicionando nuevas variables.

En primer lugar consideremos la descripción del rotor rígido bidimensional según el método de Dirac, en coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.4)$$

y el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \lambda(r - a). \quad (3.5)$$

Los momentos canónicos asociados a este sistema son

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad (3.6)$$

ahora calculamos el Hamiltoniano total

$$H_T = H_0 + \lambda(r - a) = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \lambda(r - a). \quad (3.7)$$

De acuerdo con el método de Dirac tenemos una restricción primaria dada por

$$\xi_1 = r - a \approx 0. \quad (3.8)$$

El siguiente paso es asegurarse que la superficie de restricción se preserva en el tiempo. Esto implica que $\dot{\xi}_1 \approx 0$, es decir

$$\dot{\xi}_1 = \{r - a, H_T\} = \frac{p_r}{m} \implies \xi_2 = p_r \approx 0. \quad (3.9)$$

La restricción secundaria ξ_2 no origina nuevas restricciones y permite evaluar el multiplicador de Lagrange:

$$\dot{\xi}_2 = \{p_r, H_T\} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \lambda = 0 \quad (3.10)$$

de donde

$$\lambda = \frac{p_\theta^2}{mr^3}. \quad (3.11)$$

Ahora al evaluar el paréntesis de Poisson entre las restricciones (3.8) y (3.9) obtenemos lo siguiente

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde el determinante de la matriz $C_{\alpha\beta}$ es distinto de cero y por lo tanto es invertible. Esto permite mostrar que todos los multiplicadores de Lagrange asociados a estas restricciones pueden ser determinados. Esto implica que nuestras restricciones son de segunda clase.

Ahora aplicando a nuestras restricciones los paréntesis de Dirac tenemos

$$\{A, \xi_\alpha\}_D = \{A, \xi_\alpha\} - \{A, \xi_\beta\}C^{\beta\lambda}\{\xi_\lambda, \xi_\alpha\} \quad (3.13)$$

donde

$$\{\xi_\lambda, \xi_\alpha\} = C_{\lambda\alpha} \quad (3.14)$$

entonces

$$\{A, \xi_\alpha\}_D = \{A, \xi_\alpha\} - \{A, \xi_\beta\} C^{\beta\lambda} C_{\lambda\alpha}. \quad (3.15)$$

El producto de la matriz puede verse como una δ si $\alpha = \beta$ ya que las matrices son inversas $C^{\beta\lambda} C_{\lambda\alpha} = \delta_\alpha^\beta$ lo que obtenemos es

$$\{A, \xi_\alpha\}_D = \{A, \xi_\alpha\} - \{A, \xi_\alpha\} = 0. \quad (3.16)$$

Se pueden considerar a las constricciones de segunda clase ξ_1 y ξ_2 como identidades fuertes. Esto implica que el Hamiltoniano total (3.7) se reduce a

$$H_{TD} = \frac{p_\theta^2}{2ma^2}, \quad (3.17)$$

que es el Hamiltoniano natural, cuando $p_r = 0$ y $r = a$.

3.2. Un modelo soluble

El modelo propuesto por Friedberg, Lee, Pan y Ren (**FLPR**) [11]. Consta de una partícula no-relativista cuyas tres coordenadas cartesianas son X , Y y Z . Además se tiene una cuarta coordenada ξ . El modelo de Friedberg et al está definido por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}[(\dot{X} + g\xi Y)^2 + (\dot{Y} - g\xi X)^2 + (\dot{Z} - \xi)^2] - U(X^2 + Y^2), \quad (3.18)$$

donde g es una constante de acoplamiento y U es una función de $X^2 + Y^2$. Este lagrangiano es invariante bajo transformaciones de finitas:

$$\begin{aligned} X' &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ Y' &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \\ Z' &= Z + \frac{1}{g} \alpha, \\ \xi' &= \xi + \frac{1}{g} \frac{d}{dt} \alpha. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora, si el parámetro de transformación α es constante, tendrá una simetría global en el caso en que α sea función de t , se tendrá una simetría local.

Para investigar las simetrías globales del sistema, se puede hacer uso del Primer Teorema de Noether. Las cantidades conservadas son la energía (E), el momento angular (L) y el momento lineal (P_0) a lo largo del eje Z .

Es interesante darse cuenta de que, dada la propiedad de transformación de la cuarta coordenada ξ , no hay cantidad conservada global asociada a $\xi(t)$. Sin embargo, analizando las ecuaciones de movimiento para ξ , se observa que hay otra cantidad conservada:

$$g \left[X(\dot{Y} - g\xi X) - Y(\dot{X} + g\xi Y) \right] + (\dot{Z} - \xi) = 0. \quad (3.20)$$

Realmente esta condición sobre las variables está íntimamente ligada con las transformaciones locales del sistema. Como veremos posteriormente y a través del segundo Teorema de Noether (**Apéndice A**), esta es una ligadura de primera clase, la cual genera transformaciones de norma del sistema.

3.3. Solución clásica del modelo

En esta sección analizara desde un enfoque clásico el modelo (**FLPR**). Analizando las condiciones de norma implementadas por los autores y se analizara que padecen ambigüedades de Gribov.

Empezando con el análisis canónico de Dirac para estudiar más a fondo la ligadura (3.20) y su relación con las transformaciones de norma. Los momentos canónicas asociados a las variables (X, Y, Z, ξ) son:

$$\begin{aligned} P_X &= \dot{X} + g\xi Y, \\ P_Y &= \dot{Y} - g\xi X, \\ P_Z &= \dot{Z} - \xi, \\ P_\xi &= 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

de las relaciones anteriores solo tres de ellas son invariantes y nos dan las velocidades en términos de los momentos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= P_X - g\xi Y, \\ \dot{Y} &= P_Y + g\xi X, \\ \dot{Z} &= P_Z + \xi, \\ P_\xi &= 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde ha surgido la ligadura $\phi_1 = P_\xi = 0$. Donde esta es una ligadura primaria. El Hamiltoniano canónico esta dado por

$$\begin{aligned} H_0 &= \dot{X}P_X + \dot{Y}P_Y + \dot{Z}P_Z + \dot{\xi}P_\xi - L, \\ &= \dot{\xi}P_\xi + \frac{1}{2}[P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2] + U(X^2 + Y^2) + \xi(P_Z + g(XP_Y - YP_X)). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Tomando en cuenta la ligadura primaria ϕ_1 de la ecuación (3.21), el Hamiltoniano que genera la evolución en el tiempo adquiere la forma

$$H_\star = H_0 + \lambda^1 \phi_1, \tag{3.24}$$

donde λ^1 es un multiplicador de Lagrange para $\phi_1 = P_\xi$. Es necesario que esta ligadura primaria se conserve en el tiempo, $\dot{\phi}_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \{\phi_1, H_\star\}, \\ &= -(P_Z + g(XP_Y - YP_X)), \\ &= \phi_2, \end{aligned} \tag{3.25}$$

que es la condición de la ecuación (3.20). Donde $\{\phi_1, \phi_2\} = 0$ lo que implica que ϕ_1 y ϕ_2 son ligaduras de primera clase.

El Hamiltoniano total es:

$$H_T = \dot{\xi}P_\xi + \frac{1}{2}[P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2] + U(X^2 + Y^2) + \xi(P_Z + g(XP_Y - YP_X)) + \lambda^1\phi_1 + \lambda^2\phi_2. \quad (3.26)$$

una descripción de dinámica total equivalente se obtiene al redefinir a los multiplicadores de Lagrange de la siguiente manera: $\lambda^1 = -\dot{\xi}$ y $\lambda^2 + \xi \rightarrow \xi$. Esta sustitución es precisamente la que da un Hamiltoniano total. Que por un lado disminuye al mínimo los multiplicadores de Lagrange y por otro, no asocia momentos canónicos a variables que tienen un carácter arbitrario tal como ξ en nuestro caso. O sea, no es físicamente deseable que una variable arbitraria tenga carácter dinámico y se le asocie un momento canónico conjugado. De tal forma lo que era una coordenada cartesiana arbitraria ξ , se ha convertido en un multiplicador de Lagrange para la ligadura de primera clase $\phi = P_z + g(XP_y - YP_x)$

Lo que nos permite definir el formalismo del Hamiltoniano fundamental :

$$H_T = \frac{1}{2}[P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2] + U(X^2 + Y^2) + \xi(P_Z + g(XP_Y - YP_X)), \quad (3.27)$$

y la acción asociada a este Hamiltoniano fundamental es:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\dot{X}P_X + \dot{Y}P_Y + \dot{Z}P_Z - \frac{1}{2}[P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2] - U(X^2 + Y^2) - \xi(P_Z + g(XP_Y - YP_X)) \right]. \quad (3.28)$$

Donde las variables de acción expresada en la ecu(3.28) llevan a las mismas ecuaciones de movimiento que la formulación Lagrangiana original. Ahora, considerando el análisis de Noether para las transformaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} \delta X &= -\alpha Y, \\ \delta Y &= \alpha X, \\ \delta Z &= \frac{1}{g}\alpha, \\ \delta \xi &= \frac{1}{g}\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

y las transformaciones de los momentos

$$\begin{aligned} \delta P_X &= -\alpha P_Y, \\ \delta P_Y &= \alpha P_X, \\ \delta P_Z &= 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

las cuales dejan invariante a la acción. Usando el resultado del segundo Teorema de Noether (Apéndice A), identificamos $\epsilon_1(t) = \frac{1}{g}\alpha(t)$, $\chi^1 = 0$, $\phi_1^1 = -gY$, $\phi_2^1 = gX$, $\phi_3^1 = 1$, así como $\psi_1^1 = -gP_Y$, $\psi_2^1 = gP_X$, $\psi_3^1 = 0$.

Nótese que es este caso no hay términos de superficie ya que la variación de la acción es idénticamente cero, por sustitución directa en γ_α , ecu(refnoetcha) del Apéndice A, vemos que la carga de Noether que genera estas transformaciones de simetría es:

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= \varphi_n^1 p_n + 0, \\ &= -gY P_X + gX P_Y + 1 \cdot P_Z, \\ &= P_Z + g(X P_Y - Y P_X),\end{aligned}\tag{3.31}$$

• **Coordenadas Cilíndricas**

Dada la simetría del problema, es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para el estudio de este sistema. Estas coordenadas están definidas por la transformación

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{X^2 + Y^2} \quad ; \quad \rho \in \mathfrak{R}^+, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad ; \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ Z &= Z \quad ; \quad Z \in \mathfrak{R}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

En términos de estas coordenadas, el Lagrangiano de Friedberg et al ecu(3.18) se expresa como:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2[\dot{\varphi} - g\xi]^2 + \frac{1}{2}[\dot{Z} - \xi]^2 - U(\rho),\tag{3.33}$$

este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de las coordenadas

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho, \\ \varphi' &= \varphi + \alpha, \\ Z' &= Z + \frac{1}{g}\alpha, \\ \xi' &= \xi + \frac{1}{g}\dot{\alpha},\end{aligned}\tag{3.34}$$

o, en la forma infinitesimal

$$\begin{aligned}\delta\rho &= 0, \\ \delta\varphi &= \alpha, \\ \delta Z &= \frac{1}{g}\alpha, \\ \delta\xi &= \frac{1}{g}\dot{\alpha}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Estas transformaciones no son sino la contraparte cilíndrica de las transformaciones dadas por la Ecu(3.29). de la invariancia bajo las transformaciones (3.35) surge la contraparte cilíndrica de la cantidad conservada (carga de Noether), que en este caso resulta en $Q = P_Z + gP_\varphi$, donde P_φ es el momento angular del sistema a lo largo del eje Z.

Para obtener el Hamiltoniano del sistema se definen los momentos canónicos asociados a las variables ρ, φ, Z y ξ :

$$\begin{aligned} P_\rho &= \dot{\rho}, \\ P_\varphi &= \rho^2(\dot{\varphi} - g\xi), \\ P_Z &= \dot{Z} - \xi, \\ P_\xi &= 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

nuevamente surge la ligadura primaria $\phi_1 = P_\xi$. De modo que el Hamiltoniano canónico estará dado por

$$H_0 = \dot{\xi}P_\xi + \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{P_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}P_Z^2 + U(\rho) + \xi[P_Z + gP_\varphi]. \quad (3.37)$$

Al incluir la ligadura primaria $\phi_1 = \xi$, obtenemos que el Hamiltoniano que genera la evolución del sistema es:

$$H_\star = H_0 + \lambda^1 \phi_1, \quad (3.38)$$

aquí; λ_1 es un multiplicador de Lagrange para la ligadura primaria $\phi_1 = P_\xi$. La conservación en el tiempo de ϕ_1 implica la existencia de la ligadura secundaria $\phi_2 = P_Z + gP_\varphi$:

$$\{\phi_1, H_\star\} = -(P_Z + g(XP_Y - YP_X)) = \phi_2. \quad (3.39)$$

Los paréntesis de Poisson, $\{\phi_1, \phi_2\} = 0$ nos muestra que estas ligaduras son de primera clase. Por lo tanto, El Hamiltoniano total es

$$H_T = \dot{\xi}P_\xi + \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{P_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}P_Z^2 + U(\rho) + \xi[P_Z + gP_\varphi] + \lambda^1 \phi_1 + \lambda^2 \phi_2, \quad (3.40)$$

y puede escribirse equivalentemente como el Hamiltoniano fundamental

$$H_T = \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{P_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}P_Z^2 + U(\rho) + \xi\phi, \quad (3.41)$$

donde se hace una redefinición de los multiplicadores de Lagrange equivalente a la del caso cartesiano. Ahora ξ desempeña el papel de un multiplicador de Lagrange para la ligadura de primera clase $\phi_2 = P_Z + gP_\varphi$.

En esta parametrización cilíndrica la acción fundamental está dada por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\dot{\rho}P_\rho + \dot{\varphi}P_\varphi + \dot{Z}P_Z - \frac{1}{2}P_\rho^2 - \frac{1}{2}\frac{P_\varphi^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}P_Z^2 - U(\rho) - \xi\phi \right]. \quad (3.42)$$

• Solución a las ecuaciones de movimiento

•• Condiciones de frontera

Antes que nada, es necesario especificar las condiciones de frontera físicas, esto es, invariantes de norma. Tal elección se logra al fijar los valores de las variables X, Y, Z o equivalentemente ρ, φ, Z en los puntos extremos en el tiempo:

$$\begin{aligned} \rho(t_i) &= \rho_i & ; & & \rho(t_f) &= \rho_f, \\ \varphi(t_i) &= \varphi_i & ; & & \varphi(t_f) &= \varphi_f, \\ Z(t_i) &= Z_i & ; & & Z(t_f) &= Z_f. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dadas las condiciones de frontera (3.43), la solución a las ecuaciones de movimiento son las mismas tanto en el formalismo Lagrangiano original como en el formalismo Hamiltoniano fundamental

De acuerdo al formalismo de primer orden en la ecu (3.40), las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= P_\rho, \\
\dot{P}_\rho &= \frac{P_\varphi^2}{\rho^3} - U'(\rho), \\
\dot{\varphi} &= \frac{P_\varphi}{\rho^2} + g\xi, \\
\dot{P}_\varphi &= 0, \\
\dot{Z} &= P_Z + \xi, \\
\dot{P}_Z &= 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera (3.43), las ecuaciones anteriores tienen la solución general:

$$\begin{aligned}
t &= t_i + \int_{\rho_i}^{\rho} d\rho \frac{\pm 1}{\sqrt{2(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2})}}, \\
P_\rho(t) &= \dot{\rho}(t), \\
\varphi(t) &= \varphi_i + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} + g \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\
P_\varphi(t) &= L, \\
Z(t) &= Z_i - gL(t - t_i) + \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\
P_Z(t) &= P_0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde las constantes E, L y P_0 son la energía, el momento angular y el momento lineal del sistema respectivamente. La implementación de la ligadura implica la relación $P_0 = -gL$. En particular cuando evaluamos en (3.45) a $t = t_f$, obtenemos la siguiente restricción sobre las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \int_{\rho_i}^{\rho_f} d\rho \frac{\pm 1}{\sqrt{2(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2})}}, \\
\Delta \varphi &= L \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{\rho^2(t)} + g\gamma, \\
\Delta Z &= -gL\Delta t + \gamma,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

donde γ está definida por

$$\gamma \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t). \tag{3.47}$$

De las relaciones anteriores obtenemos lo siguiente

$$\Delta\varphi - g\Delta Z = L \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{\rho^2(t)} + g^2 L \Delta t, \quad (3.48)$$

Notese que aún antes de evaluar a $t = t_f$ la combinación $\varphi - gZ$ es invariante de norma, ya que no contiene ninguna dependencia en los multiplicadores de Lagrange.

Dada la elección de condiciones de frontera, uno puede considerar transformaciones de norma de los grados de libertad del espacio fase $\{\rho, \varphi, Z; P_\rho, P_\varphi, P_Z\}$ y de $\xi(t)$ dadas en (3.35). Estas transformaciones involucran un parámetro de transformación $\alpha(t)$, el cual debe anularse en los puntos finales del tiempo :

$$\alpha(t_i) = \alpha(t_f) = 0, \quad (3.49)$$

a fin de preservar la elección de condiciones de frontera. De las Ecs. (3.46) a (3.48) podemos ver que al implementar una transformación de norma a las soluciones dadas en (3.45) uno tiene el mapeo de soluciones a soluciones, lo cual muestra el carácter invariante de norma (la validez) de las condiciones de frontera. Precisamente, ésta característica es la que define a las **condiciones de frontera invariantes de norma**.

Esta es la forma en que el espacio de órbitas del sistema y en particular la forma de fijar la norma dependerá de la elección de condiciones de frontera para las soluciones del sistema.

Puede mostrarse que si dos multiplicadores de Lagrange $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ están conectados por medio de una transformación de norma (pertenecen a la misma órbita) de la forma,

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{1}{g} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.50)$$

entonces sus parámetros asociados γ_1 y γ_2 (ver ec. (3.47)) son iguales, ésto es

$$\gamma_2 = \int_{t_i}^{t_f} dt \xi_2(t) = \int_{t_i}^{t_f} dt \xi_1(t) + \frac{1}{g} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \alpha(t) = \gamma_1 + \frac{1}{g} [\alpha(t_f) - \alpha(t_i)] = \gamma_1, \quad (3.51)$$

así, que, γ definida por medio de la ecuación (3.47) es una cantidad invariante de norma bajo transformaciones locales que parametriza diferentes órbitas en el espacio de multiplicadores de Lagrange.

• Condiciones de norma

Antes de discutir las condiciones de norma implementadas por Friedberg *et al* [11] y condiciones de norma en el espacio de Teichmüller veamos la solución general de las ecuaciones de movimiento para un potencial de tipo oscilador armónico en el plano XY , ésto es, un potencial de la forma $U(\rho) = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2$ con frecuencia angular ω . En tal caso, la solución dada en (3.45) se convierte en

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{\omega} \left[E - \sqrt{E^2 - L^2\omega^2} \sin(\pm 2\omega(t - t_i) + \psi_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ P_\rho(t) &= \dot{\rho}(t), \\ \varphi(t) &= \varphi_i + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} + g \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\ P_\varphi(t) &= L, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z_i - gL(t - t_i) + \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\ P_Z(t) &= -gL, \end{aligned}$$

donde ψ donde $\psi_i = \arcsin(\frac{E - \omega^2 \rho_i^2}{\sqrt{E^2 - L^2 \omega^2}})$ y el término $L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')}$ que aparece en $\varphi(t)$ está dado por:

$$\begin{aligned} L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} &= \pm \left\{ \arctan \left\{ \frac{1}{L\omega} \left[E \tan \left(\frac{1}{2} (\pm 2\omega(t - t_i) + \psi_i) \right) - \sqrt{E^2 - L^2 \omega^2} \right] \right\} \right\} \\ &\quad - \arctan \left\{ \frac{1}{L\omega} \left[E \tan \left(\frac{1}{2} \psi_i \right) - \sqrt{E^2 - L^2 \omega^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

esta integral es invariante de norma (ρ lo es). ρ lo es, no escribimos el lado derecho de la ecuación cada vez que aparezca $\varphi(t)$, simplemente dejamos la integral.

3.3.1. Análisis de las normas de FLPR

Ahora procedemos a analizar las condiciones de norma que implementan **FLPR** para estudiar su modelo.

•• **Norma Temporal** La norma temporal. Con analogía de la norma temporal $A^0 = 0$. En el modelo de Friedberg et al la cuarta componente de las coordenadas se hace cero, i.e.

$$\xi = 0. \quad (3.54)$$

Implica que las soluciones por las Ec (3.52) se simplifican las coordenadas a

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{\omega} \left[E - \sqrt{E^2 - L^2 \omega^2} \sin(\pm 2\omega(t - t_i) + \psi_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi(t) &= \varphi_i + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')}, \\ Z(t) &= Z_i - gL(t - t_i), \end{aligned} \quad (3.55)$$

mientras los momentos asociados permanecen iguales a los de las ecu (3.52). El movimiento clásico de este sistema es el de un oscilador armónico bidimensional que se mueve libremente a lo largo de la trayectoria que conecta los puntos (ρ_i, φ_i, Z_i) y (ρ_f, φ_f, Z_f) . Nótese que al hacer $\xi = 0$ en el Lagrangiano original, equivale a que no exista mezcla de las variables Cartesianas, lo que conduce un sistema libre de ligaduras, sujeto sólo a la forma del potencial.

El parámetro de Teichmüller para esta norma es $\gamma = 0$, lo cual implica que esta norma selecciona una sola órbita, o sea, manifiesta un problema de Gribov de segundo tipo (la norma no es global).

•• **Norma axial**

FLPR estudian, en analogía con la con la norma axial $A^3 = 0$ de QED, la norma:

$$Z = 0. \quad (3.56)$$

Esta es una condición de norma de Faddeev-Popov o de espacio fase reducido (debido a que fijan algunas de las variables del espacio fase). La forma usual de tratar este tipo de norma es a través de paréntesis de Dirac, en donde las ligaduras se tratan como de segunda clase.

Lo que implica que la matriz del algebra entre las ligaduras tenga un determinante distinto de cero que garantiza una condición de norma admisible. Sin embargo, aun cuando este criterio logra que se determinen los multiplicadores de Lagrange, ésto no garantiza un cubrimiento total de las orbitas de norma del sistema. las condiciones de norma del tipo Faddeev-Popov obligan al sistema a permanecer en la órbita de norma dictada por la condición de norma Ω .

Para esta condición de norma se imponen las ligaduras

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv Z = 0, \\ \phi &\equiv P_Z + gP_\varphi = 0,\end{aligned}\tag{3.57}$$

donde el paréntesis de Poisson entre ellas nos da

$$\{\Omega, \phi\} = \{Z, P_Z + gP_\varphi\} = 1\tag{3.58}$$

lo que nos indica que las ligaduras son de segunda clase que podemos resolver las variables. Es más el requisito de consistencia

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, H_T\} = 0,\tag{3.59}$$

nos permite determinar el multiplicador de Lagrange en términos de otras variables. Tomando para H_T la ecu (3.41), usándolo en la ecuación anterior,

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, H_T\} = P_Z + \xi = 0,\tag{3.60}$$

lo cual nos implica

$$\begin{aligned}Z &= 0, \\ P_Z &= -gP_\varphi, \\ \xi &= gP_\varphi.\end{aligned}\tag{3.61}$$

Para determinar el resto de las variables, usamos paréntesis de Dirac, definidos como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi^\alpha\}(\Delta_{\chi^\alpha\chi^\beta})^{-1}\{\chi^\beta, B\},\tag{3.62}$$

donde $\{A, B\}$ es un paréntesis de Poisson ordinario y χ^α, χ^β representan las ligaduras de segunda clase del sistema. En nuestro caso $\chi^1 = \Omega, \chi^2 = \phi$, y $(\Delta_{\chi^\alpha\chi^\beta})^{-1}$ es la inversa de la matriz formada por los paréntesis de las ligaduras ; que resulta ser

$$(\Delta_{\chi^\alpha\chi^\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{3.63}$$

de forma que, usando los paréntesis de Poisson canónicos para las variables que no se han fijado, obtenemos los paréntesis de Dirac que son distintos de cero

$$\begin{aligned}\{\rho, P_\rho\}_D &= \{\rho, P_\rho\} - \{\rho, \chi^\alpha\}(\Delta_{\chi^\alpha\chi^\beta})^{-1}\{\chi^\beta, P_\rho\} \\ &= \{\rho, P_\rho\} = 1 \\ \{\varphi, P_\varphi\}_D &= 1.\end{aligned}$$

donde se obtienen los paréntesis de Poisson debido a la forma específica de la condición de norma $\chi^1 = \Omega \equiv Z = 0$, que no involucra a las variables ρ y φ .

El Hamiltoniano reducido se obtiene al imponer las ligaduras como igualdades fuertes en el Hamiltoniano fundamental ecu(3.41):

$$H_R = \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + g^2\right)P_\varphi^2 + U(\rho). \quad (3.64)$$

las ecuaciones de movimiento para ρ, P_ρ, φ y P_φ se obtienen usando el Hamiltoniano reducido anterior y los paréntesis de Dirac obtenidos previamente

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= P_\rho, \\ \dot{P}_\rho &= \frac{P_\varphi^2}{\rho^3} - U'(\rho), \\ \dot{\varphi} &= \left(\frac{1}{\rho^2} + g^2\right)P_\varphi, \\ \dot{P}_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

Como puede apreciarse, las ecuaciones de movimiento para la parte puramente radial permanecen igual que en el caso general ecu(3.44), y sólo las ecuaciones para la parte angular se ven modificada, lo cual se esperaba ya que esta variable depende de la condición de norma.

la solución de las ecuaciones de movimiento (3.65) está dada por

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{\omega} \left[E - \sqrt{E^2 - L^2\omega^2} \sin(\pm 2\omega(t - t_i) + \psi_i) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \varphi(t) &= \varphi_i + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} + g^2 L(t - t_i), \\ Z(t) &= 0, \\ \xi(t) &= gL, \end{aligned} \quad (3.66)$$

y los momentos canónicos tienen la misma forma que en la solución general (3.45).

Se advierte que la solución para $Z(t)$ restringe esta variable a tomar el valor $Z = 0$ para todo tiempo. De tal forma que sólo se incluye el conjunto de órbitas que satisface $Z_i = Z_f = 0$. Ahora este resultado está en desacuerdo con las condiciones de invariante de norma en la frontera ecu(3.46), dado que no hay restricciones a priori en los valores que los extremos deben de tener, excepto el ser invariantes de norma.

Por lo tanto éste es sólo un conjunto de todas las posibles configuraciones accesibles al sistema. Esto pudo haberse advertido en el enfoque de Teichmüller, esta norma,

$$\xi = gL \Rightarrow \gamma = \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t) = gL\Delta t, \quad (3.67)$$

es decir se obtiene un valor fijo para γ , lo cual nos dice que la condición de norma no es global. Ya que existe una infinidad de configuraciones que escapan a ellas: $\gamma \neq gL\Delta t$.

Dado que las órbitas de norma seleccionadas por la norma temporal $\xi = 0$ y la norma axial $Z = 0$ son diferentes (como lo indican sus parámetros de Teichmüller), no se puede llevar a cabo una transformación de norma del conjunto de soluciones (3.55) al correspondiente de (3.66).

Recordando que la condición de que los dos conjuntos de soluciones estén relacionados por una transformación de norma es que sus parámetros γ de Teichmüller sean idénticos.

●●Norma lambda

Además de las condiciones de norma $\xi = 0$ y $Z = 0$, **FLPR** analizan la norma lambda: $Z - \lambda X = 0$. Esta norma al incluir más de una variable del espacio fase es un análogo de la norma de Coulomb QED: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Esta condición es del tipo de espacio reducido por lo cual tendremos que hacer un análisis en términos de paréntesis de Dirac.

En la parametrización de coordenadas cilíndricas, la condición de norma λ tiene la forma $Z - \lambda \rho \cos \varphi = 0$. Las ligaduras Ω y ϕ son de segunda clase

$$\begin{aligned}\Omega &= Z - \lambda \rho \cos \varphi = 0, \\ \phi &= P_Z + g P_\varphi = 0,\end{aligned}$$

ya que el paréntesis de Poisson entre ellas resulta ser:

$$\begin{aligned}\{\Omega, \phi\} &= \{Z - \lambda \rho \cos \varphi, P_Z + g P_\varphi\}, \\ &= 1 + g \lambda \rho \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Este resultado nos permitirá calcular el determinante de Faddeev, el puede dar singularidades cuando $1 + g \lambda \rho \sin \varphi = 0$, es equivalente cuando la variable cartesiana $Y = -1/(g \lambda)$, de modo que la matriz formada por los paréntesis de las ligaduras no será invertible en general.

El requisito de consistencia para preservar esta condición de norma resulta en :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \{\Omega, H_T\} \\ &= \{Z - \lambda \rho \cos \varphi, H_T\} \\ &= P_Z - \lambda P_\rho \cos \varphi - \frac{\lambda P_\varphi}{\rho} + \xi(1 + g \lambda \rho \sin \varphi),\end{aligned}\tag{3.69}$$

donde podemos determinar el multiplicador de Lagrange ξ . De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}Z(t) &= \lambda \rho(t) \cos \varphi(t), \\ P_Z(t) &= -g P_\varphi(t), \\ \xi(t) &= \frac{-P_Z(t) + \lambda P_\rho(t) \cos \varphi(t) - \frac{\lambda P_\varphi(t) \sin \varphi(t)}{\rho(t)}}{1 + g \lambda \rho(t) \sin \varphi(t)}.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Nos resta estudiar las variables $(\rho(t), P_\rho(t), \varphi(t), P_\varphi(t))$ usando paréntesis de Dirac. En donde la matriz de los paréntesis de Poisson entre las ligaduras esta dada por

$$(\Delta_{\chi^\alpha \chi^\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + g \lambda \rho \sin \varphi) \\ (1 + g \lambda \rho \sin \varphi) & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.71}$$

Ahora los únicos paréntesis de Dirac diferentes de cero son:

$$\begin{aligned}\{\rho, P_\rho\}_D &= 1, \\ \{\varphi, P_\rho\}_D &= \frac{g\lambda \cos \varphi}{1 + g\lambda\rho \sin \varphi}, \\ \{\varphi, P_\varphi\}_D &= \frac{1}{1 + g\lambda\rho \sin \varphi}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Con estos paréntesis podemos obtener las ecuaciones de movimiento del sistema y posteriormente su solución. Para ello nuevamente implementamos las ligaduras como condiciones fuertes en el Hamiltoniano fundamental (3.41), lo cual nos da

$$H_R = \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + g^2\right)P_\varphi^2 + U(\rho).\tag{3.73}$$

utilizando el Hamiltoniano reducido anterior y los paréntesis de Dirac, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= P_\rho, \\ \dot{P}_\rho &= \frac{P_\varphi^2}{\rho^3} - U'(\rho), \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{1 + g\lambda\rho \sin \varphi} \left[g\lambda P_\rho \cos \varphi + \left(\frac{1}{\rho^2} + g^2\right)P_\varphi \right], \\ \dot{P}_\varphi &= 0.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Las ecuaciones de movimiento para las variables $\rho(t)$, $P_\rho(t)$ y P_φ son las mismas que en ocasiones anteriores, lo cual nos permite dar una rápida solución para estas variables. La única dificultad surge de la ecuación para la variable angular. Sin embargo, de las ecuaciones (3.70) y (3.74), obtenemos la siguiente relación:

$$\dot{\varphi} - g\dot{Z} = \dot{\varphi}(1 + g\lambda\rho \sin \varphi) - g\lambda P_\rho \cos \varphi.\tag{3.75}$$

al usar la ecuación de movimiento para φ , esta relación se simplifica a:

$$\dot{\varphi} - g\dot{Z} = P_\varphi\left(\frac{1}{\rho^2} + g^2\right),\tag{3.76}$$

que al integrar, tomando en cuenta la norma en que estamos trabajando, resulta en una solución trascendental para la variable angular:

$$\varphi(t) = \varphi_i - g\lambda\rho_i \cos \varphi_i + g\lambda\rho(t) \cos \varphi(t) + g^2 L(t - t_i) + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')}. \tag{3.77}$$

La solución para las variables en esta norma está dada por

$$\rho(t) = \frac{1}{\omega} \left[E - \sqrt{E^2 - L^2\omega^2} \sin(\pm 2\omega(t - t_i) + \psi_i) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi_i - g\lambda\rho_i \cos \varphi_i + g\lambda\rho(t) \cos \varphi(t) + g^2L(t - t_i) + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')}, \\
Z(t) &= \lambda\rho(t) \cos \varphi(t), \\
\xi(t) &= \frac{gL + \lambda P_\rho(t) \cos \varphi(t) - \frac{\lambda L \sin \varphi(t)}{\rho(t)}}{1 + g\lambda\rho(t) \sin \varphi(t)}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

En estas soluciones se uso que los momentos canónicos asociados a las variables son los mismos en esta norma que en la solución general(3.45) y además dan lugar a los valores $P_\varphi = L$ y $P_Z = -gL$. Es importante mencionar que la solución para las variables $\varphi(t)$ y $\xi(t)$ se obtiene por medio de invariantes de norma en la solución general de las ecuaciones de movimiento Ec (3.45).

También puede mostrarse que el multiplicador de Lagrange puede escribirse se manera equivalente como

$$\xi(t) = gL + \frac{d}{dt}(\lambda\rho \cos \varphi). \tag{3.79}$$

De lo que podemos decir que esta norma no es más que una copia de la norma axial $Z = 0$. Para verlo explícitamente, observemos que el multiplicador de Lagrange en esta norma se obtiene a través de una transformación de norma aplicada a las soluciones dadas en (3.66) con el parámetro de transformación $\alpha(t)$ dado por

$$\alpha(t) = g\lambda\rho(t) \cos \varphi(t), \tag{3.80}$$

entonces, de la norma axial a la norma lambda, sucede

$$\begin{aligned}
\xi = gL &\Rightarrow \xi = gL + \frac{d}{dt}(\lambda\rho \cos \varphi), \\
Z = 0 &\Rightarrow Z = \lambda\rho \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{3.81}$$

como el parámetro $\alpha = \rho \cos \varphi$ debe anularse en los puntos $t = t_i$ y $t = t_f$ ésto implica $Z_i = Z_f = 0$. O sea, ambas normas describen la misma física, pero ambas describen sólo una órbita: $\gamma = gL\Delta t$.

3.4. Cuantización del modelo de FLPR

3.4.1. Cuantización canónica de Dirac

Para caracterizar la dinámica clásica de un sistema con invariancias bajo transformaciones de norma. Se requiere hacer una clasificación de ligaduras y resolver aquellas llamadas de segunda clase. También se debe incluir en el Hamiltoniano las ligaduras de primera clase para describir tanto la evolución temporal como las invariancias de norma.

la cuantización canónica o de Dirac [4] de un sistema con invariancias de norma procede a través del principio de correspondencia con la salvedad de que hay que cuantizar también la ligadura de primera clase.

Brevemente recordemos los puntos esenciales al cuantizar un sistema físico general: el principio de correspondencia asocia a las variables de espacio fase $Z_A = (q_n, p_n)$ los operadores autoadjuntos \hat{Z}_A . A los paréntesis de Poisson de las variables fundamentales $\{Z_A, Z_B\} = C_{AB}(Z_A)$ el principio les asocia los conmutadores $[\hat{Z}_A, \hat{Z}_B] = i\hbar\hat{C}_{AB}$.

Los estados cuánticos obedecen la ecuación de Schrödinger modificada

$$\hat{H}_T|\psi(Z_A, t)\rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(Z_A, t)\rangle, \quad (3.82)$$

donde $\hat{H}_T(Z_A) = \hat{H}(Z_A) + \lambda_\alpha(t)\phi^\alpha(Z_A)$ es el Hamiltoniano fundamental de primera clase que incluye todas las ligadura y que por lo tanto genera la evolución temporal como las transformaciones de norma del sistema.

Se requiere también que las ligaduras se cumplan a nivel cuánticos se definen como aquellos para los cuales

$$\hat{\phi}_\alpha(Z_A)|\psi(Z_A, t)\rangle = 0, \quad (3.83)$$

ésta es precisamente la diferencia de cuantizar un sistema con ligaduras respecto a uno que no las tiene.

La definición de estados cuánticos debe ser consistente con la evolución temporal del sistema cuántico así como con sus simetrías. Esto significa que los estados físicos deben seguir siendo físicos ante la evolución temporal y esta condición debe ser compatible con el álgebra de conmutadores de los operadores asociados a las ligaduras; en otras palabras, debemos tener:

$$[\hat{\phi}_\alpha, \hat{\phi}_\beta] = \hat{C}_{\alpha\beta}^\gamma \hat{\phi}_\gamma, \quad [\hat{H}, \hat{\phi}_\alpha] = \hat{V}_\alpha^\beta \hat{\phi}_\beta, \quad (3.84)$$

que implica a nivel de estados físicos:

$$\hat{C}_{\alpha\beta}^\gamma \hat{\phi}_\gamma |\psi\rangle = 0, \quad \hat{V}_\alpha^\beta \hat{\phi}_\alpha |\psi\rangle = 0. \quad (3.85)$$

Aquí pueden surgir problemas de ordenamiento dado que tanto las ligaduras como las funciones $\hat{C}_{\alpha\beta}^\gamma$ y \hat{V}_β^α pueden depender de operadores que a nivel cuántico no conmutan. En el caso de un álgebra cerrada de las ligaduras (cuando C y V sí dependen del espacio fase) es claro que no hay problemas de ordenamiento de este tipo. En cambio en el caso de un álgebra abierta (cuando C y V sí dependen de las variables de espacio fase) se debe elegir un ordenamiento de las variables consistente con la definición de estados físicos cuánticos; ésto es: al calcular los conmutadores que definen a $\hat{C}_{\alpha\beta}^\gamma$ y \hat{V}_β^α se debe expresar siempre a la derecha de ellos las ligaduras de primera clase. Si este requisito no se cumple, entonces la definición de los estados físicos se ve modificada y se cae en ambigüedades.

Una vez que un sistema puede cuantizarse de forma consistente con sus simetrías clásicas, también resulta conveniente considerar no sólo estados físicos sino también cantidades físicas o invariantes de norma. Estas cantidades físicas están definidas como la contraparte clásica de operadores hermíticos y auto-adjuntos que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{f}, \hat{\phi}_\alpha] = i\hbar \hat{C}_\alpha^\beta \hat{\phi}_\beta, \quad (3.86)$$

donde \hat{C}_α^β es una función de estructura apropiada. Nótese que tales observables físicas están definidas hasta combinaciones lineales arbitrarias de las ligaduras de primera clase y que por ejemplo el Hamiltoniano de primera clase es un observable físico.

Suponiendo que se ha podido realizar una cuantización consistente de un sistema a través del procedimiento descrito, uno puede en principio resolverlo y obtener el espectro para estados invariantes de norma. Sin embargo, la evolución temporal así como los elementos de matriz de operadores están parametrizados por las funciones arbitrarias $\lambda^\alpha(t)$ o multiplicadores de Lagrange. Entonces se debe hacer una elección para estos multiplicadores de Lagrange que puede llevar a posibles problemas de Gribov al no caracterizar todas las órbitas de norma accesibles al sistema físico.

3.4.2. Cuantización de espacio fase reducido (Faddeev-Popov)

El enfoque de cuantización más usado en la teoría de campo es realizado en términos de integrales de camino: el enfoque de espacio fase reducido o de Faddeev-Popov. Este método requiere fijar condiciones de norma sobre las variables de espacio fase del sistema; de ahí el nombre de espacio fase reducido.

Es bien sabido que en la teoría de campo la cuantización de las interacciones fundamentales se realiza por medio de una formulación de integrales de camino. Sin embargo, la cuantización de teoría de norma por este método, no procede al igual que en la mecánica cuántica de sistemas regulares; ésto es debido a que aún cuando el propagador

$$K = \int \mathcal{D}Z_A e^{\frac{i}{\hbar}S}, \quad (3.87)$$

es invariante bajo transformaciones de norma $Z_A \rightarrow Z_A + \delta_\zeta Z_A$, la integral se realiza sobre todas las variables Z_A de espacio fase incluyendo todas aquellas relacionadas por medio de transformaciones de norma. Es claro que ésto da una contribución infinita al propagador y consecuentemente a las funciones de Green obtenidas por diferenciación funcional del propagador.

Una forma de eliminar la libertad de norma, inclusive a nivel clásico, se logra al fijar condiciones de norma sobre las variables del espacio fase. Al fijar tales condiciones de norma se debe tener cuidado de no caer en ambigüedades de Gribov de primero y/o segundo tipo.

Faddeev y Popov [9] introdujeron un método para incluir en la integral de camino condiciones de norma canónicas (condiciones sobre las variables de espacio fase) que conduce a valores finitos para el propagador. Su método comienza al fijar condiciones de norma canónicas:

$$\Omega^\alpha(Z_A) = 0, \quad (3.88)$$

que deben ser ligaduras de segunda clase. Tanto las ligaduras originales $\phi_\alpha(Z_A)$ como las ligaduras impuestas $\Omega^\alpha(Z_A)$ se tratan al mismo nivel con la finalidad de que la matriz formada por los paréntesis de Dirac entre estas ligaduras sea invertible y ello garantice fijar la libertad de norma. Esto es, se elige $\Omega^\alpha(Z_A)$ tal que el determinante de la matriz

$$\{\Omega^\alpha(Z_A), \phi_\beta(Z_A)\} = \Delta_\beta^\alpha(Z_A), \quad (3.89)$$

sea distinto de cero y por lo tanto las ligaduras ϕ_α y Ω_α son de segunda clase.

Hasta factores de normalización sin transcendencia física, la integral de camino de Faddeev-Popov está contenida en la expresión¹

$$K_\Omega = \int \prod_{A,\alpha,\beta} \mathcal{D}Z_A \delta(\Omega^\alpha) \det |\{\Omega^\alpha, \phi_\beta\}| \delta(\phi_\beta) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt [\dot{q}_n p_n - H]\right\}, \quad (3.90)$$

donde el determinante de la matriz de los paréntesis de Dirac (determinante de Faddeev-Popov) surge como el Jacobiano de la transformación entre variables del espacio fase reducido al espacio fase completo. Nótese que sin embargo, la aparición de las funcionales $\delta(\phi_\alpha(Z_A))$ y $\delta(\Omega^\alpha(Z_A))$

¹Un ejemplo interesante es el de un campo no abeliano de Yang-Mills, donde el espacio de configuraciones es el campo A_μ^a y la condición de norma usual es: $F(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a$, con lo cual la integral de camino toma la forma: $K = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_F(A_\mu) \delta(F(A)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt \mathcal{L}\right\}$.

restringe los dominios de las variables en el propagador. Por medio de una integral sobre multiplicadores de Lagrange, las ligaduras pueden incorporarse en la exponencial:

$$K_{\Omega} = \int \prod_{A,\alpha,\beta} \mathcal{D}Z_A \delta(\Omega^{\alpha}) \det |\{\Omega^{\alpha}, \phi_{\beta}\}| \mathcal{D}\lambda \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt [\dot{q}_n p_n - H - \lambda^{\alpha} \phi_{\alpha}]\right\}, \quad (3.91)$$

esta forma de la integral de Faddeev-Popov es directamente aplicable para cuantizar el modelo de **FLPR** con condiciones de norma axiales. Debemos mencionar que para implementar esta formulación en tal modelo, es necesario realizar las integrales del sector de espacio fase en coordenadas cilíndricas. Por último, presentamos una forma alternativa de la integral de Faddeev-Popov. Al utilizar variables de Grassmann impares (los famosos fantasmas), el determinante de Faddeev-Popov puede introducirse en la exponencial de acuerdo a:

$$K_{\Omega} = \int \prod_{A,\alpha,\beta} \mathcal{D}Z_A \mathcal{D}\eta^{\alpha} \mathcal{D}\bar{\eta}_{\beta} \delta(\Omega^{\alpha}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt [\dot{q}_n p_n - H - i\hbar\bar{\eta}_{\alpha}\{\Omega^{\alpha}, \phi_{\beta}\}\eta^{\beta} - \lambda^{\alpha} \phi_{\alpha}]\right\}. \quad (3.92)$$

3.4.3. Cuantización canónica del modelo

El modelo de Friedberg *et al* está dado a nivel clásico por el Hamiltoniano fundamental:

$$H_T = H + \xi\phi = \frac{1}{2m} P_{\rho}^2 + \frac{1}{2m\rho^2} P_{\varphi}^2 + \frac{1}{2m} P_Z^2 + U(\rho^2) + \xi\phi, \quad (3.93)$$

donde ξ es el multiplicador de Lagrange para la ligadura de primera clase $\phi = P_Z + gP_{\varphi}$. Para resolver explícitamente este modelo y tener congruencia con el análisis realizado al oscilador armónico (**Apéndice B**), consideramos un potencial de la forma $U(\rho) = \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$.

Aplicamos ahora el principio de correspondencia. Lo cual significa considerar el hecho de que los operadores sean autoadjuntos sobre la variedad de configuraciones y la existencia de bases en el espacio de Hilbert que diagonalicen a los eigenestados de posición. Con ésto, el operador Hamiltoniano que nos proporciona una descripción covariante así como un ordenamiento adecuado es:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{0,0} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{g^{1/4}(q)} \hat{p}_{\alpha} \sqrt{g(q)} g^{\alpha\beta} \hat{p}_{\beta} \frac{1}{g^{1/4}(q)} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\rho}^2, \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} (\partial_{\rho} + \frac{i}{\hbar} A_{\rho}) \rho (\partial_{\rho} + \frac{i}{\hbar} A_{\rho}) + \frac{1}{\rho^2} (\partial_{\varphi} + \frac{i}{\hbar} A_{\varphi})^2 \right] + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2, \end{aligned} \quad (3.94)$$

Por el momento, suponemos que en la variedad de configuraciones no existen obstrucciones topológicas, lo que es equivalente a que podemos elegir el campo vectorial $A_{\alpha}(q) = 0$ ó que podemos eliminarlo por medio de transformaciones de norma. Así, el Hamiltoniano canónico adquiere la forma convencional en términos del operador Laplaciano:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2. \quad (3.95)$$

Dada la independencia de la variable Z con las variables polares en el plano, podemos utilizar separación de variables para las eigenfunciones de este Hamiltoniano. En el caso del oscilador

armónico encontramos que las eigenfunciones para la parte radial y angular de este Hamiltoniano son

$$\psi_{n,l}(\rho, \varphi) = \pi^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{l+1}{2}} \left(\frac{(\frac{n-l}{2})!}{(\frac{n+l}{2})!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\rho e^{i\varphi} \right)^l e^{\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2\}} L_{\frac{n-l}{2}}^l \left(\frac{m\omega}{\hbar} \rho^2 \right), \quad (3.96)$$

donde n y l son los números cuánticos que caracterizan la energía y el momento angular. Al incluir la dependencia en Z tenemos:

$$\psi_{n,l}(\rho, \varphi, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} Z P_0} \pi^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{l+1}{2}} \left(\frac{(\frac{n-l}{2})!}{(\frac{n+l}{2})!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\rho e^{i\varphi} \right)^l e^{\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2\}} L_{\frac{n-l}{2}}^l \left(\frac{m\omega}{\hbar} \rho^2 \right). \quad (3.97)$$

Sin embargo, las funciones de onda físicas deben satisfacer el requisito:

$$\hat{\phi}|\psi\rangle = 0, \quad (3.98)$$

lo cual significa que al implementar la forma de los operadores \hat{P}_Z y \hat{P}_φ en la ligadura, tenemos²:

$$\hat{\phi}|\psi\rangle = (\hat{P}_Z + g\hat{P}_\varphi)|\psi\rangle = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial Z} + g \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] |\psi\rangle = 0, \quad (3.99)$$

la ligadura que nos relaciona los momentos lineal y angular del sistema implica a nivel cuántico una condición sobre las funciones de onda. Esta condición se ve reflejada en la siguiente forma: dada la independencia del Hamiltoniano en la variable Z , existe propagación libre a lo largo de esa coordenada. Sin embargo, los eigenvalores del momento a lo largo del eje Z estarán determinados por la ligadura: $P_0 = -gL$.

Al resolver la ecuación diferencial anterior y normalizar, obtenemos los estados físicos:

$$\psi_{n,l}^{físico}(\rho, \varphi, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \pi^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{l+1}{2}} \left(\frac{(\frac{n-l}{2})!}{(\frac{n+l}{2})!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\rho e^{i(\varphi-gZ)} \right)^l e^{\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2\}} L_{\frac{n-l}{2}}^l \left(\frac{m\omega}{\hbar} \rho^2 \right), \quad (3.100)$$

los cuales son por supuesto invariantes bajo transformaciones de norma dado que tanto ρ como la combinación $(\varphi - gZ)$ lo son³. Para finalizar el análisis cuántico de Dirac de este modelo, calculemos el propagador asociado a estos estados físicos. Realizando la suma sobre los estados físicos de la ecuación previa, tenemos:

$$K_{físico} = \sum_{n,l} \langle f | \hat{U} | n, l \rangle \langle n, l | i \rangle, \quad (3.101)$$

donde la suma se realiza sobre los estados físicos anteriores Ec.(3.100) y el operador de evolución \hat{U} contiene al Hamiltoniano cuyos eigenvalores están dados por la relación

$$\hat{H}\psi(n, l, Z) = \left(\hbar\omega(n+1) + \frac{1}{2m} g^2 l^2 \hbar^2 \right) \psi(n, l, Z). \quad (3.102)$$

La suma sobre estados se realiza de manera similar al cálculo del propagador en coordenadas polares para el oscilador armónico. La única diferencia respecto a aquel cálculo viene de la coordenada Z y la ligadura, que se manifiestan en la Ec. (3.100):

²Recordemos que en coordenadas cilíndricas $\sqrt{g} = \rho$ y la forma de los operadores de momento obedece al ordenamiento dado en el Oscilador armónico.

³Precisamente esta combinación de variables: $(\varphi - gZ)$ y ρ son aquellas que encontramos como invariantes a nivel clásico.

$$\begin{aligned}
K_{físico} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \langle \rho_f, \varphi_f, Z_f | n, l \rangle \langle n, l | \hat{U}(t_f - t_i) | \rho_i, \varphi_i, Z_i \rangle, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \psi_{n,l}(\rho_f, \varphi_f, Z_f) \psi_{n,l}^*(\rho_i, \varphi_i, Z_i) e^{\{-i\omega\Delta t(n+1) - i\frac{1}{2m}g^2l^2\hbar\Delta t\}}. \quad (3.103)
\end{aligned}$$

Después de realizar la suma, obtenemos el propagador físico para este sistema:

$$\begin{aligned}
K_{físico} &= \frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g(Z_f - Z_i)] - \frac{ig^2l^2\hbar}{2m}\Delta t \right\} \times \\
&\times I_l \left(-i \frac{\hat{\rho}_f \hat{\rho}_i}{\sin \omega\Delta t} \right) e^{\frac{i}{2}(\hat{\rho}_f^2 + \hat{\rho}_i^2) \cot \omega\Delta t}. \quad (3.104)
\end{aligned}$$

Este propagador es invariante de norma. En ausencia de la ligadura, es decir, cuando la constante de acoplamiento $g = 0$, se recupera de manera directa el propagador para el oscilador armónico en coordenadas polares o cartesianas. Otro aspecto importante de este propagador es que nos muestra que el sistema tiene propagación a lo largo del eje Z , pero que la ligadura obliga a que el momento P_Z tome valores discretos.

Este resultado será de gran importancia, ya que es la única guía que tenemos para comparar con cuantizaciones que involucren integrales de camino.

3.4.4. Cuantización de Faddeev del modelo

En esta sección realizamos la cuantización para el modelo de Friedberg *et al* por medio de integrales de camino en el enfoque de Faddeev-Popov o de espacio fase reducido .

Como hemos visto, este esquema requiere de fijar condiciones de norma para eliminar los grados de libertad no físicos del sistema. Sin embargo, como nuestro análisis mostrará, aún con condiciones de norma transversas en las variables del espacio fase se obtienen resultados que no cubren en su totalidad las órbitas de norma del sistema.

• Propagador en la norma “axial”

La norma *axial* ($Z = 0$) de Friedberg *et al* cumple los requisitos que usualmente se piden: terminar con la libertad de norma del sistema al fijar los multiplicadores de Lagrange. Pero como veremos, padece de problemas de Gribov al no permitir un cubrimiento total de las órbitas del sistema.

Recordemos que el formalismo de Fadeev para los propagadores está contenido en la integral de camino, en Villanueva et al [13] se obtiene el resultado de la integral de camino como:

$$\begin{aligned}
K_{\Omega} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g(Z_f - Z_i)] - i\frac{(\Delta t)g^2l^2\hbar}{2m} \right\} \times \\
&\times K_l(\rho_f, t_f; \rho_i, t_i) \delta(Z_i) \delta(Z_f), \quad (3.105)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la definición de la integral de camino radial de componente l -ésima en la expansión cilíndrica:

$$K_l(\rho_f, t_f; \rho_i, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int_0^\infty \rho_j d\rho_j \prod_{k=0}^{N-1} (\rho_k \rho_{k+1})^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dP_{\rho_k}}{2\pi\hbar} \times \quad (3.106)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\frac{\Delta\rho_{k+1}}{\epsilon} \right) P_{\rho_k} - \frac{1}{2m} P_{\rho_k}^2 - \frac{(l^2 - \frac{1}{4})\hbar^2}{2m\rho_k^2} - \frac{1}{2} m\omega^2 \rho_k^2 \right] \right\}.$$

Esta integral de camino fue calculada por Villanueva et al [13] y da:

$$K_\Omega = \frac{m\omega}{i\hbar} \text{csc}[\omega(\Delta t)] \sum_{l=-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g(Z_f - Z_i)] - \frac{ig^2 l^2 \hbar(\Delta t)}{2m} \right\} \times$$

$$\times I_l \left(-i \frac{m\omega}{\hbar} \rho_f \rho_i \text{csc}[\omega(\Delta t)] \right) \exp \left\{ i \frac{m\omega}{2\hbar} \text{ctg}[\omega(\Delta t)] \left((\rho_i)^2 + (\rho_f)^2 \right) \right\} \delta(Z_i) \delta(Z_f),$$

$$= \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega \Delta t} \sum_{l=-\infty}^\infty \exp \left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g(Z_f - Z_i)] - \frac{ig^2 l^2 \hbar(\Delta t)}{2m} \right\} \times \quad (3.107)$$

$$\times I_l \left(-i \frac{m\omega}{\hbar \sin[\omega(\Delta t)]} \rho_f \rho_i \right) \exp \left\{ i \frac{m\omega}{2\hbar} \text{ctg}[\omega(\Delta t)] \left((\rho_i)^2 + (\rho_f)^2 \right) \right\} \delta(Z_i) \delta(Z_f).$$

Una comparación directa con el resultado obtenido por medio de suma sobre estados físicos para este modelo (en el enfoque de Dirac) Ec.(3.104), puede advertirse que este propagador contiene sólo un subconjunto ($Z_f = Z_0 = 0$) de las órbitas accesibles físicamente al sistema ($Z_f \neq Z_i \neq 0$). Este es el punto clave que nos muestra que aún cuando el propagador de Faddeev es invariante de norma (consistente con la condición de norma), éste no garantiza una descripción cuántica completa. En particular, no hay forma de obtener el propagador de Dirac Ec. (3.104) a partir de (3.107) por medio de transformaciones de norma.

•Propagador en la norma lambda.

La tercera y última norma que estudian **FLPR** es la norma λ : $Z - \lambda X = 0$ y como vimos en el análisis clásico del modelo; esta norma λ es una copia de la norma *axial* $Z = 0$ con el parámetro de transformación $\alpha = g\lambda X = g\lambda\rho \cos\varphi$. Es claro que al pertenecer a la misma órbita $\gamma = gL\Delta t$, debido a la invariancia bajo transformaciones de norma y a la invariancia de norma bajo transformaciones de norma: estas dos condiciones de norma nos producen el mismo propagador.

3.4.5. Un bosquejo del método BFV

Uno de los enfoques más modernos de cuantización de teorías de norma es el llamado método de BFV (debido a Batalin, Fradkin y Vilkoviski) [17] que emplea la simetría BRST (de Becchi, Rouet, Stora y Tyutin) [18]. Las ventajas de este método sobre otros son: i) Puede aplicarse de manera muy sistemática a una amplia gama de sistemas que van desde la partícula relativista hasta sistemas tan complicados como la relatividad general, ii) Es un formalismo que produce cuantización unitaria.

Este método también recibe el nombre de cuantización de espacio fase extendido debido a que el espacio original de variables dinámicas se aumenta al incluir variables conjugadas de los multiplicadores de Lagrange para las ligaduras de primera clase; también se incluyen variables de paridad de Grassman opuestas a las de las ligaduras: un sector de "fantasmas".

En esta sección haremos uso de los resultados obtenidos en el trabajo Villanueva et al [14]. Donde es aplicado el método de cuantización BFV, al modelo de Friedberg et al (**FLPR**). Con el fin de hacer una comparación con los resultados obtenidos por los métodos de Dirac y Faddeev-Popov.

•El modelo de FLPR

El análisis mediante el método BFV del modelo Friedberg et al, parte del Hamiltoniano obtenido del análisis de Dirac

$$H = \frac{1}{2m} P_\rho^2 + \frac{1}{2m\rho^2} P_\varphi^2 + \frac{1}{2m} P_Z^2 + U(\rho) + \xi\phi, \quad (3.108)$$

donde $Z_A = \{\rho, P_\rho, \varphi, P_\varphi, Z, P_Z\}$ son las variables del espacio fase original del sistema y ξ es el multiplicador de Lagrange para la ligadura de primera clase $\phi = P_Z + gP_\varphi$.

El análisis por el método BFV comienza con la introducción de la variable conjugada del multiplicador de Lagrange π tal que:

$$\{\xi(t), \pi(t)\} = 1, \quad (3.109)$$

y se le considera como una ligadura de primera clase:

$$\pi \approx 0. \quad (3.110)$$

Clasificamos las ligaduras de primera clase de acuerdo a: $G_a = (\pi, \phi) = (\pi, P_Z + gP_\varphi)$, $a = 1, 2$ y correspondientemente, introducimos 2 pares de fantasmas: $(\eta^1, \mathcal{P}_1, \eta^2, \mathcal{P}_2)$, que satisfacen los anticonmutadores:

$$\begin{aligned} \{\eta^1, \mathcal{P}_1\} &= 1, \\ \{\eta^2, \mathcal{P}_2\} &= 1. \end{aligned} \quad (3.111)$$

El Hamiltoniano mas general invariante de BRST:

$$H_{eff} = \frac{1}{2m} P_\rho^2 + \frac{1}{2m\rho^2} P_\varphi^2 + \frac{1}{2m} P_Z^2 + U(\rho) + \xi\phi + \eta^1 \mathcal{P}_2 + F(\xi)\pi - \mathcal{P}_1 \eta^1 \frac{dF}{d\xi}, \quad (3.112)$$

que nos da la acción efectiva de BRST:

$$S_{eff} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\dot{\rho} P_\rho + \dot{\varphi} P_\varphi + \dot{Z} P_Z - \frac{1}{2m} P_\rho^2 - \frac{1}{2m} \frac{P_\varphi^2}{\rho^2} - \frac{1}{2m} P_Z^2 - U(\rho) - \xi\phi - \eta^1 \mathcal{P}_2 - F(\xi)\pi + \mathcal{P}_1 \eta^1 \frac{dF}{d\xi} \right]. \quad (3.113)$$

Las ecuaciones de movimiento del sector físico son las mismas:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{P_\rho}{m}, & \dot{P}_\rho &= \frac{P_\varphi^2}{\rho^3} - U'(\rho), \\ \dot{\varphi} &= \frac{P_\varphi}{m\rho^2} + g\xi, & \dot{P}_\varphi &= 0, \\ \dot{Z} &= \frac{P_Z}{m} + \xi, & \dot{P}_Z &= 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

mientras que las ecuaciones para las variables del espacio de multiplicadores de Lagrange y de fantasmas son:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F(\xi) \quad , \quad \dot{\pi} = -\phi - \frac{dF}{d\xi}\pi + \mathcal{P}_1\eta^1\frac{d^2F}{d\xi^2}, \\ \dot{\eta}^1 &= -\eta^1\frac{dF}{d\xi} \quad , \quad \dot{\eta}^2 = -\eta^1, \\ \dot{\mathcal{P}}_1 &= -\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1\frac{dF}{d\xi} \quad , \quad \dot{\mathcal{P}}_2 = 0.\end{aligned}\tag{3.115}$$

Las ecuaciones tienen la solución general:

$$\begin{aligned}t &= t_i + \int_{\rho_i}^{\rho} d\rho \frac{\pm 1}{\sqrt{2(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2})}}, \\ P_{\rho}(t) &= \dot{\rho}(t), \\ \varphi(t) &= \varphi_i + L \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} + g \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\ P_{\varphi}(t) &= L, \\ Z(t) &= Z_i - gL(t - t_i) + \int_{t_i}^t dt' \xi(t'), \\ P_Z(t) &= -gL,\end{aligned}\tag{3.116}$$

donde las constantes E y L son la energía y el momento angular del sistema. Donde una especificación de la función de condición de norma $F(\xi)$ determina de manera única la evolución temporal del sector se espacio fase así como de sectores de multiplicadores de Lagrange y de los fantasmas

•La integral de camino BFV

La integral de camino de BFV está dada por la expresión

$$K_{BFV} = \int \mathcal{D}Z \mathcal{D}K \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\eta^1 \mathcal{D}\mathcal{P}_1 \mathcal{D}\eta^2 \mathcal{D}\mathcal{P}_2 \exp\left\{ \int dt [\dot{Z}_A K^A - \xi \dot{\pi} - \eta \dot{\mathcal{P}}_1 + \eta^2 \mathcal{P}_2 - H_{efectivo}] \right\},\tag{3.117}$$

donde Z_A y sus variables conjugadas representan el espacio fase, ξ y π son las variables del sector de los multiplicadores de Lagrange, η^i y \mathcal{P}_i al sector de fantasmas y $H_{efectivo} = H_{BRST} - \{\Psi, Q_{BRST}\}$, con $\Psi = \mathcal{P}_1 F(\xi) + \mathcal{P}_2 \xi$. Como ya se comento para el propósito de este trabajo no se calculo la integral de camino, simplemente se tomara el resultado de Villanueva et al [14]. La integral obtenida es:

$$\begin{aligned}K_{BFV} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g(Z_f - Z_i)] - \frac{ig^2 l^2 \hbar}{2m} \Delta t \right\} \times \\ &\times \frac{m\omega}{i \sin \omega \Delta t} I_l \left(-i \frac{m\omega \rho_f \rho_i}{\hbar \sin \omega \Delta t} \right) e^{\frac{i}{2}(\rho_f^2 + \rho_i^2) \cot \omega \Delta t}.\end{aligned}\tag{3.118}$$

Este es el propagador que se obtiene al sumar estados cuánticos físicos desde el punto de vista de la cuantización canónica. Es importante resaltar que la obtención de este propagador es

consecuencia de la apropiada elección de la condición de norma que realizaron. ya que realiza un correcto cubrimiento de las órbitas de norma, dado que es igual al propagador obtenido mediante una suma sobre estados físicos obtenidos por medio de la cuantización canónica de Dirac.

3.4.6. Un bosquejo del método de proyectores de Klauder

En esta sección veremos uno de los enfoques de cuantización para sistemas de norma más modernos: el método de cuantización por medio de proyectores desarrollado por J. Klauder [19]. Esta construido con la idea original de Dirac: no hay necesidad de agregar grados de libertad al sistema, ni de reducir el espacio fase por medio de condiciones de norma.

Para establecer el formalismo y la introducción de este operador de proyección, consideremos un sistema físico descrito por $2N$ pares de variables conjugadas (q_n, p_n) que conforman el espacio fase y son variables con paridad de Grassmann cero y además satisfacen relaciones de paréntesis de Poisson canónicos. También consideraremos que el conjunto de ligaduras de primera clase y el Hamiltoniano del sistema tiene un álgebra cerrada.

•El propagador para el modelo FLPR

Se define el propagador físico para un sistema con invariancias de norma de manera general como:

$$K = \langle q_f | \hat{U}(t_f - t_i) \mathbb{E} | q_i \rangle, \quad (3.119)$$

donde \hat{U} es el operador de evolución ordinario: $\hat{U}(t_f - t_i) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H}\}$ con \hat{H} el operador Hamiltoniano del modelo y \mathbb{E} es el operador de proyección apropiado al grupo de transformaciones de norma generadas por las ligaduras. Retomando el Hamiltoniano dado por:

$$H = \frac{1}{2m} P_\rho^2 + \frac{1}{2m\rho^2} P_\varphi^2 + \frac{1}{2m} P_Z^2 + U(\rho), \quad (3.120)$$

y la ligadura de primera clase es:

$$\phi = P_Z + gP_\varphi. \quad (3.121)$$

Los operadores cuánticos asociados a estas cantidades clásicas obedecen el ordenamiento, de modo que

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{g^{1/4}(q)} \hat{p}_\alpha \sqrt{g(q)} g^{\alpha\beta} \hat{p}_\beta \frac{1}{g^{1/4}(q)} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\rho}^2 \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \hat{P}_\rho \rho \hat{P}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \hat{P}_\varphi^2 + \hat{P}_Z^2 \right] + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2, \end{aligned} \quad (3.122)$$

y el operador de proyección está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \frac{\gamma}{g} \hat{\phi}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \frac{\gamma}{g} [\hat{P}_Z + g\hat{P}_\varphi]\right\}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

El operador de evolución físico es:

$$\hat{U}_{fis}(t_f - t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \Delta t (\hat{H} + \frac{\gamma}{g\Delta t} [\hat{P}_Z + g\hat{P}_\varphi])\right\}, \quad (3.124)$$

y el propagador físico correspondiente a este modelo podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} K_{fis} &= \langle q_f | \hat{U}(t_f - t_i) \mathbf{E} | q_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \langle q_f | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \Delta t (\hat{H} + \frac{\gamma}{g\Delta t} [\hat{P}_Z + g\hat{P}_\varphi]) \right\} | q_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.125)$$

con \hat{H} dado en Ec. (3.122).

Por simplicidad y para no perder de vista el cálculo de propagadores, supongamos que la variedad de configuración en la cual están definidas las variables es simplemente conexa, introduciendo esta información y la forma del Hamiltoniano en el propagador físico para el modelo, tenemos:

$$\begin{aligned} K_{fis} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\rho_f \rho_i \right)^{-1/2} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} d\rho_j \int_0^{2\pi} d\varphi_j \int_{-\infty}^{\infty} dZ_j \prod_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_{\rho_k}}{2\pi\hbar} \sum_{l_k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_{Z_k}}{2\pi\hbar} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\frac{\Delta\rho_{k+1}}{\epsilon} \right) P_{\rho_k} + \left(\frac{\Delta\varphi_{k+1}}{\epsilon} \right) l_k \hbar + \left(\frac{\Delta Z_{k+1}}{\epsilon} \right) P_{Z_k} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2m} P_{\rho_k}^2 - \frac{(l_k^2 - \frac{1}{4})\hbar^2}{2m\rho_k^2} - \frac{1}{2m} P_{Z_k}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 \rho_k^2 - \frac{\gamma}{g\Delta t} (P_{Z_k} + gl_k\hbar) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Además, al igual que en los cálculos para el oscilador armónico (Apéndice B) la integral sobre la parte radial se desacopla del resto de las variables, dándonos funciones de Bessel, que a su vez nos dan propagadores de ondas parciales de momento angular l . Entonces el propagador se reduce a:

$$\begin{aligned} K_{fis} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \lim_{N \rightarrow \infty} \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{il(\varphi_f - \varphi_i)} K_l(\rho_f, \rho_i; t_f, t_i) \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dZ_j \prod_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_{Z_k}}{2\pi\hbar} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\frac{\Delta Z_{k+1}}{\epsilon} \right) P_{Z_k} - \frac{1}{2m} P_{Z_k}^2 - \frac{\gamma}{g\Delta t} (P_{Z_k} + gl\hbar) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Llamemos $K_Z(Z_f, Z_i, \gamma)$ al término que involucra las integrales sobre Z y P_Z en la ecuación anterior. Para evaluar este término, el siguiente paso es realizar las integrales sobre los momentos P_Z . Estas se llevan a cabo de manera ordinaria por medio de integrales gaussianas. Un cálculo directo nos lleva a:

$$K_Z = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-il\gamma} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dZ_j \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left[\frac{\Delta Z_{k+1}}{\epsilon} - \frac{\gamma}{g\Delta t} \right]^2 \right\}. \quad (3.128)$$

El cálculo de las integrales sobre Z se realiza fácilmente al elevar al cuadrado el binomio que contiene ΔZ y γ :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\Delta Z_{k+1}}{\epsilon} - \frac{\gamma}{g\Delta t} \right]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\Delta Z_{k+1}}{\epsilon} \right]^2 - \frac{2\gamma}{g\Delta t} \frac{1}{\epsilon} (Z_f - Z_i) + \frac{N\gamma^2}{g^2\Delta t^2}, \quad (3.129)$$

la sustitución de este binomio en K_Z nos da un producto de un propagador libre en la coordenada Z y un término dependiente del parámetro γ :

$$K_Z = e^{-i\gamma} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\Delta t} \left[Z_f - Z_i - \frac{\gamma}{g} \right]^2 \right\}. \quad (3.130)$$

Llegamos así al propagador físico para el modelo de **FLPR**:

$$\begin{aligned} K_{fis} &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{g} \frac{\sin \delta\gamma/g}{\pi\gamma/g} \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{il[(\varphi_f - \varphi_i) - \gamma]} K_l(\rho_f, \rho_i; t_f, t_i) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\Delta t} \left[Z_f - Z_i - \frac{\gamma}{g} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

finalmente, resta aplicar el límite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta}$ a la expresión anterior. La aplicación de este límite nos permite identificar el parámetro de transformaciones γ con el parámetro de Teichüller del modelo

$$\begin{aligned} K_{fis} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ il[(\varphi_f - \varphi_i) - g\hbar(Z_f - Z_i)] - \frac{ig^2 l^2 \hbar}{2m} \Delta t \right\} \times \\ &\times K_l(\rho_f, t_f; \rho_i, t_i). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Este es el mismo propagador que se obtuvo por medio de: cuantización canónica de Dirac como una suma sobre estados físicos por medio de la integral de camino de Faddeev-Popov con una apropiada integral sobre las condiciones de frontera variantes de norma.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de Tesis hemos visto la importancia de llevar a cabo el análisis clásico de un sistema físico para estudiar sus órbitas de norma antes de llevar a cabo su cuantización.

De esta forma vimos que con la cuantización canónica del modelo se obtienen los estados físicos y con ellos calculamos el propagador como una suma sobre estados físicos únicamente. El resultado es una expresión exacta e invariante de norma en términos de las configuraciones inicial y final accesibles al sistema físico.

La cuantización del modelo por el método de Faddeev-Popov requiere de condiciones de norma. Los resultados muestran la presencia de problemas de Gribov, al tomar una órbita de norma únicamente, lo que implica la omisión de algunas órbitas. Problema de Gribov de segundo tipo.

la cuantización del modelo en el enfoque BFV se requiere de condiciones de norma admisibles en los multiplicadores de Lagrange. Pero hay que hacer una elección de norma adecuada para no padecer problemas de Gribov.

El método de proyectores de Klauder no requiere condiciones de norma ni para los grados de libertad físicos ni para el espacio de multiplicadores de Lagrange, lo cual resulta una enorme ventaja ya que se evitan los problemas de Gribov de cualquier tipo.

Apéndice A

Teorema de Noether

Este Apéndice esta basado en V. M. Villanueva, J. A. Nieto et al [20]

Consideremos la acción Hamiltoniana de primer orden

$$S[q, p; \lambda^\alpha] = \int_{t_i}^{t_f} dt [\dot{q}_n p_n - H(q, p; t) - \lambda^\alpha(t) \phi_\alpha(q, p; t)], \quad (\text{A.1})$$

donde $H(q, p; t)$ es el Hamiltoniano de primera clase y todas las ligaduras de primera clase $\phi_\alpha(q, p; t)$ del sistema están incluidas. Ambos tipos de funciones dependen de los grados de libertad fundamentales del sistema (q_n, p_n) , $(n = 1, \dots, N)$. Dado el carácter arbitrario de los multiplicadores de Lagrange, suponemos que no son grados de libertad físicos *i. e.* no tienen momento canónico asociado y que son sólo variables auxiliares que parametrizan la libertad de norma del sistema. De modo que la acción dada en (A.1) nos define una acción Hamiltoniana fundamental.

Apliquemos a esta acción de primer orden las variaciones totales

$$\delta t = t'(t) - t, \quad (\text{A.2})$$

$$\delta_\star q_n = q'_n(t') - q_n(t) = \delta q_n + \dot{q}_n \delta t, \quad (\text{A.3})$$

$$\delta_\star p_n = p'_n(t') - p_n(t) = \delta p_n + \dot{p}_n \delta t, \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_\star \lambda_\alpha = \lambda'_\alpha(t') - \lambda_\alpha(t) = \delta \lambda_\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \delta t \quad (\text{A.5})$$

donde $\delta q_n = q'_n(t) - q_n(t)$ y una expresión similar para p_n y λ_α se cumplen. Es importante notar que:

$$\delta_\star \dot{q}_n = \delta \dot{q}_n + \ddot{q}_n \delta t. \quad (\text{A.6})$$

Sin embargo: $\delta \dot{q}_n = \frac{d}{dt} \delta q_n$ pero $\delta_\star \dot{q}_n \neq \frac{d}{dt} \delta_\star q_n$.

La variación de la acción (A.1) está dada por:

$$\delta_\star S = \int dt \delta_\star [\dot{q}_n p_n - H - \lambda^\alpha \phi_\alpha] + \int dt \frac{d\delta t}{dt} [\dot{q}_n p_n - H - \lambda^\alpha \phi_\alpha]. \quad (\text{A.7})$$

Suponemos que, sin usar las ecuaciones de movimiento, la variación se reduce a un posible término de superficie:

$$\delta_\star S = \int dt \frac{d}{dt} \delta \Lambda(q, p; t). \quad (\text{A.8})$$

Igualando (A.7) y (A.8) obtenemos:

$$\int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\delta_* q_n p_n - \delta t (H + \lambda^\alpha \phi_\alpha) - \delta \Lambda \right] + \dot{q}_n \delta p_n - \dot{p}_n \delta q_n + \delta H - \lambda^\alpha \delta \phi_\alpha - \delta \lambda^\alpha \phi_\alpha \right\} = 0, \quad (\text{A.9})$$

denotamos por $Q = Q(q, p; t)$ la cantidad entre corchetes. Si factorizamos δq_n y δp_n en la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{d}{dt} Q + \left(\dot{q}_n - \frac{\partial}{\partial p_n} (H + \lambda^\alpha \phi_\alpha) \right) \delta q_n + \left(-\dot{p}_n - \frac{\partial}{\partial q_n} (H + \lambda^\alpha \phi_\alpha) \right) \delta p_n - \delta \lambda^\alpha \phi_\alpha = 0. \quad (\text{A.10})$$

La expresión anterior nos muestra que cuando se cumplen las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento y las ligaduras se aplican como cero (el sistema está dentro de su capa de masa), entonces el término definido como Q es una constante en el tiempo.

Ahora mostraremos que esta cantidad Q es la generadora de las transformaciones infinitesimales que dejan invariante la acción Hamiltoniana. Nuestro punto de partida es la acción (A.9), que puede escribirse como

$$\int dt \left\{ \frac{d}{dt} Q + \dot{q}_n \delta p_n - \dot{p}_n \delta q_n - \delta H - \lambda^\alpha \delta \phi_\alpha - \delta \lambda^\alpha \phi_\alpha \right\} = 0, \quad (\text{A.11})$$

y, al ser derivada explícitamente, obtenemos:

$$\dot{q}_n \left(\frac{\partial Q}{\partial q_n} + \delta p_n \right) + \dot{p}_n \left(\frac{\partial Q}{\partial p_n} - \delta q_n \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} - \delta H - \lambda^\alpha \delta \phi_\alpha - \delta \lambda^\alpha \phi_\alpha = 0, \quad (\text{A.12})$$

que implica (fuera de la capa de masa)

$$\delta q_n = \frac{\partial Q}{\partial p_n} = \left\{ q_n, Q \right\}, \quad (\text{A.13})$$

$$\delta p_n = -\frac{\partial Q}{\partial q_n} = \left\{ p_n, Q \right\}, \quad (\text{A.14})$$

y

$$\delta \lambda^\alpha \phi_\alpha + \lambda^\alpha \delta \phi_\alpha + \delta H - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.15})$$

que desde luego muestra que la cantidad conservada Q es la generadora de tales transformaciones.

A.1 Primer teorema de Noether

Ahora consideramos las consecuencias de las previas invariancias bajo transformaciones que definen un grupo simplemente conectado. Nótese que para este primer teorema (que involucra transformaciones globales), no se incluyen transformaciones definidas por las ligaduras de primera clase dado que éstas generan transformaciones locales.

De este modo, consideramos

$$\begin{aligned}
 \delta t &= \epsilon_\alpha \chi^\alpha(t), \\
 \delta q_n &= \epsilon_\alpha \varphi_n^\alpha(q, p; t), \\
 \delta p_n &= \epsilon_\alpha \psi_n^\alpha(q, p; t), \\
 \delta \Lambda &= \epsilon_\alpha \Lambda^\alpha(q, p; t),
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

donde ϵ_α , $(\alpha = 1, 2, \dots, r)$ son parámetros infinitesimales independientes del tiempo.

El uso de las previas variaciones en (A.10) nos da:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left[\varphi_n^\alpha p_n + \dot{q}_n p_n \chi^\alpha - \chi^\alpha H - \Lambda^\alpha \right] + \left(\dot{q}_n - \frac{\partial}{\partial p_n} H \right) \psi_n^\alpha \\
 &+ \left(-\dot{p}_n - \frac{\partial}{\partial q_n} H \right) \varphi_n^\alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

De la expresión anterior, vemos que nuestras r cargas conservadas de Noether están dadas por

$$\gamma^\alpha = \varphi_n^\alpha p_n + \dot{q}_n p_n \chi^\alpha - \chi^\alpha H - \Lambda^\alpha. \tag{A.18}$$

Aquí pueden investigarse por supuesto las usuales cantidades conservadas de la mecánica clásica regular bajo transformaciones globales o rígidas de las coordenadas o del tiempo que dan lugar a los momentos lineales, angulares y a la energía como cargas de Noether.

A.2 Segundo teorema de Noether

Como una segunda aplicación, ahora consideramos el caso en que los parámetros de transformación ϵ^α son funciones del tiempo y que las transformaciones de norma están generadas por las ligaduras de primera clase:

$$\begin{aligned}
 \delta t &= \epsilon_\alpha(t) \chi^\alpha(t), \\
 \delta q_n &= \epsilon_\alpha(t) \varphi_n^\alpha(q, p; t), \\
 \delta p_n &= \epsilon_\alpha(t) \psi_n^\alpha(q, p; t), \\
 \delta \Lambda &= \epsilon_\alpha(t) \Lambda^\alpha(q, p; t), \\
 \delta \lambda^\alpha &= \dot{\epsilon}^\alpha(t) - \epsilon^\beta(t) V_\beta^\alpha + \epsilon^\beta(t) \lambda^\gamma C_{\beta\gamma}^\alpha,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

donde $\varphi_n^\alpha = \{q_n, \phi^\alpha\}$, $\psi_n^\alpha = \{p_n, \phi^\alpha\}$, $\Lambda^\alpha = \{\Lambda, \phi^\alpha\}$, y en las expresiones anteriores, no hemos incluido posibles derivadas de $\epsilon_\alpha(t)$, sin embargo, la generalización a tal caso es directa [6].

La sustitución de las relaciones anteriores en (A.10) nos da:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left[\epsilon_\alpha(t) \gamma^\alpha(q, p; t) \right] + \epsilon_\alpha(t) \left[\left(\dot{q}_n - \frac{\partial}{\partial p_n} (H + \lambda^\rho \phi_\rho) \right) \psi_n^\alpha \right. \\
 &+ \left. \left(-\dot{p}_n - \frac{\partial}{\partial q_n} (H + \lambda^\rho \phi_\rho) \right) \varphi_n^\alpha \right] - \dot{\epsilon}_\alpha(t) \phi^\alpha + \epsilon^\beta V_\beta^\rho \phi_\rho - \epsilon^\beta \lambda^\gamma C_{\beta\gamma}^\rho \phi_\rho = 0,
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

con $\gamma^\alpha = \varphi_n^\alpha p_n + \dot{q}_n p_n \chi^\alpha - \chi^\alpha (H + \lambda^\rho \phi_\rho) - \Lambda^\alpha$.

Derivando el primer término y tomando como independientes a $\epsilon_\alpha(t)$ y su derivada (debido a su arbitrariedad), tenemos:

$$\dot{\epsilon}^\alpha \gamma_\alpha - \dot{\epsilon}^\alpha \phi_\alpha = 0; \rightarrow \gamma_\alpha = \phi_\alpha, \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \gamma_\alpha + \left(\dot{q}_n - \frac{\partial}{\partial p_n} (H + \lambda^\rho \phi_\rho) \right) \psi_n^\alpha + \left(-\dot{p}_n - \frac{\partial}{\partial q_n} (H + \lambda^\rho \phi_\rho) \right) \varphi_n^\alpha \\ + & V_\alpha^\rho \phi_\rho - \lambda^\gamma C_{\alpha\gamma}^\rho \phi_\rho = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

lo cual pone de manifiesto que las ligaduras de primera clase son precisamente las cantidades conservadas γ_α y que así mismo son los generadores de las transformaciones de norma del sistema.

Apéndice B

Oscilador Armónico

B.1. Cuantización del álgebra de Heisenberg en variedades de Riemannianas

El siguiente apéndice está basado en J. Govaerts and V. Villanueva Topology Classes of Flat U(1)... [8]

Consideramos primero un sistema con un solo grado de libertad; definido por las relaciones de conmutación:

$$[\hat{q}, \hat{q}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (\text{B.2})$$

Suponemos que la variable q toma valores en un dominio continuo acotado $[a, b]$ y la variable p en un dominio \mathcal{D}_p , que puede ser continuo o discreto. Suponemos además; que existe una representación del álgebra de Heisenberg (B.1,B.2) que satisface los siguientes requisitos:

- El espacio de estados admite una base $|q\rangle$ tal que diagonaliza al operador de posición \hat{q} .
- El espacio de estados admite un producto interno hermítico positivo definido tal que los operadores \hat{q} y \hat{p} son autoadjuntos.

Estas suposiciones son suficientes para obtener información sobre las representaciones del álgebra de Heisenberg. Así, la evaluación del elemento de matriz del operador posición conduce a:

$$(q - q') \langle q|q'\rangle = 0, \quad (\text{B.3})$$

de lo cual se sigue

$$\langle q|q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{g(q)}} \delta(q - q'), \quad (\text{B.4})$$

donde $\sqrt{g(q)}$ es una función arbitraria que fija la normalización. Posteriormente veremos que en el caso de sistemas con más de un grado de libertad, definidos sobre una variedad Riemanniana, podemos relacionar $g(q)$ con la métrica de la variedad en cuestión.

La evaluación de elementos de matriz del álgebra de Heisenberg tiene también implicaciones, así por ejemplo, usando (B.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle q | [\hat{q}, \hat{p}] | q' \rangle &= (q - q') \langle q | \hat{p} | q' \rangle, \\ &= \frac{i\hbar}{\sqrt{g(q)}} \delta(q - q'). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tiene como solución

$$\langle q | \hat{p} | q' \rangle = -\frac{i\hbar}{g^{1/4}(q)} \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{g^{1/4}(q)} \delta(q - q') \right] + \frac{1}{\sqrt{g(q)}} A(q) \delta(q - q'). \quad (\text{B.6})$$

Resulta conveniente reexpresar la dependencia en $A(q)$ en términos de la fase $\bar{\alpha}(q_0, q) \equiv \int_{q_0}^q dq' A(q')$:

$$\langle q | \hat{p} | q' \rangle = -\frac{i\hbar}{g^{1/4}(q)} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \frac{d}{dq} \left[e^{\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \delta(q - q') g^{-1/4}(q) \right], \quad (\text{B.7})$$

donde $q_0 \in [a, b]$ es un punto que define la condición inicial y aparece aquí dentro de la constante de integración.

Con los resultados anteriores podemos escribir la descomposición espectral de la unidad y la representación de las funciones de onda (en el espacio de configuraciones):

$$\mathbb{1} = \int_a^b dq \sqrt{g(q)} |q\rangle \langle q|, \quad (\text{B.8})$$

$$|\psi\rangle = \int_a^b dq \sqrt{g(q)} |q\rangle \langle q|\psi\rangle, \quad (\text{B.9})$$

$$\langle \psi| = \int_a^b dq \sqrt{g(q)} \langle \psi|q\rangle \langle q|, \quad (\text{B.10})$$

que así mismo implican:

$$\langle q | \hat{q} | \psi \rangle = q \langle q | \psi \rangle, \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \langle q | \hat{p} | \psi \rangle &= \langle q | \int_a^b dq' \sqrt{g(q')} \hat{p} | q' \rangle \langle q' | \psi \rangle, \\ &= -\frac{i\hbar}{g^{1/4}(q)} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \frac{d}{dq} \left[e^{\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} g^{1/4}(q) \langle q | \psi \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Esta ecuación generaliza la expresión usual del operador momento en la representación de coordenadas. La generalización que hemos derivado incluye:

- el factor $g^{1/4}(q)$ asociado a la normalización de los estados $|q\rangle$,
- la función arbitraria $A(q)$, ligada con la fase de las funciones de onda.

En el caso particular que $g^{1/4}(q) = 1$ y $A(q) = 0$, se recupera la regla de correspondencia usual para el operador de momento \hat{p} actuando sobre las funciones de onda.

La condición de que el operador momento \hat{p} sea auto-adjunto $\langle \psi | (\hat{p} | \psi \rangle) = (\langle \psi | \hat{p}^\dagger) | \psi \rangle$ implica

$$\begin{aligned} & \int_a^b dq \sqrt{g(q)} \langle \psi | q \rangle \frac{-i\hbar}{g^{1/4}(q)} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \frac{d}{dq} [e^{\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} g^{1/4}(q) \langle q | \psi \rangle] \\ = & \int_a^b dq \sqrt{g(q)} \left[\frac{i\hbar}{g^{1/4}(q)} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \frac{d}{dq} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} g^{1/4}(q) \langle \psi | q \rangle \right) \right] \langle q | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

la igualdad de ambas expresiones resulta en la condición:

$$\int_a^b dq \frac{d}{dq} \left[\sqrt{g(q)} \langle \psi | q \rangle \langle q | \psi \rangle \right] = 0, \quad (\text{B.14})$$

ó equivalentemente:

$$\sqrt{g(b)} |\psi(b)|^2 - \sqrt{g(a)} |\psi(a)|^2 = 0. \quad (\text{B.15})$$

Estas condiciones son precisamente las que definen el dominio de las variables q para que el operador momento sea auto-adjunto. Puede observarse que en el caso convencional que a y b corresponden a los extremos espaciales ($\pm\infty$) y que la métrica no está involucrada, esta condición equivale a que las funciones de onda se anulen en tales extremos.

De manera similar si en lugar de usar la base $|q\rangle$ que diagonaliza al operador posición, se usa la base $|p\rangle$ que diagonaliza al operador momento \hat{p} :

$$\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle. \quad (\text{B.16})$$

En analogía al análisis en la base $|q\rangle$, introducimos un factor de normalización de los estados:

$$\langle p | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{h(p)}} \delta(p - p'). \quad (\text{B.17})$$

En este caso la descomposición espectral del operador unidad se expresa como:

$$\mathbb{1} = \int_{\mathcal{D}_p} dp \sqrt{h(p)} | p \rangle \langle p |, \quad (\text{B.18})$$

donde \mathcal{D}_p es el dominio de los momentos que hemos supuesto **continuo**.

La evaluación del elemento de matriz del operador momento, junto con la ecuación (B.12) conduce a la ecuación diferencial:

$$\langle q | \hat{p} | p \rangle = p \langle q | p \rangle = -\frac{i\hbar}{g^{1/4}(q)} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} \frac{d}{dq} [e^{\frac{i}{\hbar} \bar{\alpha}(q_0, q)} g^{1/4}(q) \langle q | p \rangle]. \quad (\text{B.19})$$

Al resolver esta ecuación diferencial necesitamos una constante de integración la cual puede elegirse como la función de onda $\langle q_0 | p \rangle$ asociada al punto q_0 (arbitrario en el intervalo $[a, b]$). De tal modo, la solución a la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$g^{1/4}(q) \langle q | p \rangle = \Omega [P(q_0 \rightarrow q)] e^{\frac{i}{\hbar} (q - q_0) p} g^{1/4}(q_0) \langle q_0 | p \rangle, \quad (\text{B.20})$$

donde hemos introducido la notación

$$\Omega[P(q_0 \rightarrow q)] \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{\alpha}(q_0, q)} = e^{-\int_{P(q_0 \rightarrow q)} dq' A(q')} . \quad (\text{B.21})$$

La condición de normalización para los estados $|p\rangle$ dada en (B.17) se reduce a:

$$|g^{1/4}(q_0) \langle q_0 | p \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{h(p)}} , \quad (\text{B.22})$$

lo cual implica que:

$$g^{1/4}(q_0) \langle q_0 | p \rangle = \frac{e^{i\varphi(q_0, p)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{h^{1/4}(p)} , \quad (\text{B.23})$$

donde $\varphi(q_0, p)$ es una fase arbitraria que no depende de q .

De este modo encontramos la representación de la función de onda para el álgebra de Heisenberg:

$$\langle q | p \rangle = \frac{e^{i\varphi(q_0, p)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\Omega[P(q_0 \rightarrow q)]}{g^{1/4}(q)h^{1/4}(p)} e^{\frac{i}{\hbar}(q-q_0)p} , \quad (\text{B.24})$$

En el caso de un **espectro discreto** para los momentos canónicos, tenemos las siguientes consideraciones: si $p = np_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y p_0 es la unidad elemental de momento, entonces las relaciones de normalización y la resolución de la unidad toman la forma:

$$\begin{aligned} \langle n | m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{h_n}} \delta_{n, m} , \\ \mathbb{1} &= \sum_n \sqrt{h_n} |n\rangle \langle n| . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Estas relaciones nos permiten escribir (procediendo de manera similar al caso continuo) la representación de las funciones de onda como:

$$\langle q | n \rangle = \frac{e^{i\varphi(q_0, np_0)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\Omega[P(q_0 \rightarrow q)]}{g^{1/4}(q)h_n^{1/4}} e^{\frac{i}{\hbar}(q-q_0)np_0} , \quad (\text{B.26})$$

con las mismas consideraciones respecto a las fases que en el caso continuo.

Finalmente, nótese que el producto de dos funciones de onda en los espacios de configuraciones y de momentos, puede escribirse como:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_a^b dq \sqrt{g(q)} \langle \psi | q \rangle \langle q | \varphi \rangle = \int_{\mathcal{D}_p} dp \sqrt{h(p)} \langle \psi | p \rangle \langle p | \varphi \rangle , \quad (\text{B.27})$$

para el caso continuo y

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_a^b dq \sqrt{g(q)} \langle \psi | q \rangle \langle q | \varphi \rangle = \sum_n \sqrt{h_n} \langle \psi | n \rangle \langle n | \varphi \rangle , \quad (\text{B.28})$$

para el caso discreto.

B.2. La integral de camino

En el esquema de Feynman, el kernel (propagador) del operador de evolución se puede expresar como una suma sobre todas las posibles configuraciones (o trayectorias) que conectan los puntos iniciales y finales q_i, q_f asociando a cada una de esas trayectorias un factor de peso $\exp\{\frac{i}{\hbar}S(q_f, t_f; q_i, t_i)\}$, donde S es la acción clásica del sistema, ésto es:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \sum_{\text{estados}} A e^{\frac{i}{\hbar}S(q_f, q_i; t_f, t_i)}, \quad (\text{B.29})$$

con un factor de normalización apropiado A . El operador de evolución dado por $\hat{U}(t_f, t_i) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i))$ puede escribirse como

$$\hat{U}(t_f, t_i) = \left[\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{(t_f - t_i)}{N} \right\} \right]^N. \quad (\text{B.30})$$

Dado un sistema en una configuración inicial i , la probabilidad de que evolucione hacia una configuración final f está dada por:

$$P_{f \leftarrow i} = | \langle f | \hat{U}(t_f - t_i) | i \rangle |^2. \quad (\text{B.31})$$

Si los estados inicial y final se toman en la representación de las coordenadas, el propagador se escribe como

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f | e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle. \quad (\text{B.32})$$

Usando las descomposiciones espectrales del operador unidad en las bases $|q\rangle$ y $|p\rangle$ ¹ dadas por las ecuaciones:

$$\mathbb{1} = \int_{\mathcal{D}_q} d^N q \sqrt{g(q)} |q\rangle \langle q| = \int_{\mathcal{D}_p} d^N p \sqrt{h(p)} |p\rangle \langle p|, \quad (\text{B.33})$$

así como las funciones de onda:

$$\langle q_j | p_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\Omega [P(q_j^0 \rightarrow q_j)]}{g^{1/4}(q_j) h^{1/4}(p_k)} e^{\frac{i}{\hbar} q_j \cdot p_k}. \quad (\text{B.34})$$

Los factores $\Omega [P(q_{k+1}^0 \rightarrow q_{k+1})] \Omega^{-1} [P(q_k^0 \rightarrow q_k)]$ se cancelan, excepto los asociados a q_i y q_f . De esta manera, el propagador se reduce a:

$$\begin{aligned} \langle q_f | U(t_f, t_i) | q_i \rangle &= \frac{\Omega [P(q_f^0 \rightarrow q_f)] \Omega^{-1} [P(q_i^0 \rightarrow q_i)]}{g^{1/4}(q_f) g^{1/4}(q_i)} \times \\ &\times \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \int_{\mathcal{D}(p)} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{(2\pi\hbar)^n} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \cdot p_j - h_j \right]}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Es importante recalcar que al usar las representaciones del álgebra de Heisenberg para construir la integral de camino, se obtiene una representación exacta para $\langle q_f | U(t_f, t_i) | q_i \rangle$ la cual sugiere

¹Hemos supuesto que el dominio del momento canónico \mathcal{D}_p es **continuo** y el caso de un dominio **discreto**

una versión discretizada del problema. Nótese también que el resultado final sólo depende de los factores de normalización $g(q)$ y $h(p)$ y las holonomías $\Omega [P(q^0 \rightarrow q)]$ asociadas a los extremos, es decir a los estados inicial y final.

El análisis del caso en que el espectro del moment es **discreto** se realiza de manera análoga, con la salvedad de considerar tanto las representaciones de funciones de onda como la descomposición espectral de la unidad de manera discreta. De tal suerte, la integral de camino es:

$$\begin{aligned} \langle q_f | \hat{U}(t_f - t_i) | q_i \rangle = & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Omega [P(q_f^0 \rightarrow q_f)] \Omega^{-1} [P(q_i^0 \rightarrow q_i)]}{(g(q_N)g(q_0))^{1/4}} \times \\ & \times \prod_{j=1}^{N-1} \int_{\mathcal{M}} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \sum_{l_j=-\infty}^{l_j=+\infty} \frac{p_0}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} p_0 l_j - h_j \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

donde, recordemos que p_0 es la unidad elemental de momento y $h_j = \frac{\langle l_j | \hat{H} | q_j \rangle}{\langle l_j | q_j \rangle}$. El ejemplo en el cual se aplicará esta expresión es el del oscilador armónico en coordenadas polares.

B.3. El oscilador armónico

•Análisis cuántico cartesiano

En coordenadas cartesianas, el problema que estamos considerando está descrito por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad (\text{B.37})$$

donde m es la masa del oscilador y ω es la frecuencia angular. De este Lagrangiano, es claro que la métrica en consideración es plana: $g = \det(g_{\alpha\beta}) = 1$.

El álgebra de Heisenberg se obtiene a partir de los paréntesis de Poisson:

$$\{x, p_x\} = 1 \Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad (\text{B.38})$$

$$\{y, p_y\} = 1 \Rightarrow [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar. \quad (\text{B.39})$$

Con esta álgebra y con $g = 1$, el Hamiltoniano correspondiente a (B.37) se expresa:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 \right] + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\partial_x + \frac{i}{\hbar} A_x \right)^2 \left(\partial_y + \frac{i}{\hbar} A_y \right)^2 \right] + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

donde A_x, A_y son las componentes del vector $A_\alpha(q)$ asociado al campo de norma arbitrario involucrado en las representaciones del álgebra de Heisenberg.

Por simplicidad suponemos que el espacio de configuraciones es simplemente conexo (no tiene singularidades u obstrucciones topológicas), podemos entonces eliminar este campo por

medio de una transformación global de norma. De esta forma, el operador Hamiltoniano se reduce a:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (\text{B.41})$$

que por supuesto coincide con el operador Hamiltoniano convencional.

Nuestro problema consiste en encontrar las autofunciones y autovalores del operador Hamiltoniano en la representación de coordenadas:

$$\hat{H}|\psi(x, y; t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, y; t)\rangle. \quad (\text{B.42})$$

Como el potencial no depende explícitamente del tiempo; el problema se reduce a:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \right] |\psi(x, y)\rangle = E |\psi(x, y)\rangle. \quad (\text{B.43})$$

La solución a esta ecuación diferencial se obtiene usando el método de separación de variables:

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} (2^{n_x+n_y} n_x! n_y!)^{-1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} H_{n_x} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_{n_y} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right). \quad (\text{B.44})$$

Aquí, n_x y n_y son números enteros que caracterizan los modos excitados en las variables x y y respectivamente. Los autovalores de energía son $E_{n_x, n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$ y H_n son los polinomios de Hermite de grado n .

Una alternativa para resolver el problema es usar operadores de creación - aniquilación (a, a^\dagger) dados por

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_x \right), \quad a_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}_x \right), \quad (\text{B.45})$$

$$a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_y \right), \quad a_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}_y \right). \quad (\text{B.46})$$

Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación:

$$[a_x, a_x^\dagger] = 1; \quad [a_y, a_y^\dagger] = 1, \quad (\text{B.47})$$

con todos los demás conmutadores iguales a cero.

Es conveniente introducir los operadores "número" $\hat{n}_x = a_x^\dagger a_x$, $\hat{n}_y = a_y^\dagger a_y$. En términos de estos operadores el Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n}_x + \hat{n}_y + 1). \quad (\text{B.48})$$

El hecho de que los operadores a y a^\dagger (en x y y) sean hermíticos uno del otro, asegura la existencia de un estado base $|0, 0\rangle$ aniquilado por esos operadores:

$$a_x|0, 0\rangle = 0; \quad a_y|0, 0\rangle = 0. \quad (\text{B.49})$$

Los estados excitados $|n_x, n_y\rangle$ se obtienen a partir del estado base por medio de los operadores de creación a_x^\dagger, a_y^\dagger :

$$\begin{aligned} |n_x, n_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_x!}} (a_x^\dagger)^{n_x} |0, n_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_y!}} (a_y^\dagger)^{n_y} |n_x, 0\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y!}} (a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y} |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

La relación con la representación de coordenadas se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 = \langle x | a_x | 0 \rangle &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle x | \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_x | 0 \rangle, \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right] \langle x | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

lo cual implica:

$$\langle x | 0 \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}. \quad (\text{B.52})$$

Los modos excitados se obtienen de forma análoga:

$$\begin{aligned} \langle x | n_x \rangle &= \langle x | \frac{1}{\sqrt{n_x!}} (a_x^\dagger)^{n_x} | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_x!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{n_x}{2}} \left[x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right]^{n_x} \langle x | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Esta es la representación de Rodrigues de los polinomios de Hermite.

Los métodos descritos hasta ahora adolecen de un problema. Los estados encontrados son autoestados del Hamiltoniano pero no del operador de momento angular $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$. Como $[\hat{H}, \hat{L}] = 0$, existen eigenfunciones comunes a ambos operadores. Para encontrar la base de autofunciones comunes es conveniente introducir los operadores de creación y aniquilación de helicidad:

$$a_\pm = \frac{a_x \mp ia_y}{\sqrt{2}}; \quad a_\pm^\dagger = \frac{a_x^\dagger \pm ia_y^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.54})$$

que tienen los conmutadores

$$[a_\pm, a_\pm^\dagger] = 1, \quad (\text{B.55})$$

y el resto de los conmutadores se anulan.

En términos de estos operadores de creación-aniquilación, el Hamiltoniano adquiere la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1), \quad (\text{B.56})$$

mientras que el operador momento angular se escribe como:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \\ &= \hbar(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-). \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Los estados

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}} (a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-} |0, 0\rangle, \quad (\text{B.58})$$

son eigenestados tanto del Hamiltoniano como del momento angular. Esta base de estados puede escribirse equivalentemente como

$$|n, l\rangle = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+l}{2}\right)! \left(\frac{n-l}{2}\right)!}} (a_+^\dagger)^{\frac{n+l}{2}} (a_-^\dagger)^{\frac{n-l}{2}} |0, 0\rangle, \quad (\text{B.59})$$

con $n_\pm = \frac{n \pm l}{2}$. En esta base, la acción del Hamiltoniano y momento angular están dadas por:

$$\hat{H}|n, l\rangle = \hbar\omega(n+1)|n, l\rangle, \quad (\text{B.60})$$

$$\hat{L}|n, l\rangle = l\hbar|n, l\rangle. \quad (\text{B.61})$$

Para establecer la relación con las representación de coordenadas, se introducen las variables complejas $z_\pm = x \pm iy$. En términos de estas variables, los operadores a_\pm se escriben como

$$a_\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left[z_\mp + \frac{\hbar}{m\omega} \partial_\pm \right], \quad (\text{B.62})$$

$$a_\pm^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left[z_\pm - \frac{\hbar}{m\omega} \partial_\mp \right], \quad (\text{B.63})$$

donde $\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial z_\pm}$. A partir de los estados dados en la ecuación (B.59), puede uno obtener la función de onda. En particular, el estado base está dado por:

$$\psi_{0,0}(z_+, z_-) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(z_+ z_-)} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)}. \quad (\text{B.64})$$

La función de onda para los estados con números cuánticos n, l se obtienen aplicando los operadores de creación al estado base:

$$\begin{aligned} \langle z_+, z_- | n, l \rangle &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+l}{2}\right)! \left(\frac{n-l}{2}\right)!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right)^{\frac{n+l}{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right)^{\frac{n-l}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} z_+ - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial z_-} \right)^{\frac{n+l}{2}} \left(\frac{1}{2} z_- - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial z_+} \right)^{\frac{n-l}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(z_+ z_-)}. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Reexpresando este resultado en términos de las variables x, y obtenemos la función de onda que incorpora adecuadamente las simetrías del problema al ser autofunción común del Hamiltoniano y del momento angular:

$$\begin{aligned} \psi_{n,l} &= \langle x, y | n, l \rangle \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(2^n \left(\frac{n+l}{2} \right)! \left(\frac{n-l}{2} \right)! \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2) \right\} \sum_{p=0}^{\frac{n+l}{2}} \sum_{q=0}^{\frac{n-l}{2}} \times \\ &\times \binom{\frac{n+l}{2}}{p} \binom{\frac{n-l}{2}}{q} (-1)^q (i)^{p+q} H_{n-(p+q)} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_{p+q} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right). \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

•Análisis cuántico polar

La cuantización del oscilador armónico bidimensional en coordenadas polares. Estas coordenadas están caracterizadas por la métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad g = \rho^2. \quad (\text{B.67})$$

El Hamiltoniano que proporciona tanto una descripción covariante como un ordenamiento libre de singularidades y una caracterización topológica del álgebra de Heisenberg en términos de las holonomías de la variedad está dado por (??) con la implementación de esta métrica:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{0,0} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{g^{1/4}(q)} \hat{p}_\alpha \sqrt{g(q)} g^{\alpha\beta} \hat{p}_\beta \frac{1}{g^{1/4}(q)} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\rho}^2, \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\hbar} A_\rho \right) \rho \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\hbar} A_\rho \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\partial_\varphi + \frac{i}{\hbar} A_\varphi \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2, \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

donde A_ρ, A_φ son las componentes del vector A_α asociado al campo de norma arbitrario involucrado en las representaciones del álgebra de Heisenberg. Por el momento, suponemos que la variedad \mathcal{M} es simplemente conexa, en cuyo caso se puede eliminar $A_\alpha(q)$. Con ésto, el operador Hamiltoniano adquiere la forma convencional en términos del operador Laplaciano:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + V(\rho). \quad (\text{B.69})$$

El espectro de energías está dado por los eigenvalores del Hamiltoniano:

$$\hat{H}\psi(\rho, \varphi) = E\psi(\rho, \varphi). \quad (\text{B.70})$$

Para encontrar los eigenvalores y sus respectivas eigenfunciones, proponemos una solución de la forma:

$$\psi(\rho, \varphi) = \rho^l e^{il\varphi} e^{\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2\}} f(\rho), \quad (\text{B.71})$$

con $f(\rho)$ una función de prueba. La función $f(\rho)$ satisface la ecuación diferencial:

$$f''(\rho) + \left(\frac{2l+1}{\rho} - \frac{2m\omega\rho}{\hbar} \right) f'(\rho) + \frac{2m\omega}{\hbar} \left(\frac{E}{\hbar\omega} - (l+1) \right) f(\rho) = 0, \quad (\text{B.72})$$

y esta ecuación puede compararse con la ecuación diferencial de Laguerre modificada para $L_{q-p}^p(\beta\rho^2)$:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} W(\beta\rho^2) + \left(\frac{2p+1}{\rho} - 2\beta\rho \right) \frac{d}{d\rho} W(\beta\rho^2) + 4\beta(q-p)W(\beta\rho^2) = 0. \quad (\text{B.73})$$

de donde identificamos: $l = p$, $\beta = \frac{m\omega}{\hbar}$, $q = \frac{n+l}{2}$ y además se usó que $E = \hbar\omega(n+1)$. Así, la función de onda normalizada se expresa como:

$$\psi_{n,l}(\rho, \varphi) = \pi^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{l+1}{2}} \left(\frac{(\frac{n-l}{2})!}{(\frac{n+l}{2})!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\rho e^{i\varphi} \right)^l e^{\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2\}} L_{\frac{n-l}{2}}^l \left(\frac{m\omega}{\hbar} \rho^2 \right). \quad (\text{B.74})$$

Esta solución tiene la importante propiedad de diagonalizar no sólo al Hamiltoniano, sino también al momento angular, por lo tanto debe ser igual a la solución obtenida, usando coordenadas cartesianas, en la sección anterior.

La igualdad de ambas funciones (ver (B.66)) conduce a la siguiente relación entre los polinomios de Laguerre en coordenadas polares y productos de los polinomios de Hermite en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 (\rho e^{i\varphi})^l L_{\frac{n-l}{2}}^l(\rho^2) &= [2^n (\frac{n-l}{2})!]^{-1} \sum_{p=0}^{\frac{n+l}{2}} \sum_{q=0}^{\frac{n-l}{2}} \binom{\frac{n+l}{2}}{p} \binom{\frac{n-l}{2}}{q} \times \\
 &\times (-1)^q (i)^{p+q} H_{n-(p+q)}(x) H_{p+q}(y). \tag{B.75}
 \end{aligned}$$

• El Propagador

Es posible evaluar el propagador usando la integral de camino. Cuando el análisis se lleva a cabo en coordenadas cartesianas, el problema se reduce a multiplicar los propagadores unidimensionales correspondientes a direcciones ortogonales (x, y) . La evaluación del propagador para el oscilador en una dimensión ha sido discutida en detalle en libros de texto [5, 6] y por esta razón sólo presentamos el resultado final:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f, y_f | \hat{U} | x_i, y_i \rangle &= \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega \Delta t)} \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\pi \hbar \sin(\omega \Delta t)} [(x_f^2 + x_i^2 + y_f^2 + y_i^2) \cos(\omega \Delta t) - 2(x_f x_i + y_f y_i)] \right\}. \tag{B.76}
 \end{aligned}$$

Una forma elegante de calcular el propagador es la siguiente: se introduce la unidad $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$ en la ecuación (B.32) y se utiliza una representación integral para las funciones de Hermite $H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-t^2} (x+it)^n$, lo cual permite escribir:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f | \hat{U} | x_i \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_f | n \rangle e^{-i\omega \Delta t (n + \frac{1}{2})} \langle n | x_i \rangle, \\
 &= \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{2^{2n}}{\pi} e^{-i\omega \Delta t (n + \frac{1}{2})} e^{-(t^2 + t'^2)} \times \\
 &\times (\hat{x}_f + it)^n (\hat{x}_i + it')^n (2^n n!)^{-1} e^{-\{(\hat{x}_f^2 + \hat{x}_i^2)\}}, \tag{B.77}
 \end{aligned}$$

donde, para simplificar la notación, hemos usado las coordenadas “normalizadas” $\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$. Intercambiando la suma y las integrales, el integrando puede expresarse como exponenciales:

$$\langle x_f | \hat{U} | x_i \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi^3 \hbar} \right)^{1/2} e^{-\{(\hat{x}_f^2 + \hat{x}_i^2)\}} e^{-\frac{i}{2}\omega \Delta t} \int \int dt dt' e^{-(t^2 + t'^2)} \exp \{ 2e^{-i\omega \Delta t} (\hat{x}_f + it) (\hat{x}_i + it') \}. \tag{B.78}$$

Las integrales sobre t y t' resultan ser Gaussianas y su evaluación es directa, lo cual reproduce el propagador dado en la ecuación (B.76).

Consideramos ahora el cálculo de la integral de camino para el oscilador en coordenadas polares. Comenzamos haciendo la suma sobre las funciones de onda (B.74)

$$\langle \rho_f, \varphi_f | \hat{U}(t_f - t_i) | \rho_i, \varphi_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \langle \rho_f, \varphi_f | n, l \rangle \langle n, l | \hat{U}(t_f - t_i) | \rho_i, \varphi_i \rangle,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \psi_{n,l}(\rho_f, \varphi_f) \psi_{n,l}^*(\rho_i, \varphi_i) e^{-i\omega\Delta t(n+1)}, \quad (\text{B.79})$$

el índice l toma valores de $-n$ a n de dos en dos. Al cambiar los índices de las sumas, este propagador puede escribirse equivalentemente como:

$$\begin{aligned} \langle f|\hat{U}|i\rangle &= \frac{m\omega}{\pi\hbar} e^{\{-\frac{1}{2}(\hat{\rho}_f^2 + \hat{\rho}_i^2)\}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(k+m+1)} \times \\ &\times L_k^m(\hat{\rho}_f^2) L_k^m(\hat{\rho}_i^2) [\exp(-2i\omega\Delta t)]^k (\hat{\rho}_f \hat{\rho}_i e^{i(\varphi_f - \varphi_i)})^m e^{-i\omega\Delta t(m+1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

donde $\hat{\rho} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\rho$ y $\Delta t = t_f - t_i$. La suma sobre el índice inferior de los polinomios de Laguerre se lleva a cabo utilizando la regla de suma: [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{L_k^m(x)L_k^m(y)}{\Gamma(k+m+1)} z^k = \frac{(xyz)^{-\frac{1}{2}m}}{1-z} \exp\left(-z\frac{(x+y)}{1-z}\right) I_m\left(2\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \quad (\text{B.81})$$

donde las I_m son las funciones de Bessel modificadas. De esta manera, el propagador se reexpresa como:

$$K = \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega \Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\varphi_f - \varphi_i)} I_l\left(-i\frac{\hat{\rho}_f \hat{\rho}_i}{\sin \omega \Delta t}\right) e^{\frac{i}{2}(\hat{\rho}_f^2 + \hat{\rho}_i^2) \cot \omega \Delta t}. \quad (\text{B.82})$$

Podemos simplificar esta expresión usando la función generatriz de la función Bessel modificada por medio de expansiones de funciones angulares (tipo Jacobi-Anger [7]), de lo cual se sigue:

$$K = \langle f|\hat{U}|i\rangle = \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega \Delta t} e^{\{\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega \Delta t}[(\rho_f^2 + \rho_i^2) \cos \omega \Delta t - 2\rho_f \rho_i \cos(\varphi_f - \varphi_i)]\}}. \quad (\text{B.83})$$

Evidentemente, al usar las relaciones entre las variables cartesianas y las polares $x = \rho \cos \varphi$ y $y = \rho \sin \varphi$ vemos que este propagador es efectivamente igual al propagador encontrado en las coordenadas cartesianas.

Otra forma de evaluar el propagador es por fuerza bruta, *i. e.* utilizando la forma discretizada del propagador (B.36), tal calculo se realiza en la referencia (VGL)

Para el Hamiltoniano en consideración, el momento angular asociado a la variable φ_k está discretizado en la forma: $P_{\varphi_k} = l_k \hbar$ donde l_k un número entero. La evaluación del elemento de matriz h_k de (B.36) nos produce en la integral de camino:²

$$\begin{aligned} K &= \lim_{N \rightarrow \infty} (g(\rho_f)g(\rho_i))^{-1/4} \prod_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} d\rho_j \int_0^{2\pi} d\varphi_j \times \\ &\times \prod_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_{\rho_k}}{2\pi\hbar} \sum_{l_k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\frac{\Delta\rho_{k+1}}{\epsilon}\right) P_{\rho_k} \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{\Delta\varphi_{k+1}}{\epsilon}\right) l_k \hbar - \frac{1}{2m} P_{\rho_k}^2 - \frac{(l_k^2 - \frac{1}{4})\hbar^2}{2m\rho_k^2} - \frac{1}{2} m\omega^2 \rho_k^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

²Nótese que la evaluación explícita del elemento de matriz $h_k = \frac{\langle p_k | \hat{H}_{0,0} | q_k \rangle}{\langle p_k | q_k \rangle}$ da lugar al término que incluye la corrección cuántica $\frac{(l_k^2 - \frac{1}{4})\hbar^2}{2m\rho_k^2}$ debida al ordenamiento de $\hat{H}_{0,0}$ sobre $\langle p_k | q_k \rangle$.

donde $\Delta\rho_{k+1} = \rho_{k+1} - \rho_k$.

Todos los resultados anteriores, nuestro resultado para la integral radial es:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{m\omega}{i\hbar} \operatorname{csc}[\omega\Delta t] \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{il(\varphi_f - \varphi_i)} \times \\
 &\times I_l\left(-i\rho_f\rho_i \frac{m\omega}{\hbar} \operatorname{csc}[\omega\Delta t]\right) \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar} \operatorname{ctg}[\omega\Delta t] \left((\rho_f)^2 + (\rho_i)^2\right)\right\},
 \end{aligned} \tag{B.85}$$

que puede ser escrito de la forma (ya usada antes):

$$K = \frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\varphi_f - \varphi_i)} I_l\left(-i \frac{\hat{\rho}_f \hat{\rho}_i}{\sin \omega\Delta t}\right) e^{\frac{i}{2}(\hat{\rho}_f^2 + \hat{\rho}_i^2) \cot \omega\Delta t}. \tag{B.86}$$

Nuevamente, al usar la forma de la expansión de Jacobi-Anger para los términos en la suma anterior obtenemos precisamente el propagador dado en (B.83) que obtuvimos por medio del formalismo de cuantización en variedades Riemannianas.

Bibliografía

- [1] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, (John Wiley and Sons, New York (1981)).
- [2] D. Peak and A. Inomata, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1422.
- [3] Ch. Grosche, *DESY 93-141*, *hep-th/9311001*; Ch. Grosche and F. Steiner *DESY 94-184*.
- [4] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).
- [5] R. P. Feynman, *The principle of least action in quantum mechanics*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1942; R. P. Feynman & A. Hibbs *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw Hill, New York, 1965.)
- [6] J. Govaerts, *Hamiltonian Quantisation and Constrained Dynamics* (Leuven University Press, Leuven, 1991).
- [7] X. Wang & D. R. Gup, *Special Functions* (World Scientific, 1989); G. Arfken *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1985), M. Abramowitz and I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1970); I. S. Gradshteyn & I. M. Rhyzik (A. Jeffrey Editor), *Tables of Integrals, Series and Products*, (Academic Press, 1994).
- [8] J. Govaerts and V. Villanueva *Topology Classes of Flat $U(1)$ Bundles and Diffeomorphic Covariant Representations of the Heisenberg Algebra* en **Intl. J. Mod. Phys. A** No.15, (2000), 4903.
- [9] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.***B25** (1967) 30.
- [10] V.N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139** (1978) 1.
- [11] R. Friedberg, T. D. Lee, Y. Pang and H. C. Ren *Ann. Phys.* **246** (1996) 381.
- [12] V. M. Villanueva, J. Govaerts and J. L. Lucio, *Proceedings of the VI Mexican School on High Energy Physics Mérida 1996*. **AIP**
- [13] V. M. Villanueva, J. Govaerts and J. L. Lucio, *Proceedings of the VII Mexican Workshop on High Energy Physics Morelia 1997*. **AIP**
- [14] V. M. Villanueva, J. Govaerts and J. L. Lucio, *Quantization without gauge fixing: avoiding Gribov ambiguities through the physical projector*. **J. Phys. A: Math. Gen.** No. 33, (2000), 4183.

-
- [15] M. Henneaux, *Phys. Rep.* **126**, (1985).
- [16] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton NJ, 1992).
- [17] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B55** (1975) 224;
I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 309;
E.S. Fradkin and T.E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72** (1978) 343;
I.A. Batalin and E.S. Fradkin, *Rivista del Nuovo Cimento* **9** (1986) 1.
- [18] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 344; *Ann. Phys.* **98** (1976) 287;
I. V. Tyutin, Lebedev preprint FIAN No. 39 (1975), unpublished.
- [19] J.R. Klauder, *Ann. Phys.* **254** (1997) 419.
- [20] V. M. Villanueva, J. A. Nieto, L. Ruiz and J. Silvas, *Hamiltonian Noether theorem for gauge systems and two time physics. Journal of Physics A: Math. Gen.* No. 38, (2005), 7183.