



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

**“TRES METODOS PARA OBTENER EL PROPAGADOR
DE FEYNMAN EN LA MECANICA CUANTICA”**

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

PRESENTA

JOSE MANUEL GONZALEZ VALDES

ASESOR

DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO



MORELIA MICH. DICIEMBRE DEL 2008

Tesis

Esta tesis tuvo la fortuna de haber sido guiada por el Dr. Alfredo Raya, a quien quiero expresar mi sincero agradecimiento, por enseñarme y guiarme con su inagotable paciencia, pero sobre todo su amistad.

Agradezco a mi familia, muy en especial a mis padres y hermano, a mis amigos y compañero, por su apoyo y cariño incondicional, sin cuya ayuda este proyecto y otros más no hubieran sido posibles.

Gracias Alberto Mendoza, Salvador Jara, Eduardo Tututi, Mary Carmen Pérez y Jorge Isidro Aranda por la ayuda brindada, sus valiosos comentarios y sugerencias sobre este trabajo.

También quiero agradecer, a la facultad de ciencias físico matemáticas, al instituto de física y matemáticas y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por las facilidades y atenciones prestadas para la elaboración de este trabajo.

y finalmente agradezco a todos aquellos que han ayudado directa o indirectamente a que este trabajo pudiera realizarse, a quienes no menciono, no por falta de memoria sino por falta de espacio.

Índice general

1. Introducción	7
2. Cuantización	9
2.1. Teoría Cuántica	9
2.1.1. Formalismo Básico	10
2.2. Imágenes de la Mecánica Cuántica	12
2.2.1. Imagen de Schrödinger	12
2.2.2. Imagen de Heisenberg	13
2.2.3. Imagen de Interacción	14
2.3. Propiedades del Operador de Evolución Temporal	15
3. Propagador	17
3.1. ¿Qué es el Propagador?	17
3.2. Métodos para Obtener el Propagador	20
3.2.1. Método Canónico	20
3.2.2. Integral de Caminos	24
3.2.3. Método de Schwinger	36
4. Método Canónico	41
4.1. Partícula Clásica	41
4.2. Propagador	44
5. Método de Integral de Caminos	49
5.1. La Acción Clásica	49
5.2. Propagador	51
6. Método de Schwinger	57
6.1. Propagador	57
6.2. Invarianza de Norma	62

7. Aplicaciones.	65
7.1. Función de Partición	65
7.2. El Efecto Hall Cuántico	68
8. Conclusiones	75

Capítulo 1

Introducción

En la mecánica clásica, nos interesa conocer las trayectorias que describen el movimiento de las partículas, es decir, cómo la partícula cambia a través de varios parámetros de medición o comparación, como pueden ser la posición, la velocidad (aunque no en este orden siempre), el momento y otros, lo cual, es el problema central del estudio de la mecánica clásica [1] y para resolverlo, se hace uso de varias técnicas [2], como es el análisis de fuerzas, en la segunda ley de Newton, la conservación del momento, al estudiar los choques de proyectiles, la conservación de la energía.

En la mecánica cuántica, la evolución temporal de los sistemas está codificada en el propagador, para los objetivos de esta tesis solo nos concentraremos en el propagador de Feynman, y a diferencia de la mecánica clásica, aquí no podemos conocer la trayectoria, $\psi(\vec{r}, t)$, de los sistemas de una forma directa, esto se debe porque al realizar una medición causamos una perturbación al sistema y aún con aparatos de medición ideales (sin este efecto perturbativo) las trayectorias son desconocidas hasta cierto punto. Y por lo tanto, nos auxiliamos de otras formas de análisis para estudiarlo, como es la probabilidad y estadística [3], permitiéndonos estudiar la evolución temporal del sistema en forma de una amplitud de transición, $|\psi(\vec{r}, t)|^2$, o propagador.

En esta tesis exploraremos distintos métodos para obtener el propagador. Existen varios métodos en los cuales nos podemos enfocar para el estudio del propagador. Tal estudio es extenso y, por lo tanto, nos concentraremos solamente en tres de ellos: el Método Canónico [4], el Método de Integral de Caminos [5] y el Método de Schwinger [6], sin restarle importancia a otros procedimientos. Estos métodos representan una forma distinta y particular

de obtener la amplitud de transición, de modo que al estudiarlos podemos atacar el problema de varias formas y así encontrar, quizás, una manera de resolverlo.

Un problema muy interesante de la mecánica cuántica es el llamado problema de Landau, donde una partícula se mueve bajo la influencia de un campo magnético uniforme. Este problema fue resuelto por primera vez por Landau [7], en el estudio de la mecánica cuántica, porque es un problema sencillo, pero no trivial, y su solución no surge de forma inmediata, permitiéndonos hacer un amplio estudio y análisis del problema. Este problema es el punto de partida para estudiar sistemas más complejos en diferentes áreas de estudio de la física, como la materia condensada, la teoría cuántica de campos, la mecánica cuántica supersimétrica, entre otras.

Comenzamos ésta tesis presentando las ideas básicas de la cuantización, en particular la evolución de los sistemas cuánticos, en el siguiente capítulo. En el capítulo 3 presentamos los métodos que empleamos para obtener el propagador de Feynman, de el Método Canónico, en el cual hacemos uso de la segunda cuantización, las soluciones de las ecuaciones del problema para encontrar el propagador de primeros principios; el segundo Método es la Integral de Caminos, donde al dividir del intervalo de tiempo en intervalos muy pequeños e integramos sobre todos los caminos que conectan los puntos inicial y final de la trayectoria de la partícula; y el Método de Schwinger, en el que mediante el ordenamiento temporal del Hamiltoniano, y apoyándonos en las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, podemos integrar formalmente las ecuaciones de evolución y obtener el propagador buscado. Aplicamos cada método para obtener el propagador del problema de Landau. En el capítulo 4 lo hacemos con el método Canónico, en el capítulo 5 con el de Integral de caminos y en el capítulo 6 con el Método de Schwinger.

Para dar una aplicación las técnicas desarrolladas, en la obtención del propagador, describiremos el efecto de Hall cuántico [8], en el capítulo 7. Esto lo realizamos para terminar nuestro estudio de los métodos y con esto en mente, dar un ejemplo físico en el cual podemos emplear cualquier técnica mostrada para encontrar la solución, la cual muestra características muy importantes del objeto estudiado. Finalmente, en el capítulo 8, daremos las conclusiones en las cuales mostraremos los resultados a los que hemos llegado en el desarrollo de esta tesis.

Capítulo 2

Cuantización

En este capítulo, presentamos los conceptos básicos de la mecánica cuántica. Discutimos distintos esquemas de aproximación o imágenes en que se puede estudiar esta teoría, enfatizando el papel fundamental del operador de evolución temporal de los sistemas cuánticos y sus propiedades, que serán esenciales en el desarrollo de esta tesis.

2.1. Teoría Cuántica

La teoría cuántica es la más completa teoría microscópica que tenemos hoy en día para describir la física de la energía y la materia. Ésta ha sido exitosamente aplicada para explicar los fenómenos que ocurren en varios niveles, desde el estudio de partículas elementales en la escala subatómica, pasando por sistemas mesoscópicos de materia condensada y hasta el estudio de estrellas de neutrones y otros objetos de escala cosmológica. Solamente la introducción de gravitones –los cuantos de la interacción gravitacional, se mantiene como un problema abierto en la teoría cuántica fundamental. Históricamente, la física cuántica primero trató con la cuantización del movimiento de las partículas, dejando al campo electromagnético clásico; de ahí el nombre de Mecánica Cuántica ([3] y [9]) en 1925-26. Después, el campo electromagnético fue también cuantizado [10] en 1927, e incluso las partículas mismas fueron representadas por campos cuantizados [11] en 1928, resultando en el desarrollo de la Electrodinámica Cuántica (QED de sus siglas en inglés, *Quantum Electrodynamics*) y la Teoría Cuántica de Campos (TCC) en general. Por convención, la forma original de la mecánica cuántica es llamada *Primera Cuantización*, mientras que la TCC se formula en el lenguaje de la *Segunda Cuantización*.

2.1.1. Formalismo Básico

Consideremos una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de alguna fuerza $F(x, t)$. En la mecánica clásica [12], estamos interesados en la evolución de la posición de la partícula, es decir, su trayectoria $x(t)$. Para este fin, planteamos las ecuaciones de movimiento, en los formalismos de Newton, Lagrange o Hamilton

$$\begin{aligned} F &= m\ddot{x} , && \text{Segunda ley de Newton,} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 , && \text{Ecuaciones de Euler-Lagrange,} \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} , && \text{Ecuaciones de Hamilton.} \end{aligned}$$

Una vez conocida $x(t)$, podemos fácilmente encontrar la velocidad $v = \dot{x}(t)$, a veces se encuentra primero $v(t)$ y hasta después $x(t)$, momento lineal $p = mv$, energía cinética $T = mv^2/2$, o cualquier propiedad del sistema [2] que queramos conocer.

En la mecánica cuántica, la partícula puede ocupar diferentes estados cuánticos, que cambian bajo la influencia de fuerzas externas que, al igual que las variables dinámicas correspondientes, se representan como operadores actuando sobre los estados. La discusión sobre el formalismo básico de la mecánica cuántica puede encontrarse en cualquier texto básico [3, 4]. Bien en la primera o en la segunda cuantización, la idea fundamental de la teoría cuántica establece que todos los estados cuánticos están representados por estados vectoriales, llamados “ket” y denotados por $|\psi\rangle$, en un espacio de Hilbert, y que todas las cantidades físicas observables se representan por operadores Hermitianos $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, actuando sobre estos vectores [7],

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle. \tag{2.1}$$

Comencemos nuestra discusión sobre los vectores de estado en la mecánica cuántica. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno que contiene todos sus límites. Cada vector en este espacio, llamado vector de estado $|\psi\rangle$, está asociado con un vector de estado adjunto, llamado “bra”, dado por $(|\psi\rangle)^\dagger \equiv \langle\psi|$. Podemos formar el producto interno o “bra(c)ket” entre dos de estos vectores de estado de la forma $\langle\psi|\phi\rangle$. La conexión entre el espacio de Hilbert directo y su adjunto está dada por la relación

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*. \tag{2.2}$$

Como dos vectores de estado paralelos representan el mismo estado físico, debemos de tratar siempre con vectores de estado propiamente normalizados, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. El producto interno $\langle\psi|\phi\rangle$ representa el traslape entre dos estados cuánticos y se identifica con una amplitud de probabilidad, cuyo cuadrado, como veremos más adelante, podremos identificar con una probabilidad de que dicho traslape tome lugar en la evolución de un sistema.

Hablaremos ahora sobre los operadores. Dado un operador \hat{A} actuando sobre un espacio de Hilbert, el operador adjunto \hat{A}^\dagger se define como

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* \quad (2.3)$$

para cualquier $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ en dicho espacio. Un operador Hermitiano es aquel que satisface

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle. \quad (2.4)$$

Dado cualquier operador Hermitiano \hat{A} , denotamos a sus eigenestados $|\psi_\alpha\rangle$ a aquellos estados tales que

$$\hat{A}|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle. \quad (2.5)$$

Los factores α son los eigenvalores de dicho operador y son siempre números reales. Un teorema fundamental de la teoría de espacios de Hilbert es que el conjunto de todos los eigenvectores de cualquier operador Hermitiano dado, forman un conjunto completo (base) del espacio. En general los eigenestados $|\psi_\alpha\rangle$ y $|\phi_\beta\rangle$ de dos operadores Hermitianos diferentes A y B no son los mismos.

Imaginemos que queremos realizar una medición de una variable dinámica asociada con un operador \hat{B} , para lo cual, el estado cuántico del sistema puede prepararse como un eigenestado de este operador, $|\phi_\beta\rangle$. Este estado también puede expresarse como una superposición de eigenestados $|\psi_\alpha\rangle$ de otro operador \hat{A} de la forma

$$|\phi_\beta\rangle = \sum_{\alpha} |\psi_\alpha\rangle C_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

donde los coeficientes de expansión son

$$C_{\alpha\beta} = \langle\psi_\alpha|\phi_\beta\rangle. \quad (2.7)$$

Si sobre este estado hacemos una medición de la variable dinámica asociada con el operador \hat{A} , no podemos predecir el resultado obtenido con absoluta

precisión, pues $|\phi_\beta\rangle$ no es, en general, eigenestado de \hat{A} . Solamente podemos hablar de probabilidades. La probabilidad de obtener cualquier estado dado $|\psi_\alpha\rangle$ como resultado de la medición, P_{ψ_α} , es

$$P_{\psi_\alpha} = |C_{\alpha\beta}|^2. \quad (2.8)$$

En la teoría cuántica, esto es la probabilidad de encontrar a la partícula en un intervalo $[a, b]$. A continuación, discutiremos los esquemas de la mecánica cuántica que nos permitirán estudiar la evolución temporal de los sistemas.

2.2. Imágenes de la Mecánica Cuántica

Para conocer las ecuaciones de movimiento de la mecánica cuántica, debemos dar una representación a los estados cuánticos y operadores. Recordemos que el tiempo no es una variable dinámica, por lo que no se representa mediante operadores. Las imágenes o representaciones más comunes para obtener las ecuaciones de movimiento de la mecánica cuántica, es decir, las ecuaciones de Schrödinger y de Heisenberg[4], las exponemos enseguida.

2.2.1. Imagen de Schrödinger

Esta imagen es útil cuando tratamos con un Hamiltoniano \hat{H} que es independiente del tiempo, $\partial_t \hat{H} = 0$, aunque cualquier otro operador puede depender de t . En esta representación, suponemos que los vectores estado $|\psi(t)\rangle$ dependen del tiempo, y su evolución temporal es gobernada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \quad (2.9)$$

La independencia temporal de \hat{H} nos lleva a una simple solución formal para esta ecuación,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle \equiv \hat{U}(t, 0)|\psi(0)\rangle. \quad (2.10)$$

Al operador

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \quad (2.11)$$

se le llama *operador de evolución temporal*, y jugará un papel fundamental en esta tesis. Podemos resumir la imagen de Schrödinger de la mecánica

cuántica de la siguiente manera:

$$\text{Imagen de Schrödinger} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estados:} \quad |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0)|\psi(0)\rangle. \\ \text{Operadores:} \quad \hat{A}, \text{ puede o no depender del tiempo.} \\ \quad \quad \quad \hat{H}, \text{ no depende del tiempo.} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Para interpretar el operador $\hat{U}(t, 0)$, recordemos que para una función $f(\hat{B})$ y cualquier operador \hat{B} , la función del operador está definida mediante la expansión de Taylor de f ,

$$f(\hat{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{B}^n. \quad (2.13)$$

Mientras que la imagen de Schrödinger es muy útil para operadores \hat{A} independientes del tiempo, es preferible de vez en cuando, coleccionar toda la dependencia temporal en los operadores y trabajar con vectores de estado independientes del tiempo. Esto se logra trabajando en la imagen de Heisenberg.

2.2.2. Imagen de Heisenberg

La idea central de la imagen de Heisenberg, es la de obtener una representación donde toda la dependencia temporal sea transferida a los operadores, $\hat{A}(t)$, dejando los vectores de estado independientes del tiempo, $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$. El Hamiltoniano \hat{H} permanece independiente del tiempo en la imagen de Heisenberg. Si los elementos de matriz de cualquier operador entre cualesquiera dos estados son idénticos en dos representaciones, entonces las dos representaciones son completamente equivalentes. Usando la definición de la evolución temporal de los vectores de estado de la imagen de Schrödinger, obtenemos

$$\langle \psi'(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi'_0 | \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A} \hat{U}(t, 0) | \psi_0 \rangle \equiv \langle \psi'_0 | \hat{A}(t) | \psi_0 \rangle. \quad (2.14)$$

Así, podemos establecer la correspondencia entre las dos imágenes:

$$\text{Imagen de Heisenberg} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estados:} \quad |\psi_0\rangle \equiv \hat{U}^\dagger(t, 0)|\psi(t)\rangle. \\ \text{Operadores:} \quad \hat{A}(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A} \hat{U}(t, 0) \\ \quad \quad \quad \hat{H} \text{ no depende del tiempo.} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Notemos que en $t = 0$, las dos imágenes coinciden.

Como en el operador original \hat{A} puede haber una dependencia temporal, es importante establecer la ecuación de movimiento que la gobierna. Ya que \hat{H} es independiente del tiempo, la derivada temporal total de $\hat{A}(t)$ es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} &= \hat{U}^\dagger(t, 0) \left(\imath \hat{H} \hat{A} - \imath \hat{A} \hat{H} + \partial_t \hat{A} \right) \hat{U}(t, 0) \\ &= \imath [\hat{H}, \hat{A}(t)] + (\partial_t \hat{A})(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\hat{X}(t)$ siempre significa $\hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{X} \hat{U}(t, 0)$ para cualquier operador \hat{X} . Esta es la llamada Ecuación de Heisenberg, y juega el mismo papel de la ecuación de Schrödinger en la imagen correspondiente.

Ambas, la imagen de Schrödinger y la imagen de Heisenberg, requieren independencia temporal del Hamiltoniano. Para el caso general de Hamiltonianos dependientes del tiempo, tenemos que cambiar a la llamada imagen de interacción.

2.2.3. Imagen de Interacción

La tercera de las representaciones de la mecánica cuántica que estudiaremos en esta tesis, se introduce para tratar con las situaciones donde un sistema, descrito por un Hamiltoniano independiente del tiempo \hat{H}_0 con eigenestados conocidos, $|n_0\rangle$, es perturbado por alguna interacción $\hat{V}(t)$, posiblemente con dependencia temporal manifiesta, es decir, un sistema cuyo Hamiltoniano completo es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \quad \text{con} \quad \hat{H}_0 |n_0\rangle = \varepsilon_{n_0} |n_0\rangle. \quad (2.17)$$

La idea principal de esta Imagen de Interacción es separar la parte temporal simple, debida a \hat{H}_0 , de la complicada debida a la interacción $\hat{V}(t)$. Esto se logra definiendo un nuevo operador de evolución temporal

$$\hat{U}_0(t, t_0) \equiv e^{-\frac{\imath}{\hbar} \hat{H}_0 (t-t_0)}, \quad (2.18)$$

que utilice solamente \hat{H}_0 y no el Hamiltoniano \hat{H} completo. Como resultado, en la Imagen de Interacción tanto los vectores de estado, $|\psi(t)\rangle$, como los operadores, $\hat{A}(t)$, dependen del tiempo. En términos de los estados y oper-

2.3. PROPIEDADES DEL OPERADOR DE EVOLUCIÓN TEMPORAL 15

adores en la Imagen de Schrödinger, en la Imagen de Interacción tenemos

$$\text{Imagen de Interacción} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estados:} \quad |\hat{\psi}_0(t)\rangle \equiv \hat{U}_0^\dagger(t, 0)|\psi(t)\rangle. \\ \text{Operadores:} \quad \hat{A}(t) \equiv \hat{U}_0^\dagger(t, 0) \hat{A} \hat{U}_0(t, 0) \\ \quad \hat{H}_0 \text{ no depende de } t. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

La imagen de Interacción y la imagen de Heisenberg coinciden cuando $\hat{V}(t) = 0$; i.e. en el caso *no perturbado*. Además, las tres imágenes coinciden para $t = 0$.

Finalmente, notemos que en esta imagen, los vectores de estado satisfacen

$$i\partial_t |\hat{\psi}(t)\rangle = \hat{V}(t) |\hat{\psi}(t)\rangle, \quad (2.20)$$

es decir, evolucionan de acuerdo a una ecuación de Schrödinger que involucra solamente a la parte Hamiltoniano de interacción $\hat{V}(t)$ del Hamiltoniano total \hat{H} . Además, los operadores obedecen la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = i[\hat{H}_0, \hat{A}(t)] + \partial_t \hat{A}(t), \quad (2.21)$$

que involucra solamente al Hamiltoniano no perturbado \hat{H}_0 .

Con esto concluimos la discusión sobre las representaciones de la mecánica cuántica. A continuación, estudiaremos algunas propiedades del operador de evolución temporal.

2.3. Propiedades del Operador de Evolución Temporal

Ya que el operador de evolución temporal nos permite relacionar dos estados de la forma

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle, \quad (2.22)$$

podemos automáticamente establecer que

$$\hat{U}(t, t) = 1. \quad (2.23)$$

Además, puesto que

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}^{-1}(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle, \quad (2.24)$$

tenemos

$$\hat{U}^{-1}(t_1, t_2) = \hat{U}(t_1, t_2). \quad (2.25)$$

Por otro lado, la evolución temporal no cambia la normalización de los estados. De lo contrario, esto implicaría la no conservación de la propiedad. Esto implica que si un estado inicialmente está normalizado, lo estará también a tiempos posteriores, es decir

$$\langle \phi(t_2) | \phi(t_2) \rangle = 1 = \langle \phi(t_1) | \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) \hat{U}(t_2, t_1) | \phi(t_1) \rangle, \quad (2.26)$$

y en consecuencia,

$$U^\dagger(t_2, t_1) \hat{U}(t_2, t_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad U^\dagger(t_2, t_1) = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1), \quad (2.27)$$

lo que demuestra que el operador de evolución temporal es unitario. Además, tenemos que

$$U(t_3, t_1) = \hat{U}(t_3, t_2) \hat{U}(t_2, t_1), \quad (2.28)$$

pues la evolución de un estado de t_1 a t_3 es equivalente a la evolución del mismo estado a través de un tiempo intermedio t_2 .

Finalmente, el tema central de estudio de esta tesis es, precisamente el elemento de matriz del operador de evolución temporal entre estados de la posición,

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \langle x | \hat{U}(t, t') | x' \rangle. \quad (2.29)$$

Éste es llamado también propagador de Feynman o amplitud de transición.

En los siguientes capítulos, estudiaremos distintos métodos que nos permitirán obtener el propagador de Feynman en la mecánica cuántica.

Capítulo 3

Propagador

En este capítulo introduciremos el principal objeto de estudio de esta tesis, que es el propagador de Feynman, también conocido como Amplitud de Transición. El propagador es la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula en la posición $\psi(x', t')$, sabiendo que a un tiempo se encontraba en $\psi(x, t)$, esto es, el elemento de matriz del operador de evolución temporal entre estados de posición. Para obtener el propagador de Feynman, usaremos tres métodos de los muchos que existen, los cuales son el Método Canónico, el Integral de Caminos y el Método Schwinger de Feynman. La idea es ver sus principales diferencias y similitudes y así obtener un mejor conocimiento de las fortalezas y debilidades de estos métodos.

3.1. ¿Qué es el Propagador?

Comenzaremos con la amplitud de probabilidad $\langle x, t | x', t' \rangle$ para $\psi(x, t)$ al evolucionar temporalmente a $\psi(x', t')$. Recordando un poco la idea de evolución temporal (como se muestra en la figura (3.1)), elegimos colocar nuestros relojes de tal forma que el estado inicial de la partícula sea especificado en un tiempo t' y entonces consideramos la evolución del estado para un tiempo t posterior. Esto es, la amplitud de transición está dada por

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \langle x | \hat{U}(t - t') | x' \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar} | x' \rangle, \quad (3.1)$$

donde $\hat{U}(t - t')$ es, de forma usual, el operador de evolución temporal y el Hamiltoniano, que se asume es independiente del tiempo y en general una función de los operadores de posición y de momento: $\hat{H} = \tilde{H}(\hat{p}, \hat{x})$. Por

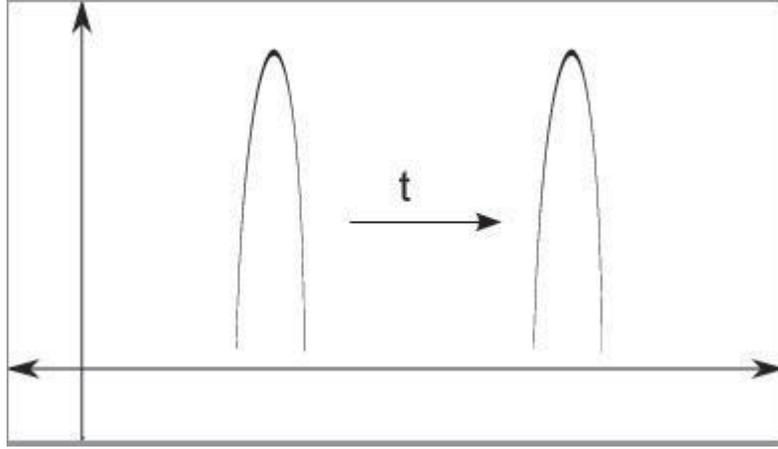


Figura 3.1: Evolución temporal de un estado.

supuesto, en el caso usual unidimensional.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) . \quad (3.2)$$

Una vez que conocemos la amplitud, Ec.(3.1), podemos usarla para determinar cómo cualquier estado $|\psi\rangle$ evoluciona en el tiempo (ver [3, 4]), pues podemos escribir el estado $|\psi\rangle$ como una superposición de eigenestados de posición:

$$\begin{aligned} \langle x|\psi(t)\rangle &= \langle x|e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar}|\psi(t')\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar}|x'\rangle \langle x'|\psi(t')\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x, t|x', t'\rangle \langle x'|\psi(t')\rangle . \end{aligned} \quad (3.3)$$

La amplitud $\langle x, t|x', t'\rangle$ que aparece en la integral en la integral anterior, en la mecánica ondulatoria se conoce como el propagador, pues permite determinar cómo un estado arbitrario se propaga en el tiempo. Como ejemplo, vamos a evaluar el propagador de una partícula libre, cuyo Hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (3.4)$$

Con éste Hamiltoniano e insertando un conjunto completo de eigenestados de momento que cumplen

$$1 = \int dp |p\rangle\langle p|, \quad (3.5)$$

en la Ec.(3.1), tenemos

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \langle x | \int dp |p\rangle\langle p | e^{-\frac{i p^2 \tau}{2m\hbar}} | x' \rangle, \quad (3.6)$$

donde $\tau = t - t'$. Recordando que

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i p x}{\hbar}}, \quad (3.7)$$

el propagador se reduce a una integral dependiente solamente del momento,

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i p x}{\hbar}} e^{-\frac{i p^2 \tau}{2m\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i p x'}{\hbar}} \\ &= \int dp \frac{e^{-i \frac{1}{2m\hbar} p^2 \tau + i \frac{1}{\hbar} p \mathbb{X}}}{2\pi\hbar}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como la integral depende solamente de p , podemos agrupar las variables x primas en donde $\mathbb{X} = x - x'$. Esta integral tiene una forma ya conocida, Gaussiana, que se puede evaluar directamente usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{b}{2})^2} e^{\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (3.9)$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{-i\tau}{2m\hbar} \left(p - \frac{i\mathbb{X}}{2\hbar} \right)^2 + \frac{i\mathbb{X}^2 m}{2\tau\hbar} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{i\tau}} \exp \left\{ \frac{im\mathbb{X}^2}{2\tau\hbar} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp \left\{ \frac{im(x-x')^2}{2\tau\hbar} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esta es la expresión final para el propagador para la partícula libre.

A continuación discutiremos los tres métodos que emplearemos en esta tesis para obtener el propagador de Feynman en la Mecánica Cuántica.

3.2. Métodos para Obtener el Propagador

En esta sección, después de estudiar qué es el propagador de Feynman, vamos a mostrar varios métodos para obtenerlo. Algunos de estos métodos parecen muy diferentes en esencia, al final conducen al mismo resultado. El primer método que estudiaremos es el *Canónico*, el cual consiste en realizar una segunda cuantización, de las soluciones, a la ecuación de Schrödinger. El segundo método de nuestro interés es el de *Integral de Caminos*, donde se hace una “suma” sobre todas las “historias” posibles que puede seguir la partícula en su propagación y el tercer método que estudiaremos es el *Desarrollado por Schwinger*, llamado en ocasiones *Método del Tiempo Propio*, que ha sido ampliamente utilizado en distintos problemas la Teoría Cuántica de Campos, pero que puede aplicarse también en la Mecánica Cuántica ordinaria. Ilustraremos los tres métodos con un ejemplo típico, el oscilador armónico unidimensional.

3.2.1. Método Canónico

Este método para obtener el propagador de Feynman se desarrolla en el contexto de la segunda cuantización de la Teoría Cuántica de Campos (para una discusión introductoria en el tema, ver, p. ejemplo [4]). A diferencia de la primera cuantización, donde las variables dinámicas se ven como operadores, en la segunda cuantización, las funciones de onda se tratan como operadores $\psi(x, t) \rightarrow \hat{\psi}(x, t)$, que cumplen relaciones de anticonmutación canónicas¹ a tiempos iguales

$$\{\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^\dagger(y, t)\} = \delta(x - y). \quad (3.11)$$

El significado físico de estas funciones de onda cuantizadas se ilustra pictóricamente en la Figura (3.2). Estos operadores o campos se pueden expandir en sus modos de Fourier

$$\hat{\psi}(x, t) = \sum_n \hat{a}_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad \hat{\psi}^\dagger(x, t) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \psi_n^*(x) e^{iE_n t/\hbar}, \quad (3.12)$$

donde la base de expansión $\{\psi_n(x)\}$ son las soluciones “clásicas” a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo correspondiente y las E_n las energías asociadas. Los coeficientes de Fourier \hat{a}_n y \hat{a}_n^\dagger cumplen relaciones de anticonmutación canónicas

$$\{\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger\} = \delta_{n, n'}, \quad (3.13)$$

¹En Capítulos posteriores, consideraremos que las funciones de onda ψ están asociadas con electrones, que son fermiones y obedecen el principio de exclusión de Pauli.



Figura 3.2: Representación gráfica de las funciones de onda para una y dos partículas en la segunda cuantización. Las flechas entrantes y salientes representan estados iniciales y finales, respectivamente. La línea punteada y curva representan la amplitud de transición para el proceso de una o dos partículas contenidas en los operadores.

por lo que juegan el papel de operadores de aniquilación y creación de las partículas, es decir, las excitaciones de los campos. En particular, podemos definir al vacío como el estado, en el que

$$\hat{a}_n|0\rangle = 0 = \langle 0|\hat{a}_n^\dagger. \quad (3.14)$$

Con esto en mente, el propagador toma la siguiente forma ²

$$K(x, x'; \tau) = -i\theta(\tau)\langle 0|\hat{\psi}(x, \tau)\hat{\psi}^\dagger(x', 0)|0\rangle, \quad (3.15)$$

donde $K(x, x'; \tau) = \langle x, \tau|x', 0\rangle$ es nuestro propagador de Feynman, y $\tau = t - t'$. Sustituyendo las expansiones (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned} K(x, x'; \tau) &= -i\theta(\tau)\langle 0|\left(\sum_n \hat{a}_n \psi_n(x) e^{-iE_n \tau/\hbar}\right)\left(\sum_{n'} \hat{a}_{n'}^\dagger \psi_{n'}^*(x')\right)|0\rangle \\ &= -i\theta(\tau) \sum_{n, n'} \psi_n(x) \psi_{n'}^*(x') e^{-iE_n \tau/\hbar} \langle 0|\hat{a}_n \hat{a}_{n'}^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

²Por simplicidad, elegimos $t' = 0$.

Haciendo uso de la relación de anticonmutación entre \hat{a}_n y $\hat{a}_{n'}^\dagger$, obtenemos

$$\begin{aligned}
K(x, x'; \tau) &= -i\theta(\tau) \sum_{n, n'} \psi_n(x) \psi_{n'}^*(x') e^{-iE_n \tau / \hbar} \langle 0 | \delta_{n, n'} + \hat{a}_{n'}^\dagger \hat{a}_n | 0 \rangle \\
&= -i\theta(\tau) \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-iE_n \tau / \hbar} \langle 0 | 0 \rangle \\
&= -i\theta(\tau) \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-iE_n \tau / \hbar} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

En esta expresión tenemos una forma general, llamada *representación espectral*, de calcular el propagador de Feynman por el método canónico. A partir de aquí, los cálculos que realicemos dependerán del problema particular que se desee estudiar.

Para ilustrar este método, calcularemos el propagador del oscilador armónico unidimensional. El Hamiltoniano correspondiente es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2, \quad (3.18)$$

donde w es la frecuencia del oscilador de masa m . Es bien sabido, de los textos básicos de Mecánica Cuántica (ver, p. ej. [3]), que las eigenfunciones $\psi_n(x)$ tienen la siguiente forma (ver la figura (3.3))

$$\psi_n(x) = \left(\frac{mw}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\chi) e^{-\chi^2/2}, \quad (3.19)$$

con $\chi = \sqrt{mw/\hbar} x$, mientras que las eigenenergías E_n son

$$E_n = \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.20)$$

Usando la representación espectral para el propagador, Ec.(3.17), sustituyendo las eigenfunciones Ec.(3.19), tenemos

$$\begin{aligned}
K(x, x'; \tau) &= -i\theta(\tau) \sum_n \left[\left(\frac{mw}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\chi) e^{-\chi^2/2} \left(\frac{mw}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\chi') e^{-\chi'^2/2} \right] e^{-iE_n \tau / \hbar} \\
&= -i\theta(\tau) \sqrt{\frac{mw}{\pi \hbar}} \sum_n H_n(\chi) H_n(\chi') \frac{e^{-\frac{1}{2}(\chi^2 + \chi'^2) - \frac{i}{\hbar} E_n \tau}}{2^n n!}. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

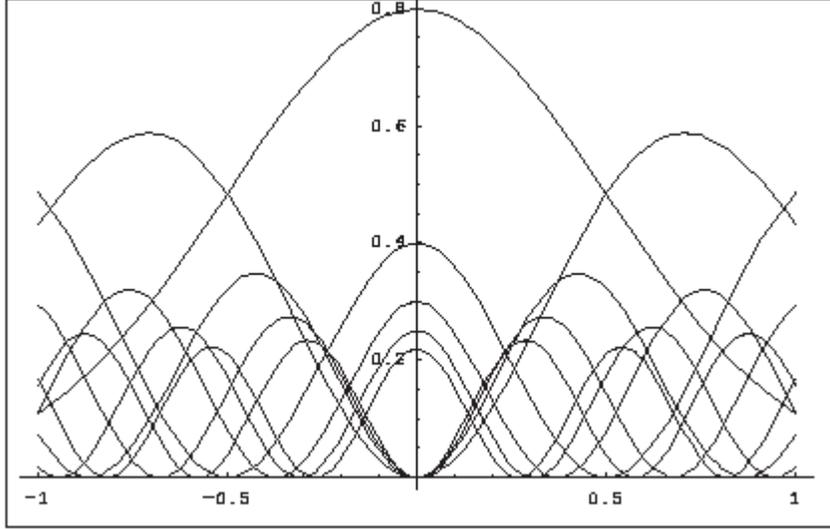


Figura 3.3: Las 8 primeras funciones de onda del oscilador armónico cuántico.

A continuación, obtendremos una forma más útil de este propagador (siguiendo la Ref. [6]), primero, usamos la fórmula de Mehler

$$(1-z)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1-z^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y) \frac{z^n}{2^n n!} \quad (3.22)$$

e identificamos $x = \chi$, $y = \chi'$, y $z = e^{-i\omega\tau}$. Así, obtenemos la siguiente forma del propagador

$$K(x, x'; \tau) = -i\theta(\tau) \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{z}{1-z^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \exp\left[\frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1-z^2}\right]. \quad (3.23)$$

Enseguida, nos auxiliamos de la identidad

$$\frac{1+z^2}{2(1-z^2)} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{1-z^2}, \quad (3.24)$$

para obtener

$$K(x, x'; \tau) = -i\theta(\tau) \sqrt{\frac{mw}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{z}{1-z^2}} \exp \left[\frac{1}{1-z^2} \left(2xyz - (x^2 + y^2) \left(\frac{1+z^2}{2} \right) \right) \right]. \quad (3.25)$$

Realizando las siguientes sustituciones trigonométricas,

$$\sin(w\tau) = \frac{1-z^2}{2iz}, \quad \cos(w\tau) = \frac{1+z^2}{2z}$$

obtenemos la forma familiar del propagador

$$K(x, x'; \tau) = -i\theta(\tau) \sqrt{\frac{mw}{2\pi i \hbar \sin(w\tau)}} \exp \left[\frac{mw}{2\hbar \sin(w\tau)} \left((x^2 + x'^2) \cos(w\tau) - 2xx' \right) \right], \quad (3.26)$$

donde en la última línea hemos identificado $y = x'$. En secciones posteriores, obtendremos esta forma del propagador del Oscilador Armónico mediante distintos métodos.

3.2.2. Integral de Caminos

La formulación de Integral de Caminos o de Trayectoria (Path Integral en inglés) de la Mecánica Cuántica fue desarrollada por Richard Feynman en la década de los 40's del siglo anterior [13]. Ésta es una descripción de la teoría cuántica que generaliza el principio de acción de la mecánica clásica. En la formulación de Integral de Caminos, la noción de una sola historia única para un sistema se reemplaza por la suma (integral funcional) sobre todas las posibles historias para calcular una amplitud cuántica.

Para calcular la amplitud de transición por medio del Método de la Integral de Caminos (ver [5],[7] y [14]), iniciaremos escribiendo

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle. \quad (3.27)$$

Para $t_f > t_i$, dividamos el intervalo de tiempo entre el tiempo inicial y final en N segmentos de longitud infinitesimal ϵ , esto es, tomemos

$$\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}. \quad (3.28)$$

Sólo por simplicidad, hemos discretizado el intervalo temporal (ver la figura

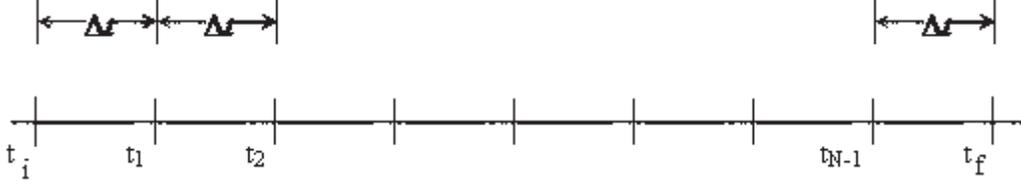


Figura 3.4: El intervalo de tiempo $t_f - t_i$ se ha dividido en N subintervalos de longitud Δt .

(3.4)), al final, tomaremos el límite continuo $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$. Ahora podemos etiquetar los tiempos intermedios como

$$t_n = t_i + n\epsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots, (N - 1). \quad (3.29)$$

Introduciendo un conjunto completo de eigenestados de la posición para cada punto temporal intermedio, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \\ &\quad \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Al escribir esto, claramente hemos asumido un ordenamiento temporal inherente de izquierda a derecha. Notemos aquí que mientras hay N productos internos, en la expresión anterior, sólo hay $N - 1$ puntos intermedios de integración. Además, cualquier producto interno intermedio en la expresión anterior tiene la forma

$$\begin{aligned} \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} t_n H} e^{\frac{i}{\hbar} t_{n-1} H} | x_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} (t_n - t_{n-1}) H} | x_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon H} | x_{n-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n)]}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aquí hemos usado la prescripción del punto medio del ordenamiento de Weyl.

Sustituyendo esta forma del producto interno dentro de la amplitud de tran-

sición, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \\ &\quad \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n \right) \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aquí, hemos definido $x_0 = x_i$ y $x_N = x_f$. Esta es la forma más burda de la Integral de Caminos de Feynman y está definida en el espacio fase del sistema. Es importante enfatizar en este momento, que el número de integraciones sobre las coordenadas intermedias difiere del número del de integraciones de momentos, que tiene profundas consecuencias en el estudio de las propiedades de simetría de las amplitudes de transición. Notemos que en el límite continuo, podemos escribir el factor de fase de la Ec.(3.32) como

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n \right) \right) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \left(p_n \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) - H \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n \right) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{x} - H(x, p)) \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L, \end{aligned} \quad (3.33)$$

es decir, es proporcional a la acción del sistema. Para obtener la forma más familiar de la integral de camino que involucra al Lagrangiano en el espacio de configuraciones, vamos a especializarnos a la clase de Hamiltonianos cuadráticos en las variables de momento [15]. Esto es, escojamos

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (3.34)$$

En tal caso, tenemos de la Ec.(3.32),

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \\ &\quad \exp \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[p_n \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) - \frac{p_n^2}{2m} - V \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Notemos que las integrales sobre los momentos son Gaussianas y, de esta forma, pueden ser resueltas de forma sencilla

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp -\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{p_n^2}{2m} - \frac{p_n(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right) \\
&= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp -\left\{ \frac{i\hbar}{2m\hbar} \left(p_n^2 - \frac{2mp_n(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right) \right\} \\
&= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp -\left\{ \frac{i\hbar}{2m\hbar} \left(p_n^2 - \frac{p_n(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} - \frac{m(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{i\epsilon}} \exp \frac{im\epsilon}{2\hbar} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}} \exp \frac{im\epsilon}{2\hbar} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec.(3.35), obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\epsilon, N \rightarrow 0, \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{N/2} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \\
&\quad \exp \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - V \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{\epsilon} \right) \right] \\
&= A \int D_x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \right\} \\
&= A \int D_x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

donde A es una constante independiente de la dinámica del sistema y $S[x]$ es la acción para el sistema. Esta es la representación como Integral de Caminos de Feynman para la amplitud de transición en la mecánica cuántica. Para entender el significado de esta amplitud, trataremos de entender el significado de la medida D_x . En la integración, los puntos finales están fijos y sólo los puntos intermedios se integran en el espacio entero. Cualquier configuración espacial de los puntos intermedios, por supuesto, da origen a un camino entre los puntos inicial y final. Ó sea, integrando sobre todas estas configuraciones (ésto es precisamente lo que hace la integración sobre todos los puntos intermedios) es equivalente a sumar sobre todos los caminos que conectan a los puntos inicial y final. De este modo, la Integral de Caminos de Feynman simplemente dicen que la amplitud de transición entre un estado inicial y final es la suma sobre todos los caminos que conectan los dos puntos. Ver la Figura(3.5), se presentó una ilustración geométrica de un posible

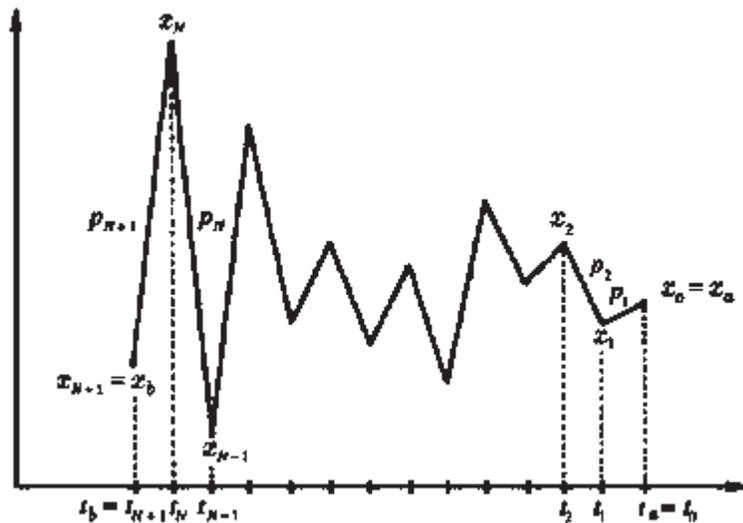


Figura 3.5: Representación de un posible camino, de todos los posibles, por el cual una partícula puntual explora para alcanzar el punto x_b en el tiempo t_b , empezando de x_a en t_a .

camino de la Integral de Caminos.

Sabemos del estudio de la mecánica cuántica, que si un proceso puede tomar lugar en muchas formas distintas, entonces la amplitud de transición es la suma de las amplitudes individuales correspondientes a cada manera posible en que el proceso puede ocurrir. La suma sobre los caminos es, de este modo, precisamente esperada, pero, el factor de peso $e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}$ que es muy crucial y inevitable, es un tanto sorprendente. Clásicamente conocemos que es la acción la que determina la dinámica. En la mecánica cuántica, todos los caminos contribuyen en la amplitud de transición y aunque hemos tratado Hamiltonianos de cierta clase, esta expresión trabaja bien para una forma general de H .

Como hemos visto, la amplitud de transición puede ser escrita como una suma sobre todos los caminos que conectan los puntos inicial y final de la trayectoria de una partícula durante su evolución temporal, y para el caso de un Hamiltoniano unidimensional cuadrático en los momentos, se representa como en la Ec.(3.37). Aunque podemos ser un poco más cuantitativos en

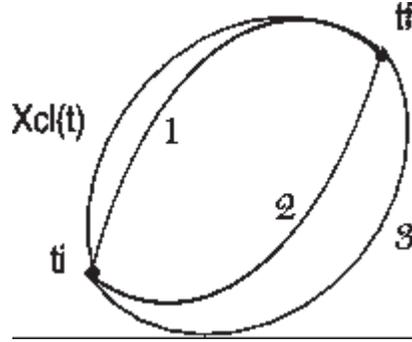


Figura 3.6: Representación de los diferentes caminos que conectan los puntos inicial y final, así como su trayectoria clásica.

la discusión sobre el comportamiento de la amplitud de transición, seremos cualitativos en lo siguiente: Notemos que para caminos donde

$$x_n \gg x_{n-1},$$

el primer término en la exponencial debe de ser muy grande, pues que ϵ es infinitesimalmente pequeño. De este modo, tales caminos deben de llevar a una gran fase y como consecuencia, el factor de peso puede ser fácilmente negativo o positivo. En otras palabras, para cada factor x_n tan grande, va haber un x_{n-1} cercano, difiriendo solamente de forma insignificante, el cual debe de tener un efecto de cancelación. Esto es, en la integral de camino, todas esas contribuciones promedian a cero. Concentrémonos en los caminos que conectan al punto inicial y final, (como se muestra en la figura(3.6)), que difieren uno de otro solamente de forma insignificante. La pregunta es ¿qué tanto todos los caminos pueden contribuir a la amplitud de transición?, ¿es solamente el camino clásico el único que surge en el límite $\hbar \rightarrow 0$? Notemos aquí que el factor de peso en la integral de camino, $e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}$, es una fase multiplicada por una cantidad grande cuando $\hbar \rightarrow 0$. Matemáticamente, es claro que la contribución dominante en la integral de camino surgirá de los caminos cercanos a los cuales se haga extremo al factor de fase. En otras palabras, sólo las trayectorias cercanas a las que satisfacen

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0 \quad (3.38)$$

contribuirán significativamente a la amplitud de transición en el límite clásico, pero del principio de mínima acción, sabemos que esas son precisamente las

trayectorias que siguen las partículas clásicas. Esto no quiere decir que la trayectoria clásica sea la que más contribuye a la amplitud de transición, sino que todas las trayectorias cercanas a ella se suman coherentemente en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

Para mostrar como funciona el método de la Integral de Caminos en el cálculo del propagador de Feynman en la Mecánica Cuántica, desarrollaremos nuevamente el ejemplo del Oscilador Armónico, del que ya conocemos su solución exactamente.

Consideremos a la interacción del oscilador con una fuente externa, descrita por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mw^2x^2 - Jx, \quad (3.39)$$

con la acción correspondiente dada por

$$S = \int dtL. \quad (3.40)$$

Aquí, podemos pensar que la fuente externa dependiente del tiempo, $J(t)$, puede ser, por ejemplo, un campo eléctrico si el oscilador estuviera cargado eléctricamente. Los resultados bien conocidos para el Oscilador Armónico simple pueden recuperarse en el límite $J(t) \rightarrow 0$. Además, si la fuente externa fuera independiente de tiempo, entonces el problema tiene solución simple y exacta, porque en este caso podemos escribir el Lagrangiano como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mw^2x^2 + Jx \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mw^2\left(x - \frac{J}{mw^2}\right)^2 + \frac{J^2}{2mw^2} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 - \frac{1}{2}mw^2\bar{x}^2 + \frac{J^2}{2mw^2}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde hemos definido

$$\bar{x} = x - \frac{J}{mw^2}. \quad (3.42)$$

En otras palabras, para una fuente que no varía en el tiempo, la posición de equilibrio clásica del oscilador, está desplazada por una cantidad constante. El sistema descrito por el Lagrangiano en la Ec.(3.39) es de considerable interés, porque podemos obtener resultados conocidos en varios límites.

La ecuación de Euler-Lagrange para la acción da origen a la trayectoria clásica (ver Apéndice),

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_{cl} + mw^2x_{cl} - J = 0. \quad (3.43)$$

Por otro lado, la forma general de la amplitud de transición es

$$\langle x, t | x', t' \rangle = A \int D_x e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}. \quad (3.44)$$

Para evaluar esta integral, notemos que la acción es cuadrática en la variable dinámica $x(t)$. Por lo tanto, definiendo

$$x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t), \quad (3.45)$$

podemos hacer una expansión de Taylor de la acción, alrededor de la trayectoria clásica de la forma

$$\begin{aligned} S[x] = S[x_{cl} + \eta] &= S[x_{cl}] + \int dt \eta(t) \left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=x_{cl}} \\ &+ \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x=x_{cl}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Recordemos que la trayectoria clásica es un extremo de la acción,

$$\left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=x_{cl}} = 0, \quad (3.47)$$

de modo que

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x=x_{cl}}. \quad (3.48)$$

Evaluando las derivadas funcionales, podemos reescribir la acción como

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2!} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - mw^2\eta^2). \quad (3.49)$$

La variable $\eta(t)$ representa las fluctuaciones cuánticas alrededor de la trayectoria clásica. Ya que los puntos inicial y final están fijos, estas fluctuaciones satisfacen las condiciones de frontera

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0. \quad (3.50)$$

Claro está que el sumar sobre todos los caminos es equivalente a sumar sobre todas las posibles fluctuaciones, sujetas a dichas condiciones de frontera. Consecuentemente, podemos escribir la amplitud de transición como

$$\langle x, t | x', t' \rangle = A e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int D_\eta \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - mw^2\eta^2) \right\} \quad (3.51)$$

Esta es una integral donde la exponencial es cuadrática en sus variables. Tal integral puede ser resuelta en varias formas. Nosotros lo haremos usando un método de matricial, siguiendo la referencia [14].

Primeramente, discretizamos el intervalo temporal. Parametricemos el tiempo sobre una trayectoria de la forma estándar

$$t_n = t_i + n\epsilon \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.52)$$

Correspondientemente, definimos los valores de las fluctuaciones en esos puntos como

$$\eta(t_n) = \eta_n. \quad (3.53)$$

De esta forma, podemos escribir la amplitud de transición, Ec.(3.51), de forma explícita

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= A e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int D_\eta \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - mw^2\eta^2) \right\} \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int d\eta_1, \dots, d\eta_{N-1} \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \left[m \left(\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - mw^2 \left(\frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En esta expresión identificamos $\eta_0 = \eta_N = 0$, en consistencia con las condiciones de frontera. Para simplificar la integral, reescalamos las variables de la forma

$$\eta_n \longrightarrow \left(\frac{m}{2\hbar\epsilon} \right)^{1/2} \eta_n \quad (3.55)$$

La amplitud de transición, entonces, se escribe como

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar\epsilon}{m} \right)^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int d\eta_1, \dots, d\eta_{N-1} \\ &\quad \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N \left[(\eta_n - \eta_{n-1})^2 - \epsilon w^2 \left(\frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Si pensamos en las η_n 's ($N-1$ de ellas) como si formaran un vector columna,

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

entonces, podemos escribir la amplitud de transición matricialmente como

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int d\eta e^{i\eta^T B \eta}. \quad (3.58)$$

Aquí, η^T representa la matriz (columna) transpuesta y la matriz B , de tamaño $(N-1) \times (N-1)$, toma la forma

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \frac{\epsilon^2 w^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Esta es una matriz simétrica, de textura

$$B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots \\ y & x & y & 0 & \dots \\ 0 & y & x & y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

donde

$$x = 2 \left(1 - \frac{\epsilon^2 w^2}{4} \right), \quad y = - \left(1 + \frac{\epsilon^2 w^2}{4} \right). \quad (3.61)$$

B es claramente Hermitiana (ambas x y y son reales), y por lo tanto, puede ser diagonalizada por una matriz unitaria (ortogonal) U , de la forma

$$B_D = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = U B U^\dagger \quad (3.62)$$

De este modo, definiendo

$$\zeta = U \eta, \quad (3.63)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int d\eta e^{i\eta^T B \eta} &= \int d\zeta e^{i\zeta^T B_D \zeta} \\
&= \int d\zeta_1 \dots d\zeta_{N-1} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{N-1} b_n \zeta_n^2 \right\} \\
&= \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{i\pi}{b_n} \right)^{1/2} \\
&= (i\pi)^{\frac{N-1}{2}} (\det B)^{-1/2} .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Aquí hemos usado el hecho que el Jacobiano del cambio de variables para una matriz unitaria es la unidad. Usando este resultado en la Ec.(3.58), podemos determinar la forma de la amplitud de transición (o propagador) para el Oscilador Armónico:

$$\begin{aligned}
\langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar\epsilon}{m} \right)^{\frac{N-1}{2}} (i\pi)^{\frac{N-1}{2}} (\det B)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \\
&= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{1/2} (\det B)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \\
&= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon \det B} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Es claro de este análisis, que la amplitud de transición está bien definida sólo si la matriz B no contiene algún eigenvalor nulo. Notemos que la cantidad que resta por calcular para evaluar la amplitud de transición es

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \epsilon \det B .$$

Por la estructura especial de B , ecuación (3.60), si denotamos a los determinantes de las sub-matrices $n \times n$ de B como I_n , es fácil ver que éstos satisfacen la siguiente relación de recursión

$$I_{n+1} = xI_n - y^2 I_{n-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.66}$$

donde se restringen

$$I_{n-1} = 0, \quad I_0 = 1 . \tag{3.67}$$

Sustituyendo la forma explícita de x y y , tenemos que

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= 2\left(1 - \frac{\epsilon^2 w^2}{4}\right)I_n - \left(1 + \frac{\epsilon^2 w^2}{4}\right)I_{n-1} \quad \text{ó,} \\ I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1} &= -\frac{\epsilon^2 w^2}{2}\left(I_n + I_{n-1} + \frac{\epsilon^2 w^2}{8}I_{n-1}\right) \quad \text{ó,} \\ \frac{I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}}{\epsilon^2} &= -\frac{w^2}{2}\left(I_n + I_{n-1} + \frac{\epsilon^2 w^2}{8}I_{n-1}\right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ya que estamos interesados en el límite continuo, es conveniente definir la función

$$\phi(t_n - t_1) = \phi(n\epsilon) = \epsilon I_n, \quad (3.69)$$

que en este límite podemos pensar como una función continua de t . En otras palabras, podemos identificar $t = n\epsilon$ como una variable continua cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Notemos que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \epsilon \det B = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \epsilon I_{N-1} = \phi(t_f - t_i) = \phi(T). \quad (3.70)$$

Además, tenemos que

$$\phi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon I_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0, \quad (3.71)$$

y similarmente,

$$\dot{\phi}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left(\frac{I_1 - I_0}{\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\epsilon^2 w^2}{2} - 1 \right) = 1. \quad (3.72)$$

Por lo tanto, de las relaciones de recursión para las I_n 's, podemos concluir que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la función $\phi(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = -w^2 \phi(t), \quad (3.73)$$

la cual se reconoce fácilmente como la ecuación del oscilador armónico cuya solución está sujeta a las condiciones iniciales establecidas en las Ecs. (3.71) y (3.72). Es claro que la solución a esta ecuación es

$$\phi(t) = \frac{\sin(wt)}{w}. \quad (3.74)$$

Ahora, se sigue que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \epsilon \det B = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \epsilon I_{N-1} = \phi(T) = \frac{\sin wT}{w}, \quad (3.75)$$

y en consecuencia, para el oscilador armónico, tenemos que la amplitud de transición es

$$\begin{aligned}\langle x, t | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon \det B} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \\ &= \left(\frac{mw}{2\pi i \hbar \sin(wT)} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} .\end{aligned}\quad (3.76)$$

Para el objetivo de esta tesis no es necesario la fuente externa, por lo que tomamos a $J(t) \rightarrow 0$, con esto podemos calcular la acción clásica del sistema, la cual está dada por,

$$S[x_{cl}] = \frac{mw}{2 \sin(wT)} [(x_i^2 + x_f^2) \cos(wT) - 2x_i x_f] \quad (3.77)$$

Sustituyendo esto en la Ec.(3.76) e identificando $x_f = x$ y $x_i = x'$, obtenemos el propagador

$$\begin{aligned}\langle x, t | x', t' \rangle &= \left(\frac{mw}{2\pi i \hbar \sin(wT)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{imw}{2\hbar \sin(wT)} \right. \\ &\quad \left. [(x^2 + x'^2) \cos(wT) - 2xx'] \right\}.\end{aligned}\quad (3.78)$$

Esta expresión coincide con el resultado obtenido mediante el Método Canónico, como era de esperarse. Resta sólo obtener el propagador con el Método de Schwinger, que se presenta a continuación.

3.2.3. Método de Schwinger

Este método fue desarrollado por Julian Schwinger, para tratar acciones efectivas en la electrodinámica cuántica y se basa en las soluciones de las ecuaciones de Heisenberg correspondientes [16]. Para ilustrar este método, recordemos que podemos escribir el propagador de Feynman para un sistema no relativista en la forma:

$$K(x, x'; \tau) = \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \Theta(\tau) \langle x | \hat{U}(\tau) | x' \rangle, \quad (3.79)$$

donde $\hat{U}(\tau)$ es el operador de evolución temporal dado por

$$\hat{U}(\tau) = \exp \left(\frac{-i\hat{H}\tau}{\hbar} \right), \quad (3.80)$$

con \hat{H} el Hamiltoniano (independiente del tiempo) del sistema y $\Theta(\tau)$ es la función escalón definida como

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{si } \tau < 0. \end{cases} \quad (3.81)$$

Observemos que para $\tau > 0$, al diferenciar la Ec. (3.79) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el propagador de Feynman:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} K(x, x'; \tau) = \langle x | \hat{H} \exp\left(\frac{-i\hat{H}\tau}{\hbar}\right) | x' \rangle. \quad (3.82)$$

Evolucionando temporalmente los estados, la ecuación diferencial anterior toma la siguiente forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \langle x, \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle, \quad (\tau > 0). \quad (3.83)$$

La idea principal del método es calcular los elementos de la matriz del lado derecho de esta ecuación. Para esto, necesitamos escribir a \hat{H} en términos de los operadores $\hat{X}(\tau)$ y $\hat{X}(0)$ ordenados apropiadamente. Estos operadores satisfacen

$$\begin{aligned} \hat{X}(\tau) | x, \tau \rangle &= x | x, \tau \rangle \\ \hat{X}(0) | x', 0 \rangle &= x' | x', 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.84)$$

y con ellos, podemos resumir el método de Schwinger en los siguientes pasos:

- I) Resolvemos las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, para los operadores $\hat{X}(\tau)$ y $\hat{P}(\tau)$, dados por:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{X}(\tau)}{\partial \tau} = [\hat{X}(\tau), \hat{H}], \quad i\hbar \frac{\partial \hat{P}(\tau)}{\partial \tau} = [\hat{P}(\tau), \hat{H}]. \quad (3.85)$$

- II) Usamos las soluciones encontradas en la Ec.(3.85), para reescribir el operador Halmitoniano \hat{H} en términos de $\hat{X}(\tau)$ y $\hat{X}(0)$, colocando los operadores $\hat{X}(\tau)$ a la izquierda y $\hat{X}(0)$ a la derecha. Para lograrlo necesitamos la ayuda del conmutador $[\hat{X}(0), \hat{X}(\tau)]$. Al operador Halmitoniano obtenido se le denotamos como operador Halmitoniano ordenado $\hat{H}_{ord}(\hat{X}(\tau), \hat{X}(0))$.

- III) Con el Halmitoniano ordenado, los elementos de matriz del lado derecho de la ecuación (3.83), pueden ser evaluados en forma directa:

$$\begin{aligned} \langle x, \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle &= \langle x, \tau | \hat{H}_{ord}(\hat{X}(\tau), \hat{X}(0)) | x', 0 \rangle \\ &\equiv F(x, x'; \tau) \langle x, \tau | x', 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde $F(x, x'; \tau)$ es una función ordinaria. Sustituyendo este resultado en Ec.(3.83) e integrando sobre τ , obtenemos:

$$\langle x, \tau | x', 0 \rangle = C(x, x') \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^{\tau} F(x, x'; \tau') d\tau'\right) \quad (3.87)$$

donde $C(x, x')$ es una constante arbitraria de integración, y no un operador.

- IV) El paso final es encontrar el valor de la constante $C(x, x')$. Para ello, imponemos las siguientes condiciones para determinar su dependencia en las coordenadas x y x' :

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x, \tau | x', 0 \rangle &= \langle x, \tau | \hat{P}(\tau) | x', 0 \rangle \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x, \tau | x', 0 \rangle &= \langle x, \tau | \hat{P}(0) | x', 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Después de usar estas condiciones, aún existe un factor multiplicativo para ser determinado en $C(x, x')$. Este puede ser encontrado imponiendo la condición inicial del propagador:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} K(x, x'; \tau) = \delta(x - x'). \quad (3.89)$$

Ahora podemos aplicar este método en un gran número de interesantes problemas. De nuevo, utilizaremos este método para obtener el propagador de Feynman para el Oscilador Armónico, siguiendo la referencia [6].

Recordemos que el Halmitoniano correspondiente es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{mw^2}{2} \hat{X}^2. \quad (3.90)$$

Obviamente, es independiente del tiempo, $\hat{H}(\tau) \equiv \hat{H}(0)$. Resolvemos primeramente las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para $\hat{X}(\tau)$ y $\hat{P}(\tau)$,

$$i\hbar \frac{d}{d\tau} \hat{X}(\tau) = [\hat{X}(\tau), \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{P}(\tau), \quad (3.91)$$

$$i\hbar \frac{d}{d\tau} \hat{P}(\tau) = [\hat{P}(\tau), \hat{H}] = \frac{-i\hbar m w^2}{2} \hat{X}(\tau). \quad (3.92)$$

Las soluciones se obtienen de forma inmediata:

$$\begin{aligned} \hat{X}(\tau) &= \hat{X}(0) \cos(w\tau) + \frac{\hat{P}(0)}{mw} \sin(w\tau), \\ \hat{P}(\tau) &= -m w \hat{X}(0) \sin(w\tau) + \hat{P}(0) \cos(w\tau). \end{aligned} \quad (3.93)$$

De la primera de estas ecuaciones, podemos escribir a $\hat{P}(0)$ en términos de los operadores $\hat{X}(\tau)$ y $\hat{X}(0)$ de la forma

$$\hat{P}(0) = \frac{m w}{\sin(w\tau)} [\hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \cos(w\tau)]. \quad (3.94)$$

Ahora, con esta expresión para el operador de momento, el Hamiltoniano (3.90) se escribe como

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{mw^2}{2\sin^2(w\tau)} \left[\hat{X}^2(\tau) + \hat{X}^2(0) \cos(w\tau) - \hat{X}(0)\hat{X}(\tau) \cos(w\tau) - \right. \\ & \left. \hat{X}(\tau)\hat{X}(0) \cos(w\tau) \right] + \frac{1}{2}mw^2\hat{X}^2(0) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Notemos que el tercer término de la ecuación anterior no está escrito en el orden apropiado. Para ordenarlo, usamos el conmutador

$$\begin{aligned} [\hat{X}(0), \hat{X}(\tau)] &= [\hat{X}(0), \hat{X}(0) \cos(w\tau) + \frac{\hat{P}(0)}{mw} \sin(w\tau)] \\ &= \frac{i\hbar}{mw} \sin(w\tau). \end{aligned} \quad (3.96)$$

De aquí se sigue que

$$\hat{X}(0)\hat{X}(\tau) = \hat{X}(\tau)\hat{X}(0) + \frac{i\hbar}{mw} \sin(w\tau), \quad (3.97)$$

y, por lo tanto, nuestro Hamiltoniano ordenado toma la forma

$$\hat{H}_{ord} = \frac{mw^2}{2\sin^2(w\tau)} \left[\hat{X}^2(\tau) + \hat{X}^2(0) - 2\hat{X}(\tau)\hat{X}(0) \cos(w\tau) \right] - \frac{i\hbar w}{2}. \quad (3.98)$$

Una vez que el Hamiltoniano está apropiadamente ordenado, podemos encontrar la función $F(x, x'; \tau)$ directamente de su definición, Ec.(3.86):

$$\begin{aligned} F(x, x'; \tau) &= \frac{mw^2}{2} \left[(x^2 + x'^2) \csc^2(w\tau) - \right. \\ & \left. 2xx' \cot(w\tau) \csc(w\tau) \right] - \frac{i\hbar w}{2} \cot(w\tau). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Usando la Ec.(3.87), podemos expresar el propagador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle x, \tau | x', 0 \rangle &= C(x, x') \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau d\tau' F(x, x'; \tau') \right\} \\ &= \frac{C(x, x')}{\sqrt{\sin(w\tau)}} \exp \left\{ \frac{w m}{2\hbar \sin(w\tau)} \left((x^2 + x'^2) \cos(w\tau) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2x x' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde $C(x, x')$ es una constante arbitraria de integración. El último paso es el cálculo de esta constante. Para encontrar su dependencia sobre x y x' ,

imponemos las condiciones descritas en las Ecs.(3.88). De este modo, reescribimos los operadores $\hat{P}(0)$ y $\hat{P}(\tau)$ en términos de los operadores $\hat{X}(0)$ y $\hat{X}(\tau)$, con el orden apropiado. Para $\hat{P}(0)$, ya se ha hecho; Ec.(3.94), mientras que para $\hat{P}(\tau)$ tenemos

$$\hat{P}(\tau) = mw \cot(w\tau)[\hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \cos(w\tau)] - mw\hat{X}(0) \sin(w\tau). \quad (3.101)$$

Insertando esta expresión conjuntamente con la forma del propagador, Ec.(3.100), en la primera de las condiciones en la (Eq.3.88), obtenemos la dependencia de la constante con respecto a x :

$$\frac{\partial C(x, x')}{\partial x} = 0, \quad (3.102)$$

es decir, $C(x, x')$ no depende de esta coordenada. Análogamente, insertando las Ecs.(3.100) y (3.94), en la segunda condición de la Ec.(3.88), tenemos que $\partial C(x, x')/\partial x' = 0$. Estas dos relaciones nos dicen que $C(x, x') = C$, esto es, es una constante independiente de x y x' . Finalmente para determinar el valor de C , usamos la condición inicial dada en la Ec.(3.89). Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle x, \tau | x', 0 \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{C}{\sqrt{w\tau}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}(x - x')^2\right] \\ &= C \sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{mw}} \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (3.103)$$

de forma que $C = \sqrt{mw/2\pi i\hbar}$. De este modo, la expresión final para el propagador de Feynman para el Oscilador Armónico es

$$\langle x, \tau | x', 0 \rangle = \sqrt{\frac{mw}{2\pi i\hbar \sin(w\tau)}} \exp \left\{ \frac{imw}{2\hbar \sin(w\tau)} [(x^2 + x'^2) \cos(w\tau) - 2xx'] \right\}, \quad (3.104)$$

que coincide con los resultados obtenidos anteriormente por el método canónico y la Integral de Camino.

Habiendo presentado los diferentes métodos para obtener el propagador de Feynman en la mecánica cuántica, en capítulos posteriores obtendremos dicho propagador para el problema de una partícula cargada no relativista en presencia de un campo magnético uniforme de fondo.

Capítulo 4

Método Canónico

En este capítulo vamos a calcular el propagador de Feynman para una partícula cargada no relativista inmersa en un campo magnético uniforme usando el Método Canónico. Discutiremos, primeramente, la relevancia física de este problema y concluiremos el capítulo con el cálculo explícito del propagador correspondiente.

4.1. Partícula Cargada en un Campo Magnético Uniforme

Los campos magnéticos se encuentran en todo el universo, desde escalas subatómicas, hasta escalas cosmológicas. A grandes escalas, los campos magnéticos se detectan mediante el llamado efecto Faraday, mientras que sus efectos sobre la materia como en el caso de la superconductividad o el efecto Hall cuántico son bien conocidos. Por esta razón, el estudio de la dinámica de las partículas cargadas en presencia de un campo magnético uniforme es de suma importancia.

Clásicamente, el movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo magnético externo deja de ser el de una partícula libre[2]. Por la presencia del campo, se pierde la isotropía del espacio, lo que se traduce en que el movimiento a lo largo de la dirección del campo es diferente al de la dirección transversa. Recordemos que para cualquier campo electromagnético, el movimiento de una partícula con carga puntual q , está descrito por la fuerza de *Lorentz*.

$$\dot{\mathbf{P}} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)), \quad (4.1)$$

donde los vectores \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{P} , \mathbf{E} y \mathbf{B} son, respectivamente, el vector de posición, velocidad y momento lineal de la partícula, y los campos eléctrico y magnético y el punto denota, la derivada con respecto al tiempo. Si consideramos el caso no relativista, en presencia de un campo uniforme únicamente, es decir, sin el campo eléctrico ($\mathbf{E} = 0$), y tomamos el campo magnético de la siguiente forma

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.2)$$

encontramos directamente que las componentes escalares de la fuerza de Lorentz son

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= eB_0 v_y, \\ m\dot{v}_y &= -eB_0 v_x, \\ m\dot{v}_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De lo anterior, podemos ver fácilmente que no hay fuerza en la dirección del campo magnético [1], como lo habíamos anticipado. Si analizamos ahora estas ecuaciones, al tomar la segunda derivada temporal obtenemos las siguientes expresiones

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_x = 0, \quad \ddot{v}_y + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_y = 0. \quad (4.4)$$

Elegimos ahora las condiciones iniciales de tal forma que la solución a este sistema de ecuaciones se pueda escribir como

$$v_x(t) = v \sin\left(\frac{eB_0}{m}t\right), \quad v_y(t) = v \cos\left(\frac{eB_0}{m}t\right). \quad (4.5)$$

Integrando estas expresiones, podemos ver fácilmente que las coordenadas que describen el movimiento de la partícula son

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{vm}{eB_0} \cos\left(\frac{eB_0}{m}t\right) + x_0 \\ y(t) &= +\frac{vm}{eB_0} \sin\left(\frac{eB_0}{m}t\right) + y_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Estas ecuaciones paramétricas describen un círculo con centro en (x_0, y_0) y radio $r = vm/eB_0$, el cual sólo necesita de condiciones iniciales para ser determinado, como se muestra en la Figura(4.1). A la cantidad $w_c \equiv eB_0/m$ se le llama frecuencia del ciclotrón, y a r se le llama radio de Larmor ó de giro. Podemos ver entonces que todas las partículas (no relativistas), con el mismo coeficiente e/m tienen la misma frecuencia ciclotrónica w_c y que a distintas energías, la partícula tiene radios de Larmor r distintos.

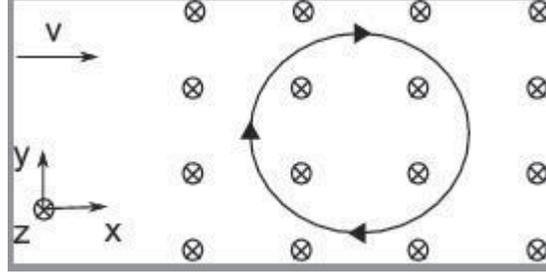


Figura 4.1: Representación del movimiento de una partícula en un campo magnético uniforme, a lo largo del eje z , originando que la partícula tenga un movimiento circular.

Para el caso cuántico, necesitamos escribir el Hamiltoniano que describa la dinámica anterior. Recordemos ahora que para cualquier campo electromagnético, es posible definir una función escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ y una función vectorial $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}, t)$ [17], tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{\Lambda}(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (4.7)$$

donde ϕ es un potencial escalar y $\mathbf{\Lambda}$ es un potencial vectorial.

En términos de estos potenciales, el Lagrangiano del cual se obtiene la Fuerza de Lorentz es [3]

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Lambda} . \quad (4.8)$$

Para obtener el Hamiltoniano, notemos que el momento canónico es ahora

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{\Lambda}, \quad (4.9)$$

que ya no es simplemente el momento cinético $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{x}}$, sino que ahora aparece un nuevo término que incluye los efectos del campo electromagnético externo. Finalmente, el Hamiltoniano para la partícula cargada es

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\mathbf{\Lambda})^2 + q\phi \quad (4.10)$$

Esta forma del Hamiltoniano se debe al principio de mínima acción, para la mecánica clásica, todos los posibles caminos que unen dos puntos, consistentes con la conservación de la energía, el sistema se mueve a lo largo de un camino en particular, para el cual, el tiempo de transición es el mínimo.

4.2. Propagador

Para calcular el propagador de Feynman, comenzamos con el operador Hamiltoniano para una partícula cargada inmersa en un campo magnético

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{P}} - q\hat{\mathbf{A}})^2, \quad (4.11)$$

donde $\hat{\mathbf{A}}$ es el vector potencial y $q = -e$. Tomando al campo magnético de la forma $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$, el Hamiltoniano puede escribirse de la forma [16],

$$\hat{H} = \frac{\hat{\pi}_1^2 + \hat{\pi}_2^2}{2m} + \frac{\hat{P}_z^2}{2m} = \hat{H}_\perp + \frac{\hat{P}_z^2}{2m}, \quad (4.12)$$

con $\hat{\pi} = \hat{\mathbf{P}} + e\hat{\mathbf{A}}$ el momento canónico, puesto que el movimiento a lo largo de \mathbf{k} es libre, el propagador completo puede escribirse como un propagador 1-D libre en esta dirección veces otro 2-D correspondiente a la modificación inducida por el campo externo, es decir, $K(r, r'; \tau) = K_\perp(x, x'; \tau)K_z(z, z'; \tau)$. Para el propagador $K_z(z, z'; \tau)$, correspondiente a la partícula libre, tenemos (Ec.(3.10))

$$K_z(z, z'; \tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar} \frac{(z - z')^2}{\tau}\right\}. \quad (4.13)$$

A continuación emplearemos el método canónico para calcular $K_\perp(x, x'; \tau)$. Para ello, hacemos uso de la representación espectral del propagador, Ec. (3.17), la cual nos requiere conocer las funciones de onda y eigenenergías para la partícula cargada en presencia de un campo magnético. Por simplicidad, en el Hamiltoniano \hat{H}_\perp , escribimos el potencial vectorial $\hat{\mathbf{A}}$ asociado al campo magnético \mathbf{B} en la norma de Landau, de la forma $\hat{\mathbf{A}} = \hat{x}B_0\mathbf{j}$. Con esto, obtenemos

$$\hat{H}_\perp = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(\hat{p}_y + eB_0\hat{x})^2}{2m}. \quad (4.14)$$

Observemos que el operador \hat{y} no aparece en \hat{H}_\perp , y como sabemos que los conmutadores $[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_x] = 0$, tenemos que

$$[\hat{H}_\perp, \hat{p}_y] = 0. \quad (4.15)$$

Con esto, tenemos que \hat{p}_y es un buen número cuántico [3]. Si definimos $k = p_y/\hbar$, las eigenfunciones para el problema deben satisfacer de forma simultánea

$$\hat{p}_y\psi(x, y) = \hbar k\psi(x, y), \quad \hat{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (4.16)$$

Ya que en la base de coordenadas el operador p_y está dado por $-i\hbar\partial/\partial y$, de la primera relación, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) = ik\psi \quad \Rightarrow \quad \psi(x, y) = e^{iky}\phi(x). \quad (4.17)$$

La segunda ecuación de eigenvalores es simplemente la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y sus soluciones determinan el espectro de energía. Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(x, t) &= \left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + e B_0 \hat{x})^2 \right] \frac{e^{iky}\phi(x)}{2m} \\ &= e^{iky} \left[\hat{p}_x^2 + (\hbar k + e B_0 \hat{x})^2 \right] \frac{\phi(x)}{2m} \\ &= e^{iky} \left[\frac{m w_c^2}{2} (\hat{x} + x_0)^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \right] \phi(x) \\ &= E e^{iky} \phi(x), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $w_c = eB_0/m$ y $x_0 = \hbar k/eB_0$. Con esto, después de reemplazar \hat{p}_x por $-i\hbar\partial/\partial x$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m w_c^2}{2} (x - x_0)^2 \right) \phi(x) = E \phi(x). \quad (4.19)$$

Esta expresión es idéntica a la ecuación de Schrödinger para un Oscilador Armónico Simple unidimensional, con un frecuencia w_c , excepto que tenemos un término $(x - x_0)^2$ en lugar de uno x^2 , con $x_0 = \frac{\hbar k}{eB_0}$. Por simplicidad tomemos $\bar{x} = x - x_0$, sin que haya pérdida de generalidad. Esto simplemente significa que el centro de las oscilaciones se encuentra en $x = x_0$. Vemos pues que nuestro problema bidimensional en esta norma es idéntico al de una partícula libre en una dimensión y un oscilador armónico desplazado en la otra. Más importante aún, en el último caso, los niveles de energía, llamados también niveles de Landau, los cuales se representan en la Figura(4.2), están dados por

$$E_n = \hbar w_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Notemos también, que los niveles de energía no dependen de k , el momento en la dirección y . Cada valor de n puede tener, aparentemente, cualquier valor de k y esto es los niveles de energía están altamente degenerados. Este hecho será relevante para la discusión del efecto Hall cuántico en capítulos posteriores.

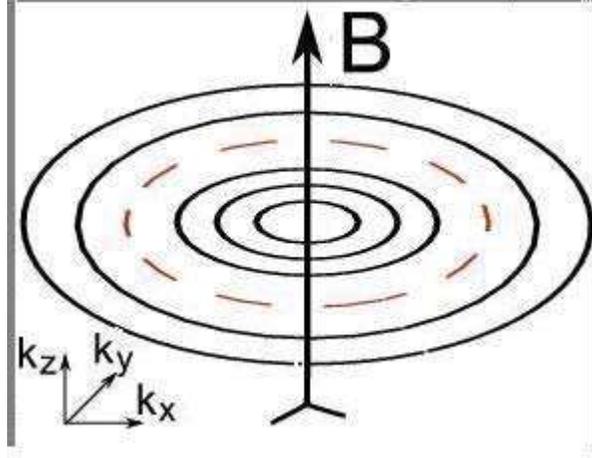


Figura 4.2: Representación de los Niveles de Landau.

La solución explícita a la ecuación de Schrödinger es de la forma

$$\phi_n(\bar{x}) = \left(\frac{eB_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\Phi) e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}, \quad (4.21)$$

donde $\Phi = \sqrt{eB_0/2\hbar}(\bar{x})$. Sustituyendo esta forma de las funciones de onda y eigenenergías en la representación espectral para el propagador Ec.(3.17), obtenemos

$$\begin{aligned} K(\bar{x}, \bar{x}'; \tau)_\perp &= \sum_n \psi_n(\bar{x}, \tau) \psi_n^*(\bar{x}', 0) e^{-iE_n \tau / \hbar} \\ &= \sum_n \left[\left(\frac{eB_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\Phi) e^{-\frac{1}{2}\Phi^2} \left(\frac{eB_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/4} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\Phi') e^{-\frac{1}{2}\Phi'^2} \right] e^{-iE_n \tau / \hbar} \\ &= \left(\frac{eB_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \sum_n H_n(\Phi) H_n(\Phi') \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Phi^2 + \Phi'^2) - iE_n \tau / \hbar}}{2^n n!} \end{aligned} \quad (4.22)$$

la cual corresponde al propagador perpendicular. Nuevamente, usando la fórmula de Mehler [6],

$$(1 - z)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1 - z^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{z^n}{2^n n!} \quad (4.23)$$

e identificamos a las variables de la siguiente forma $x = \Phi$, $y = \Phi'$, y $z = e^{-iE_n\tau/\hbar}$, obtenemos la siguiente forma del propagador.

$$K(\bar{x}, \bar{x}'; \tau) = \sqrt{\frac{mw_c}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] z^{1/2} (1 - z^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1 - z^2}\right] \quad (4.24)$$

Enseguida se ordenarán los diferentes términos del propagador, para esto nos auxiliaremos de la siguiente identidad.

$$\frac{1 + z^2}{2(1 - z^2)} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{1 - z^2} \quad (4.25)$$

Obteniendo:

$$K(\bar{x}, \bar{x}'; \tau) = \sqrt{\frac{mw_c}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{z}{1 - z^2}} \exp\left[\frac{1}{1 - z^2} (2xyz - (x^2 + y^2) \left(\frac{1 + z^2}{2}\right))\right] \quad (4.26)$$

Realizando las siguientes sustituciones trigonométricas,

$$\sin(w_c\tau) = \frac{1 - z^2}{2iz}, \quad \cos(w_c\tau) = \frac{1 + z^2}{2z}$$

obtenemos la representación del propagador en la forma deseada.

$$K(\bar{x}, \bar{x}'; \tau) = \sqrt{\frac{eB_0}{4\pi i\hbar \sin(w_c\tau)}} \exp\left[\frac{ieB_0}{4\hbar \sin(w_c\tau)} \left((\bar{x}^2 + \bar{x}'^2) \cos(w_c\tau) - 2\bar{x}\bar{x}'\right)\right] \quad (4.27)$$

Donde podemos identificar $eB_0 = 2m w_c$, donde w_c es la frecuencia del ciclotrón. Para obtener el propagador completo sólo hay que multiplicar los resultados obtenidos de la parte libre y de la parte dependiente del campo, el cual tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned} K(r, r'; \tau) &= K_z(z, z'; \tau) K_{\perp}(\bar{x}, \bar{x}'; \tau) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar} \frac{(z - z')^2}{\tau}\right\} \sqrt{\frac{m w_c}{2\pi i\hbar \sin(w_c\tau)}} \\ &\quad \exp\left[\frac{im w_c}{2\hbar \sin(w_c\tau)} \left((\bar{x}^2 + \bar{x}'^2) \cos(w_c\tau) - 2\bar{x}\bar{x}'\right)\right] \quad (4.28) \end{aligned}$$

Donde $\bar{x} = x - x_0$. Esta es la forma del propagador de Feynman para una partícula no relativista cargada inmersa en un campo magnético uniforme en la norma de Landau obtenida por el Método Canónico. En Capítulos posteriores obtendremos la expresión correspondiente mediante el método de la Integral de Camino y el de Schwinger y al final compararemos las ventajas y desventajas de cada formalismo.

Capítulo 5

Método de Integral de Caminos

Estamos ahora listos para estudiar la dinámica de una partícula cargada en un campo magnético uniforme mediante el formalismo de Integral de Camino [14]. Este es el tema central del presente capítulo. Comenzaremos discutiendo la acción clásica para este sistema y concluiremos con el cálculo explícito del propagador Feynman en la versión cuantizada del mismo.

5.1. La Acción Clásica

Recordemos que clásicamente, la interacción magnética de una partícula de carga q está dada por

$$\Lambda_{mag} = q \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}(t)), \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$ es el potencial vector asociado al campo magnético. La acción total del sistema es entonces

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(t) + q \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}(t)) \right]. \quad (5.2)$$

Suponemos, al igual que antes, que la partícula se mueve en un campo magnético homogéneo $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$. Tal campo se describe, por ejemplo, a través el potencial vector en la norma de Landau $\mathbf{\Lambda} = x B_0 \mathbf{j}$, como se representa en la figura (5.1), pero hay otras posibilidades [17]. El campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{\Lambda} \quad (5.3)$$

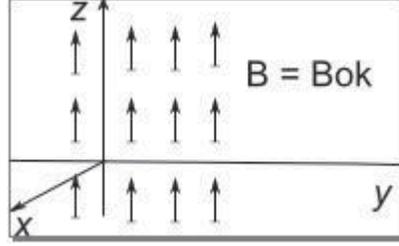


Figura 5.1: Campo magnético orientado en la dirección z , obsérvese que no hay influencia en la misma dirección z . Este campo puede ser representado por un vector potencial A dado en varias normas.

es invariante bajo una transformación de norma

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad (5.4)$$

donde Λ es una función arbitraria de \mathbf{x} , que satisface la condición de integración de Schwarz

$$(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \mathbf{A} = 0. \quad (5.5)$$

Por ejemplo, el vector potencial axialmente simétrico,

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} \quad (5.6)$$

describe al mismo campo magnético, y es diferente al potencial vector en la norma de Landau por una transformación de norma a través de la función

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} B_0 xy \quad (5.7)$$

En la forma canónica [5], para una partícula de carga $q = -e$, la acción se escribe

$$S[\mathbf{P}, \mathbf{x}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left\{ \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2m} [\mathbf{P} + e \mathbf{A}(\mathbf{x})]^2 \right\}. \quad (5.8)$$

La interacción magnética de una carga puntual, de este modo, se incluye en la integral de caminos por la llamada sustitución mínima de la variable de momento:

$$\mathbf{P} \rightarrow \pi = \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (5.9)$$

tal como hicimos en el capítulo anterior. Con esta forma de la acción calcularemos, a continuación, el propagador de Feynman mediante el método de Integral de Caminos.

5.2. Propagador

Trabajando en la norma de Landau, la amplitud para que una partícula cargada inmersa en un campo magnético [7] constante vaya de x' a x en un intervalo de tiempo $\tau = t' - t$ está dada por

$$\langle x, t|x', t' \rangle = N \int D\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\mathbf{P}, \mathbf{x}] \right\}, \quad (5.10)$$

con la siguiente acción propiamente discretizada

$$\begin{aligned} S[\mathbf{P}, \mathbf{x}] &= \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{P}_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) - \epsilon H \left(\frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}}{2}, \mathbf{P}_n \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{P}_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) - \frac{\epsilon}{2m} (P_{x_n}^2 + (P_{y_n} + eB_0x_n)^2 + P_{z_n}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Notemos que la amplitud de evolución temporal no es invariante de norma; si usamos el potencial vector en alguna otra norma

$$\mathbf{\Lambda}'(\mathbf{x}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (5.12)$$

la acción cambia por un término de superficie

$$\Delta \mathbf{\Lambda} = e \int_{t'}^t d\mathbf{x} \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}) = e [\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}')], \quad (5.13)$$

y la amplitud, entonces, se multiplica por un factor de fase en cada extremo

$$\langle x, t|x', t' \rangle_{\mathbf{\Lambda}} \rightarrow \langle x, t|x', t' \rangle_{\mathbf{\Lambda}'} = e^{ie\mathbf{A}(x)/\hbar} \langle x, t|x', t' \rangle_{\mathbf{\Lambda}} e^{-ie\mathbf{A}(x')/\hbar}. \quad (5.14)$$

Para observables como la distribución de partículas $\langle x, t|x', t' \rangle$, el factor de fase es obviamente irrelevante, pero todas las otras observables físicas del sistema también deben de ser independientes de la fase $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, la cual es cierto si dichas observables corresponden a operadores invariantes de norma.

Ya que la acción S contiene las variables y_n y z_n , sólo en los primeros términos de $\sum_{n=1}^N P_n x_n$, podemos realizar las integraciones de y_n, z_n y encontrar el producto de N funciones δ (la función delta se representa en la Figura 5.2), en las componentes y y z del momento \mathbf{P}_n . Si denotamos por p' a la proyección de \mathbf{P} al plano yz , el producto resultante es

$$(2\pi\hbar)^2 \delta^2(p'_N - p'_{N-1}) \dots (2\pi\hbar)^2 \delta^2(p'_2 - p'_1) \quad (5.15)$$

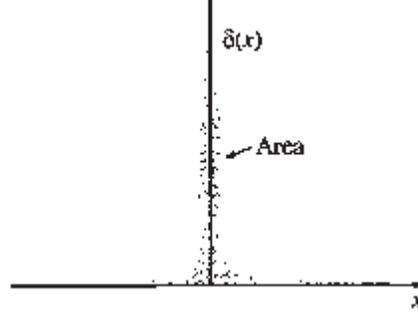


Figura 5.2: Función Delta de Dirac en 1D, su principal propiedad $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$, nos permite realizar las N integraciones correspondientes al momento.

Estos permitirá realizar todas las integrales P_{y_n}, P_{z_n} . Excepto para una general P_y, P_z , la integral de caminos se reduce a

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_y dP_z}{(2\pi\hbar)^2} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\int \frac{dP_{x_n}}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_x^{(N-1)} \right\} \right. \\ \left. \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[P_y(y - y') + P_z(z - z') - (t - t') \frac{P_z^2}{2m} \right] \right\} \right], \quad (5.16)$$

donde $S_x^{(N-1)}[\mathbf{P}, \mathbf{x}]$ es la acción que involucra, solamente, a una integral de caminos de una dimensión sobre la componente x del camino, $\mathbf{x}(t)$:

$$S_x^{(N-1)}[\mathbf{P}, \mathbf{x}] = \sum_{n=1}^N \left[P_{x_n}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) - \frac{P_{x_n}^2}{2m} - \frac{1}{2m}(P_y + eB_0x_n)^2 \right]. \quad (5.17)$$

Esta es la acción para el oscilador armónico unidimensional desplazado, con una frecuencia de ciclotrón $w_c = eB_0/(m)$ y cuyo centro de las oscilaciones se localiza en $x_0 = p_y/(mw_c)$. La integral de camino sobre $x(t)$ es armónica (Ver P. Ejem. 3.78) y conocida, por lo que

$$\langle x, t | x', t' \rangle_{x_0} = \sqrt{\frac{mw_c}{2\pi i \hbar \sin(w_c(t - t'))}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{mw_c}{2 \sin(w_c(t - t'))} \right. \\ \left. \left\{ [(x - x_0)^2 + (x' - x_0)^2] \cos(w_c(t - t')) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(x - x_0)(x' - x_0) \right\} \right]. \quad (5.18)$$

Realizando la integral de P_z en la Ec.(5.16), llegamos a

$$\langle x, t|x', t' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar(t-t')/m}} e^{i\frac{m}{2\hbar} \frac{(z-z')^2}{(t-t')}} \langle x^\perp, t|x'^\perp, t' \rangle, \quad (5.19)$$

con la amplitud ortogonal a el campo magnético dada por

$$\langle x^\perp, t|x'^\perp, t' \rangle \equiv \frac{mw_c}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{imw_c x_0(y-y')/\hbar} \langle x, t|x', t' \rangle_{x_0}. \quad (5.20)$$

Después de completar los cuadrados en x_0 , en el exponente total en la Ec. (5.20), este toma la forma

$$\begin{aligned} & \frac{imw_c}{\hbar} x_0(y-y') + \frac{imw_c}{2\hbar \sin w_c(t-t')} \left[((x-x_0)^2 + (x'-x_0)^2) \right. \\ & \quad \left. \cos w_c(t-t') - 2(x-x_0)(x'-x_0) \right] = \\ & \frac{imw_c}{2\hbar} \left[-(x^2 + x'^2) \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) + \frac{(x-x')^2}{\sin w_c(t-t')} \right] \\ & \quad - \frac{w_c m}{\hbar} \left(x_0^2 \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) \right) \\ & \quad + \frac{w_c m}{\hbar} x_0 \left\{ (x+x') \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) + (y-y') \right\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para poder realizar la integral de x_0 , usamos la siguiente fórmula para integrales Gaussianas

$$\int dx e^{-ax^2+bx} = \int dx e^{a(x-\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}}, \quad (5.22)$$

de donde obtenemos que el argumento de la exponencial es

$$\begin{aligned} & \frac{w_c m}{2\hbar} \left[-(x^2 + x'^2) \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) + \frac{(x-x')^2}{\sin w_c(t-t')} \right] \\ & + i \frac{mw_c}{\hbar} \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) \left(x_0 - \frac{x-x'}{2} - \frac{y-y'}{2 \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right)} \right)^2 \\ & + i \frac{mw_c}{2\hbar} \left[\frac{(x+x')^2}{2} \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) + \frac{(y-y')^2}{2 \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right)} \right] \\ & + \frac{imw_c}{2\hbar} (x+x')(y-y') \end{aligned} \quad (5.23)$$

Al realizar la integración $mw_c \int_{-\infty}^{\infty} dx_0/2\pi\hbar$, se remueve el segundo término y resulta en un factor

$$\sqrt{\frac{i\pi\hbar}{m w_c \tan\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right)}} \quad (5.24)$$

Ordenando los términos restantes, obtenemos la amplitud

$$\langle x, t|x', t' \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}}^3 \frac{w_c(t-t')/2}{\sin\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right)} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_{cl} + S_{sf})\right], \quad (5.25)$$

con la acción

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(z-z')^2}{t-t'} + \frac{w_c}{2} \cot\left(\frac{w_c(t-t')}{2}\right) \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right] + w_c(x'y - xy') \right\} \quad (5.26)$$

y un término de superficie

$$S_{sf} = \frac{mw_c}{2}(xy - x'y') = \frac{e}{2} B_0 xy \Big|_a^b. \quad (5.27)$$

Ya que la acción es armónica, otra vez la amplitud es un producto de una fase $e^{i\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}$ y un factor de fluctuación. Es interesante ver como la amplitud garantiza invarianza de traslación de todas las observables físicas. El primer término en la acción clásica es trivialmente invariante, mientras que el último término se escribe

$$\Delta S = \frac{mw_c}{2}(x'y - xy'). \quad (5.28)$$

Bajo una traslación $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{d}$, este término cambia por

$$\frac{mw_c}{2}[d_x(y-y') + d_y(x'-x)] = \frac{mw_c}{2}[(\mathbf{d} \times \mathbf{x})_b - (\mathbf{d} \times \mathbf{x})_a]_z, \quad (5.29)$$

causando en la amplitud un cambio puramente de transformación de norma como

$$\langle x, t|x', t' \rangle \rightarrow e^{ie\mathbf{A}(x)/\hbar} \langle x, t|x', t' \rangle e^{-ie\mathbf{A}(x)/\hbar}, \quad (5.30)$$

con la fase

$$\mathbf{A}(x) = -\frac{mw_c\hbar}{2e}[\mathbf{d} \times \mathbf{x}]_z. \quad (5.31)$$

Como las observables involucran solamente cantidades invariantes de norma, tales transformaciones son irrelevantes. Ya que hemos hecho este análisis,

solo falta escribir el propagador de Feynman obtenido en todo su esplendor, el cual es.

$$\begin{aligned} \langle x, \tau | x', 0 \rangle = & \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \frac{w_c \tau / 2}{\sin(\frac{w_c \tau}{2})} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \left\{ \frac{(z - z')^2}{\tau} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{w_c}{2} \cot\left(\frac{w_c \tau}{2}\right) [(x - x')^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (y - y')^2] + w_c (x - x')(y - y') \right\} \right], \quad (5.32) \end{aligned}$$

donde hemos tomado $\tau = t - t'$ y usado las imágenes de Schrödinger y Heisenberg respectivamente. Con esto concluimos el estudio del propagador de Feynman para la partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme mediante el método de la Integral de Camino. Resta solamente estudiar este problema a la luz del método de Schwinger, lo cual realizaremos en el capítulo siguiente.

Capítulo 6

Método de Schwinger

Ya hemos visto el calculo del propagador por dos métodos, el Canónico [7] y el de Integrales de caminos [5], para la partícula cargada en un campo magnético uniforme. Ahora vamos a revisar el último Método estudiado en esta tesis, el Método de Schwinger [16] y aplicado al problema de Landau nuevamente, permitiéndonos así compararlo con los otros métodos.

6.1. Propagador

Consideraremos el propagador de una partícula no-relativista, con carga eléctrica e y masa m , en un campo uniforme y constante magnético \mathbf{B} . Como no hay campo eléctrico, el Hamiltoniano [1] toma la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{\pi^2}{2m}, \quad (6.1)$$

donde \mathbf{P} es el operador Canónico de momento, \mathbf{A} es el vector potencial $\pi = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ es el operador mecánico de momento. Por simplicidad trabajamos en la *norma de Landau*, es decir, tomamos al campo magnético como $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$. De esta forma el Hamiltoniano puede ser descompuesto como

$$\mathbf{H} = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}_3^2}{2m} = \mathbf{H}_\perp + \frac{\mathbf{P}_3^2}{2m}. \quad (6.2)$$

Como el movimiento a lo largo del eje \hat{k} es libre, el propagador 3-dimensional $K(r, r'; \tau)$ puede ser escrito como el producto de un propagador 2-dimensional, $K_\perp(x, x'; \tau)$, con relación al campo magnético y un propagador libre unidimensional $K_z(z, z'; \tau)$; donde $x = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j}$ y $K_z(z, z'; \tau)$ es el bien conocido

propagador de la partícula libre Ecuación (3.10).

$$K_z(z, \tau; z', 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(z - z')^2}{\tau}\right). \quad (6.3)$$

Para usar el método de Schwinger [16], al calcular el propagador 2-dimensional $K_{\perp}(x, x'; \tau) = \langle x, \tau | x', 0 \rangle$, comenzaremos escribiendo la ecuación diferencial

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \langle x, \tau | \mathbf{H}_{\perp}(X_{\perp}(0), \pi_{\perp}(0)) | x', 0 \rangle, \quad (6.4)$$

donde $X_{\perp}(\tau) = X_1(\tau)\hat{i} + X_2(\tau)\hat{j}$ y $\pi_{\perp}(\tau) = \pi_1(\tau)\hat{i} + \pi_2(\tau)\hat{j}$. En la Ec. (6.4) $\langle x, \tau |$ y $|x', 0\rangle$ son los eigenvalores de los operadores de posición $X(\tau) = X_1(\tau)\hat{i} + X_2(\tau)\hat{j}$ y $X(0) = X_1(0)\hat{i} + X_2(0)\hat{j}$ respectivamente. Más específicamente, los operadores $X_1(0), X_1(\tau), X_2(0)$ y $X_2(\tau)$ tienen los eigenvalores x'_1, x_1, x'_2, x_2 respectivamente. Para resolver las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, para los operadores X_{\perp} y π_{\perp} , necesitamos los conmutadores [3]:

$$\begin{aligned} [X_i(\tau), \pi_j^2(\tau)] &= 2i\hbar\pi_j(\tau), \\ [\pi_i(\tau), \pi_j^2(\tau)] &= 2i\hbar e B_0 \epsilon_{ij3} \pi_j(\tau). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aquí ϵ_{ij3} es el símbolo usual de Levi-Civita. Introduciendo la siguiente notación matricial

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} X_1(\tau) \\ X_2(\tau) \end{pmatrix} ; \quad \Pi(\tau) = \begin{pmatrix} \pi_1(\tau) \\ \pi_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

y usando los conmutadores previos, las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, Ec.(3.85), pueden ser llevadas a la forma

$$\frac{\partial X(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\Pi(\tau)}{m}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \Pi(\tau)}{\partial \tau} = 2w_c \mathbb{C} \Pi(\tau), \quad (6.8)$$

donde $2w_c = eB_0/m$ es la frecuencia del ciclotrón y definimos la matriz anti-diagonal

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Integrando la Ec. (6.8) obtenemos

$$\Pi(\tau) = e^{2w_c \mathbb{C} \tau} \Pi(0). \quad (6.10)$$

Sustituyendo ésta solución en la Ec. (6.7) e integrando una vez más, tenemos que

$$X(\tau) - X(0) = \frac{\sin(w_c\tau)}{mw_c} e^{w_c\mathbb{C}\tau} \Pi(0), \quad (6.11)$$

donde usamos las siguientes propiedades de la matriz transpuesta ([18] y [19]) $\mathbb{C}: \mathbb{C}^2 = -\mathbb{1}; \mathbb{C}^{-1} = -\mathbb{C} = \mathbb{C}^T, e^{\alpha\mathbb{C}} = \cos(\alpha)\mathbb{1} + \sin(\alpha)\mathbb{C}$ con \mathbb{C}^T siendo el transpuesto de \mathbb{C} . Con los resultados obtenidos, al combinarlos obtenemos a $\Pi(0)$ en términos de los operadores deseados, es decir,

$$\Pi(0) = \frac{mw_c}{\sin(w_c\tau)} e^{-w_c\mathbb{C}\tau} \left(X(\tau) - X(0) \right). \quad (6.12)$$

Para expresar $\mathbf{H}_\perp = (\pi_1^2 + \pi_2^2)/2m$ en términos de $X(\tau)$ y $X(0)$, usamos la expresión anterior. En notación matricial el Hamiltoniano se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2m} \Pi^T(0) \Pi(0) \\ &= \frac{mw_c^2}{2\sin^2(w_c\tau)} \left(X^T(\tau)X(\tau) + X^T(0)X(0) - \right. \\ &\quad \left. - X^T(\tau)X(0) - X^T(0)X(\tau) \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

El último término, del lado derecho de la ecuación anterior, no está ordenado apropiadamente. Para obtener el orden apropiado, debemos usar el siguiente conmutador

$$X^T(0)X(\tau) = X^T(\tau)X(0) + \sum_{i=1}^2 [X_i(0), X_i(\tau)]. \quad (6.14)$$

Usando la Ec.(6.11), el conmutado usual $[X_i(0), \pi_j(\tau)] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}$ y las propiedades de la matriz \mathbb{C} , es fácil mostrar que

$$\sum_{i=1}^2 [X_i(0), X_i(\tau)] = \frac{2i\hbar \sin(w_c\tau) \cos(w_c\tau)}{mw_c}. \quad (6.15)$$

De está forma, el Halmitoniano \mathbf{H}_\perp , con el apropiado orden temporal toma la forma

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{mw_c^2}{2\sin^2(w_c\tau)} \left\{ X^2(\tau) + X^2(0) - 2X^T(\tau)X(0) \right\} - i\hbar w_c \cot(w_c\tau). \quad (6.16)$$

Sustituyendo este Hamiltoniano en la Ec. (6.4) e integrando en τ , obtenemos

$$\langle x, \tau | x', 0 \rangle = \frac{C(x, x')}{\sin(w_c \tau)} \exp \left\{ \frac{imw_c}{2\hbar} \cot(w_c \tau) (x - x')^2 \right\}, \quad (6.17)$$

donde $C(x, x')$ es una constante de integración, que puede ser determinada con las condiciones, que se muestran en el último paso de la explicación del método de Schwinger [6], y que en este caso implica

$$\langle x, \tau | \pi_j(\tau) | x', 0 \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - e\Lambda_j(x) \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle \quad (6.18)$$

$$\langle x, \tau | \pi_j(0) | x', 0 \rangle = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} - e\Lambda_j(x') \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle \quad (6.19)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \delta^{(2)}(x - x'). \quad (6.20)$$

Para calcular los elementos de la matriz del lado derecho de la Ec.(6.18), necesitamos expresar $\Pi(\tau)$ en términos de $X(\tau)$ y $X(0)$. De las Ecs.(6.10) y (6.12), tenemos

$$\Pi(\tau) = \frac{mw_c}{\sin(w_c \tau)} e^{w_c \tau \mathbb{C}} \left(X(\tau) - X(0) \right), \quad (6.21)$$

la cual nos lleva

$$\langle x, \tau | \pi_j(\tau) | x', 0 \rangle = mw_c [\cot(w_c \tau) (x_j - x'_j) + \epsilon_{jk3} (x_k - x'_k)] \langle x, \tau | x', 0 \rangle. \quad (6.22)$$

Aquí hemos usado las propiedades de la matriz \mathbb{C} y la convención de Einstein para índices repetidos en la suma. Análogamente el lado derecho de la Ec.(6.19) puede ser calculada de la Ec.(6.12), donde

$$\langle x, \tau | \pi_j(0) | x', 0 \rangle = mw_c [\cot(w_c \tau) (x_j - x'_j) - \epsilon_{jk3} (x_k - x'_k)] \langle x, \tau | x', 0 \rangle. \quad (6.23)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en Ecs.(6.18) y (6.19), respectivamente, y usando la Ec.(6.17), tenemos

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} + e\Lambda_j(x) + 1/2e\mathbf{F}_{jk}(x_k - x'_k) \right] C(x, x') = 0, \quad (6.24)$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_j} - e\Lambda_j(x') + 1/2e\mathbf{F}_{jk}(x_k - x'_k) \right] C(x, x') = 0, \quad (6.25)$$

donde hemos definido [2], $\mathbf{F}_{jk} = \epsilon_{jk3} B_0$. Para resolver el sistema anterior de ecuaciones diferenciales, hacemos lo siguiente: En la primera ecuación,

(6.24), asumimos las variables x' como constantes. Entonces, imponemos que la solución obtenida de esta forma es una solución de la Ec.(6.25). Con este objetivo en mente, multiplicamos ambos lados de la Ec.(6.24) por dx_j y sumamos sobre j , para obtener

$$\frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x_j} dx_j \right) = \frac{ie}{\hbar} \left[\mathbf{\Lambda}_j(x) + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{jk}(x_k - x'_k) \right] dx_j. \quad (6.26)$$

Integrando, obtenemos

$$C(x, x') = C(x', x') \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{\Gamma} [\mathbf{\Lambda}(\xi) + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{jk}(\xi_k - x'_k)] d\xi_j \right\}, \quad (6.27)$$

donde la integral de línea, se asume que es a lo largo de una curva Γ que va a ser especificada más adelante. En esta integral de línea no hay dependencia de la curva Γ que une a x' y x .

Para determinar la ecuación diferencial para $C(x', x')$, debemos de sustituir la Ec.(6.27) en la Ec.(6.19). Haciendo esto y usando con cuidado el teorema fundamental del cálculo, es fácil mostrar que

$$\frac{\partial C}{\partial x'_j}(x', x') = 0, \quad (6.28)$$

lo cual quiere decir que $C(x, x')$ es una constante C_0 , independiente de x' . Notemos que

$$[B_0 \times (\xi - x')]_j = -\mathbf{F}_{jk}(\xi_k - x'_k). \quad (6.29)$$

La Ec.(6.27) puede escribirse como

$$C(x, x') = C_0 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{\Gamma} [\mathbf{\Lambda}(\xi) - \frac{1}{2} B_0 \times (\xi - x')] \cdot d\xi = 0 \right\}. \quad (6.30)$$

Observemos ahora que la integral en la anterior ecuación tiene un rotacional que se anula,

$$\nabla_{\xi} \times \left[\mathbf{\Lambda}(\xi) - \frac{1}{2} B_0 \times (\xi - x') \right] B_0 - B_0 = 0, \quad (6.31)$$

lo cual quiere decir que la integral de línea, el propagador final, es independiente del camino. Escogiendo, convenientemente, la línea recta desde x' hasta x , se puede mostrar que

$$\int_{\Gamma_{sl}} [B_0 \times (\xi - x')] \cdot d\xi = 0, \quad (6.32)$$

donde Γ_{sl} quiere decir una línea recta de x' a x . Con esta simplificación, la $C(x, x')$ toma la forma

$$C(x, x') = C_0 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{\Gamma_{sl}} \mathbf{\Lambda}(\xi) \cdot d\xi \right\}. \quad (6.33)$$

Sustituyendo la última expresión en la Ec.(6.17) y usando la condición inicial Ec.(6.20), obtenemos $C_0 = mw_c/2\pi i\hbar$. De esta forma, el propagador de Feynman para una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético constante y uniforme toma la forma

$$K(r, r' : \tau) = \frac{mw_c}{2\pi i\hbar \sin(w_c\tau)} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{x'}^x \mathbf{\Lambda}(\xi) \cdot d\xi \right\} \\ \exp \left\{ \frac{imw_c}{2\hbar} \cot(w_c\tau)(x - x')^2 \right\} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(z - z')^2}{\tau} \right\}. \quad (6.34)$$

En la expresión anterior, se ha omitido el símbolo Γ_{sl} , pero esta implícito en la integral de línea que debe de ser hecha a lo largo de una línea recta, además de traer el propagador de la partícula libre a lo largo de la dirección \hat{k} .

6.2. Invarianza de Norma y el Método de Schwinger

Una vez que hemos obtenido el propagador, es importante hacer unos comentarios de los resultados obtenidos con anterioridad, y así tener una mejor perspectiva de las diferentes cualidades que se han manejado.

Primeramente, debemos de remarcar el hecho de lo que ocurre con la integral de línea, la cual aparece en la exponencial al lado derecho de la Ec.(6.34), llamada fase de Schwinger, la cual tiene la forma,

$$\int_{r'}^r \mathbf{\Lambda}(\xi) \cdot d\xi.$$

Esta integral debe de ser evaluada, necesariamente, a lo largo de una línea recta (como se representa en la Figura (6.1)) entre los puntos r y r' . Si por alguna razón queremos escoger algún otro camino, en vez de evaluar la integral anterior [16], debemos de evaluar la siguiente integral,

$$\int_{r'}^r \left[\mathbf{\Lambda}(\xi) - \frac{1}{2} B_0 \times (\xi - x') \right] \cdot d\xi.$$



Figura 6.1: Posibles trayectorias Γ de r a r' , que podrían usarse para evaluar la integral, en la fase de Schwinger.

Ya que resolvimos las ecuaciones de Heisenberg para los operadores invariantes de norma X_{\perp} y π_{\perp} , nuestro resultado final fue escrito en una norma genérica. Notemos aquí que las partes que son independientes de la norma y las que son explícitamente dependientes en el propagador, están claramente separadas. La elección de la norma corresponde en escoger una particular expresión de $\mathbf{\Lambda}(\xi)$. Además, de la Ec.(6.34), obtenemos de forma inmediata, la ley de transformación [17] para el propagador, bajo una transformación de norma $\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda} + \nabla A$,

$$K(r, r'; \tau) \mapsto e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \mathbf{\Lambda}(r)} K(r, r'; \tau) e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \mathbf{\Lambda}(r)}. \quad (6.35)$$

A pesar que esta ley de transformación ¹ la obtuvimos en un caso muy particular, es válida también en una forma muy general. Finalmente hemos concluido con el cálculo del propagador por el último método estudiado en esta tesis. Enseguida lo usaremos para una aplicación física, Efecto Hall Cuántico.

¹Esta es la forma dictada por las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin para el propagador del electrón

Capítulo 7

Aplicaciones.

A continuación, presentaremos una aplicación física donde interviene el propagador de Feynman. Primeramente veremos cómo obtener la función de partición de la Mecánica Estadística a partir del propagador, y la usaremos para obtener el factor de llenado en el efecto Hall Cuántico, una de las manifestaciones macroscópicas de la Mecánica Cuántica.

7.1. Función de Partición

A continuación haremos uso de las eigenfunciones y los eigenvalores de energía para un Hamiltoniano dado, y así obtener de la función de partición del propagador de Feynman. E ilustraremos ésto en el caso del oscilador armónico [14].

Comenzamos calculando los eigenestados y los eigenvalores de energía, para lograr esto necesitamos escribir el propagador en su *representación espectral*,

$$K(x, x'; \tau) = \Theta(\tau) \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x') e^{-i\mathbf{E}_n \tau / \hbar} \quad (\tau > 0). \quad (7.1)$$

Para el oscilador armónico,

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega_c}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega_c}{\pi \hbar} x^2\right) \mathbf{H}_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}} x\right), \quad (7.2)$$

$$\mathbf{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c, \quad (7.3)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle x, t | x', 0 \rangle &= \sqrt{\frac{mw_c}{\pi\hbar}} \exp \left[-\frac{mw_c}{2\hbar} (x^2 + x'^2) \right] \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_n \left(\sqrt{\frac{w_c m}{\hbar}} x \right) \mathbf{H}_n \left(\sqrt{\frac{w_c m}{\hbar}} x' \right) \frac{e^{-iw_c \tau (n+1/2)}}{2^n n!}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ahora calcularemos la función de partición,

$$\mathbf{Z}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{\mathbf{H}}}. \quad (7.5)$$

La operación de la Traza puede ser tomada sobre una base discreta, las mismas eigenfunciones del Hamiltoniano [7], ó más convenientemente, sobre el continuo paquete de eigenestados del operador de posición (denotado por $|x''\rangle$):

$$\mathbf{Z}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x'' | e^{-\beta \hat{\mathbf{H}}} | x'' \rangle. \quad (7.6)$$

Así, identificando la integral con el propagador de Feynman ¹ con los puntos finales $x'' = x' = x$ y $\beta = i\hbar\tau$ como el intervalo imaginario de tiempo, es decir

$$\langle x | e^{-\beta \hat{\mathbf{H}}} | x \rangle = \langle x, -i\hbar\beta | x, 0 \rangle. \quad (7.7)$$

De esta forma, el propagador del oscilador armónico, Ec.(3.104), toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle x, -i\hbar\beta | x, 0 \rangle &= \sqrt{\frac{mw_c}{2\pi\hbar \sinh(w_c\beta\hbar)}} \\ &\exp \left[-\frac{mw_c}{\hbar \sinh(w_c\beta\hbar)} (\cosh(w_c\beta\hbar) - 1)x^2 \right], \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde hemos usado las identidades $\sin(-i\alpha) = -i \sinh(\alpha)$ y $\cos(i\alpha) = \cosh(\alpha)$. sustituyéndola en nuestra función de partición y evaluando la integral Gaussiana obtenida, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\beta) &= \sqrt{\frac{mw_c}{2\pi\hbar \sinh(w_c\beta\hbar)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{mw_c x^2}{\hbar} \tanh \left(\frac{w_c\beta\hbar}{2} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2 \sinh(1/2 w_c\beta\hbar)}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

¹Notemos que el operador $e^{\beta H}$ se puede identificar con un operador de evolución temporal con $\beta = i\hbar\tau$

donde se usaron las identidades $\cosh(\alpha) - 1 = 2 \sinh^2(\alpha/2)$ y $\sinh(\alpha) = 2 \sinh(\alpha/2) \cosh(\alpha/2)$. La ecuación anterior es la función de partición para el oscilador armónico unidimensional. Lo mismo puede hacerse en el caso del propagador, para el caso de Landau.

Es interesante mostrar como el espectro de energía (Niveles de Landau), con su correspondiente degeneración por unidad de área, puede ser obtenida del propagador Ec. 6.34. Con este propósito usamos la función de partición [14], obtenida del propagador tomando $\tau = -i\hbar\beta$, con $\beta = 1/K_B T$, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\beta) &= \text{Tr} [K(x, x'; -i\hbar\beta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, x'; -i\hbar\beta) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{m w_c}{2\pi\hbar \sinh(\hbar\beta w_c)}, \quad (7.11)$$

donde usamos $\sin(-i\theta) = -i \sinh(\theta)$. Obsérvese que el resultado es divergente, porque el área del plano de los ejes x y y es infinito, esto es consecuencia de la degeneración infinita de los niveles de Landau. Para proceder asumimos que el área es tan grande como queramos, pero finita. Con esto, podemos escribir,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &\approx \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-L/2}^{L/2} dx_2 K(r, -i\hbar\beta; x', 0) \\ &\approx \frac{L^2 m w_c}{2\pi\hbar \sinh(\hbar\beta w_c)} \\ &= \frac{L^2 e B_0}{4\pi\hbar} \frac{e^{-1/2\hbar\beta w_c}}{(1 - e^{\hbar\beta w_c})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^2 e B_0}{4\pi\hbar} e^{-\beta(n+1/2)\hbar w_c}, \end{aligned}$$

donde $w_c = e B_0/2m$ la frecuencia del ciclotrón. Comparando este resultado con la función de partición, con niveles de energía \mathbf{E}_n y degeneración \mathbf{g}_n , dado por

$$\mathbf{Z}(\beta) = \sum_n \mathbf{g}_n e^{-\beta \mathbf{E}_n}, \quad (7.12)$$

Podemos identificar los niveles de energía y su correspondiente degeneración

por unidad de área,

$$\mathbf{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar w_c; \quad \frac{g_n}{A} = \frac{e B_0}{4\pi\hbar} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.13)$$

Enseguida veremos cómo hacer la conexión de este resultado con el Efecto Hall Cuántico.

7.2. El Efecto Hall Cuántico

El Efecto Hall, descubierto en 1879, ocurre cuando una corriente eléctrica, con densidad de corriente j_x asociada a un campo eléctrico E_x y con portadores de carga con velocidad promedio \vec{v} , es sometida a un campo magnético perpendicular $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ como se muestra en la figura (7.1). Esto provoca que los portadores experimenten una fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.14)$$

donde q es su carga. Si despreciamos el campo eléctrico, estas ecuaciones junto con la segunda ley de Newton nos dan las soluciones

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v m}{q B_0} \cos\left(\frac{q B_0}{m} t\right) + x_0 \\ y(t) &= \frac{v m}{q B_0} \sin\left(\frac{q B_0}{m} t\right) + y_0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Así que tenemos partículas moviéndose en círculos, donde el radio $r = v m / q B_0$ y la frecuencia de Larmor $w_c = q B_0 / m$. Si tomamos en cuenta el campo eléctrico, éste acelera las partículas en una dirección, así que en lugar de tener círculos, tenemos espirales desplazándose en la dirección del campo eléctrico. Si se considera el material por el cual está pasando la corriente, observamos que los portadores son desviados hacia su borde por la fuerza $v_x B_{0,z}$ en la dirección y , ocurriendo una acumulación de cargas. Cuando el sistema llega a un estado estacionario, el campo eléctrico formado equilibrará la fuerza producido por el campo magnético, por lo que el campo formado es $E = v_x B_0$. Considerando la densidad de corriente $J = -nqv = I/A$, donde n densidad de portadores, I la corriente, A el área transversal, entonces podemos escribir a este campo como

$$E_H = \frac{V_H}{w} = \frac{-I B_0}{q n A} \quad (7.16)$$

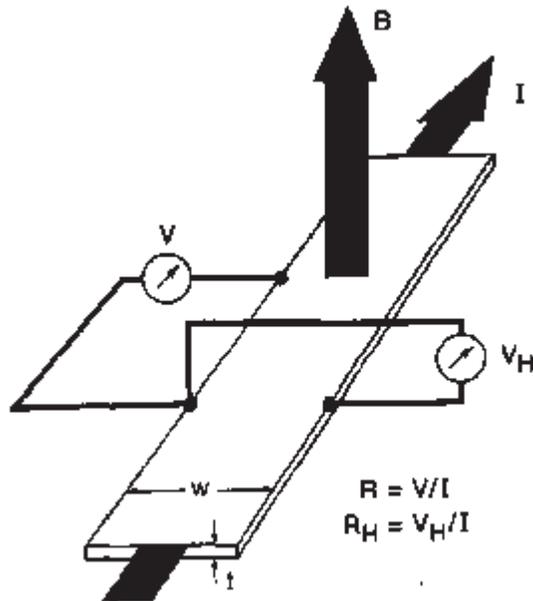


Figura 7.1: Diagrama esquemático de la configuración de un pequeño voltaje V , a lo largo de un conductor, y el voltaje Hall V_H transverso a la corriente I , en al presencia de un campo magnético B . La resistencia R y la resistencia Hall R_H , están determinados por I , V y V_H como se indica.

Donde w y d son medidas de la muestra Figura (7.1). V_H se llama voltaje Hall, y es el voltaje que produce este campo. La conductancia asociada a este voltaje, llamada conductancia Hall, está dada por:

$$\sigma_H \equiv \sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_y} = \frac{ne}{B_0}, \quad (7.17)$$

donde σ_{xy} es la componente xy del tensor de conductividad. En la década de los 70's, debido al progreso de la ciencia de materiales, nuevos semi-conductores fueron desarrollados, en los cuales se pueden formar capas con interfases en las que podemos tener un gas de electrones bidimensional. En 1980, utilizando estos materiales, Von Klitzing, Dorda y Pepper descubrieron que al aumentar la intensidad del campo magnético y bajar la temperatura del sistema, la conductividad de Hall exhibe mesetas como función del número de electrones participando en el efecto [20]. Éste efecto es conocido

como el *efecto Hall Cuántico*, el cual es uno de los más notables y sorprendentes descubrimientos que ha ocurrido en la física. El tensor de conductividad se vuelve antisimétrico, con valor cero para sus componentes diagonales $Y \pm \nu e^2/h$ en las componentes fuera de la diagonal,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \nu - e^2/h \\ \nu e^2/h & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

donde ν es un pequeño entero, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, llamado factor de llenado. Además se presentan mesetas en la resistencia Hall en valores $R_H = h/\nu e^2$,

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & h/\nu e^2 \\ -h/\nu e^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

lo que ocurre a temperaturas bajo los 4K. Las mesetas se vuelven más anchas y planas entre menor sea la temperatura y la resistencia longitudinal cae a valores cercanos a cero. La Figura (7.2) muestra una gráfica típica de la variación de la resistencia Hall y la resistencia longitudinal con el campo magnético. En las zonas donde se forman las mesetas en la resistencia Hall, la resistencia longitudinal cae a cero. En estos puntos, los elementos en la diagonal del tensor de conductividad son nulos, por lo que el sistema no exhibe disipación, y los elementos fuera de la diagonal están dados en términos de constantes fundamentales y tienen magnitud cuantizada. Hay dos ingredientes fundamentales para el entendimiento del efecto Hall Cuántico, el primero es el llamado cuantización de Landau de los estados inducido por el campo magnético en el movimiento libre 2D de los electrones. Esta cuantización magnética produce los huecos cruciales en el espectro de energía, el cual veremos más adelante. El segundo ingrediente es la localización, el cual no veremos en este análisis.

Consideremos ahora electrones, sin interacción entre ellos, en un campo magnético uniforme, Confinados en el plano xy y pongamos al campo magnético \mathbf{B} paralelo al eje z . El Hamiltoniano para este sistema, está dado por

$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{P} + e\mathbf{\Lambda})^2}{2m}, \quad (7.20)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es el vector potencial asociado al campo magnético \mathbf{B} , y usando la norma $\mathbf{\Lambda} = B_0 \hat{z}$. Observemos que éste problema fue estudiado en el capítulo 4. Recordemos que en éste caso, el propagador de Feynman ya fue calculado

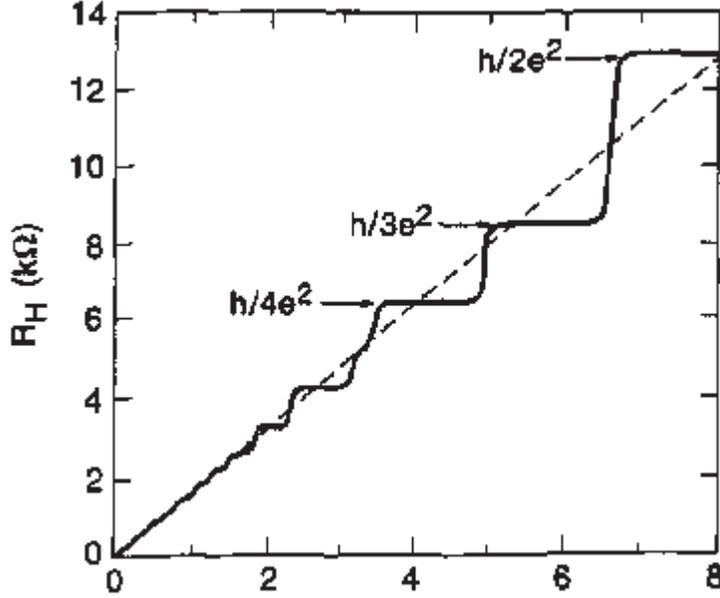


Figura 7.2: La resistencia de Hall de un típico gas de electrones en 2D vs. el campo Magnético a temperatura $T = 50mk$; la línea punteada el es resultado Clásico.

con los métodos desarrollados en esta tesis, el cual es

$$\langle z, \tau | z', 0 \rangle = \sqrt{\frac{m w_c}{2\pi i \hbar \sin(w_c \tau)}} \exp \left\{ \frac{i m w_c}{2 \hbar \sin(w_c \tau)} [(z^2 + z'^2) \cos(w_c \tau) - 2z z'] \right\}. \quad (7.21)$$

Ya que tenemos el propagador, usamos la representación espectral del propagador de Feynman, que esta dado por,

$$K(x, \tau; x', 0) = \Theta \sum_n \Phi_n(x) \Phi_n^*(x') e^{-i E_n \tau / \hbar} \quad (\tau > 0). \quad (7.22)$$

Los pasos para pasar del propagador a su representación espectral ya se han realizado anteriormente y obtuvimos,

$$\langle z, \tau | z', 0 \rangle = \sqrt{\frac{m w_c}{\pi \hbar}} \exp \left[-\frac{m w_c}{2 \hbar} (z^2 + z'^2) \right] \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\sqrt{\frac{m w_c}{\hbar}} z \right) H_n \left(\sqrt{\frac{m w_c}{\hbar}} z' \right) \frac{e^{-i \tau (n+1/2) w_c \hbar}}{2^n n!}, \quad (7.23)$$

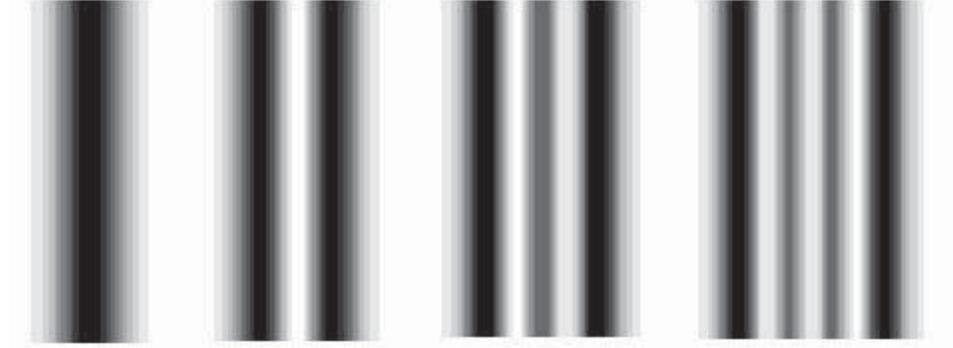


Figura 7.3: Densidad de probabilidad $|\langle r|\psi_\nu\rangle|^2$ en el plano xy , para las orbitas de Landau $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Con este resultado podemos realizar una comparación directa con la representación espectral y observar, que la energía para el Oscilador Armónico, está dado por,

$$\mathbf{E}_n = \hbar w_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.24)$$

con $w_c = eB_0/m$. Los niveles de energía permitidos para el movimiento libre de electrones en 2D en un campo magnético son idénticos a un oscilador armónico simple ficticio en 1D. Notemos también, que los niveles de energía no dependen de k , el momento en la dirección y . Cada valor de n puede tener, aparentemente, cualquier valor de k , esto, es los niveles de energía están altamente degenerados.

Como ya se ha resuelto anteriormente, la dependencia de y para todos los estados en los niveles de Landau Figura (7.3), son de la forma e^{iky} , y como su probabilidad es $|\psi|^2$ no hay variaciones en la dirección y . Decimos que el estado esta extendido en esta dirección.

Todavía permanece un aspecto de los niveles de Landau por mencionar; su degeneración. Recordemos que para cualquier índice de Landau n , hay un número total M de estados en el área de la muestra (ver por Ejem. Fig.(7.1)), esto determina la degeneración por unidad de área, en el nivel más bajo de energía,

$$N_0 = \frac{eB_0}{\hbar}, \quad (7.25)$$

donde su independencia de cualquier parámetro del material (como la masas del electrón) es el fenómeno central del Efecto Hall Cuántico, además de obedecer el principio de exclusión de Pauli.

Recordemos el resultado obtenido en la Ec.(7.13), nos permite escribir la degeneración de la siguiente forma

$$g_n = n \frac{eB_0}{\hbar}. \quad (7.26)$$

Con éste resultado en mente, realizamos una conexión con la mecánica estadística. Una vez que terminamos de desarrollar esta aplicación física podemos decir que solo resta escribir nuestras conclusiones a las que llegamos al desarrollar los diferentes métodos expuestos en este trabajo, lo cual se mostrará en el siguiente capítulo.

Capítulo 8

Conclusiones

Una vez que hemos terminado de explorar los diferentes métodos para obtener el propagador de Feynman en la Mecánica Cuántica, el objeto principal de estudio de esta tesis, falta tan sólo presentar las conclusiones a las que hemos llegado al término de la investigación.

Comenzamos presentando consideraciones generales sobre los métodos en dos partes, primero refiriéndonos a las ventajas de usar cada uno de ellos y enseguida, a sus desventajas, desde nuestra particular perspectiva.

▪ Ventajas:

- α) El primer método que consideramos, el *Método Canónico*, desarrollado en el contexto de la segunda cuantización, nos permite tener una forma algebraica y rápida de calcular el propagador de Feynman a partir de su representación espectral. Desde el punto de vista de los cálculos involucrados, este método resulta muy práctico y eficiente.
- β) El segundo método, el *Método de la Integral de Caminos* de Feynman, nos proporciona, quizás, la representación más intuitiva de la amplitud de transición de una partícula que va de un punto a otro durante un intervalo temporal dado. Esto nos permite calcular el propagador directamente, sumando todas las trayectorias que conectan a los puntos inicial y final de la transición. Para entender de mejor manera el significado físico del propagador de Feynman, este método, sin lugar a dudas, es el más conveniente.
- γ) El tercer método, *Método de Schwinger*, que ha sido utilizado principalmente en la teoría cuántica de campos, es igual de útil

en la mecánica cuántica ordinaria. Al ordenar el Hamiltoniano haciendo uso las soluciones a las ecuaciones de Heisenberg correspondientes, el método nos permite encontrar al propagador de una manera simple y elegante: basta integrar formalmente la ecuación de movimiento para el propagador. Este método es, quizás, el más robusto de los tres estudiados.

■ **Desventajas:**

- α) El principal problema que nos encontramos al utilizar el Método Canónico es conceptual: debemos recurrir a los conceptos de la segunda cuantización, esto es, debemos encontrar primeramente las soluciones a la ecuación de Schrödinger correspondientes al problema que estamos interesados y luego cuantizarlas. Esto se puede hacer de manera exacta sólo en un puñado de ejemplos, lo que limita los alcances del método.
- β) Al trabajar con el método de la Integral de Caminos, nos dimos cuenta que se requieren un gran número de cálculos y manipulaciones para poder escribir la amplitud de transición en forma de integrales Gaussianas, las cuales sabemos manejar. Este hecho puede dificultar enormemente encontrar una expresión para el propagador de Feynman por este método en sistemas cuyos Hamiltonianos no son cuadráticos en sus variables dinámicas. Sin embargo, la mayoría de los sistemas físicos se describen con Hamiltonianos cuadráticos, así que este método es muy robusto.
- γ) Finalmente, para el método de Schwinger, el principal problema que detectamos es resolver las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, que en muchas ocasiones representan un gran reto. De cualquier manera, el hecho de que este método se haya empleado con gran éxito en la TCC, nos permite suponer que puede (y debe) aplicarse más ampliamente en la mecánica cuántica ordinaria.

Respecto al problema de Landau, resulta muy interesante la relación que existe entre el propagador de Feynman para un sistema de dimensión finita y su función de partición. Esto nos permite calcular otras cantidades físicas observables a partir del propagador, por ejemplo, el factor de llenado en el efecto de Hall cuántico. Este efecto, que implica la cuantización de la resistencia eléctrica, es una de las más claras manifestaciones de la mecánica cuántica a nivel macroscópico.

El campo magnético entra en el Hamiltoniano para el problema de Landau a través del potencial vector mediante el acoplamiento mínimo, pero el potencial no es único, debido a que al potencial vectorial se le puede hacer una transformación de norma, que hace que el Hamiltoniano sea distinto para cada transformación, pero que no afecta el valor de las cantidades físicas observables. Esto nos obliga a “fijar la norma” para resolver la ecuación de Schrödinger, de modo que el propagador de Feynman se puede obtener directamente mediante el Método Canónico siempre y cuando la norma que elegimos de entrada nos permite tener soluciones con propiedades bien conocidas y fácilmente manipulables. Esto aplica también al método de la Integral de Caminos, pues debemos garantizar que la transformación de norma nos permita escribir el propagador en términos de integrales Gaussianas. Esto no aplica, sin embargo, con el Método de Schwinger, pues en este caso, toda la dependencia de norma del propagador queda factorizada en una fase, llamada fase de Schwinger. Esto garantiza la independencia de norma de las cantidades físicas observables. En este sentido, consideramos que el Método de Schwinger ofrece una ventaja sobre los otros dos métodos en cuanto a que no es necesario fijar la norma al principio del cálculo.

Para terminar, el uso de un método en especial para tratar cualquier problema puede facilitar o complicar el encontrar una solución, por esto, es necesario conocer varios métodos emplear.

Funcionales Clásicamente, hay dos clases de sistemas dinámicos que podemos encontrar. Primero, esta el movimiento de una partícula o un cuerpo rígido, (con un número finito de grados de libertad) el cual puede ser descrito por un número finito de coordenadas. Y entonces, hay sistemas físicos, donde el número de grados de libertad es innumerable e infinito. Tales sistemas son descritos por campos. Ejemplos familiares de campos clásicos son el campo electromagnético, descrito por $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Similarmente, el movimiento de una cuerda 1D es también descrito por un campo $\phi(\vec{x}, t)$, llamado el campo de desplazamiento. Esto es, mientras las coordenadas de una partícula dependen solamente del tiempo, los campos también dependen continuamente de algunas variables espaciales. De este modo, una teoría descrita por campos es usualmente conocida como teoría campo $D + 1$ dimensional, donde D representa el número de dimensiones espaciales, sobre las cuales las variables del campo dependen.

En cualquier caso, es evidente que al tratar con sistemas dinámicos, estamos tratando con variables de funciones continuas, en la mayoría de las veces realmente tratamos con funciones de funciones, las cuales son, de otra forma, conocidas como *funcionales*. Si estamos considerando el movimiento

de una partícula en una dimensión, en un potencial, entonces el Lagrangiano está dado por:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (1)$$

donde $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son las coordenadas y la velocidad de la partícula. Y la funcional más simple en la que podemos pensar, es la funcional de la acción, definida como:

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}) \quad (2)$$

A diferencia de una función, cuyo valor depende sobre un punto en particular en el espacio de coordenadas, el valor de la acción depende enteramente a lo largo del vector, en la cual la integración se lleva a cabo.

Esto es una funcional tiene la siguiente forma:

$$F[f] = \int dx F(f(x)) \quad (3)$$

De esta forma, por ejemplo, podemos tener

$$F(f(x)) = (f(x))^n \quad (4)$$

Algunas veces, uno diría vagamente que $F(f(x))$ es una funcional. La función de una derivada puede ser extendida al caso de funcionales en una forma natural, a través de la notación de funciones generalizadas. Con esto, uno define la *derivada de la funcional* o la *derivada Gateaux* de la funcional lineal.

$$F'[u] = \frac{1}{\epsilon} F[f + \epsilon v] \Big|_{\epsilon=0} = \int dx \frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} v(x) \quad (5)$$

Equivalentemente, desde un punto de vista para trabajar, esto simplemente corresponde a definir.

$$\frac{\delta F(f(x))}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(f(x) - \epsilon \delta(x-y)) - F(f(x))}{\epsilon} \quad (6)$$

Ahora se sigue, de la Eq.(6) que

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \quad (7)$$

La derivada de la funcional satisface todas las propiedades de una derivada, como la linealidad y la asociatividad,

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} (F_1[f] + F_2[f]) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(x)} + \frac{\delta F_2[f]}{\delta f(x)} \quad (8)$$

$$\frac{\delta}{\delta f(x)}(F_1[f]F_2[f]) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(x)}F_2[f] + F_1[f]\frac{\delta F_2[f]}{\delta f(x)} \quad (9)$$

También satisface la regla de la cadena de la diferencialización. Por lo tanto, ahora observamos que dada una funcional $F[f]$, podemos realizar la expansión de Taylor de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} F[f] &= \int dx P_0(x) + \int dx_1 dx_2 P_1(x_1, x_2) f(x_2) + \\ &+ \int dx_1 dx_2 dx_3 P_2(x_1, x_2, x_3) f(x_2) f(x_3) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Donde

$$\begin{aligned} P_0 &= F(f(x))|_{f(x)=0} \\ P_1(x_1, x_2) &= \frac{\delta F(f(x_1))}{\delta f(x_2)}|_{f(x)=0} \\ P_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 F(f(x_1))}{\delta f(x_2) \delta f(x_3)}|_{f(x)=0} \end{aligned} \quad (11)$$

Y así sucesivamente. Como un ejemplo simple, vamos a calcular unas derivadas de unas funcionales particulares

▪ Sea

$$F[f] = \int dy F(f(y)) = \int (f(y))^n \quad (12)$$

Donde n es un número entero y positivo. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\delta F(f(y))}{\delta f(x)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(f(y) - \epsilon \delta(y-x)) - F(f(y))}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(f(y) - \epsilon \delta(y-x))^n - (f(y))^n}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(f(y))^n + n\epsilon (f(y))^{n-1} \delta(y-x) + O(\epsilon^2) - (f(y))^n}{\epsilon} \\ &= n(f(y))^{n-1} \delta(y-x) \end{aligned} \quad (13)$$

De este modo obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} &= \int dy \frac{\delta F(f(y))}{\delta f(x)} \\ &= \int dy n(f(y))^{n-1} \delta(y-x) = n(f(x))^{n-1} \end{aligned} \quad (14)$$

- a continuación consideremos la acción en una dimensión.

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt' L(x(t'), \dot{x}(t')) \quad (15)$$

con

$$\begin{aligned} L(x(t'), \dot{x}(t')) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}(t'))^2 - V(x(t')) \\ &= T(\dot{x}(t')) - V(x(t')) \end{aligned} \quad (16)$$

De una manera directa obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta V(x(t'))}{\delta x(t)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(x(t') + \epsilon \delta(t' - t)) - V(x(t'))}{\epsilon} \\ &= V'(x(t'))\delta(t' - t) \end{aligned} \quad (17)$$

Donde hemos definido.

$$V'(x(t')) = \frac{\partial V(x(t'))}{\partial x(t')} \quad (18)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(\dot{x}(t'))}{\delta x(t)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(\dot{x}(t') + \epsilon \frac{d}{dt'}\delta(t' - t)) - T(\dot{x}(t'))}{\epsilon} \\ &= m\dot{x}(t') \frac{d}{dt'}\delta(t' - t) \end{aligned} \quad (19)$$

Ahora es claro que

$$\begin{aligned} \frac{\delta L(x(t'), \dot{x}(t'))}{\delta x(t)} &= \frac{\delta(T(\dot{x}(t')) - V(x(t')))}{\delta x(t)} \\ &= m\dot{x}(t') \frac{d}{dt'}\delta(t' - t) - V'(x(t'))\delta(t' - t) \end{aligned} \quad (20)$$

Consecuentemente, par este caso, para $t_i \leq t \leq t_f$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} &= \int_{t_i}^{t_f} dt' \frac{\delta L(x(t'), \dot{x}(t'))}{\delta x(t)} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt' (m\dot{x}(t') \frac{d}{dt'}\delta(t' - t) - V'(x(t'))\delta(t' - t)) \\ &= -m\ddot{x}(t) - V'(x(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial L(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)} + \frac{\partial L(x(t), \dot{x}(t))}{\partial x(t)} \end{aligned} \quad (21)$$

El lado derecho de la ecuación anterior, por su puesto, nos recuerda la ecuación de Euler-Lagrange. En realidad, nosotros mencionamos que:

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} + \frac{\partial L}{\partial x(t)} = 0 \quad (22)$$

Dada la ecuación de Euler-Lagrange como un extremo de la funcional, de la acción. Esto no es nada mas que el principio de la última acción, expresada en notación compacta, en el lenguaje de las funcionales. En seguida se verá una breve descripción de los rasgos esenciales de la mecánica cuántica. La aproximación convencional de la mecánica cuántica comienza con la formulación del Hamiltoniano de la mecánica clásica y promover observables a operadores no conmutadores. La dinámica, en este caso, es dada la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \quad (23)$$

donde H es el operador Hamiltoniano de el sistema. Equivalentemente, en el caso 1-Dimensional, la función de onda de una partícula satisface.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H(x)\psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x, t) \quad (24)$$

Donde hemos identificado

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle \quad (25)$$

con $|x\rangle$ siendo las coordenadas de los estados base. Esto, entonces, define la evolución temporal de el sistema.

El propósito principal detrás de resolver la ecuación de Schrödinger se sitúa en determinar el operador de evolución temporal, el cual genera la traslación temporal del sistema. Llamado, el operador de evolución temporal que transforma los estados de la mecánica cuántica, de un tiempo temprano t_2 a uno posterior t_1 , como

$$|\psi(t_1)\rangle = U(t_1, t_2)|\psi(t_2)\rangle \quad (26)$$

Claramente, para un Hamiltoniano independiente del tiempo, se observa que de la ecuación de Schrödinger, que para $t_1 > t_2$,

$$U(t_1, t_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_2)} \quad (27)$$

Más explícitamente, podemos escribir

$$U(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2)e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_2)} \quad (28)$$

Es obvio que el operador de evolución temporal, no es otra cosa que las Funciones de Green para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y satisfacen

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t_1} - H)U(t_1, t_2) = i\hbar\delta(t_1 - t_2) \quad (29)$$

Determinar este operador es equivalente a encontrar su matriz de elementos en una base dada. Esto es, por ejemplo, en la base de coordenadas, definidas por

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad (30)$$

podemos escribir

$$\langle x_1|U(t_1, t_2)|x_2 = U(t_1, x_1; t_2, x_2)\rangle \quad (31)$$

Si conocemos completamente la función $U(t_1, x_1; t_2, x_2)$, entonces la evolución temporal de la función de onda, puede ser escrita como

$$\psi(x_1, t_1) = \int dx_2 U(t_1, x_1; t_2, x_2)\psi(x_2, t_2) \quad (32)$$

Nuestra discusión se centra en nuestra estructura de la imagen de Schrödinger, que va tan lejos como que los estados cuánticos $|\psi(t)\rangle$ llevan la dependencia temporal, mientras que los operadores son independientes del tiempo, por otro lado, en la imagen de Heisenberg, donde los estados cuánticos son independientes del tiempo, que podemos identificar usando Eq(26)

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t=0)\rangle_S = |\psi(t=0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}tH}|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}tH}|\psi(t)\rangle_S \quad (33)$$

En esta imagen los operadores llevan toda la dependencia temporal. Por ejemplo, el operador de coordenadas en la imagen de Heisenberg está relacionado a el operador de coordenadas en la imagen de Schrödinger a través de la relación

$$X_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH} X e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \quad (34)$$

Los eigen-estados de este operador satisfacen.

$$X_H(t)|x, t\rangle_H = x|x, t\rangle_H \quad (35)$$

Es fácil ver, que se encuentran relacionados con las bases de coordenadas en la imagen de Schrödinger, a través de:

$$|x, t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}tH}|x\rangle \quad (36)$$

Es claro ahora que para $t_1 > t_2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \langle x_1, t_1; x_2, t_2 \rangle_H &= \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} t_1 H} e^{\frac{i}{\hbar} t_2 H} | x_2 \rangle \\
 &= \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} (t_1 - t_2) H} | x_2 \rangle \\
 &= \langle x_1 | U(t_1, t_2) | x_2 \rangle \\
 &= U(t_1, x_1; t_2, x_2)
 \end{aligned} \tag{37}$$

Con esto, vemos que la matriz de elementos de el operador de evolución temporal, no es otra cosa que el tiempo ordenado de la amplitud de transición entre la base de coordenadas en la imagen de Heisenberg.

Finalmente esta la imagen de Interacción donde ambos de los estados cuánticos también como los operadores llevan una dependencia temporal parcial. Notemos simplemente que la imagen de interacción es muy útil en el estudio de teorías no triviales de interacción. En cualquier caso, el objetivo del estudio de la mecánica cuántica en cualquiera de esas imágenes, es construir la matriz de elementos del operador de evolución temporal, pueden ser identificadas con amplitudes de transición entre los estados de coordenadas base en la imagen de Heisenberg.

Bibliografía

- [1] H. Goldstein “*Classical Mechanics*”, Addison-Wesley Publishing Company Inc. Library of Congress Catalogo, No. 50-7669.
- [2] Keith R. Symon, “*Mechanics*”, Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1969, D.L. 4787.-1970.
- [3] David J. Griffiths, “*Introduction to Quantum Mechanics*”, 2a Ed. Pearson Prentice Hall, 2005, ISBN 0-13-111892-7.
- [4] Henrik Bruus and Karsten Flensberg, “*Introduction to Many-body quantum theory in condensed matter physics*”, Copenhagen, 15 August 2002.
- [5] Ashok Das, “*Field Theory, A path Integral Approach*”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 9128, ISBN 981-02-1396-4.
- [6] F. A. Borone, H. Boschi-Filho, and C. Farina, Am. J. Phys., **71** (5), 483, 2003
- [7] Naoto Nagaosa, “*Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*”, ISBN 3-540-65537-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg new york.
- [8] J. P. Eisenstein, Am. J. Phys., **61** (2), 1993
- [9] P. A. M. Dirac, in Paul Adrien Maurice Dirac, ed. by B. N. Kursunoglu and E. P. Wigner (Cambridge, 1987).
- [10] P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **139** (1964), B684.
- [11] Landau L D and Khalatnikov I M 1956 Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29 89
Landau L D and Khalatnikov I M 1956 Sov. Phys. JETP 2 69
Fradkin E S 1956 Sov. Phys. JETP 2 361
Johnson K and Zumino B 1959 Phys. Rev. Lett. 3 351

Zumino B 1960 J. Math. Phys. **1** 1
Okubo S 1960 Nuovo Cimento. **15** 949
Bialynicki-Birula I 1960 Nuovo Cimento. **17** 951
Sonoda H 2001 Phys. Lett. B **499** 253

- [12] Walter Hauser “*Introducción a los principios de Mecánica*”, Addison-Wesley Publishing Compang Inc., Second Priting April-1966.
- [13] R. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367, (1948).
- [14] Hagen Kleinert, “*Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics*”, Berlin, March 2003.
- [15] Kai-Man Poon and Gerardo Muñoz, “*Path Integals and Propagator for Quadratic Lagrangians in Three Dimensions*”, Department of Physics, California State University, Fresno, CA 93740-0037.
- [16] A. Aragão, H. Boschi-Filho, C. Farina, F. A. Barone, arXiv:0704.1645v1 [quant-ph] 2007
- [17] IJR Aitchison, AJG Hey, “*Gauge Theories in Particle Physics*”, Vol I, Third Edition.
- [18] George Arfken “*Mathematical Methods for Physicists*”, Academic Press Inc., ISBN: 0-12-059820-5.
- [19] luiz C. de albuquerque, C. Farina, S. Rabello, Am. J. Phys., **66** (6), 524, 1998
- [20] D. R. Leadley, Warwick, **1**, university, 1997
- [21] Kaushik Bhattacharya, arXiv:0705.4275v1 [hep-th] 2007