

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.



“Geometría y Topología del grupo  $F_2$ ”

---

T E S I S

para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico  
Matemáticas

*Autor:*  
Salvador Sierra Murillo

*Director:*  
Dr. Daniel Juan Pineda

---

MARZO 2009, U.M.S.N.H, MORELIA



*A mis padres Guillermo y Elsa,  
A mis hermanos Caro, Memo y Roy.*



# Agradecimientos

*Salvador Sierra Murillo*



# Introducción

El concepto de grupo libre surge en 1882 en el artículo *Gruppentheoretische Studien* de Walter Dyck, sin embargo, reciben el nombre de grupos libres hasta 1924 cuando J. Nielsen introduce este concepto. Para el año de 1920 K. Reidmeister, O. Schreier y J. Nielsen probaron que todo subgrupo de un libre es libre.

Ejemplos de grupos libres pueden ser el grupo de los números enteros bajo la operación de adición con conjunto generador  $S = \{1\}$ . En topología algebraica se tiene que el grupo fundamental de  $k$  círculos con un punto en común es el grupo libre en  $k$  generadores.

Cuando  $k = 2$  se tiene el grupo libre en dos generadores, este grupo, a priori, parece ser muy sencillo, sin embargo su tratamiento no lo es, puede por ejemplo, mostrarse que contiene como subgrupo a cualquier grupo libre en una cantidad finita o infinita de generadores, para ello se necesitan técnicas de espacios cubrientes.

Otro aspecto interesante en el estudio de los grupos libres es analizar sus grupos de automorfismos. Esto se ha venido realizando desde la década de 1920 con los trabajos de J. Nielsen y J. H. C. Whitehead. A pesar de toda esta línea de trabajo R. Lyndon en 1977 afirmó que hay mucho más desconocido acerca de estos grupos de automorfismos que conocido, además, propone una lista de problemas en teoría de grupos la cual está encabezada por el problema:

*“Para un grupo, determinar la estructura de  $\text{Aut}(F)$ , de sus subgrupos, especialmente los subgrupos finitos y de sus grupos cociente, así como la estructura de automorfismos individuales”*[1987]

Los primeros trabajos en esta dirección corrieron por cuenta de Thurston y Gromov que proponen emplear la *Teoría geométrica de grupos* como método de estudio de los grupos. Esta teoría es relativamente nueva y se dedica a estudiar los grupos mediante las exploraciones entre las propiedades del grupo y las que son geométricas o topológicas de espacios en los que estos grupos actúan.

Una herramienta de la teoría geométrica de grupos consiste en tratar al grupo en cuestión como un objeto geométrico; dan fe de ello las llamadas gráficas de Cayley de un grupo, consistentes en asignar a cada grupo y conjunto de generadores del mismo una gráfica, en donde se hace actuar al mismo grupo, además de que se le puede dar el tratamiento de espacios métricos con la métrica de palabras.<sup>1</sup>

Volviendo al estudio de los grupos de automorfismos de los grupos libres es importante señalar que éstos tienen modelos en los grupos aritméticos<sup>2</sup> y en los grupos de mapeos de clases.<sup>3</sup> Uno de estos grupos es  $Out(F_2)$  de los automorfismos externos de  $F_2$  que es aritmético, pues es isomorfo a  $GL_2(\mathbb{Z})$ ; y también es un grupo de mapeos de clases ya que es isomorfo al grupo de mapeos de clase de un toro agujerado. En el presente trabajo recuperamos el resultado probado por Nielsen [1924] de que  $Out(F_2) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ .

En general la abelianización  $F_n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  induce un mapeo  $Aut(F_n) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$  que es trivial en los automorfismos internos y que es suprayectivo para todo  $n$ . Sin embargo, aún para valores de  $n$  pequeños como  $n = 3$  es posible encontrar automorfismos que no son realizables<sup>4</sup> [1982], volviendo su estudio más complicado.

El trato que recibe  $Out(F_n)$  para  $n \geq 2$ , y como M. Bestvina describe en *The topology of  $Out(F_n)$* , es más complicado y no tan bien portado. Su estudio requiere la introducción de los espacios exteriores  $X_n$  construidos por Cullen y Vogtman, son análogos a los espacios de Teichmüller, en donde  $Out(F_n)$  actúa con estabilizadores finitos.<sup>5</sup>

---

<sup>1</sup>En el presente trabajo no se estudian las gráficas de Cayley, por lo que un tratamiento detallado no se encuentra aquí.

<sup>2</sup>Consultar [2006]

<sup>3</sup>Visitar el sitio web <http://www.math.utah.edu/%7Emargalit/primer/>  
<sup>4</sup>[2007]

<sup>5</sup>Acerca de los espacios  $X_n$  no se dira nada más en este trabajo

Por último, solo queda comentar que en la teoría geométrica de grupos se emplean técnicas para la obtención de nuevos grupos como los productos libres, los productos amalgamados y las extensiones HNN. Basados en el trabajo de J. P. Serre en su libro *Trees* [Ser] se hará actuar al grupo  $GL_2(\mathbb{Z})$  en una gráfica particular para obtenerlo como un producto amalgamado.

El presente trabajo de tesis aborda todos los aspectos, y en este orden, los conceptos descritos en esta introducción para el caso particular de  $n = 2$ . Es importante aclarar que la mayoría de los resultados expuestos para  $n = 2$  no tienen una generalización para  $n > 2$ , cosa que parecería ser natural.

**Salvador Sierra Murillo**  
Morelia, Michoacán.  
UMSNH.

*Marzo de 2009*



# Índice general

<b>1. Grupo Fundamental y Espacio Cubriente.</b>	<b>1</b>
<b>2. Representabilidad de los elementos de <math>Out(F_2)</math> y consecuencias.</b>	<b>15</b>
2.1. Automorfismos del grupo libre $F_2$ sin órbitas finitas. . . . .	15
2.2. Otra Presentación de $Out(F_2)$ . . . . .	26
<b>3. Geometría de <math>Out(F_2)</math></b>	<b>31</b>



# Capítulo 1

## Grupo Fundamental y Espacio Cubriente.

### Preliminares.

En esta sección se establecen los conocimientos previos que se necesitan para desarrollar el contenido de esta tesis, se asume un conocimiento básico de álgebra y de topología. La gran mayoría de los resultados sólo se citan, es decir, no se demuestran en esta tesis, sin embargo se citan las fuentes bibliográficas en las que dichos resultados se encuentran demostrados. La mayoría de éstos se encuentran en los libros [Muk] y [Rot].

La ruta que se sigue en el desarrollo de esta tesis es comenzando con conceptos algebraicos y después con conceptos de topología algebraica. La manera en que surgen los conceptos durante el desarrollo de este trabajo de tesis es el que se intenta seguir en esta sección.

**Definición 1.** [Grupo libre]

Si  $X$  es un subconjunto de un grupo  $F$ , entonces  $F$  es un grupo libre con base  $X$  si para cada grupo  $G$  y cualquier función  $f : X \rightarrow G$  existe un único homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  que extiende a  $f$ , es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow & \searrow \varphi \\ X & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

En cuestiones operativas es conveniente referirnos a un grupo libre en término de sus elementos, de usual se hace refiriéndonos a dichos elementos como palabras. Siendo más precisos tenemos:

Sea  $X$  un conjunto,  $X^{-1}$  un conjunto ajeno a  $X$  y  $X' = \{1\}$ , asumamos además que existe una biyección  $X \rightarrow X^{-1}$ , denotada por  $x \mapsto x^{-1}$ . Convenimos en denotar  $x^1$  por  $x$  y  $x^0$  por  $1$ .

**Definición 2.** [Palabra]

Una palabra en  $X$  es una sucesión  $w = (a_1, a_2, \dots)$  en donde  $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$  para cada  $i$  y existe  $n$  tal que  $a_j = 1$  para todo  $j > n$ . A la palabra  $(1, 1, 1, \dots)$  se le llama la palabra identidad.

Es preferible, dado que palabras no son la identidad se convierten en eventualmente constantes, denotarlas por

$$w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$$

donde  $x_i \in X$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$  o  $0$  y  $\epsilon_n = \pm 1$  en este caso decimos que la palabra tiene longitud  $n$ .

**Definición 3.** Si  $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$  es una palabra definimos su inversa por  $w^{-1} = x_n^{\epsilon_n^{-1}} \cdots x_2^{\epsilon_2^{-1}} x_1^{\epsilon_1^{-1}}$ . Una palabra  $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$  se dice reducida si es vacía o bien, para todo  $x_i \in X$  y todo  $\epsilon_i = \pm 1$  tanto  $x$  como  $x^{-1}$  no son adyacentes.

**Teorema 1.** [Existencia de grupos libres]

Dado un conjunto  $X$ , existe un grupo libre  $F$  con base  $X$ .

**Definición 4.** [Presentación de un grupo]

Sea  $X$  un conjunto y  $\Delta$  familia de palabras en  $X$ . Un grupo  $G$  tiene generadores  $X$  y relaciones  $\Delta$  si  $G \simeq F/R$  en donde  $F$  es el grupo libre con base  $X$  y  $R$  es el subgrupo normal de  $F$  generado por  $\Delta$ . El par ordenado  $\langle X | \Delta \rangle$  se llama una presentación de  $G$ .

**Ejemplo 1.** Si  $G = \mathbb{Z}/6 = C_6$ , es decir el grupo de los enteros modulo 6 o el cíclico de orden 6, entonces podemos ver a  $G$  como  $G = \langle x | x^6 = 1 \rangle$  o bien como  $G = \langle x, y | x^3 = y^2 = 1, xyx^{-1}y^{-1} = 1 \rangle$ .

El ejemplo 1 sirve para ilustrar no sólo la definición 4 sino el hecho de que la presentación de un grupo no es única.

**Ejemplo 2.** *El grupo diédrico,  $D_{2n}$ , tiene una presentación dada por  $D_{2n} = \langle x, y | x^n = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$ .*

**Ejemplo 3.** *El grupo de los cuaternios tiene una presentación dada por  $Q = \langle a, b | a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$  o esta otra presentación  $Q = \langle x, y | xyx = y, x^2 = y^2 \rangle$ .*

**Ejemplo 4.** *Los grupos libres en  $n$  generadores se definen por:*

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

*Es decir, el conjunto de relaciones  $\Delta$  de la definición 4 es vacío. El caso particular en que  $n = 2$  es el grupo que atañe a esta tesis.*

Durante una parte de la tesis se hace referencia al grupo abelianizado de cierto grupo, a continuación presentamos conceptos y resultados que nos son útiles acerca de los grupos abelianizados.

**Definición 5.** *[Conmutador]*

*Sea  $G$  un grupo y  $a, b \in G$ . Definimos el conmutador de  $a$  y  $b$  por*

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

*El subgrupo conmutador de  $G$ , también llamado subgrupo derivado, en notación  $G'$  es el subgrupo*

$$G' = \langle \{[a, b] | a, b \in G\} \rangle.$$

**Definición 6.** *[Abelianizado]*

*Sea  $G$  un grupo. Definimos el abelianizado de  $G$  como el cociente de  $G$  entre el subgrupo derivado  $G'$ . Lo denotamos por*

$$G^{ab} = G/G'.$$

**Ejemplo 5.** *El grupo abelianizado de  $F_2 = \langle x, y \rangle$  es  $\mathbb{Z}^2$ , pues el conmutador es  $F_2' = \langle [x, y] \rangle$  y al tomar el cociente  $F_2^{ab} = F_2/F_2'$  tiene como presentación  $F_2^{ab} = \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} = 1 \rangle$ , es decir el grupo conmutativo en dos generadores.*

Otro concepto que es necesario en la tesis es el de producto semidirecto, se exponen el menor número de definiciones y resultados correspondientes a este tema de manera que lo tratado en el desarrollo ulterior esté sustentado.

**Definición 7.** [Complemento de un subgrupo]

Sea  $G$  un grupo y  $K \leq G$  un subgrupo de  $G$ . Decimos que un subgrupo  $Q \leq G$  es complemento de  $K$  en  $G$  si  $K \cap Q = \{1\}$  y  $KQ = G$ , donde  $KQ = \{kq | k \in K, q \in Q\}$ .

**Definición 8.** [Producto semidirecto]

Un grupo  $G$  es producto semidirecto de  $K$  por  $Q$ , en notación  $K \rtimes Q$ , si  $K \triangleleft G$  y tiene complemento  $Q_1 \simeq Q$ .

**Lema 1.** Si  $G$  es producto semidirecto de  $K$  por  $Q$ , entonces existe un homomorfismo  $\theta : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$ , definido para cada  $x \in Q$  y  $a \in K$  como

$$\theta_x(a) = xax^{-1}$$

más aún, para  $x, y, 1 \in Q$  y  $a \in K$  se satisface  $\theta_1(a) = a$  y  $\theta_x(\theta_y(a)) = \theta_{xy}(a)$ .

**Definición 9.** Sean  $Q$  y  $K$  grupos y  $\theta : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$  un homomorfismo. Un producto semidirecto  $G$  de  $K$  por  $Q$  realiza a  $\theta$  si para todo  $x \in Q$  y  $a \in K$   $\theta_x(a) = xax^{-1}$

**Definición 10.** Dados  $Q$  y  $K$  grupos y  $\theta : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$  un homomorfismo definimos

$$G = K \rtimes_{\theta} Q$$

como el conjunto de pares ordenados  $(a, x) \in K \times Q$  con operación  $(a, x)(b, y) = (a\theta_x(b), xy)$

**Teorema 2.** El grupo  $G = K \rtimes_{\theta} Q$  de la definición 10 es un producto semidirecto de  $K$  por  $Q$  que realiza a  $\theta$ .

A continuación damos lugar a las definiciones y resultados que comprenden la parte de topología algebraica, a grosso modo se puede decir que contienen resultados básicos acerca del grupo fundamental de un espacio topológico, se desarrolla parte de la teoría de espacios cubrientes y se culmina con el teorema de Van-Kampen, ambas herramientas utilizadas para calcular grupos fundamentales de espacios topológicos.

Se va a considerar la categoría de espacios topológicos punteados, nos referiremos a ella por  $Top_*$ , aunque durante el desarrollo de esta tesis se omite hacer referencia explícita al punto distinguido de nuestro espacio

topológico. Un poco de notación es la que se da a los objetos de  $Top_*$ , lo hacemos por el par  $(X, x)$  en donde  $X$  denota el espacio topológico y  $x$  el punto distinguido, los morfismos (funciones continuas) entre objetos mediante  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  que significa  $f(x) = y$ .

**Definición 11.** [Homotopía punteada]

Sean  $f, g : (X, \underline{x}) \rightarrow (Y, \underline{y})$  aplicaciones continuas,  $I = [0, 1]$ . Decimos que  $f$  es homotópica a  $g$  si existe  $H : (X, \underline{x}) \times I \rightarrow (Y, \underline{y})$ , una homotopía que satisface

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \\ H(x, t) &= y, \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Para estas funciones decimos que  $f$  es homotópica a  $g$ . En notación  $f \sim g$

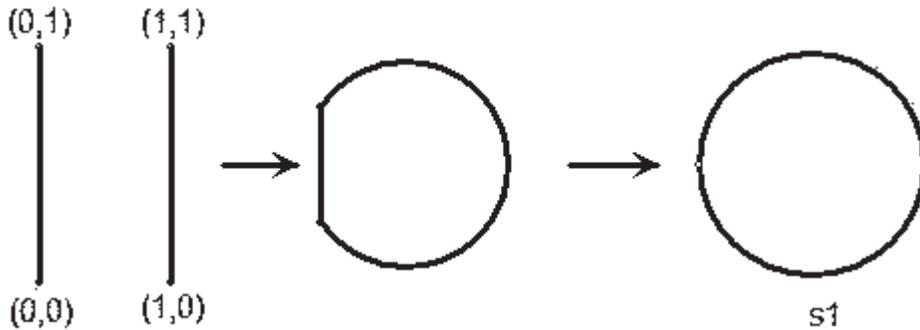
**Definición 12.** [Suspensión reducida de un espacio]

Sea  $(X, \underline{x})$  espacio topológico. Definimos la suspensión de  $(X, \underline{x})$  como el espacio cociente

$$\Sigma X = \frac{X \times I}{X \times \{0\}, X \times \{1\}, \{\underline{x}\} \times I}.$$

El punto base de este nuevo espacio es  $\{X \times \{0\}, X \times \{1\}, \{\underline{x}\} \times I\}$ .

**Ejemplo 6.** Consideremos  $X = \{0, 1\}$  y  $\underline{x} = 0$ . Entonces  $\Sigma X \cong S^1$ . En un dibujo la situación luce como sigue:



**Definición 13.** Sean  $f, g : \Sigma X \rightarrow Y$ , podemos entonces definir una operación  $f * g : \Sigma X \rightarrow Y$  mediante

$$(f * g)(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La definición 13 es correcta, aunque en principio no lo parezca, ya que en el valor  $t = 1/2$  tenemos la evaluación en  $(x, 1)$  que corresponde a los puntos base (la tapa de la suspensión) y tanto  $f$  como  $g$  tienen el mismo valor ahí.

**Proposición 1.** *La relación de ser homotópicas, en el sentido de la definición 11 es una relación de equivalencia entre funciones continuas.*

La afirmación 1 y la definición 13 nos permiten definir una operación a nivel de clases de equivalencia que es asociativa y posteriormente concluir el siguiente resultado.

**Teorema 3.** *El conjunto  $[\Sigma X, Y]$  de clases de homotopía punteadas con operación*

$$[f][g] = [f * g]$$

*es un grupo.*

**Definición 14.** *[Grupos de homotopía]*

*Al grupo  $[S^1, Y]$  se llama el grupo fundamental de  $Y$  con punto base  $y$ , se denota por*

$$\pi_1(Y, y).$$

*El grupo  $[S^2, Y]$  se llama el segundo grupo de homotopía de  $Y$  basado en  $y$ , se le denota por  $\pi_2(Y, y)$ . En general al grupo  $[S^n, Y] = \pi_n(Y, y)$  se le llama el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $Y$  basado en  $y$ .*

A continuación nos vamos a reducir sólo al caso del grupo fundamental de espacios topológicos.

**Definición 15.** *[Homomorfismo de grupos fundamentales]*

*Sea  $\alpha : I \rightarrow X$  un camino de  $x_0$  a  $x_1$ . Definimos la aplicación*

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\bar{\alpha}][f][\alpha] \end{aligned}$$

*con  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ , es decir,  $\alpha$  recorrido en el sentido contrario.*

**Teorema 4.** *La aplicación  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos.*

**Corolario 1.** *Si  $X$  es un espacio conexo por caminos, entonces  $\forall x_0, x_1 \in X$  se tiene que  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ .*

El caso especial en el que  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial cuando  $X$  es conexo por trayectorias para algún  $x_0 \in X$  nos lleva a llamar a  $X$  de una forma especial se llama espacio simplemente conexo. Esta propiedad de ser simplemente conexo cobrará mayor significado en la teoría de espacios cubrientes.

**Teorema 5.** *La asignación  $[\Sigma X, \ ]$  es un funtor entre la categoría  $Top_*$  y la categoría de Grupos.*

Para el caso particular en el que  $\Sigma X = S^1$  tenemos concretamente los grupos fundamentales de espacios, al ser un funtor es posible hablar de los siguientes resultados.

**Definición 16.** *[Homomorfismo inducido]*

Sea  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una aplicación continua. Definimos

$$\begin{aligned} h_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto [h \circ f] \end{aligned}$$

este es un homomorfismo de grupos y lo llamamos el homomorfismo inducido por  $h$ .

**Proposición 2.** *Si  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , entonces  $h_*$  es un isomorfismo entre los respectivos grupos fundamentales.*

Pasamos ahora a los resultados de espacios cubrientes, en esta parte se presentan tres resultados profundos de esta teoría. En esta sección asumiremos que todos los espacios son de Hausdorff ( $T_2$ ), conectables por trayectorias y localmente conectable por trayectorias.

**Definición 17.** *[Espacio cubriente]*

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ . La función  $p$  es una función cubriente (o equivalentemente  $\tilde{X}$  es cubriente de  $X$ ) si para cada  $x \in X$  existe  $U$  vecindad de  $x$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_i \tilde{U}_i$ , con  $\tilde{U}_i$  abiertos, y tal que  $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$  es un homeomorfismo para cada  $i$ .

**Ejemplo 7.** *Los homeomorfismos son funciones cubriente. Si  $\tilde{X} = \bigsqcup X$  con la topología de suma de espacios y considerando la función proyección en cada coordenada obtenemos un espacio cubriente.*

**Ejemplo 8.** *Considere  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada como  $p(t) = e^{2\pi it}$  es una función cubriente que enreda a  $\mathbb{R}$  en  $S^1$  una cantidad numerable de veces.*

**Lema 2.** [Levantamiento de caminos]

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  cubriente de  $X$ ,  $\alpha : I \rightarrow X$  camino en  $X$  con punto inicial en  $x_0$ . Entonces existe  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$  camino en  $\tilde{X}$  tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ . El camino es único hasta elección del punto inicial  $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$  en  $\tilde{X}$ .

**Lema 3.** [Levantamiento de homotopías]

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  cubriente de  $X$ . Si existe  $H : W \times I \rightarrow X$  homotopía, entonces existe  $\tilde{H} : W \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p \circ \tilde{H} = H$

**Lema 4.** [Levantamiento de funciones]

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  cubriente de  $X$ ,  $Y$  espacio conexo y localmente arcoconexo,  $y_0 \in Y$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ . Dada  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  existe un levantamiento  $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  si y sólo si  $f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Esta condición es equivalente a pedir que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

conmute.

Consideramos dos ejemplos de espacios cubrientes, ambos serán de importancia en el desarrollo de esta tesis.

**Ejemplo 9.** Sea  $T = S^1 \times S^1$  espacio topológico, usualmente llamado toro. La aplicación producto

$$P := p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$$

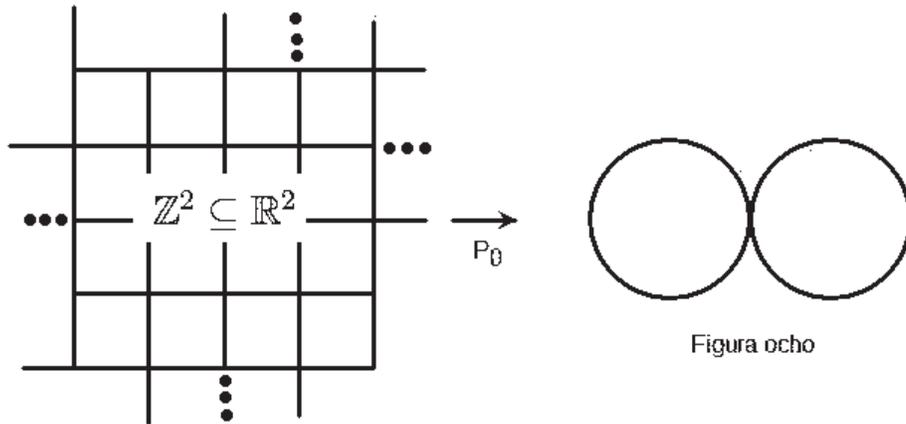
en donde  $p$  es la función cubriente definida en el ejemplo 8, es una función cubriente de  $T$  por  $\mathbb{R}^2$ . En este ejemplo los cuadros unitarios  $[n, n + 1] \times [m, m + 1]$  son enrollados en el toro  $T$  bajo la función  $P$ .

**Ejemplo 10.** Consideremos el ejemplo 9 y sea  $x_0 = p(0)$ . Consideramos el subespacio

$$T \setminus \{*\} = T^0 \cong (S^1 \times x_0) \cup (x_0 \times S^1)$$

del toro  $T$ , en donde  $\cong$  significa homotópicamente equivalentes y el punto distinguido  $\{*\}$  es un punto que no está en la retícula entera. El subespacio  $T^0$  es conocido como espacio figura ocho y se trata de dos circunferencias que tienen un sólo punto en común, (también se le representa por  $S^1 \vee S^1$ ).

Como subespacio que es consideremos  $P^{-1}(T^0) = E$ , que no es otra cosa que el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $E = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$  es decir la retícula entera, considerando la función  $P_o = P|_E$  es un cubriente de la figura ocho por  $\mathbb{Z}^2$ . En dibujos



**Definición 18.** [Cubriente universal]

Un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  que es simplemente conexo se llama cubriente universal.

El próximo resultado es muy útil en esta tesis, primero por que nos permite apreciar al grupo libre  $F_2$  como grupo fundamental del espacio figura ocho, y por que introduce un concepto que es el de amalgama de grupos, es el teorema de Van-Kampen. Antes de citar el teorema de Van-Kampen desarrollamos algunos conceptos algebraicos para entenderlo mejor.

**Definición 19.** [Sistema directo de grupos]

Sea  $I$  un conjunto parcialmente ordenado. Un sistema directo de grupos es un par ordenado  $(\{G_i\}_{i \in I}, \{\varphi_j^i\}_{i \leq j})$ , abreviado por  $\{G_i, \varphi_j^i\}$  donde  $\{G_i\}$  es una familia de grupos indexada por  $I$  y  $\varphi_j^i : G_i \rightarrow G_j$ , para  $i \leq j$ , es un homomorfismo de grupos tal que  $\varphi_i^i = id_{G_i}$  y para cada  $i \leq j \leq k$  el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 G_i & \xrightarrow{\varphi_k^i} & G_k \\
 & \searrow \varphi_j^i & \nearrow \varphi_k^j \\
 & G_j &
 \end{array}$$

conmuta.

**Ejemplo 11.** Si  $I = \{1, 2, 3\}$  con orden parcial  $1 \preceq 2$  y  $1 \preceq 3$  un sistema directo sobre  $I$  es un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi_2^1} & G_2 \\ \downarrow \varphi_3^1 & & \\ G_3 & & \end{array}$$

**Ejemplo 12.** Si  $I = \{1, 2, 3, \dots\}$  con orden parcial  $1 \preceq 2$ ,  $1 \preceq 3$  en general  $1 \preceq n$  un sistema directo sobre  $I$  es un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & G_2 \\ & \nearrow \varphi_2^1 & \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi_n^1} & G_n \end{array}$$

**Definición 20.** [Límite directo]

Sea  $G = \{G_i, \varphi_j^i\}$  un sistema directo de grupos. El límite directo de  $G$ ,  $\varinjlim G_i$ , es un grupo y una familia de homomorfismos  $\alpha_i : G_i \rightarrow \varinjlim G_i$  con  $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$  para  $i \preceq j$  que satisfacen la siguiente propiedad universal

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim G_i & \xrightarrow{\beta} & & & X \\ & \searrow \alpha_i & & \nearrow f_i & \\ & & G_i & & \\ & \swarrow \alpha_j & \downarrow \varphi_j^i & \searrow f_j & \\ & & G_j & & \end{array}$$

para cada grupo  $X$  y homomorfismos  $f_i : G_i \rightarrow X$  tales que  $f_i = f_j \varphi_j^i$  con  $i \preceq j$  existe un único homomorfismo  $\beta : \varinjlim G_i \rightarrow X$  que hace conmutar el diagrama anterior.

**Teorema 6.** El límite directo de un sistema directo de grupos existe y es único hasta isomorfismo de grupos.

**Ejemplo 13.** Para el sistema directo del ejemplo 11 el límite directo existe y se llama producto amalgamado.

Es importante rescatar, de la demostración dada por Rotman en [Rot2], la construcción del límite directo de un sistema directo  $\{G_i, \varphi_j^i\}$ , pues basta

considerar  $\lambda_i : G_i \rightarrow \coprod G_i$  la inyección en la suma de los  $G_i$ , entonces

$$\varinjlim G_i = \frac{\coprod G_i}{S}$$

en donde  $S = \langle \{\lambda_j \varphi_j^i a_i - \lambda_i a_i \mid a_i \in G : i\}_{i \in I} \rangle$ , precisamente esto es expresar como se ven los  $G_i$  en el límite directo y como estos se comparan en el límite.

El teorema de Van-Kampen surge como respuesta a la pregunta ¿Si  $X$  es un espacio topológico tal que es la unión de  $V$  y  $W$  abiertos, se puede calcular  $\pi_1(X, x) = \pi_1(V \cup W, x)$  en términos de  $\pi_1(V, x)$  y  $\pi_1(W, x)$ ? La respuesta es en el sentido positivo y tal grupo fundamental es un producto amalgamado de  $\pi_1(V, x)$  y  $\pi_1(W, x)$ .

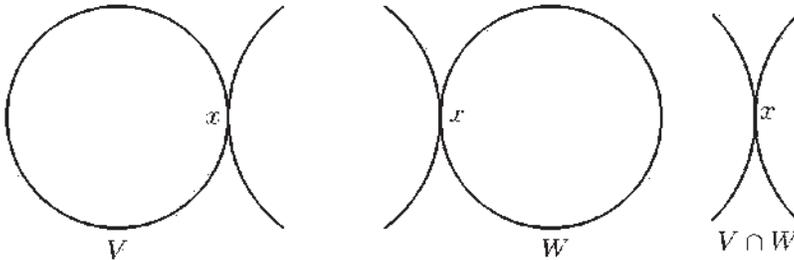
**Teorema 7.** [de Van Kampen]

Sea  $X$  un espacio topológico,  $V, W$  abiertos tales que  $X = V \cup W$ . Si  $V \cap W$  es conexo y  $x \in V \cap W$  entonces  $\pi_1(X, x)$  es el producto amalgamado de

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V \cap W, x) & \xrightarrow{j_V^*} & \pi_1(V, x) \\ \downarrow j_W^* & & \\ \pi_1(W, x) & & \end{array}$$

donde  $j_V : V \cap W \rightarrow V$  y  $j_W : V \cap W \rightarrow W$  son las inclusiones respectivas.

**Ejemplo 14.** Consideremos el espacio figura ocho y en el consideremos los abiertos



Notemos que  $V$  y  $W$  son homotópicamente equivalentes a  $S^1$  y que  $V \cap W$  es homotópicamente equivalente al espacio de un punto, luego para  $x$  el punto en la intersección se tiene  $F(a) = F_1 = \pi_1(V, x) = \mathbb{Z}$  y  $F(b) = F_1 = \pi_1(W, x) = \mathbb{Z}$  y que  $\pi_1(V \cap W, x) = \{1\}$ , luego el producto amalgamado del diagrama será

$$\pi_1(T^0, x) = \pi_1(V, x) *_{\{1\}} \pi_1(W, x) = F(a) *_{\{1\}} F(b) = F(a, b) = F_2$$

el grupo libre en los generadores  $a$  y  $b$ .

Los productos amalgamados surgen naturalmente del teorema de Van-Kampen cuando los mapeos inducidos  $j_{V^*}$  y  $j_{V^*}$  son inyecciones. Cuando el caso es este, se tiene una forma normal para los elementos del producto amalgamado. La demostración de este teorema (forma normal) se presenta ya que en la parte final de este trabajo es necesaria.

Sea  $A$  un grupo,  $\{G_i\}_{i \in I}$ ,  $\{\varphi_i : A \rightarrow G_i\}$  inyectiva para cada  $i$ . (La situación es análoga al sistema directo del ejemplo 12). Identificamos  $A$  con su imagen en cada  $G_i$ . Denotamos el límite directo de esta situación por  $G = *_A G_i$ .

Para cada  $i \in I$  sea  $S_i \subseteq G_i/A$  subconjunto de representantes de clases laterales derechas, asumiendo que  $1 \in S_i$ . La función

$$\begin{aligned} A \times S_i &\rightarrow G_i \\ (a, s) &\mapsto as \end{aligned}$$

es una biyección y se satisface que la siguiente aplicación es inyectiva

$$A \times (S_i \setminus \{1\}) \rightarrow G_i \setminus A.$$

Sea  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  para  $n \geq 0$  sucesión en  $I$  tal que

$$i_k \neq i_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (1.1)$$

**Definición 21.** [Palabra del tipo  $\mathbf{i}$ ]

Una palabra reducida del tipo  $\mathbf{i}$  es cualquier familia

$$m = (a; s_1, \dots, s_n)$$

en donde  $a \in A$ ,  $s_j \in S_{i_j}$  para todo  $s_j \neq 1$ .

**Teorema 8.** [Estructura de amalgamas]

Para todo  $g \in G$  existe una sucesión  $\mathbf{i}$  que satisface (1.1) y una palabra reducida  $m = (a; s_1, \dots, s_n)$  del tipo  $\mathbf{i}$  tal que

$$g = f(a)f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n)$$

con  $\mathbf{i}$  y  $m$  únicas, donde  $f : A \rightarrow G$  y  $f_k : G_k \rightarrow G$  son las funciones dadas por el límite directo.

*Demostración.* Sea  $X_i = \{\text{Palabras del tipo } i\}$  y sea  $X = \sqcup X_i$ .  
 Sea  $j \in I$  y sea  $Y_j = \{(1; s_1, \dots, s_n) | j \neq i_1\}$ , consideremos las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} A \times Y_j &\rightarrow X \\ (a, (1; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s_1, \dots, s_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A \times (S_j \setminus \{1\}) \times Y_j &\rightarrow X \\ ((a, s), (1; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s, s_1, \dots, s_n), \end{aligned}$$

entonces lo que obtenemos es una biyección  $A \times Y_j \cup A \times (S_j \setminus \{1\}) \times Y_j \rightarrow X$  que es equivalente a la biyección  $G_j \times Y_j \rightarrow X$ , la denotamos como

$$\Theta_j : G_j \times Y_j \rightarrow X.$$

Hacemos actuar a  $G_j$  en  $X$  de la manera obvia, es decir, primero lo hacemos actuar en  $G_j \times Y_j$  y luego lo aplicamos en su imagen

$$g'(g, y) = (g'g, y),$$

es decir,  $gx = \Theta_j(g'g, y)$  para  $x = \Theta_j(g, y)$ .

Restringimos la acción a  $A$ , de esta manera luce como

$$a'(a; s_1, \dots, s_n) = (a'a; s_1, \dots, s_n)$$

independiente de  $j$ .

Analizamos más la acción

$$gx = g(a; s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} (g, (a, (1; s_1, \dots, s_n))), \\ (g, (a, s), (1; s_1, \dots, s_n)), \end{cases}$$

tanto  $ga$  como  $gas$  son elementos en  $G_j (\leftrightarrow A \times S_j)$  entonces son de la forma  $(\tilde{a}, \tilde{g})$  con  $\tilde{a} \in A, \tilde{g} \in S_j$ . Luego

$$gx = \begin{cases} (g, (a, (1; s_1, \dots, s_n))) = (\tilde{a}; \tilde{g}, s_1, \dots, s_n), \\ (g, (a, s), (1; s_1, \dots, s_n)) = (\tilde{a}; \tilde{g}, s_1, \dots, s_n). \end{cases}$$

Puesto que la acción de  $G_j$  en  $X$  restringida a  $A$  no depende de  $j$ , se puede extender la acción a todo  $G$ .

**Afirmación.** Si  $m = (a; s_1, \dots, s_n)$  y  $g = f(a)f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n)$ , entonces  $g1 = m \in X$ , donde  $1 = (1; 1, \dots, 1)$  la palabra identidad.

*Demostración.* Por inducción en  $n$ . Los casos esenciales son  $n = 0, 1, 2$  el resto es trivial.

- Para  $n = 0$ :  $m = (a; \emptyset)$ ,  $g = f(a)$  entonces  $g1 = a(1; \emptyset) = m$ .
- Para  $n = 1$ :  $m = (a; s_1)$ ,  $g = f(a)f_{i_1}(s_1)$  entonces  $g1 = as_1(1; \emptyset) = (a; s_1) = m$ .
- Para  $n = 2$ :  $m = (a; s_1, s_2)$ ,  $g = f(a)f_{i_1}(s_1)f_{i_2}(s_2)$  entonces  $g1 = as_1s_2(1; \emptyset) = as_1(s_2(1; \emptyset)) = as_1(1; s_2) = a(1; s_1, s_2) = (a; s_1, s_2)$ .

el caso general es aplicar  $n$  iteradamente.  $\square$

Ahora si

$$\begin{array}{ccc} \alpha : G \rightarrow X & & \beta : X \rightarrow G \\ g \mapsto g1 & & (a; s_1, \dots, s_n) \mapsto f(a)f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n) \end{array}$$

Tenemos, por la afirmación 1 que  $\alpha\beta = id$ , entonces  $\beta$  es inyectiva, es decir la descomposición es única.

Falta ver que  $\beta$  es suprayectiva.

Identificamos a  $X$  con  $\beta(X) \subseteq G$ , queremos ver que  $X = G$  o bien que  $GX \subseteq X$  ya que  $1 \in X$  y así  $G \subseteq X$  y tendríamos la prueba.

Notemos que  $G_i X \subseteq X$ , ya que para  $g \in G_i$  y  $x = (a; (1; s_1 \dots, s_n))$  se tiene

$$gx = g(a; s_1 \dots, s_n) = g(a; (1; s_1 \dots, s_n)) = (ga; s_i, \dots, s_n) \in G_i \times Y_j$$

luego  $(ga; s_i, \dots, s_n) \in X$  por lo tanto  $GX \subseteq X$ .  $\square$

El teorema 8 lo podemos igualmente interpretar como

**Teorema 9.** Sea  $G'_i = G_i \setminus A$ . Entonces los mapeos  $f$  y  $f_i$  definen una biyección de la unión disjunta de  $A$  y  $G'_i$  sobre  $G$ .

**Ejemplo 15.** Consideremos los grupos  $G_1 = C_2 = \langle a | a^2 = 1 \rangle$ ,  $G_2 = C_2 = \langle b | b^2 = 1 \rangle$  y  $A = \{1\}$ , con morfismos inclusión. De acuerdo al teorema de la forma normal para el producto amalgamado  $G = C_2 * G_2$  tenemos que los elementos de  $G$  lucen como expresiones del tipo abababababababab puesto que  $a^{-1} = a$  y  $b^{-1} = b$  y además el orden de los generadores es dos, de manera que las potencias siempre se reducen.

## Capítulo 2

# Representabilidad de los elementos de $Out(F_2)$ y consecuencias.

### 2.1. Automorfismos del grupo libre $F_2$ sin órbitas finitas.

**Notación 1.** *Por  $F_2$  nos referimos al grupo libre en los generadores  $x$  e  $y$ . Por  $Aut(F_2)$  nos referimos al grupo de automorfismos de  $F_2$  y  $GL_2(\mathbb{Z})$  denotará a las matrices de  $2 \times 2$  con entradas en los enteros  $\mathbb{Z}$  con determinante no cero.*

A continuación se presenta el teorema de Nielsen, el cual como ya se dijo en la introducción prueba que  $Out(F_2) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ , la prueba viene siguiendo la demostración dada por Scharlemann en [1983] la idea de seguir esta demostración es recuperar la geometría presente en ella y de analizar como este grupo actúa en superficies agujeradas. Como se mencionó también, para  $n > 2$  los casos que aquí se tratan no son en general válidos, más aún, no se puede hacer actuar a  $Out(F_n)$  en superficies agujeradas, sin embargo, cuando algún automorfismo se logra realizar estos aportan información geométrica interesante.

**Teorema 10.** *[Nielsen]*

La siguiente es una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{i} \text{Aut}(F_2) \xrightarrow{\alpha} GL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 .$$

En donde  $i$  asigna a cada  $w \in F_2$  el automorfismo  $i(w)$  que es conjugación por  $w$  y  $\alpha$  asigna a cada automorfismo la matriz que lo representa una vez que se ha hecho descender a un morfismo en el abelianizado de  $F_2$ . La asignación de tal matriz por  $\alpha$  es posible, pues el subgrupo conmutador es característico, lo cual permite hacer descender los automorfismos al cociente  $F_2^{ab}$ .<sup>1</sup>

*Demostración.* Probaremos que  $\alpha$  es suprayectiva, que  $i$  es inyectiva y que  $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\alpha)$ .

-  $i$  es inyectiva:

Suponga que para toda  $a \in F_2$  se tiene  $i(w)(a) = waw^{-1} = a$  entonces tenemos que  $wa = aw$ , es decir conmuta, en un libre esto quiere decir que  $a = w^k$  para alguna  $k$ , si  $a \neq 1$  entonces  $k \neq 0$  esto para todo  $a \in F_2$ , entonces  $F_2 = \langle w \rangle$ , una contradicción, así que  $\text{ker}(i) = \{1\} \subseteq F_2$ . Entonces es inyectiva.

-  $\alpha$  es suprayectiva:

**Lema 5.** *Todo  $g \in \text{Aut}(F_2)$  es realizable, es decir, está representado por un automorfismo del toro agujerado.*

*Demostración.* Consideremos  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$  y el automorfismo  $g \in \text{Aut}(F_2)$  dado por  $g(x) = x^a y^c$  y  $g(y) = x^b y^d$  (este automorfismo tiene por inverso a  $g^{-1} \in \text{Aut}(F_2)$  el cual, en los generadores involucra ciertas potencias, para  $x$  estoas son  $d$  y  $-c$  y para el generador  $y$  potencias  $-b$  y  $a$ ), que prueba la suprayectividad.

A continuación notemos que  $\alpha(g) = \mathbf{A}$  induce una aplicación lineal  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{A}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$  y más aún  $\mathbf{A}(\bar{0}) = \bar{0}$ , obtenemos así

$$\mathbf{A}| := \tilde{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}.$$

---

<sup>1</sup>Ver [Rot] pag 104 en adelante.

Esta función desciende a un automorfismo del toro agujerado,  $T^0$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{A}}} & \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ T^0 & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{A}}} & T^0 \end{array}$$

siendo  $p$  la proyección al cociente. A su vez,  $\tilde{\mathbf{A}}$ , induce el automorfismo de  $F_2$

$$\tilde{\mathbf{A}}_* : F_2 \rightarrow F_2$$

que satisface  $\tilde{\mathbf{A}}_* = g$ . □

-  $Im(i) \subseteq Ker(\alpha)$ :

**Lema 6.** *Sea  $T = S^1 \times S^1$  y  $f : T \rightarrow T$  homeomorfismo tal que  $f_* : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$  es interior, digamos  $f_*(\beta) = w\beta w^{-1}$  para  $w \in F_2$ . Entonces  $f$  es homotópica a  $Id$ ,  $f \sim Id$ .*

*Demostración.* Buscamos  $\tilde{H} : T \times I \rightarrow T$  tal que  $\tilde{H}(z, 0) = f(z)$  y  $\tilde{H}(z, 1) = z$ . Para obtener tal homotopía, encontraremos una homotopía  $H : Ret(x, y) \times I \rightarrow T$  en donde  $Ret(x, y)$  es un cuadrado unitario  $[n, n + 1] \times [m, m + 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que

$$\begin{aligned} H(z, 0) &= \tilde{f}(z) \\ H(z, 1) &= \tilde{Id}(z) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{f} = f \circ \pi$  e  $\tilde{Id} = Id \circ \pi$ , con  $\pi$  la proyección al cociente. Puesto que  $Ret(x, y) \cong I \times I$ , la homotopía  $H$  realmente estará definida como  $H : I \times I \times I \rightarrow T$ . Esquemáticamente lo que haremos es:

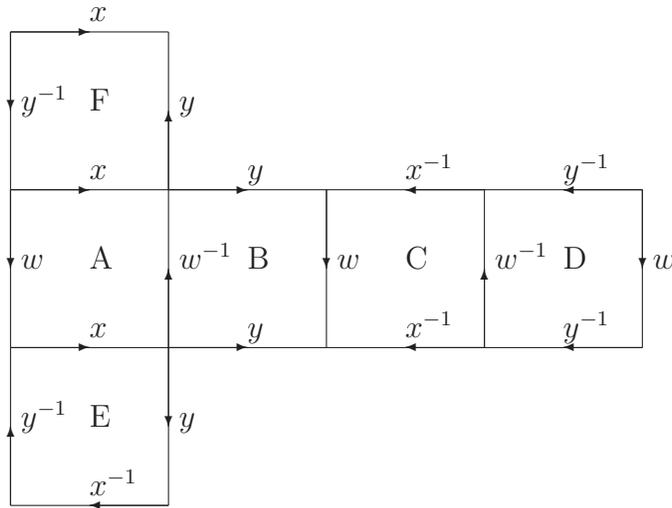
$$\begin{array}{ccc} Ret(x, y) & \xrightarrow{\pi} & T \\ \downarrow H & & \searrow f \\ Ret(x, y) & \xrightarrow{\pi} & T \end{array} \quad \begin{array}{c} T \\ \nearrow Id \\ T \end{array}$$

Consideremos los siguientes resultados:

**Lema 7.** *Sea  $(\tilde{X}, p)$  cubriente universal de  $X$ . Entonces  $\pi_i(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \pi_i(X, x_0)$  para  $i \geq 2$ .*

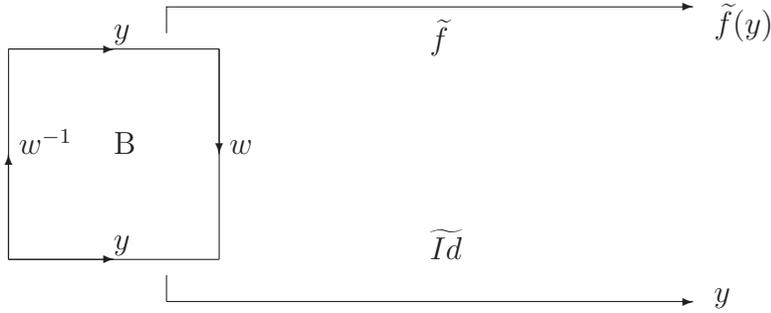
**Lema 8.** *Sea  $H : S^{n-1} \rightarrow X$ ,  $S^{n-1} = \partial D^n$ . Entonces  $H$  se extiende a todo  $D^n$  si y sólo si  $[H] = 1$  en  $\pi_{n-1}(X)$ .*

En virtud de que  $\mathbb{R}^2$  es cubriente universal de  $T$  se tiene que  $\pi_2(\mathbb{R}^2) \simeq \pi_2(T)$ , además  $\pi_2(\mathbb{R}^2) = 1$  y por lo tanto  $\pi_2(T) = 1$ , considerando el lema 8 para  $n = 3$  tenemos que  $H : S^2 \rightarrow X$  se extiende a  $D^3$  si  $[H] = 1 \in \pi_2(T)$ , justamente 1 es el único elemento en  $\pi_2(T)$ . Bastará por lo tanto definir  $H$  en  $S^2 = \partial(I \times I \times I)$ , es decir, la frontera del siguiente cubo:



En las caras F y E, cada una de ellas homeomorfa a  $Ret(x, y)$ , se tienen las funciones  $\tilde{f}$  e  $\tilde{I}d$  respectivamente. Sólo resta verificar que para cada cara entre A, B, C, y D se tiene una función que testifique la homotopía.

Elegimos la cara B para mostrar ésta afirmación, para las otras caras el argumento es análogo.



Es cuestión de aplicar a la cara B el lema 8 para  $n = 2$ , definiendo en cada arista la función marcada en el diagrama, de manera que se obtiene una homotopía que satisface  $f(y) \sim wyw^{-1}$  que está en concordia con la hipótesis de que  $f_*$  es interior. Así hemos obtenido  $H : S^2 \rightarrow T$  y por lo tanto  $H : D^3 \rightarrow T$ .

Puesto que  $D^3 \simeq I^3$ , definimos en  $I^3$  la siguiente relación:

$$\{(1, t, 0) = (0, t, 0), (t, 0, 0) = (t, 1, 0), (1, t, 1) = (0, t, 1), (t, 0, 1) = (t, 1, 1) | t \in I\} = \star$$

luego  $I \times I \times I / \star \cong T \times I$ , así haciendo descender  $H$  mediante la proyección al cociente obtenemos

$$\tilde{H} : T \times I \rightarrow T$$

que satisface  $\tilde{H}(z, 0) = f(z)$  y  $\tilde{H}(z, 1) = z$ . □

La demostración que se ha dado de este hecho parece extremadamente complicada y rebuscada, puesto que se pudo demostrar de la siguiente manera:

Partimos de un elemento  $g \in Aut(F_2)$ , cuya imagen  $\alpha(g) \in GL_2(\mathbb{Z})$ , se obtiene de considerar

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{g} & F_2 \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{Z}^2 \end{array} \quad (2.1)$$

en donde  $p$  es la proyección al abelianizado y  $\tilde{g}$  es la función inducida por  $g$  y posteriormente asociar la matriz entera que representa  $\tilde{g}$ .

Si asumimos que  $g$  es interior, es decir, para algún  $w \in F_2$  tenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= wxw^{-1} \\ g(y) &= wyw^{-1} \end{aligned}$$

en donde  $x$  e  $y$  son los generadores de  $F_2$ . Según el diagrama conmutativo (2.1), tenemos para  $x$  un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & wxw^{-1} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \bar{x} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \overline{wxw^{-1}} = \bar{w} + \bar{x} - \bar{w} = \bar{x} \end{array}$$

en donde  $\bar{x}$  es la clase de  $x$  en el abelianizado y  $\bar{w}$  la clase de  $w$  en el abelianizado. Para  $y$  se obtiene un diagrama similar, reemplazando las correspondientes  $y$  por  $x$  y  $\bar{y}$  por  $\bar{x}$ . Entonces obtenemos un homomorfismo de los abelianizados, sea  $\tilde{g}$ , que satisface:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\bar{x}) &= \bar{x} \\ \tilde{g}(\bar{y}) &= \bar{y} \end{aligned}$$

Con representación matricial dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Justamente  $I_2 = \alpha(g)$ , probando así que  $Im(i) \subseteq Ker(\alpha)$ . Sin embargo, optamos por la demostración anterior ya que es más ilustrativa de cual es el proceso que se debe de seguir cuando estos resultados se intentan generalizar para los grupos  $F_n$  con  $n \geq 3$ , pues proceder de una manera puramente algebraica conduce rápidamente a complicaciones en la demostración.

-  $Ker(\alpha) \subseteq Im(i)$ :

**Lema 9.** Sean  $f, g \in Aut(T^0)$  que fijan al punto base  $x_0$  y tales que  $f \sim L \sim g$  con  $L$  un mapeo lineal. Entonces  $f \sim_H g$  donde  $H$  mueve al punto  $x_0$  por un lazo en  $T^0$ .

**Lema 10.** Sean  $f, g : X \rightarrow X$  tales que  $f \sim L \sim g$  y  $f(x_0) = x_0 = g(x_0)$ . Entonces existe un lazo en  $X$  tal que  $f_* = \omega g_* \omega^{-1}$ . Si  $H$  es la homotopía entre  $f$  y  $g$  entonces  $\omega(t) = H(x_0, t)$ .<sup>2</sup>

**Corolario 2.** Si  $\varphi \in Aut(F_2)$  tal que  $\alpha(\varphi) = Id$ , entonces  $\varphi \in Inn(F_2)$ .

□

**Definición 22.**  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  se llama *elíptica*, *parabólica* o *hiperbólica* de acuerdo a que  $|tr A| < 2$ ,  $|tr A| = 2$  o  $|tr A| > 2$  respectivamente. Las matrices  $\pm I_2$  son por definición *elípticas*, donde  $I_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ .

**Observación 1.** (i) Si  $A$  es *elíptica* (*parabólica*, *hiperbólica*) entonces  $A^n$  lo es para  $n \neq 0$ .

(ii)  $A$  es *elíptica* si y sólo si  $A^n = I$  para algún  $n \neq 0$ .

(iii)  $A$  es *hiperbólica* si y sólo si  $A$  tiene dos valores propios irracionales distintos. Los vectores propios de  $A$  poseen pendiente irracional.

*Demostración.* (i) Por inducción.

(ii)  $\Rightarrow$  Efectuar la operación de  $A$  consigo misma, aceptando los hechos de que  $A^n$  es *elíptica*, el determinante es  $\pm 1$  conducen al resultado.

$\Leftarrow$  Si  $A$  no es *elíptica*, entonces  $A^n \neq I$  por ser  $I$  *elíptica*, de manera que  $A^n \neq I$  para todo  $n > 0$ .

(iii) Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , su polinomio característico es  $x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$  y sus valores propios son

$$x_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

y como  $ad - bc = \pm 1$  y  $(a+d)^2 > 4$  se tiene el resultado.

Lo de la pendiente irracional se sigue de este hecho.

□

**Definición 23.**  $A \in GL_2(\mathbb{Z})$  es *elíptica*, *parabólica* o *hiperbólica* de acuerdo a lo que  $A^2 \in SL_2(\mathbb{Z})$  sea.

---

<sup>2</sup>Ver [Muk] pag 412

**Lema 11.** *Sea  $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$ . Si  $\alpha(\varphi)$  es elíptico, entonces existe  $n \neq 0$  en  $\mathbb{Z}$  y  $w \neq 1$  en  $F_2$  tal que  $\varphi^n(w) = w$ .*

*Demostración.* Por observación (1), inciso (ii) existe  $n \neq 0$  tal que  $\alpha(\varphi)^n = I = \alpha(\varphi^n)$ . Por el teorema (10),  $\varphi^n$  es conjugación por algún  $u \in F_2$ . Si  $u \neq 1$  basta tomar  $w = u$ . Si  $u = 1$  cualquier elemento  $w \in F_2$  no neutro funcionará.  $\square$

### La geometría.

Consideremos  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$  un mapeo afín, digamos  $L(w) = A \cdot w + v$  con  $A \in GL_2(\mathbb{Z})$  y  $v \in \mathbb{Z}^2$ . Vamos a considerar que  $A$  es hiperbólica con valores propios  $\lambda_1 < \lambda_2$  y vectores propios  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente. Mediante  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  denotemos la proyección en un eje ortogonal a  $v_2$ .

**Proposición 3.** *Sea  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lazo, entonces  $\pi \circ L \circ \gamma(S^1)$  tiene  $\lambda_1$  veces la longitud de  $\pi \circ \gamma(S^1)$ .*

*Demostración.* Para  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$ , así  $A \cdot v = a_1 \cdot A \cdot v_1 + a_2 \cdot A \cdot v_2 = a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2$ , tomando  $\pi$  se obtiene

$$\pi(A \cdot v) = \pi(a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1) + \pi(a_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2) = \pi(a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1)$$

aplicando  $\pi$  a  $\gamma$  se obtiene el resultado.  $\square$

**Definición 24.** *Sea  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  un lazo. Sea  $\mathcal{B} = \{\beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \mid \beta \sim \gamma\}$  y definimos*

$$\rho(\gamma) = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \{|\pi(\beta(S^1))|\},$$

donde  $\sim$  significa ser homotópicas.

**Observación 2.** (i) *Si  $\beta$  es homotópica a  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  entonces  $\rho(\beta) = \rho(\gamma)$*

(ii)  $\rho(L \circ \beta) = \lambda_1 \rho(\beta)$ .

*Demostración.* (i) Es trivial ya que ser homotópicas es una relación de equivalencia.

(ii) Se sigue de proposición (3).  $\square$

**Teorema 11.** [Thurston]

Sea  $\varphi \in Aut(F_2)$  y supongamos que  $\alpha(\varphi)$  hiperbólica. Si  $z \in F_2$  y  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\varphi^n(z) = z$ , entonces  $z = 1$ ,  $n = 0$  o  $z$  es conjugado a alguna potencia de  $xyx^{-1}y^{-1}$ .

*Demostración.* Sin perder generalidad asumamos que  $n = 1$ .

**Afirmación.** Para un  $z$  como el anterior se tiene que  $z$  está en el conmutador de  $F_2$ .

*Demostración.* Sea  $A = \alpha(\varphi)$  y  $\hat{z} \in \mathbb{Z}^2$  la imagen de  $z$  bajo abelianización.  $A \cdot \hat{z} = \hat{z}$  (esto proviene del hecho que  $\varphi(z) = z$ ). Ahora bien,  $\hat{z}$  es un vector propio, pero los vectores propios de  $A$  tienen pendiente irracional, la única posibilidad es  $\hat{z} = 0$  i.e.,  $z \in F_2'$ .  $\square$

Por el teorema de Nielsen (teorema 10),  $\varphi \in Aut(F_2)$  es representable por un homeomorfismo de  $T^0$ , al que denotaremos también por  $\varphi$  y que fija al punto  $x_0$ .

Levantamos  $\varphi : T^0 \rightarrow T^0$  a un homeomorfismo  $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ .

**Afirmación.** Un elemento  $z \in F_2$  se levanta a un lazo  $\hat{z}$  basado en  $\hat{x}_0$ .

*Demostración.* Por el levantamiento anterior de  $\varphi$  a  $\hat{\varphi}$  se obtiene

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \\
 p \downarrow & \nearrow \varphi' & p \downarrow \\
 T^0 & \xrightarrow{\varphi} & T^0
 \end{array}$$

que inducen

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \\
 & \nearrow \varphi'_* & p_* \downarrow \\
 F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_2
 \end{array}$$

y por el lema del levantamiento  $\varphi(F_2) \subseteq p_*\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)$ . Así  $z \in F_2$  se levanta a un lazo  $\hat{z}$  basado en  $\hat{x}_0$ .  $\square$

**Afirmación.**  $\varphi(z) = z$  implica  $\hat{z} \sim \hat{\varphi}(\hat{z})$ .

*Demostración.*  $\hat{z}$  es lazo basado en  $\hat{x}_0$  y  $\hat{\varphi}(\hat{z})$  es lazo basado en  $\hat{x}_0$ , luego  $p_*(\hat{z}) = z$  y  $p_*(\hat{\varphi}(\hat{z})) = \varphi(z) = z$  así  $p_*(\hat{z}) = p_*(\hat{\varphi}(\hat{z}))$ , es decir son homotópicos.  $\square$

$\varphi$  homeomorfismo de  $T^0$  es isotópico a un mapeo lineal, digamos  $l$ . Levantamos esta isotopía a una entre  $\hat{\varphi}$  y  $L$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ . Entonces

$$\rho(\hat{z}) = \rho(\hat{\varphi}(\hat{z})) = \rho(L(\hat{z})) = \lambda_1 \rho(\hat{z})$$

como  $\lambda_1 \neq 0$  entonces  $\rho(\hat{z}) = 0$ , geoméricamente lo que dice es que  $\hat{z}$  es homotópico a un lazo arbitrariamente cercano a una recta  $M$  paralela a  $v_2$  (correspondiente a  $\lambda_2$ ).

$M$  también posee pendiente irracional y a lo más pasa por un punto  $\mathbb{Z}^2$ . Así que  $\hat{z}$  es null-homotópico, contradiciendo que  $z \neq 1$ , o bien  $\hat{z}$  le da un número de vueltas al único punto en  $M \cap \mathbb{Z}^2$ , pero esto corresponde a una potencia de  $xyx^{-1}y^{-1}$ .  $\square$

## Aplicaciones.

Buscamos probar la existencia de muchos automorfismos de  $F_2$  que no tienen órbita finita, de hecho se probará que los hiperbólicos no tienen órbita finita.

**Lema 12.** *Si  $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$  es tal que  $\alpha(\varphi)$  es hiperbólica y tiene determinante  $-1$ , entonces  $\varphi(z) = z$  implica  $z = 1$ .*

*Demostración.* Para  $w \in F_2$ , si  $w = gw^{-1}g^{-1}$  para algún  $g \in F_2$  entonces  $w = 1$  ya que  $F_2$  es libre, además  $\alpha(\varphi) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  con determinante  $-1$  invierte el sentido de un generador.

Por el teorema (11) si  $z \neq 1$  y es tal que  $\varphi(z) = z$  entonces  $z$  es conjugado a  $xyx^{-1}y^{-1}$ ,  $\varphi$  además invierte sentido, se tiene entonces que  $\varphi(xyx^{-1}y^{-1})$  es conjugado a su inverso, así  $\varphi(z) = z$  implica que  $z$  es conjugado a su inverso en  $F_2$ , luego  $z = 1$ .  $\square$

**Lema 13.** *Suponga que  $z \neq 1$  y  $\bar{z} = 0$ ,  $\varphi(z) = z$ . Si  $\bar{w} \notin \text{Im}(A - I)$  entonces  $C_w \varphi$  no fija conjugados de  $z$ , donde  $C_w$  es conjugación por  $w$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $C_w \varphi(aza^{-1}) = aza^{-1} = w\varphi(a)z\varphi(a)^{-1}w^{-1}$ , luego se tiene  $a^{-1}w\varphi(a)z = za^{-1}w\varphi(a)$  es decir conmuta con  $z$ , en un libre

solo queda la posibilidad de que  $a^{-1}w\varphi(a) = z^k$  para alguna  $k$ . Abelianizando tenemos

$$\overline{-a} + \overline{w} + A \cdot \overline{a} = k\overline{z} = 0$$

o bien

$$\overline{w} = (A - I) \cdot \overline{(-a)}$$

que es lo que buscamos.  $\square$

**Lema 14.** *Cualquier automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$  hiperbólico es trasladado a uno que fija  $xyx^{-1}y^{-1}$  por conjugación.*

*Demostración.* Sea  $A = \alpha(\varphi)$  hiperbólica,  $z \neq 1$  entonces  $z \in \langle [xy] \rangle$ , (i.e.,  $\overline{z} = 0$ ) podemos por el lema (12) asumir que  $\det(A) = 1$ . Por el teorema de Thurston  $\varphi(z) = z$  implica que  $z$  es conjugado a  $xyx^{-1}y^{-1}$ , luego  $\varphi(xyx^{-1}y^{-1})$  tiene como imagen a un conjugado de  $xyx^{-1}y^{-1}$ , digamos a  $wxyx^{-1}y^{-1}w^{-1}$ . Esto es por que  $z = uxyx^{-1}y^{-1}u^{-1}$  implica que  $\varphi(z) = \varphi(u)\varphi(xyx^{-1}y^{-1})\varphi(u)^{-1} = uxyx^{-1}y^{-1}u^{-1} = z$ , así  $C^{-1}_w\varphi$  fija a  $xyx^{-1}y^{-1}$  como se buscaba.  $\square$

**Teorema 12.** *Suponga que  $\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = (xyx^{-1}y^{-1})^{\pm 1}$ ,  $A = \alpha(\varphi)$  es hiperbólica. Si  $\overline{w} \notin \text{Im}(A - I)$  entonces  $C_w\varphi$  no tiene órbitas finitas.*

*Demostración.* Sea  $z = xyx^{-1}y^{-1}$  y supongamos que  $C_w^n\varphi(u) = u$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \neq u \in F_2$ . Por el teorema de Thurston  $u$  es conjugado a  $z$ , digamos  $u = aza^{-1}$ , luego  $aza^{-1} = (C_w^n\varphi)(aza^{-1}) = bz^{\pm 1}b^{-1}$ , en donde

$$b = w\varphi(w)\varphi^2(w) \cdots \varphi^{n-1}(w)\varphi^n(a),$$

así que  $a^{-1}b$  conmuta con  $z$ , es decir  $a^{-1}b = z^k$  para algún  $k$ . Abelianizando tenemos

$$\overline{-a} + \sum_{i=1}^{n-1} A^i \cdot \overline{w} + A^n \cdot \overline{a} = k\overline{z} = 0$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n-1} A^i \cdot \overline{w} = (A^n - I)(\overline{-a})$$

multiplicando ambos lados por  $(A - I)$  se obtiene

$$(A^n - I)\overline{w} = (A^n - I)(A - I)(\overline{-a})$$

puesto que  $\det(A^n) = 1$  se tiene  $\det(A^n - I) \neq 0$  y puedo cancelar de manera que se tiene

$$\bar{w} = (A - I)(-\bar{a})$$

es decir  $\bar{w} \in \text{Im}(A - I)$ . □

## 2.2. Otra Presentación de $Out(F_2)$ .

Nuevamente vamos a considerar a  $F_2$  el grupo libre en los generadores  $x$  e  $y$  y vamos a considerar los grupos  $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b | a^3 = b^3 = 1 \rangle$  y el grupo diédrico de orden ocho  $D_8 = \langle c, d | c^4 = d^2 = (cd)^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ , la idea es dar una presentación sencilla de  $Aut(F_2)$  en términos de productos semidirectos y productos libres.

Consideremos en  $Aut(F_2)$  el par de morfismos  $\alpha$  y  $\beta$  dados por:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : F_2 & \rightarrow & F_2 \\ x & \mapsto & x^{-1}y^{-1} \\ y & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \beta : F_2 & \rightarrow & F_2 \\ x & \mapsto & y^{-1} \\ y & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

**Proposición 4.**  $\alpha^3 = \beta^3 = 1$  en  $Aut(F_2)$ .

*Demostración.* La prueba se realiza solamene en  $\alpha$ , valuándola en los generadores, para  $\beta$  la situación es totalmente análoga.

- Para  $x$  se tiene  $\alpha(x) = x^{-1}y^{-1}$ , luego  $\alpha^2(x) = \alpha(x^{-1}y^{-1}) = yxx^{-1} = y$  así  $\alpha^3(x) = \alpha(y) = x$
- Para  $y$  se tiene  $\alpha(y) = x$ , luego  $\alpha^2(y) = \alpha(x) = x^{-1}y^{-1}$  así  $\alpha^3(y) = \alpha(x^{-1}y^{-1}) = y$

□

**Corolario 3.**  $\chi : \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 \rightarrow Aut(F_2)$  tal que  $\chi(a) = \alpha$  y  $\chi(b) = \beta$  es un homomorfismo. □

**Corolario 4.**  $H = F_2 \rtimes_{\chi} (\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3) = \langle x, y, a, b | R \rangle$  en donde  $R$  es el conjunto de relaciones dado por

$$\begin{array}{l} a^3 = b^3 = 1, \quad axa^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \quad aya^{-1} = x \\ bxb^{-1} = y^{-1}, \quad byb^{-1} = xy^{-1} \end{array}$$

**Proposición 5.** *El grupo  $H$  posee dos endomorfismos  $\gamma$  y  $\delta$  dados por*

$$\begin{array}{ccc} \gamma : H & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & y^{-1} \\ y & \mapsto & x \\ a & \mapsto & b \\ b & \mapsto & xa \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \delta : H & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & y \\ y & \mapsto & x \\ a & \mapsto & y^{-1}a^{-1} \\ b & \mapsto & b^{-1} \end{array}$$

*Demostración.* Es necesario ver que tanto  $\gamma$  como  $\delta$  preservan el conjunto de relaciones  $R$  dado anteriormente. Sólo se hace para el morfismo  $\gamma$  puesto que para  $\delta$  es análogo.

- $\gamma(a^3) = (\gamma(a))^3 = b^3 = 1$
- $\gamma(b^3) = (\gamma(b))^3 = \underbrace{xa}x\underbrace{ax}a = ayx(x^{-1}y^{-1}a) = a^3 = 1$
- $\gamma(axa^{-1}) = by^{-1}b^{-1} = b(by)^{-1} = yx^{-1} = \gamma(x^{-1}y^{-1})$
- $\gamma(aya^{-1}) = bxb^{-1} = y^{-1} = \gamma(x)$
- $\gamma(bxb^{-1}) = x\underbrace{ay^{-1}a^{-1}}x^{-1} = x(a(ay)^{-1})x^{-1} = xx^{-1}x^{-1} = \gamma(y^{-1})$
- $\gamma(byb^{-1}) = xaxa^{-1}x^{-1} = x(x^{-1}y^{-1})x^{-1} = y^{-1}x^{-1} = \gamma(xy^{-1})$

□

**Proposición 6.** *Para los morfismos anteriores se satisface  $\gamma^4 = \delta^2 = (\gamma\delta)^2 = 1$  en  $Aut(H)$ .*

*Demostración.* Como se ha venido haciendo sólo se presenta que  $(\gamma\delta)^2 = 1$ , el otro par de casos es más o menos directo

- $(\gamma\delta)(\gamma\delta)(x) = (\gamma\delta)(x) = x$
- $(\gamma\delta)(\gamma\delta)(y) = (\gamma\delta)(y) = y$
- $(\gamma\delta)(\gamma\delta)(a) = (\gamma\delta)(\gamma(y^{-1}a^{-1})) = (\gamma\delta)(x^{-1}b^{-1}) = \gamma(y^{-1}b) = x^{-1}(xa) = a$
- $(\gamma\delta)(\gamma\delta)(b) = (\gamma\delta\gamma)(b^{-1}) = (\gamma\delta)(a^{-1}x^{-1}) = \gamma(ayy^{-1} = b).$

□

**Corolario 5.** *Se tiene un homomorfismo  $\xi : D_8 \rightarrow Aut(H)$  dado por  $\xi(c) = \gamma$  y  $\xi(d) = \delta$ .  $\square$*

A continuación vamos a considerar el grupo

$$G = H \rtimes_{\xi} D_8 = (F_2 \rtimes_{\chi} (\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)) \rtimes_{\xi} D_8$$

**Corolario 6.** *El grupo  $G$  esta dado por  $G = \langle x, y, a, b, c, d | R' \rangle$  en donde  $R'$  es un conjunto de relaciones dado por las relaciones en  $H$ , en  $D_8$  y las relaciones*

$$\begin{aligned} cxc^{-1} &= y^{-1}, & cyc^{-1} &= x, & cac^{-1} &= b, & cbc^{-1} &= xa \\ dxd &= y, & dad &= y^{-1}a^{-1}, & dbd &= b^{-1}. \end{aligned}$$

Notemos que  $F_2 \triangleleft G$  y sea  $\phi : G \rightarrow Aut(F_2)$  el homomorfismo dado por  $\phi(z) : F_2 \rightarrow F_2$  obtenido de restringir la conjugación en  $G$  al grupo  $F_2$ .

**Teorema 13.** *El morfismo  $\phi$  es un isomorfismo.*

*Demostración.*  $F_2 \triangleleft G$  y  $F_2 \triangleleft Aut(F_2)$ . Veremos que

$$\bar{\phi} : \bar{G} \rightarrow \overline{Aut(F_2)}$$

el inducido por  $\phi$  es isomorfismo.  $\bar{G} = G/F_2$  y  $\overline{Aut(F_2)} = Aut(F_2)/F_2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ , empleando esto tenemos que  $\phi(b)$  es conjugar por  $b$ , respectivamente lo es conjugar por  $c$  y por  $d$ , de manera que tenemos en  $x$  e  $y$  lo siguiente

$$\begin{aligned} \phi(b)(x) &= y^{-1}; & \phi(b)(y) &= xy^{-1} \\ \phi(c)(x) &= y^{-1}; & \phi(c)(y) &= x \\ \phi(d)(x) &= y; & \phi(d)(y) &= x \end{aligned}$$

que a su vez implican que

$$\bar{\phi}(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\phi}(\bar{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\phi}(\bar{d}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El grupo  $GL_2(\mathbb{Z})$  está generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por las relaciones

$$A^6 = (AC)^2 = (BC)^2 = A^3B^2 = 1$$

por las relaciones que definen a  $G$  y  $\bar{G}$  se tienen

$$\bar{b}^3 = \bar{c}^4 = (\bar{b}\bar{d})^2 = (\bar{b}\bar{c})^2 = 1$$

**Lema 15.** *La siguiente aplicación es un homomorfismo.  $\Theta : GL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \bar{G}$  dado por*

$$A \mapsto \bar{b}\bar{c}^2; \quad B \mapsto \bar{c}^{-1}; \quad C \mapsto \bar{d}$$

*Demostración.* Basta probar que preserva las relaciones anteriores.  $\square$

El grupo  $\bar{G}$  está generado por  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$ , pues se tiene la relación  $a = c^{-1}bc$  y al hacer cociente por  $F_2$  se pierden esos dos generadores.

**Proposición 7.** *Se satisface que*

- $\Theta\bar{\phi} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$  es la identidad.
- $\bar{\phi}\Theta : GL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z})$  es la identidad.

*Demostración.* -  $\Theta\bar{\phi}(\bar{b}) = \Theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \Theta(AB^2) = \bar{b}$

$$- \Theta\bar{\phi}(\bar{c}) = \Theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Theta(B^3) = \bar{c}$$

$$- \Theta\bar{\phi}(\bar{d}) = \Theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Theta(C) = \bar{d}$$

El otro inciso es más fácil y solo hay que hacer los cálculos.  $\square$

La proposición 7 termina la prueba.  $\square$

Sea  $K = \langle u, v, w | R \rangle$  en donde  $R$  son las relaciones

$$u^3 = v^4 = w^2 = (vw)^2 = v^2uv^2wuw = [uvu, v^2] = 1.$$

**Lema 16.** *Existe un isomorfismo  $f : K \rightarrow G$  tal que  $u \mapsto a$ ,  $v \mapsto c$  y  $w \mapsto d$ .*

*Demostración.* En  $G$  se tiene  $f(u^3) = a^3 = 1$ ,  $f(v^4) = c^4 = 1$ ,  $f(w^2) = d^2 = 1$  y  $f((vw)^2) = (cd)^2 = 1$ . Ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} v^2uv^2wuw &= (c^2ac^2)(dad) = (c(ca)cc)dad = (cbc^3)(dad) = \gamma^2(a)\delta(a) = \\ &= xay^{-1}a^{-1} = x\alpha(y^{-1}) = xx^{-1} = 1 \end{aligned}$$

y

$$[aca, c^2] = acac^2a^{-1}c^{-1}a^{-1}c^2 = a\gamma(a)\gamma^{-1}(a^{-1})\gamma^2(a^{-1}) =$$

$$= abb^{-1}ya^{-1}x^{-1} = \alpha(y)x^{-1} = 1$$

entonces  $f : K \rightarrow G$  es un homomorfismo. Es similar rutina probar que existe un homomorfismo  $g : G \rightarrow K$  tal que  $x \mapsto v^2uv^2u^{-1}$ ,  $y \mapsto (u^{-1}w)^2$ ,  $a \mapsto u$ ,  $b \mapsto vuv^{-1}$ ,  $c \mapsto v$  y  $d \mapsto w$ .

Por los isomorfismo  $f$  y  $g$  se sigue que tal isomorfismo existe.  $\square$

**Teorema 14.** *Sea  $\epsilon$  (respectivamente  $\xi$ ) la restricción de  $\gamma$  (respectivamente  $\delta$ ) a  $F_2$ . Entonces  $Aut(F_2)$  está generado por  $\alpha$ ,  $\epsilon$  y  $\xi$  con relaciones*

$$\alpha^3 = \epsilon^4 = \xi^2 = (\epsilon\xi)^2 = \epsilon^2\alpha\epsilon^2\xi\alpha\xi = [\alpha\epsilon\alpha, \epsilon^2] = 1.$$

*Demostración.* Es una conclusión del teorema 13, el lema 16 y del hecho que el isomorfismo  $\phi \circ f : K \rightarrow Aut(F_2)$  envía  $u \mapsto \alpha$ ,  $v \mapsto \epsilon$  y  $w \mapsto \xi$   $\square$

# Capítulo 3

## Geometría de $Out(F_2)$

### Acciones de $Out(F_2)$ en $\mathbb{H}^2$ .

#### Gráficas

**Notación 2.**  $F_2$  continuará siendo el grupo libre en dos generadores  $x$  e  $y$ ,  $Out(F_2) \cong Gl_2(\mathbb{Z})$  y por  $\mathbb{H}^2$  nos referimos a  $\{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ .

En esta sección vamos a desarrollar un poco de teoría de gráficas con la intención de obtener una presentación más del grupo  $Gl_2(\mathbb{Z})$ . Con anterioridad se obtuvo como el cociente de los automorfismos de  $F_2$  módulo los automorfismos internos de  $F_2$ , posteriormente se obtuvo como un producto semidirecto, ahora, la intención es obtenerlo como una amalgama de grupos.

**Definición 25.** [Gráfica]

Una gráfica  $\Gamma$  consiste de conjuntos  $V = vert(\Gamma)$  y  $A = arist(\Gamma)$  y de dos mapeos

$$\begin{aligned} A &\rightarrow V \times V \\ e &\mapsto (o(e), t(e)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ e &\mapsto \bar{e} \end{aligned}$$

satisfaciendo que para cada  $e \in A$ ,  $\bar{\bar{e}} = e$  que  $\bar{e} \neq e$  y que  $o(e) = t(\bar{e})$ .

**Observación 3.** Usualmente llamamos a los conjuntos  $V$  y  $A$  como vértices y aristas de  $\Gamma$  respectivamente. Cuando se quiere ser más explícito en cuanto

al conjunto  $A$  lo describimos como  $A = A^+ \cup A^-$  para hacer referencia explícita a lo que identificamos como una orientación, así, si  $e \in A^+$ , entonces  $\bar{e} \in A^-$ .

**Definición 26.** [Subgráfica]

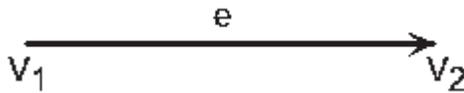
Una subgráfica  $\Gamma'$  con vértices  $V'$  y aristas  $A'$ , de una gráfica  $\Gamma$  es un subconjunto de  $\Gamma$  que satisface  $V' \subseteq V$ ,  $A' \subseteq A$  y que las operaciones gráfica de  $\Gamma'$  coincide con la restricción de las de  $\Gamma$ .

**Definición 27.** [Realización de una gráfica]

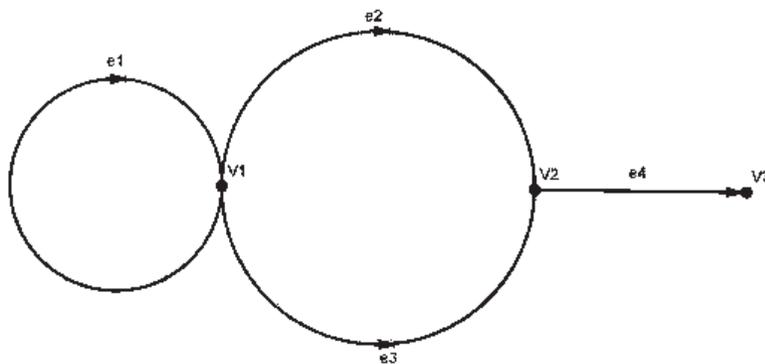
La realización de una gráfica  $\Gamma$  es un complejo CW de dimensión uno, en donde  $V$  son las cero celdas,  $A$  son las uno celdas y cada arista  $e$  comienza en  $o(e)$  y termina en  $t(e)$ .

Usualmente una gráfica está representada por un diagrama en el cual los vértices son un punto y los aristas son una línea uniendo vértices con su orientación especificada.

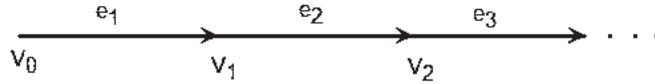
**Ejemplo 16.** Considere  $V = \{v_1, v_2\}$ ,  $A = \{e, \bar{e}\}$ , entonces  $\Gamma$  luciría como



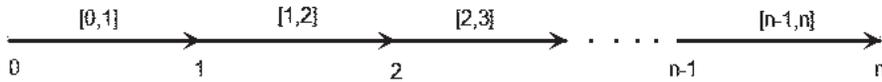
**Ejemplo 17.** Considere  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $A^+ = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , una posibilidad para  $\Gamma$  sería



**Ejemplo 18.** Considere  $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ ,  $A^+ = \{e_1, e_2, \dots\}$  entonces  $\Gamma$  puede lucir como



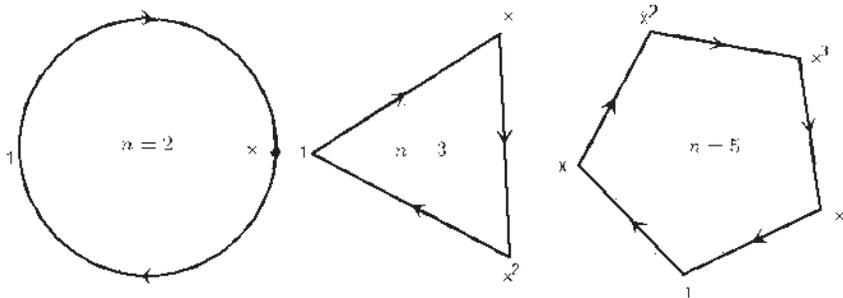
**Definición 28.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ - Definimos la gráfica  $P_n$  como la gráfica con vértices  $V = \{0, 1, \dots, n\}$ , aristas  $A^+ = \{e_i = [i - 1, i] | 0 < i \leq n\}$  y orientación definida por  $o(e_i) = i - 1$  y  $t(e_i) = i$  tal que  $P_n :=$



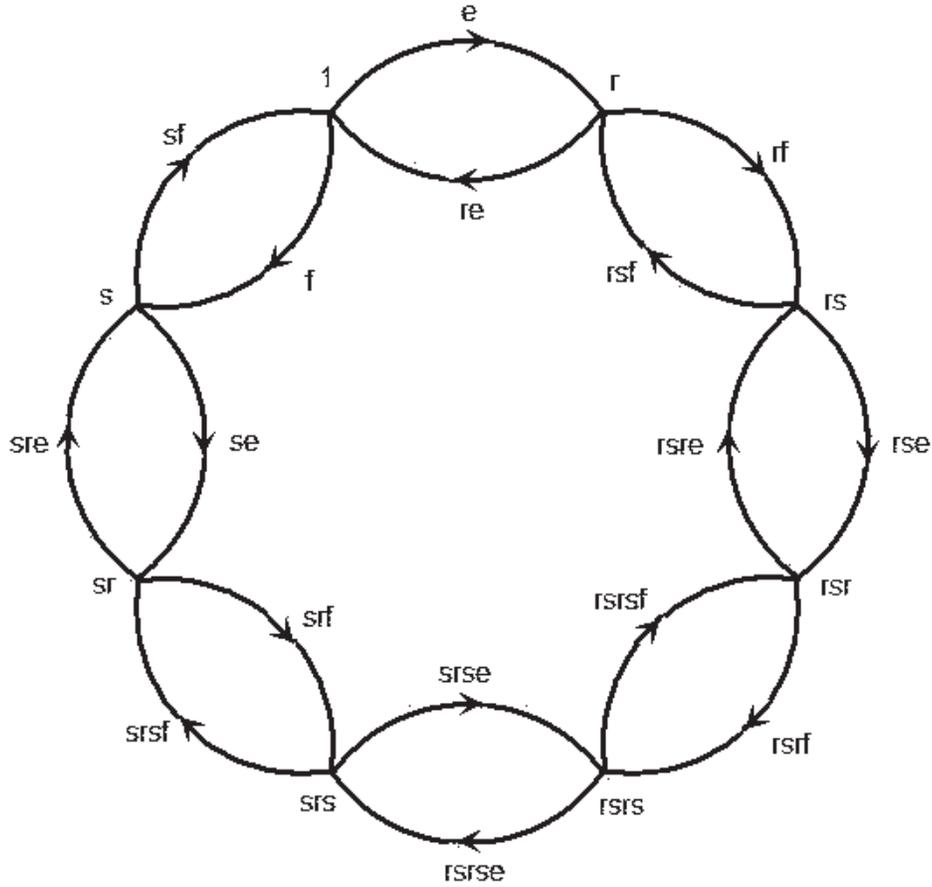
**Definición 29.** [Gráfica de Cayley]

Consideremos un grupo  $G$  y  $S \subseteq G$ . Por  $\Gamma(G, S)$  nos referimos a la gráfica que consta de vértices  $V = G$ , los aristas son  $A^+ = (G \times S)$  y tal que para cada  $(g, s) \in G \times S$  se tiene  $o(g, s) = g$  y  $t(g, s) = gs$ .

**Ejemplo 19.** Consideremos el grupo  $G = \langle x | x^n \rangle$  y como subconjunto  $S = \{x\}$ . Entonces tenemos que  $\Gamma(G, S)$  luce como:



**Ejemplo 20.** Consideremos el grupo  $G = \langle \alpha, \beta | \alpha^2 = \beta^2 = 1, (\alpha\beta)^2 \rangle$  que es otra presentación del grupo diédrico  $D_8 = \langle r, s | r^2 = s^2 = 1, (rs)^4 = 1 \rangle$ . Sea  $S = \{r, s\} \subseteq D_8$  consideramos  $e = (1, r)$  y  $f = (1, s)$  en  $G \times S$ , la realización de la gráfica  $\Gamma(G, S)$  es la siguiente:



**Definición 30.** [Morfismo de gráficas]

Un morfismo  $\varphi$  de gráficas es una aplicación que manda aristas en aristas, vértices en vértices y que es compatible con las operaciones de gráficas. Un morfismo de gráficas es inyectivo si es inyectivo en vértices y en aristas, es suprayectivo si lo es en vértices y en aristas. Un morfismo de gráficas es un isomorfismo si y sólo si es inyectivo y suprayectivo.

**Definición 31.** [Camino]

Un camino (de longitud  $n$ ) en una gráfica  $\Gamma$  es un morfismo

$$C : P_n \rightarrow \Gamma$$

**Notación 3.** Usualmente al hablar de un camino  $C$  en una gráfica  $\Gamma$ , nos referimos a la sucesión  $(e_1, \dots, e_n)$  de aristas en  $\Gamma$  tales que  $e_j = C([j-1, j])$ ,  $o(e_{j+1}) = t(e_j)$ ; denotamos a  $c(j) = v_j$  y diremos que  $C$  va de  $v_0$  a  $v_n$ .

**Definición 32.** [Ciclo]

Un ciclo  $S$  (de longitud  $n$ ) en una gráfica  $\Gamma$  es un camino tal que  $v_0 = v_n$ . También se puede pensar en  $S$  como un isomorfismo de la gráfica del cíclico de orden  $n$ .

**Definición 33.** [Regresos]

En un camino  $C = (e_1, \dots, e_m)$  un par de la forma  $(e_i, e_{i+1})$  se llama regreso si  $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, \bar{e}_i)$ .

**Proposición 8.** Todo camino  $C : P_n \rightarrow \Gamma$  se puede expresar como un camino libre de regresos (de igual o menor longitud).

*Demostración.* Si  $C$  es libre de regresos no hay nada que probar.

Sea  $C = (e_1, \dots, e_n)$  camino en  $\Gamma$  de  $v_0$  a  $v_n$ . Sea  $C' = (e_1, \dots, e_i, e_{i+1}, e_{i+2})$  de manera que  $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, \bar{e}_i)$ , en donde este es el primer regreso del camino original  $C$ . Ahora  $C'$  es un camino de  $v_0$  a  $v_{i+2}$  además  $t(e_{i+1}) = t(\bar{e}_i) = v_i = o(e_{i+2})$ , de manera que podemos reducir  $C'$  a  $\tilde{C} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+2})$  continuando el proceso por inducción se obtiene el resultado.  $\square$

A partir de ahora cuando hablemos de caminos vamos a suponer, a menos que se diga explícitamente lo contrario, que los caminos son libres de regreso.

**Definición 34.** [Gráfica conexa]

Una gráfica  $\Gamma$  se dice que es conexa si para cualesquiera dos vértices existe un camino que los une. Las máximas subgráficas conexas de  $\Gamma$  se llaman las componentes conexas de la gráfica  $\Gamma$ .

**Definición 35.** [Árbol]

Un árbol  $T$  es una gráfica conexa y sin ciclos.

**Proposición 9.** Dados  $v$  y  $w$  vértices en un árbol  $T$  existe un único camino sin regresos (geodésica) de  $v$  en  $w$ .

*Demostración.* La existencia de tal camino se sigue por la conexidad de  $T$ .

Para ver la unicidad debemos ver que  $C = (e_1, \dots, e_m)$  es inyectivo en  $T$ .<sup>1</sup>  $P_n$  es una gráfica combinatoria, es decir, no posee ciclos de longitud dos. Sean  $v_0 = C(0) = v$ ,  $v_n = C(n) = w$  y  $v_j = C(j)$ . Basta ver que  $v_0, \dots, v_n$

<sup>1</sup>Consulte [Ser]

son distintos. Supongamos que  $v_i = v_j$  con  $j - i > 0$  el mínimo índice para el que son iguales, luego  $(e_{i+1}, \dots, e_j)$  es un ciclo en  $T$  contradiciendo que  $T$  es árbol.

Ahora, si  $v \neq w$  sean  $C = (e_1, \dots, e_m)$  y  $C' = (e'_1, \dots, e'_n)$  caminos distintos de  $v$  a  $w$ . Si  $e_m \neq e'_n$  entonces el camino  $(e_1, \dots, e_m, e'_n, \dots, e'_1)$  sería un camino de  $v$  en  $v$ , luego  $e_m = e'_n$ , ahora por inducción  $(e_1, \dots, e_{m-1})$  y  $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$  satisfacen que  $e_{m-1} = e'_{n-1}$  y continuando el proceso se concluye que  $C = C'$ .  $\square$

## El teorema de Serre

Hasta ahora solo hemos definido gráficas y algunas de sus propiedades, lo siguiente es definir la acción de un grupo sobre una gráfica y ver un resultado obtenido de de ello que es el teorema de Serre que especifica cuando un grupo es amalgama de otros grupos.

**Definición 36.** *Un grupo  $G$  actúa en una gráfica  $\Gamma$  si existen acciones  $G \times V \rightarrow V$  y  $G \times A \rightarrow A$  que sean compatibles con las operaciones de gráfica. ( $V$  y  $A$  siguen siendo aristas y vértices).*

**Ejemplo 21.** *Para un grupo  $G$  y  $S \subseteq G$  considere la gráfica  $\Gamma = \Gamma(G, S)$  definimos una acción de  $G$  en  $\Gamma$  por*

$$\begin{aligned} G & \times V \rightarrow V \\ (g, v) & \mapsto gv \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G \times A & \rightarrow A \\ (g, (g', s)) & \mapsto (gg', s). \end{aligned}$$

**Definición 37.** *[Inversión]*

*Dado  $G$  actuando en  $\Gamma$  se define una inversión como un par  $(g, e) \in G \times A^+$  tal que  $ge = \bar{e}$ . Equivalentemente decimos que  $G$  no preserva la orientación de  $\Gamma$ .*

**Definición 38.** *[Gráfica cociente]*

*Sea  $G$  actuando sin inversión en una gráfica  $\Gamma$ . Definimos  $G/\Gamma$  como la gráfica cociente, en donde  $\text{vert}(G/\Gamma) = V/G$  y  $\text{arist}(G/\Gamma) = A/G$  donde  $V$  y  $A$  son los vértices y aristas de  $\Gamma$  respectivamente.*

**Definición 39.** [Región fundamental]

Sea  $G$  actuando en  $\Gamma$ . Una región fundamental de  $\Gamma$  módulo  $G$  es una subgráfica  $Y$  de  $\Gamma$  tal que  $Y \rightarrow G/\Gamma$  es isomorfismo de gráficas.

**Teorema 15.** Sea  $G$  actuando en una gráfica  $\Gamma$ ,  $Y = v \xrightarrow{e} w$  un camino inyectivo en  $\Gamma$ . Asumamos que  $Y$  es una región fundamental de  $G/\Gamma$ . Sean  $G_v$ ,  $G_w$  y  $G_e = G_{\bar{e}}$  los estabilizadores de  $v$ ,  $w$  y  $e$  bajo la acción de  $G$ . Entonces  $\Gamma$  es conexo si y sólo si  $G$  está generado por  $G_v \cup G_w$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma'$  la componente conexa que contiene a  $Y$ . Sean  $G' = \{g \in G \mid g\Gamma' = \Gamma'\}$  y  $G'' = \langle G_v \cup G_w \rangle$  en donde  $\langle \rangle$  indican generación.

Sea  $h \in G_v \cup G_w$ , si  $h \in G_v$  entonces  $Y$  y  $hY$  tienen, por lo menos, al vértice  $v$  en común (para  $h \in G_w$ ,  $w$  sería el vértice en común). Como  $Y \subseteq \Gamma'$  y  $Y \cap hY \neq \emptyset$  entonces  $hY \subseteq \Gamma'$ , como además  $Y$  es región fundamental concluimos que  $h\Gamma' = \Gamma'$ , así,  $h \in G'$  es decir  $G'' \subseteq G'$ .

Por otro lado  $G''Y$  y  $(G \setminus G'')Y$  son gráficas ajenas cuya unión es  $\Gamma$ .  $\Gamma' \subseteq G''Y$  puesto que  $Y$  es fundamental y  $\Gamma'$  es cerrado bajo la permutación de componentes de  $\Gamma$ , luego  $G' \subseteq G''$  es decir  $G' = G''$ .

Concluimos que  $\Gamma$  es conexa si y sólo si  $\Gamma = \Gamma'$  o bien  $G = G' = G''$ .  $\square$

**Teorema 16.** Bajo las misma hipótesis del teorema 15 una gráfica  $\Gamma$  no contiene ciclos si y sólo si  $G_v *_{G_e} G_w \rightarrow G$  es inyectiva.

*Demostración.* Asumamos que  $\Gamma$  contiene un ciclo  $C = (w_0, \dots, w_n)$  para  $n \geq 1$ . Equivalentemente  $o(C) = t(C)$ .

Sea  $w_i = h_i e_i$  en donde  $e_i$  es  $e$  o bien  $\bar{e}$  y  $h_i \in G$ .

Ahora  $Y \cong G/\Gamma$  y puesto que  $t(e_i - 1) = o(e_i) = t(\bar{e}_i)$  además  $o(e_{i-1})$  está en la misma órbita de  $o(\bar{e}_i)$  se satisface, en el cociente, que  $\bar{e}_i = \bar{e}_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Hagamos  $P_i = o(e_i) = t(e_{i-1})$  la acción de  $G$  es compatible con  $o$  y con  $t$  de manera que

$$h_i P_i = h_i o(e_i) = o(h_i e_i) = t(h_{i-1} e_{i-1}) = h_{i-1} t(e_{i-1}) = h_{i-1} P_i$$

por lo que  $h_i = h_{i-1} g_i$  con  $g_i \in G_{P_i}$ .

Notemos además que si  $g_i \in G_e$  entonces los hechos  $\bar{e}_i = e_{i-1}$  y que  $h_i =$

$h_{i-1}g_i$  implican  $\overline{h_i y_i} = h_{i-1}y_{i-1}$ , esto es equivalente a tener un regreso en el camino de la forma  $(y_{i-1}, y_i) = (\overline{y_i}, y_i)$ , pero, por hipótesis, no hay regresos en el camino.

Ahora basados en que  $o(C) = t(C)$ , es decir,  $t(e_n) = P_0$ , repitiendo el proceso anterior en cada uno de los vértices obtenemos

$$h_0 P_0 = h_n P_0 = h_0 g_1 \cdots g_n P_0 \quad (3.1)$$

en donde  $g_1 \cdots g_n \in G_{P_0}$ .

Encontramos así que un camino cerrado  $C$  nos produce una sucesión  $P_0, \dots, P_n$  de vértices que dos a dos satisfacen  $(P_{i-1}, P_i) = (v, w)$  para cada  $i$  y otra sucesión de elementos  $g_i \in G_{P_i} \setminus G_e$  para  $0 \leq i \leq n$  que por (3.1) satisfacen

$$g_0 g_1 \cdots g_n = 1.$$

Por el teorema de estructuras de amalgamas se tiene que  $G_v *_{G_e} G_w \rightarrow G$  no es inyectiva.  $\square$

## Aplicaciones

Consideramos el grupo  $G = GL_2(\mathbb{Z})$ , de acuerdo al teorema de Serre visto en la sección anterior si tenemos pensado en ver a  $GL_2(\mathbb{Z})$  como una amalgama es preciso hacer actuar a  $GL_2(\mathbb{Z})$  en algún árbol, hacer notar que esta tiene una región fundamental homeomorfa a la gráfica  $P_1$  y conocer los estabilizadores de los vértices y de la arista de esta región. Precisamente esto es lo que hacemos a continuación.

Consideramos  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ , el semiplano superior complejo y hacemos actuar  $GL_2(\mathbb{Z})$  en  $\mathbb{H}^2$  mediante

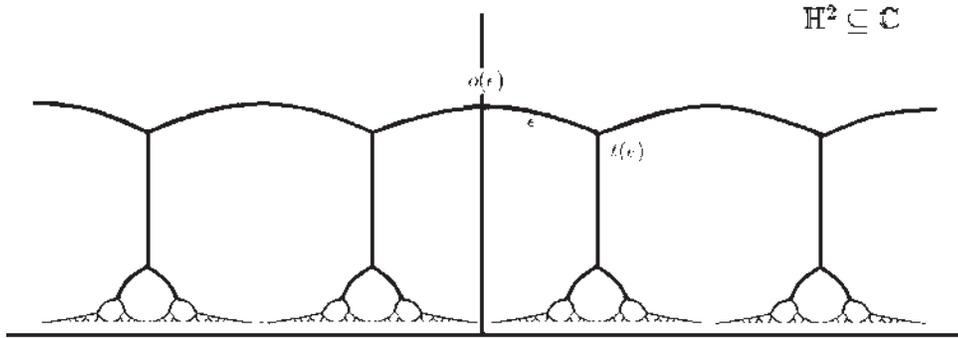
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & ad - bc = 1 \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & ad - bc = -1 \end{cases}$$

es preferible pensar en la acción anterior considerando  $z = x + iy$  ( $\bar{z} = x - iy$ ) tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x + iy) = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2 + iy}{(cx + d)^2 + c^2 y^2}$$

Ahora consideramos  $Y = \{(\cos \theta, \sin \theta) | \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2\} \subseteq \mathbb{H}^2$  que se puede pensar como una realización de una gráfica con 2 vértices y un solo arista  $e$  con  $v = o(e) = i$ ,  $w = t(e) = 1/2(1 + i\sqrt{3})$ . Consideramos  $T = GY$  es una gráfica con región fundamental  $Y$ , queremos probar que  $T$  es un árbol y en virtud de los teoremas 15 y 16 obtener a  $G$  como una amalgama.

La gráfica  $T$ , luce más o menos como:



Calculamos los estabilizadores de los vértices bajo la acción del grupo  $G$ . El cálculo expresado aquí explícitamente es sólo para el estabilizador  $G_v$ . Los estabilizadores  $G_w$  y  $G_e$  solamente se escriben, los calculos son análogos para ellos.

Sea  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_v$ , entonces se satisface

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (0 + i) = \frac{bd + ac + i}{d^2 + c^2} = i. \quad (3.2)$$

Consideremos el caso en que  $ad - bc = 1$ , por estar  $g \in G_v$  tenemos, reinterpretando 3.2, las condiciones  $d^2 + c^2 = 1$  y  $bd + ac = 0$ . Hay que diferenciar aquí otros dos casos

- Si  $c = 0$ , entonces  $ad = 1$ ,  $d^2 = 1$  y  $bd = 0$  que nos llevan a establecer  $d = \pm 1$ ,  $a = \pm 1$  y  $b = 0$ , es decir la matriz

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si  $d = 0$ , entonces  $-bc = 1$ ,  $c^2 = 1$  y  $ac = 0$  que nos llevan a establecer  $c = \pm 1$ ,  $b = \mp 1$  y  $a = 0$  es decir la matriz

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora si  $ad - bc = -1$  tenemos nuevamente interpretando 3.2, las condiciones  $d^2 + c^2 = 1$  y  $bd + ac = 0$ . Al igual que se hizo anteriormente analizamos los casos

- Si  $c = 0$ , entonces  $ad = -1$ ,  $d^2 = 1$  y  $bd = 0$  que nos llevan a establecer  $d = \pm 1$ ,  $a = \mp 1$  y  $b = 0$ , es decir la matriz

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si  $d = 0$ , entonces  $bc = 1$ ,  $c^2 = 1$  y  $ac = 0$  que nos llevan a establecer  $c = \pm 1$ ,  $b = \pm 1$  y  $a = 0$  es decir la matriz

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de esta forma obtenemos el grupo  $G_v$  dado por

$$G_v = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \simeq D_4.$$

Haciendo calculos similares para obtener  $G_e$  y  $G_w$  tenemos

$$G_e = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \simeq D_2$$

y

$$G_w = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \right. \\ \left. \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \simeq D_6.$$

Para cada matriz  $GL_2(\mathbb{Z})$ , tenemos por el algoritmo de euclides sobre  $\mathbb{Z}$  que esta es equivalente a una matriz triangular superior empleando únicamente las operaciones

- Intercambiar dos renglones

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sumar el segundo renglón al primer renglón

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Restar el segundo renglón al primer renglón

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

además la matriz  $S^{-1}$  la podemos obtener como  $rsr$ , en donde  $r$  es la matriz asociada a multiplicar el segundo renglón por  $-1$ , dada como

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

así que  $GL_2(\mathbb{Z})$  está generado por  $t$ ,  $s$  y  $r$ .

Notemos que  $t \in G_e$ ,  $r \in G_v$  y que

$$\begin{aligned} srt &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G_w \end{aligned}$$

de manera que  $G_v \cup G_w$  generan a  $G$ , por el teorema 15 tenemos que  $T = GY$  es conexo.

Por último, para ver que  $T$  es un árbol necesitamos que este no contenga ciclos. Es posible, mediante traslación, llevar cualquier ciclo en la gráfica  $T$  a un ciclo que este contenido entre  $-1/2$  y  $1/2$  en el eje real. Luego es importante resaltar que un ciclo no puede tener punto final y punto inicial en diferentes órbitas, por lo que el punto inicial ( y también el final) deben estar en la misma órbita, ya sea la de  $v$  o la de  $w$ .

Sea  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$  y supongamos que para  $z \in Y$ , y  $gz \in Y$ .

- Si  $c^2 \neq d^2$ , entonces por el hecho de que  $|z| = 1$  se tiene  $x^2 + y^2 = 1$ , para  $z = x + iy$ . Luego  $|dz + c| = |cz + d|$  y se comprueba facilmente que  $|(c^2 - d^2)gz - (ac - bd)| = 1$ . Luego se tiene que  $|gz - \frac{ac - bd}{c^2 - d^2}| = \frac{1}{|c^2 - d^2|}$ , es decir,  $gz$  está en un círculo con centro en  $\frac{(ac - bd)}{(c^2 - d^2)}$  y de radio  $r = \frac{1}{|c^2 - d^2|}$ . Como  $gz \in Y$ ,  $1/2 \leq \sqrt{3}/2 \leq \text{Im}(gz)$  entonces  $r \geq 1/2$  es decir  $|c^2 - d^2| \leq 2$  así que la única posibilidad es  $|c^2 - d^2| = 1$ . Como  $gz \in Y$  y  $r = 1$ , el centro del círculo está en 1 o bien en 0 y así  $ac - bd = 0$  o 1. De manera que  $\text{Re}(gz) = 0$  entonces el círculo cruza al eje imaginario y forza a que  $ac - bd = 0$ , en cuyo caso  $g$  tiene que ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir que  $g$  está en el estabilizador de  $v$  y así  $z = v = gz$ .

- Si  $c^2 = d^2$ , entonces  $c^2 = 1 = d^2$  y la paridad de  $a$  y  $b$  es contraria, de manera que  $2\text{Re}(gz) = ac + bd$  es un número impar, no cero. Luego  $gz \in Y$  implica que  $ac + bd = 1$  y por lo tanto  $gz = w$  y  $g \in G_w$

Así que  $T$  no puede contener ciclos y por lo tanto es un árbol, de acuerdo al teorema de Serre 16 se tiene el siguiente resultado

**Teorema 17.** *El grupo  $GL_2(\mathbb{Z})$  es una amalgama de  $D_4$  y  $D_6$  por  $D_2$ . Es decir*

$$GL_2(\mathbb{Z}) = D_4 *_{D_2} D_6.$$

## Conclusiones.

Una vez que se ha obtenido a  $GL_2(\mathbb{Z})$  como una amalgama se tienen consecuencias interesantes, como es el caso de la torsión de este grupo. Recordemos que los elementos de torsión,  $\tau G$ , de un grupo  $G$  se define como el conjunto de elementos en  $G$  de orden finito.

$$\tau G = \{g \in G | x^n = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces un elemento  $g \in GL_2(\mathbb{Z})$  tiene orden finito (i.e., es de torsión) si y sólo si es conjugado a algún elemento de torsión de  $G_v$  o  $G_w$ . Esto es consecuencia de la forma normal en una amalgama. [Rot] Así conociendo los elementos de torsión de  $D_4$  y los de  $D_6$  será posible estudiar los elementos de torsión de  $GL_2(\mathbb{Z})$ .

# Bibliografía

- [Dicks] W. Dicks, M. J. Dunwoody: *Groups acting on graphs*, Cambridge, Cambridge University, (1989).
- [Muk] J. Munkres: *Topología*, 2 ed., Prentice Hall, Madrid (2002).
- [Rot] J. Rotman: *An introduction to the theory of groups*, 4 ed., Springer-Verlag, Berlín (1995).
- [Rot2] J. Rotman: *An introduction to homological algebra*, Academic Press INC., U.S.A. (1979).
- [Ser] J. Pierre. Serre: *Trees*, Springer-Verlag, Berlín (1980).
- [1924] J. Nielsen: *Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen*, Danske Vid. Selsk.Mat.-Fys. Medd.; 1924; 12: 1-29.
- [1982] J. Stallings: *Topologically Unrealizable automorphism of free groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 84, 1982 AMS.
- [1983] M. Scharlemann, C. Squier: *Automorphisms of the free group of rank two without finite orbits*, Contemporary Mathematics vol. 20, 1983 AMS.
- [1983(a)] D. Dokovic: *The structure of the automorphism group of a free group on two generators*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 88, 1983 AMS.
- [1987] R. C. Lyndon: *Problems in combinatorial group theory*, Combinatorial Group Theory and Topology, Annals of Mathematics Studies 111, Princeton University Press, NJ, 1987.
- [2002] M. Bestvina: *The Topology of  $Out(F_n)$* , ICM 2002, Vol. III, 13

- [2006] Ji. Lizhen: *An introduction to arithmetic groups*, Zhejiang University, China and Dept. of math. University of Michigan, U.S.A. 2006.
- [2007] K. Vogtman *Actions of the group of outer automorphisms of a free group*, Conference on Geometry and the Imagination in honor of William P. Thurston, Princeton, U.S.A. 2007