



Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

**Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas**

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

TEORÍA DE GRUPOS Y
CLASIFICACIÓN DE HADRONES

T E S I S

SOMETIDA COMO REQUISITO AL TRAMITE
PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MORELIA MICHOCÁN, MARZO 2009

p r e s e n t a

ITZIA NALLELY GUZMÁN MEJÍA

Asesores

Dra. Tatjana Vukasinac
Facultad de Ingeniería Civil
U M S N H

Dr. Idrish Huet
Instituto de Física y Matemáticas
U M S N H

Amicus Certus in inceta cernitu.

Agradecimientos

Dedico esta trabajo a todas aquellas personas que tomen esta tesis para leerla no en la manera de querer entender su contenido que me llevo tanto tiempo entender y mucho mucho mucho tiempo redactar, sino solo para leer los agradecimientos y la introducción.

Agradesco a mis papas Oscar Guzmán y Silvia Mejía, así como también a toda mi familia quienes fueron un gran apoyo.

También agradezco a mis asesores Tatiana e Idrish que fueron parte esencial en este trabajo.

A mis compañeros de la facultad y anexos.

Morelia, Michoacan
Marzo, 2009

Itzia Guzman

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	v
1. Elementos de teoría y representaciones lineales de grupo	1
1.1. Definición de grupo	1
1.2. Grupo simétrico	2
1.3. Subgrupo	3
1.4. Clases de conjugación	3
1.5. Partición	4
1.6. Representaciones de grupo	5
1.7. Representaciones irreducibles	8
1.8. Producto directo de representaciones	10
2. Representaciones irreducibles de S_n	13
2.1. Diagramas de Young	13
2.2. Funciones base	14
2.3. Método tensorial	16
3. Aspectos de $SU(2)$	19
3.1. Introducción a grupos de Lie	19
3.1.1. Transformaciones infinitesimales	20
3.2. $SU(2)$	22
3.2.1. Matrices de Pauli	23
3.3. Representaciones de $SU(2)$	23
3.4. Representación conjugada	24
4. Aspectos de $SU(3)$	25
4.1. Grupo $SU(3)$	25
4.2. Representación fundamental	26
4.3. Una representación totalmente simétrica	28
4.4. Diagrama de pesos de las representaciones irreducibles de $SU(3)$	29
4.5. Representación conjugada	34

5. Clasificación de hadrones	37
5.1. Hadrones	38
5.2. Modelo de quarks	42
5.2.1. Bariones	43
5.2.2. Mesones	43
5.3. Funciones de onda de los hadrones	44
5.4. Color	45
Apendice A	48
Apendice B	50
Bibliografía	52

Introducción

Cuando nos ponemos a pensar y tratamos de entender y describir la naturaleza, una de las interrogantes que aún seguimos sin saber con certeza es; ¿cuáles son las componentes fundamentales que constituyen la materia?.

Una de las primeras ideas filosóficas que se plantearon fue hecha por Demócrito (460 a.C.-370 a.C.) quien pensaba que todo lo que nos rodeaba estaba compuesto por átomos, idea que se conservó muchos años hasta que Thompson, alrededor de 1897, descubrió el electrón y un poco mas tarde Rutherford descubre el núcleo atómico y propone un modelo donde se consideraba que el núcleo estaba compuesto por partículas cargadas positivamente a las que posteriormente se les llamo protones. Cuando tiempo después Chadwick descubre el neutrón se observa que esta partícula junto con el protón son las que conforman el núcleo atómico. Con los conocimientos que se tenían en ese entonces, como los elementos químicos de la tabla periódica, se formuló la pregunta cómo era posible que el helio, por ejemplo, pueda tener un núcleo estable si su composición es de dos protones y dos neutrones?. Para explicar este hecho se introdujo una nueva fuerza: la fuerza nuclear fuerte que solo interactúa a corta distancia.

La teoría cuántica de campos se basa en la suposición de que cuando tenemos una interacción a distancia está lleva asociada un intercambio de partículas por lo que se procedió a buscar dichas partículas. La primera partícula que se detecto fué el muón esta partícula no interactúa fuertemente, posteriormente se empezaron a detectar muchas partículas que sí lo hacian como los piones, kaones, partículas eta, partículas xi,.

Cuando se intento clasificar las primeras partículas detectadas creyendo que estas eran las elementales, se consideraron sólo las propiedades de masa, carga eléctrica, spin, lo que no fue suficiente cuando se empezaron a descubrir nuevas partículas. Por lo que se vio en la necesidad de introducir nuevas propiedades como la extrañeza, número bariónico, isospín, hipercarga, momento angular magnético y paridad, para poder clasificarlas. Curiosamente hipercarga e isospín de cada partícula tienen valores determinados y por alguna razón estos extrañamente corresponden a los diagramas de peso de representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$ (multipletes) que nadie podía explicar.

El propósito de agrupar hadrones en multipletes era encontrar una simetría mayor que permitiera descubrir relaciones más estrechas entre estas partículas. Por ejemplo, la similitud entre la masa del protón y del neutrón puso de manifiesto la idea de isospín. Este número cuántico distingue entre los dos estados de carga del nucleón (protón o neutrón). Si las masas de protón y neutrón fueran idéntica la simetría sería exacta; sin embargo, las fuerzas electromagnética y débil alteran esta simetría separando las masas de los nucleones. La separación, en este caso, es pequeña porque la fuerza responsable de

la ruptura es también pequeña comparada con la fuerza fuerte. Este mismo argumento permite entender la ligera desviación entre las masas de los piones y también entre los mesones K . La mayor separación entre las masas de los piones y los mesones K se pensó, podría deberse al rompimiento de una simetría mayor asociada a diferentes componentes de la fuerza nuclear fuerte.

Alrededor el 1963 Murray Gell-Mann propone un modelo que podía explicar la clasificación de estas partículas (los hadrones) y más aún predecir nuevas partículas, por ejemplo predijo que en una clasificación de los bariones de espín $3/2$ debería existir una partícula, la Ω^- . Su descubrimiento en 1964 llevó a la aceptación de este modelo. En 1969 se le otorgó el Premio Nobel de Física.

Dicho modelo consistía, en un principio considerar sólo tres partículas subatómicas más elementales a las que llamo quarks, y dichas partículas son las que constituyen a los hadrones. Los quarks se distinguen por el hecho de tener diferente sabor y color (no en el sentido convencional). Estos sabores los asoció con vectores base de la representación fundamental del grupo $SU(3)$ y el producto tensorial de representaciones irreducibles genera las representaciones de dimensiones más grandes en las cuales los hadrones encajan exactamente.

A lo largo de esta tesis, la cual comprende 5 capítulos, se describe y explica este modelo. En el primer capítulo se explica detalladamente lo que es un grupo, sus propiedades y las propiedades de simetría, también se explica lo que es una representación de grupo, una representación irreducible de grupo, el producto tensorial de representaciones irreducibles. En el capítulo segundo se analiza el grupo S_n y como es posible asociar diagramas de Young a representaciones irreducibles tomando en cuenta las propiedades de simetría. En el capítulo tres se hace una introducción a un tipo especial de grupo: los grupos de Lie y se explica como es posible estudiar este tipo de grupos mediante el álgebra que este lleva asociada, para fines de entender el modelo de quarks se empiezan a estudiar un tipo de grupos de Lie, los grupos especiales unitarios en un caso más particular el grupo $SU(2)$ y se describen sus propiedades, generadores, álgebra, representaciones, etc. En el capítulo cuarto se estudia el grupo $SU(3)$, sus propiedades, generadores, álgebras, representaciones irreducibles tanto normal como conjugadas, diagramas de peso, etc. Para concluir posteriormente en el capítulo cinco se finaliza la explicación del modelo de quark.

Capítulo 1

Elementos de teoría y representaciones lineales de grupo

1.1. Definición de grupo

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una **operación binaria** es una aplicación arbitraria de la forma $\phi : X \times X \longrightarrow X$.

Definición 1.1.2. Un **grupo** G es un conjunto no vacío de elementos con una operación binaria ϕ que actúa en estos elementos de la forma $\phi(g_1, g_2) := g_1 g_2$ y cumple las siguientes propiedades:

1. (Asociatividad) La composición de cualesquiera tres elementos en G es asociativa:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \in G.$$

2. (Existencia de la identidad) Existe un único elemento en G llamado identidad y denotado por e tal que:

$$\forall g \in G, e \in G, ge = eg = g.$$

3. (Existencia del inverso) Todo elemento $g \in G$ tiene un único inverso, denotado por $g^{-1} \in G$ tal que

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e.$$

Definición 1.1.3. El número de elementos de un grupo define su orden, que se denota por $|G|$.

Ejemplo 1. El conjunto de biyecciones de n objetos con la operación de composición forma un grupo.

Tomemos el conjunto de todas las biyecciones $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$, recordando que es cerrado bajo la composición. Tenemos que $e \in G$, por ser biyectivo. Además $\forall \alpha \in G$ se tiene que $\exists \alpha^{-1} \in G$, por ser inyectiva. Finalmente $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, porque la composición es asociativa.

1.2. Grupo simétrico

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto finito no vacío, una **permutación** es una biyección $\pi : X \longrightarrow X$ es decir $\pi : i \longmapsto \pi(i)$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} . \quad i_k = \pi(k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Las permutaciones se multiplican mediante la regla de composición de funciones, por ejemplo para cualesquiera dos permutaciones

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

su producto es

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{array} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Nota 1. Las permutaciones de n elementos forman un grupo al que llamamos grupo simétrico y denotamos por S_n . El orden de este grupo es $n!$.

Definición 1.2.2. Sea X un conjunto con n elementos. Un **ciclo** de longitud k es una permutación que intercambia cíclicamente k elementos y deja los restantes iguales, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix} := (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k)$$

Ejemplo 2. Todos los elementos de S_3 se escriben como ciclos.

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ (23) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Al multiplicar todos los elementos de S_3 estos pueden ser escritos en una tabla de multiplicación y dicha tabla define de forma abstracta a S_3 .

$\cdot$	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
e	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	e	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	e	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	e	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	e
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	e	(123)

Tabla 1. Tabla de multiplicación del grupo

Nota 2. Es importante mencionar que este grupo no es abeliano, es decir, los elementos de S_3 no conmutan, por ejemplo $(123)(23) = (12)$ y $(23)(123) = (13)$; $(123)(23) \neq (23)(123)$. Por lo que es importante tomar en cuenta el orden en que multiplicamos los elementos.

Definición 1.2.3. Una permutación se llama par si se escribe como un producto de un número par de ciclos de longitud 2 y se llama impar en caso contrario. La paridad de una permutación P la escribimos $\delta_P = (-1)^q$, donde q es el número de permutaciones de longitud dos.

Nota 3. Un ciclo de longitud dos es también llamado transposición.

1.3. Subgrupo

Definición 1.3.1. Un subconjunto $H \subset G$ se llama **subgrupo** de G si:

$$e \in H, \quad h_1, h_2 \in H \implies h_1 h_2 \in H, \quad h \in H \implies h^{-1} \in H$$

Propiedad 1. Todo grupo tiene al menos dos subgrupos triviales que son e y G llamados subgrupos impropios.

Ejemplo 3. El grupo S_3 tiene cuatro subgrupos propios

$$\{e, (12)\}, \{e, (13)\}, \{e, (23)\}, \{e, (123), (132)\} \quad (1.2)$$

1.4. Clases de conjugación

Definición 1.4.1. Los elementos $g_1, g_2 \in G$ son conjugados si existe un tercer elemento $x_0 \in G$ tal que $g_1 = x_0 g_2 x_0^{-1}$ y denotamos como $g_1 \sim g_2$. Además se cumplen las siguientes propiedades.

1. (reflexividad). g_1 es conjugado a sí mismo.

2. (simetría). Si $g_1 = x_0 g_2 x_0^{-1}$ entonces $g_2 = x_0^{-1} g_1 x_0$.

3. (transitividad). Si $g_1 = x_0 g_2 x_0^{-1}$ y $g_2 = y_0 g_3 y_0^{-1}$, entonces $g_1 = z_0 g_3 z_0^{-1}$, $z_0 = x_0 y_0$

Definición 1.4.2. Una clase de conjugación es un conjunto de todos los elementos de un grupo que son conjugados entre sí.

Propiedad 2. Todos los elementos del grupo pertenecen a clases de conjugación C_i disjuntas, es decir que $C_i \cap C_k = \emptyset$, si $i \neq k$. Por ejemplo, tomemos $g \in C_i$ entonces $g \notin C_k$ con $i \neq k$. Consideremos que $g \sim g_i \in C_i$ y $g \sim g_k \in C_k$ entonces $g_i \sim g_k$ por lo que $C_i = C_k$ lo cual es una contradicción porque $i \neq k$. Entonces el grupo G puede ser escrito como la unión disjunta de sus clases de conjugación C_i .

$$G = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \sqcup \dots \sqcup C_k.$$

donde k es el número de clases de conjugación.

Ejemplo 4. El grupo S_3 puede ser escrito como unión de sus clases de conjugación, para ello es necesario que para todos los elementos de grupo, calculemos sus clases de conjugación. Por ejemplo tomemos el elemento $h = (123)$ de S_3 cuya clase de conjugación es $\{(123), (132)\}$, como podemos verificar a continuación:

$$\begin{aligned} e h e^{-1} &= (123) \\ (12) h (12)^{-1} &= (132) \\ (13) h (13)^{-1} &= (132) \\ (23) h (23)^{-1} &= (132) \\ (123) h (123)^{-1} &= (123) \\ (132) h (132)^{-1} &= (123) \end{aligned}$$

De igual manera para todos los elementos de este grupo, obtenemos las clases de conjugación que son:

$$C_1 = \{e\}, C_2 = \{(12), (13), (23)\}, C_3 = \{(123), (132)\}. \quad (1.3)$$

Finalmente tenemos que

$$S_3 = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3. \quad (1.4)$$

Observación 1. Los elementos de una clase de conjugación dada tienen la misma estructura cíclica, es decir que pueden escribirse como un producto del mismo número de ciclos de la misma longitud (sin que éstos tengan elementos en común).

Nota 4. Las clases de conjugación no son subgrupos, a excepción de la identidad e , pues como mostramos solo esta clase contiene a e .

1.5. Partición

Usando la tabla de grupo S_3 podemos ver que un ciclo puede ser escrito como producto de transposiciones que tienen elementos en común, por ejemplo:

$$(123) = (13)(12) = (12)(23) = (23)(13)$$

Pero también una permutación puede ser escrita como producto de ciclos sin elementos en común. Por ejemplo, $e = (1)(2)(3)\dots(n)$ cuya estructura cíclica esta dada por n 1 – ciclos. Si tomamos ahora una permutación donde intercambiamos dos elementos y los restantes estén fijos, la permutación queda como $(12)(3)(4)\dots(n)$ cuya estructura cíclica ahora es un 2 – ciclo y $(n - 2)$ 1 – ciclos.

Para toda permutación de S_n que tiene una descomposición en ciclos disjuntos de S_n se tienen k_1 ciclos de longitud 1, k_2 ciclos de longitud 2,..., k_n ciclos de longitud n . Por lo que es posible escribir una permutación cualquiera que tiene k_i i – ciclos en la manera:

$$\sum_{i=1}^n i k_i = n, \quad k_i \geq 0 \quad (1.5)$$

Una vez claro esto podemos introducir números enteros λ_k definidos como

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= k_1 + k_2 + \cdots + k_n \\ \lambda_2 &= k_2 + \cdots + k_n \\ &\vdots \\ \lambda_n &= k_n\end{aligned}$$

por lo que la relación (1.5) toma la forma

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n \quad (1.6)$$

donde, por definición, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Llamamos al conjunto $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ una partición de n .

Notemos que podemos expresar k_i en términos de λ_j . Es decir existe una correspondencia uno a uno entre $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ y $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, por lo que la matriz que expresa la transformación es invertible. Esto significa que hay una correspondencia uno-uno entre las clases de conjugación (o estructura de ciclos distintas) de S_n y el número de particiones de n .

Ejemplo 5. Veamos un ejemplo para el grupo S_3 . Este grupo tiene tres clases de conjugación, lo que corresponde a tres particiones

$$\begin{aligned}3 &= 3 + 0 + 0 \\ 3 &= 2 + 1 + 0 \\ 3 &= 1 + 1 + 1\end{aligned}$$

Notación 1. Escribiremos las particiones sin incluir los ceros tal como $[3]$ que corresponde a la clase de conjugación C_1 , $[2, 1]$ a la clase de conjugación C_2 y $[1, 1, 1]$ a C_3 .

1.6. Representaciones de grupo

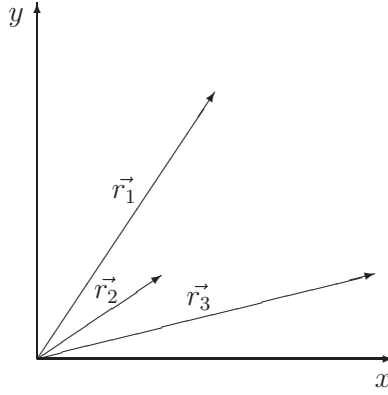
Definición 1.6.1. Sea V un espacio vectorial, G un grupo. Una representación lineal es un homomorfismo $D : G \longrightarrow \text{end}\{V\}$, es decir que $D : g \mapsto D(g)$ tal que

$$\begin{aligned}D(g_1 g_2) &= D(g_1) D(g_2) \\ D(e) &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

Observación 2. Cuando el operador $D(g)$ actúa sobre la base del espacio vectorial de dimensión finita, éste es representado por matrices $n \times n$. A las matrices de $D(g)$ las llamamos representación matricial del grupo, V se llama espacio de representación.

Definición 1.6.2. Una representación es n – dimensional si la dimensión del espacio vectorial V es n .

Ejemplo 6. Una representación 3-dimensional del grupo S_3 puede ser obtenida considerando tres partículas idénticas, que se sitúan en algunos puntos del espacio con vectores de posición respecto al sistema de referencia $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$.



La acción de la permutación (12) a los vectores de posición es:

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de representación es

$$D(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

De la misma manera obtenemos las representaciones de todas las permutaciones del grupo, las cuales son:

$$\begin{aligned} D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D(12) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D(13) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D(132) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

bajo la permutación de cualesquiera partículas.

Definición 1.6.3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y G un grupo, con representaciones $D(g)$ y $D'(g)$. Decimos que estas son equivalentes si es posible encontrar una matriz no singular $M : V \longrightarrow V$ tal que $MD(g) = D'(g)M$.

Definición 1.6.4. Una representación lineal $D(g)$ de un grupo G , se llama unitaria si las matrices de la representación son unitarias, es decir

$$D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$$

Teorema 1.6.1. Toda representación lineal de un grupo de orden finito es equivalente a una representación unitaria.

Demostración. Sea $D(g)$ una representación de un grupo finito G . Construyamos la matriz

$$S = \sum_{g \in G} D(g)^\dagger D(g) \quad (1.9)$$

S es hermitiana, por lo tanto, es posible diagonalizarla

$$S = U^{-1} d U \quad (1.10)$$

en donde d es una matriz diagonal y U es unitaria

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

con $d_j > 0$. Si existiera algún $d_j \leq 0$ esto significaría que existe algún eigenvector λ_j tal que $\lambda_j^\dagger S \lambda_j \leq 0$ y tendríamos que

$$\lambda_j^\dagger S \lambda_j = \sum_{g \in G} \|D(g) \lambda_j\|^2 \leq 0 \quad (1.12)$$

pero esto no es posible a menos que $D(g) \lambda_j = 0, \forall g \in G$, lo cual contradice $D(e) = \mathbb{1}$. Por lo que $d_j > 0$ y S es definida positiva.

Construyamos ahora la matriz

$$X = S^{1/2} = U^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \quad (1.13)$$

donde X es invertible ya que S es definida positiva.

Definamos ahora $D'(g) = X D(g) X^{-1}$ y mostremos que es unitaria.

$$D'(g)^\dagger D'(g) = X^{-1} D(g)^\dagger S D(g) X^{-1} \quad (1.14)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} D(g)^\dagger S D(g) &= D(g)^\dagger \left(\sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) \right) D(g) \\ &= \sum_{h \in G} D(hg)^\dagger D(hg) = \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) = S = X^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

por lo tanto

$$D'(g) D'(g)^\dagger = I \quad (1.16)$$

□

1.7. Representaciones irreducibles

Definición 1.7.1. Dada una representación $D(g)$ sobre un espacio V , un subespacio U de V es invariante si para todo elemento $x \in U$, y $g \in G$, se tiene $D(g)x \in U$.

Definición 1.7.2. Una representación $D(g)$ sobre un espacio V , es reducible si deja invariante algún subespacio propio¹ de V , si no es así, entonces la representación es irreducible.

Dicho de otra manera una representación $D(g)$ es reducible si es posible elegir una base en el espacio de la representación, tal que las matrices tengan la estructura

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & B(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

donde $D^{(1)}(g)$ es de tamaño $n_1 \times n_1$ y $D^{(2)}(g)$ $n_2 \times n_2$, además $n_1 + n_2 = n$.

Un subespacio del espacio de representaciones es $\begin{pmatrix} X^1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde X^1 es de dimensión $n_1 \times 1$. Entonces

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & B(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(1)}X^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

y se ve claramente que el subespacio es invariante.

Definición 1.7.3. Una representación reducible es completamente reducible si todo subespacio invariante de $D(g)$ tiene por complemento ortogonal en V a otro subespacio invariante.

Tomemos el subespacio ortogonal $\begin{pmatrix} 0 \\ X^2 \end{pmatrix}$ donde X^2 es de dimensión $n_2 \times 1$, entonces

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & B(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(g)X^2 \\ D^{(2)}(g)X^2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

para que sea invariante debe cumplirse $B(g) = 0$. En este caso la representación es completamente reducible y toma la forma

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

De una manera más general

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(k)}(g) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

¹Un subespacio propio de V es aquél que no es V mismo ni $\vec{0}$.

donde $D^{(i)}(g)$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$, $g \in G$, son representaciones irreducibles de G . Por lo que la representación es completamente reducible y más aún es suma directa de las representaciones irreducibles

$$D(g) = \bigoplus_{i=1}^k D^{(i)}(g).$$

Teorema 1.7.1. *Toda representación unitaria reducible de un grupo G es completamente reducible.*

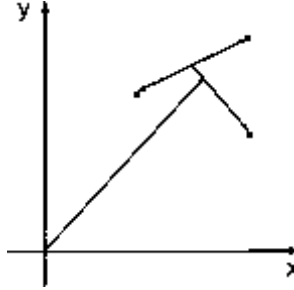
Demostración. Ver [2] pág. 11 □

Corolario 1.7.2. *Toda representación unitaria reducible de un grupo G puede expresarse como suma directa de representaciones unitarias irreducibles.*

Teorema 1.7.3. *El número de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo finito es igual al número de clases de conjugación de este grupo.*

Demostración. Ver [1] pág. 50 □

Ejemplo 7. *Tomando en cuenta la representación (1.8), mostraremos que es completamente reducible. Para ello es necesario cambiar la base, en lugar de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ consideramos $\vec{\rho}$, $\vec{\lambda}$ y $\vec{R}$ en la manera $\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, $\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)$ y $\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$. En las nuevas coordenadas ² $\vec{\rho}$ es el vector que une a las partículas 1 y 2, $\vec{\lambda}$ el vector que une el punto medio entre las partículas 1-2 y la 3 y $\vec{R}$ es el vector del centro de masa.*



Una vez definida la nueva base, consideremos el plano formado por los vectores $\vec{\rho}$ y $\vec{\lambda}$, claramente este plano es invariante bajo la permutación de cualesquiera partículas; por lo que estos vectores forman un subespacio invariante.

La transposición (ij) actuando sobre $\begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix}$ es una combinación de $\vec{\rho}$ y $\vec{\lambda}$

$$(ij) \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix} = D(ij) \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

²Este arreglo especial de vectores se llama coordenadas internas de Jacobi, que no son únicas y las utilizaremos por convención. En este arreglo consideramos que todas las partículas son idénticas.

Haciendo algunos cálculos podemos llegar a la representación matricial irreducible 2-dimensional del grupo S_3 :

$$\begin{aligned} D^{(2)}(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D^{(2)}(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D^{(2)}(13) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & D^{(2)}(23) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ D^{(2)}(123) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & D^{(2)}(132) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para completar la representación 3-dimensional incluimos el vector $\vec{R}$, que evidentemente es invariante bajo cualquier permutación de las partículas, además es una representación irreducible unidimensional del grupo S_3 (llamada representación simétrica).

Finalmente la representación 3-dimensional toma la forma

$$D^{(3)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(2)}(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Nota 5. Como mencionamos estas representaciones se deben a la base (que no es única); si tenemos diferente escalamiento en los nuevos vectores las matrices cambian de la forma

$$\begin{aligned} \lambda' &\longrightarrow \lambda = k_1 \lambda' \\ \rho' &\longrightarrow \rho = k_2 \rho' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda' \\ \rho' \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

para una representación $D(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ obtenemos

$$D'(g) = MD(g)M^{-1} = \begin{pmatrix} a & \frac{k_1}{k_2}b \\ \frac{k_2}{k_1}c & d \end{pmatrix}$$

1.8. Producto directo de representaciones

Definición 1.8.1. El producto directo $(D^\alpha \otimes D^\beta)(g)$, es una representación matricial cuyo espacio de representación es $V^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)}$. Dadas dos representaciones $D^\alpha(g)$ y $D^\beta(g)$ el producto directo es

$$[(D^\alpha \otimes D^\beta)(g)]_{ij,kl} = D_{ik}^{(\alpha)}(g)D_{jl}^{(\beta)}(g)$$

Propiedad 3. El producto directo de representaciones unitarias es también una representación unitaria.

Nota 6. La representación de producto directo de dos representaciones irreducibles es una representación que puede ser reducible.

Ejemplo 8. Tomando las representaciones (1.23), el producto directo de estas representaciones consigo mismas es:

$$D^{(4)}(e) = D^{(2)}(e) \otimes D^{(2)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$D^{(4)}(12) = D^{(2)}(12) \otimes D^{(2)}(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$D^{(4)}(13) = D^{(2)}(13) \otimes D^{(2)}(13) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -1 & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -1 & -\sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$D^{(4)}(23) = D^{(2)}(23) \otimes D^{(2)}(23) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & -1 & \sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$D^{(4)}(123) = D^{(2)}(123) \otimes D^{(2)}(123) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & 1 & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & 1 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$D^{(4)}(132) = D^{(2)}(132) \otimes D^{(2)}(132) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

En una manera más completa, usando el teorema 1.9.1 y que estas representaciones son equivalentes a las matrices en forma reducida podemos escribirlas como $D'(g) = MD(g)M^{-1}$ donde M es la matriz de cambio de base.

Tomando en cuenta que los vectores $(1, 0, 0, 1)^T$, $(0, 1, -1, 0)^T$ son invariantes bajo la acción de las representaciones (1.25)-(1.30) y $(1, 0, 0, -1)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$ forman un subespacio invariante 2-dimensional, la matriz de cambio de base para estas representaciones queda como:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que lleva a las matrices a su forma reducida:

$$D^{(4)}(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & D^2(12) & \end{pmatrix} \quad D^{(4)}(13) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & D^2(23) & \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)}(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & D^2(13) \end{pmatrix} \quad D^{(4)}(123) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & D^2(132) \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)}(132) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & D^2(123) \end{pmatrix} \quad D^{(4)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & D^2(e) \end{pmatrix}$$

Observación 3. $D^{(4)}(g) = D^{(2)}(g) \otimes D^{(2)}(g) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}' \oplus D^{(2)}(g)$. Donde $\mathbb{1}$ es la representación trivial y $\mathbb{1}'$ es una representación de $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ que en realidad solo cuenta la paridad de los elementos de S_3 como lo definimos en el capítulo 1.

Observación 4. En mecánica cuántica un sistema está descrito por una función de onda $\Psi(\vec{r})$. Esta función puede estar sujeta a diversas transformaciones de simetría en física. Por ejemplo si $\hat{P}$ es el operador de inversión que actúa en las funciones que describen el sistema de la forma $\hat{P}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$, se cumple que $\hat{P}^2\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})$, entonces $\hat{P}$ tiene dos valores propios $P = \pm 1$.

Un caso simple de una representación se obtiene para el grupo $\mathbb{Z}_2$ que consta de los elementos $\{e, P\}$. La representación dada por los eigenvalores de los operadores P y e son

$$D(e) = 1, \quad D(P) = 1 \quad \text{y} \quad D(e) = 1, \quad D(P) = -1.$$

Capítulo 2

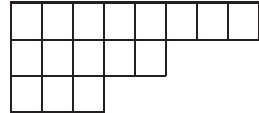
Representaciones irreducibles de S_n

En el capítulo 1 mostramos que una partición de un número entero n es un conjunto de números positivos que cumplen (1.6) y que hay una correspondencia uno-uno entre las particiones y las clases de conjugación. Por otro lado mencionamos el teorema que relaciona las clases de conjugación con las representaciones irreducibles de S_n .

En esta sección utilizaremos estos resultados para mostrar una relación entre las particiones y representaciones irreducibles mediante los diagramas de Young.

2.1. Diagramas de Young

Un diagrama de Young es un conjunto de bloques ordenados en n renglones con λ_1 bloques en el primer renglon, λ_2 en el segundo, ..., λ_n en el n -ésimo renglon, tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$. Este diagrama lo representamos por

(2.1)

Observación 5. *Existe una correspondencia entre las particiones y los diagramas de Young.*

Ejemplo 9. *Los diagramas de Young para el grupo S_3 correspondientes a las particiones $[3], [2, 1], [1, 1, 1]$ respectivamente son:*


(a)


(b)


(c)

(2.2)

Una tabla de Young es un diagrama de Young con números diferentes de 1 a n dentro de cada bloque y sin importar el orden en que estos aparecen. Una tabla estándar de Young aparece con los números en orden creciente cuando los leemos de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

2.2. Funciones base

En mecánica cuántica si consideramos un sistema constituido por partículas idénticas no podemos distinguir una partícula de otra. Esto significa que si un sistema se obtiene de otro mediante permutaciones de partículas, estos sistemas son equivalentes. Por lo tanto las funciones de onda que describen un sistema con partículas idénticas tienen propiedades particulares de simetría ante permutaciones de estas partículas.

Haremos uso del simetrizador y antisimetrizador para construir funciones totalmente simétricas o antisimétricas respecto al grupo S_n . Estos los definimos como

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{P \in S_n} P \quad y \quad A = \frac{1}{n!} \sum_{P \in S_n} \delta_P P \quad (2.3)$$

en dónde P son las permutaciones, δ_P la paridad de la permutación.

Ejemplo 10. Consideremos una función de onda que describe dos partículas etiquetadas por 1 y 2 que se encuentran en dos estados distintos $\Psi = \alpha(1) \otimes \beta(2)$, en donde α y β describen los estados de la partícula 1 y 2 respectivamente. Utilizando (2.3) buscaremos las representaciones totalmente simétrica y antisimétrica del grupo S_2 .

Observación 6. Usaremos la notación compacta $\alpha\beta = \alpha(1) \otimes \beta(2)$, $\beta\alpha = \beta(1) \otimes \alpha(2)$.

Para escribir la función totalmente simétrica es necesario hacer actuar el simetrizador $S = \frac{1}{2}(e + P_{12})$ en la función Ψ y con ello obtenemos

$$\Psi_S = S\Psi = \frac{1}{2}[\alpha\beta + \beta\alpha].$$

De la misma manera para el antisimetrizador $A = \frac{1}{2}(e - P_{12})$ lo que nos da el estado

$$\Psi_A = A\Psi = \frac{1}{2}[\alpha\beta - \beta\alpha].$$

Es importante mencionar que aparte de estos dos estados existen otros dos totalmente simétricos: $\alpha\alpha$ y $\beta\beta$ lo que nos da un total de cuatro funciones linealmente independientes, es decir la representación del grupo S_2 es 4-dimensional y es generada por tres funciones totalmente simétricas y una totalmente antisimétrica.

El grupo S_2 cuenta con dos clases de conjugación lo que equivale a dos particiones [2] y [1, 1], además por el teorema 1.9.3 tenemos que este grupo tiene dos representaciones irreducibles. Las tablas de Young asociados a estas particiones son:

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}} = \begin{cases} \alpha\alpha \\ \frac{1}{2}[\alpha\beta + \beta\alpha] \\ \beta\beta \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} = \begin{cases} \frac{1}{2}[\alpha\beta - \beta\alpha] \end{cases} \quad (2.5)$$

De manera que una representación completamente simétrica es mostrada con un diagrama de Young horizontal y una completamente antisimétrica con un diagrama vertical.

Funciones base de S_3

Consideremos ahora el grupo S_3 . Una función que describe a tres partículas idénticas en tres estados distintos queda en la manera:

$$\Psi = \alpha\beta\gamma \equiv \alpha(1) \otimes \beta(2) \otimes \gamma(3) \quad (2.6)$$

Nota 7. Supondremos que α, β, γ son funciones ortonormales, por lo que el espacio vectorial correspondiente es generado por seis funciones linealmente independientes $\{\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\gamma, \gamma\beta\alpha, \alpha\gamma\beta, \gamma\alpha\beta, \beta\gamma\alpha\}$, que se obtienen permutando los estados de la función Ψ .

Haciendo uso nuevamente de los operadores (2.3) obtenemos las funciones totalmente simétricas y antisimétricas

$$\begin{aligned} \Psi_S = S \alpha\beta\gamma &= \frac{1}{3!}[(e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132})\alpha\beta\gamma] \\ &= \frac{1}{3!}[\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma + \gamma\beta\alpha + \alpha\gamma\beta + \beta\gamma\alpha + \gamma\alpha\beta] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_A = A \alpha\beta\gamma &= \frac{1}{3!}[(e - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{123} + P_{132})\alpha\beta\gamma] \\ &= \frac{1}{3!}[\alpha\beta\gamma - \beta\alpha\gamma - \gamma\beta\alpha - \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha - \gamma\alpha\beta] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Debido que S_3 tiene tres clases de conjugación, lo que equivale a tres particiones cuyos digramas de Young son (2.2). Por el teorema 1.9.3, S_3 tiene tres representaciones irreducibles no equivalentes; donde como sabemos al diagrama (a) le corresponde la función (2.7), (c) a la función (2.8). En el caso de la representación correspondiente al diagrama (b), hacemos uso de una combinación del simetrizador y antisimetrizador y con ello construimos las otras cuatro funciones que son linealmente independientes. Tomaremos por conveniencia las siguientes combinaciones.

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_{13}S_{12}\Psi = \frac{1}{4}(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \gamma\beta\alpha - \gamma\alpha\beta) \\ \Psi_2 &= A_{23}S_{12}\Psi = \frac{1}{4}(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha) \\ \Psi_3 &= S_{13}A_{12}\Psi = \frac{1}{4}(\alpha\beta\gamma - \beta\alpha\gamma + \gamma\beta\alpha - \gamma\alpha\beta) \\ \Psi_4 &= S_{23}A_{12}\Psi = \frac{1}{4}(\alpha\beta\gamma - \beta\alpha\gamma + \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos ver haciendo algunos cálculos, que las funciones Ψ_1 y Ψ_2 , Ψ_3 y Ψ_4 forman dos subespacios invariantes,

$$\begin{aligned} P_{12}\Psi_1 &= \Psi_2, & P_{12}\Psi_2 &= \Psi_1 & y & & P_{13}\Psi_1 &= -\Psi_1, & P_{13}\Psi_2 &= \Psi_2 - \Psi_1. \\ P_{12}\Psi_3 &= -\Psi_4, & P_{12}\Psi_4 &= -\Psi_3 & y & & P_{13}\Psi_3 &= \Psi_3, & P_{13}\Psi_4 &= \Psi_3 - \Psi_4. \end{aligned}$$

Tomaremos un cambio de base para ortogonalizar estas funciones

$$\begin{aligned}\Psi'_1 &\sim \Psi_1 + \Psi_2, & \Psi'_2 &\sim \Psi_1 - \Psi_2 \\ \Psi'_3 &\sim \Psi_3 + \Psi_4, & \Psi'_4 &\sim \Psi_3 - \Psi_4\end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes y normalizando las funciones tenemos

$$(b) \begin{cases} \Psi'_1 = -\frac{1}{\sqrt{12}}(2\alpha\beta\gamma + 2\beta\alpha\gamma - \gamma\beta\alpha - \gamma\alpha\beta - \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha) \\ \Psi'_2 = -\frac{1}{2}(\alpha\gamma\beta + \beta\gamma\alpha - \gamma\beta\alpha - \gamma\alpha\beta) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \Psi'_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(2\alpha\beta\gamma - 2\beta\alpha\gamma + \gamma\beta\alpha - \gamma\alpha\beta + \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha) \\ \Psi'_4 = \frac{1}{2}(-\gamma\beta\alpha + \gamma\alpha\beta + \alpha\gamma\beta - \beta\gamma\alpha) \end{cases}$$

Con lo que obtenemos que la representación 6-dimensional de S_3 se reduce a una representación totalmente simétrica 1-dimensional cuyas tablas de Young es (a), una representación totalmente antisimétrica 1-dimensional cuya tabla es (d) y dos representaciones 2-dimensional cuyas tablas de Young correspondientes son (b) y (c).

<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> </table>	1	2	3		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> </table>	1	3	2		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>3</td></tr> </table>	1	2	3
1	2	3															
1	2																
3																	
1	3																
2																	
1																	
2																	
3																	
(a)	(b)	(c)	(d)														

donde en el diagrama (b) tenemos una simetría respecto a (12) y antisimetría en (13) y (23), pero en el diagrama (c) tenemos una simetría en (13) y antisimetría en (12) y (32).

Nota 8. La dimensión de una representación irreducible asociada a un diagrama de Young de partición $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ es igual al número de las distintas tablas estándar de Young correspondientes. Ver [1]

2.3. Método tensorial

Sea G un grupo, V un espacio n -dimensional. Un vector en este espacio es de la forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y una transformación de G se representa como $x' = ax$, donde a es una matriz de $n \times n$ que pertenece a $D(g)$.

El producto de m vectores $x(1) \otimes x(2) \otimes \dots \otimes x(m)$ forma un tensor de rango m definido en un espacio n^m -dimensional. Notemos que este tensor tiene n^m componentes definidas por

$$T_{i_1 i_2 \dots i_m} = x_{i_1}(1) x_{i_2}(2) \dots x_{i_m}(m) = \bigotimes_{k=1}^m x_{i_k} \quad (2.10)$$

dónde los índices $i_1, i_2, \dots, i_m$ varían de 1 a n .

El tensor T bajo la acción de una transformación de G se vuelve:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m} T_{j_1 j_2 \dots j_m} \quad (2.11)$$

en donde

$$D_{i_1 i_2 \dots i_m; j_1 j_2 \dots j_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m} \quad (2.12)$$

es el producto directo de representaciones visto en la sección (1.8). En una manera más compacta lo denotamos por

$$D(a) = a \otimes a \otimes \dots \otimes a$$

En general $D(a)$ es reducible con respecto al grupo G y al grupo S_m . El hecho de que S_m aparezca aquí es porque $D(a)$ satisface propiedades de simetría con respecto a la permutación de índices. Por ejemplo, consideremos $m = 2$ en (2.12) entonces tenemos

$$D_{i_1 i_2; j_1 j_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$$

tomando la permutación $P = (12)$ y haciéndola actuar en la ecuación anterior tenemos

$$D_{i_1 i_2; j_1 j_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} x_{j_1} x_{j_2} = x_{j_1} \otimes x_{j_2} \quad \text{entonces} \quad (2.13)$$

$$P x_{j_1} \otimes x_{j_2} := x_{j_2} \otimes x_{j_1} \quad (2.14)$$

$$P D_{i_1 i_2; j_1 j_2} = P a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2} \\ D_{ij} = D_{P(i); P(j)} \quad (2.15)$$

Simetrías del tensor

A un tensor de rango 1 le corresponde un diagrama de Young $\square$. Si consideramos un tensor de rango 2 con componentes $T_{i_1 i_2}$ la permutación de estos índices nos da la componente $T_{i_2 i_1}$ que es independiente de $T_{i_1 i_2}$. Definimos $T_{i_1 i_2} \pm T_{i_2 i_1}$ que forma una base del producto de representaciones simétricas (signo $+$) o antisimétricas (signo $-$) cuyos diagramas respectivamente son $\square \square$ y $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$.

El intercambio de i_1 con i_2 es equivalente a aplicar la permutación $P=(12)$ a (2.10) para $m = 2$. De acuerdo a (3.8) tenemos

$$PT'_{i_1 i_2} = T'_{i_2 i_1} = a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2} T_{j_1 j_2} \\ = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} T_{j_2 j_1} \\ = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} PT_{j_1 j_2}$$

donde vemos que toda transformación del grupo conmuta con P .

Nota 9. Esta propiedad es válida para cualquier tensor de rango k .

$$PT_i = T_{P(i)}, \quad T'_i = D_{ij} T_j$$

entonces

$$PT'_i = T'_{P(i)} = D_{P(i)j} T_j = D_{P(i)P(j)} T_{P(j)},$$

como $D_{P(i)P(j)} = D_{ij}$ por (2.12) como en (2.15) entonces

$$PT'_i = D_{ij}T_{P(j)} = D_{ij}PT_j$$

por lo tanto $[D, P] = 0$.

Por ejemplo, una función simétrica bajo S_m cumple con $P\Psi_s = \Psi_s$, entonces

$$\begin{aligned} (DP - PD)\Psi_s &= 0 \\ D(P\Psi_s) - P(D\Psi_s) &= 0 \\ D\Psi_s - P(D\Psi_s) &= 0 \Rightarrow D\Psi_s = P(D\Psi_s) \end{aligned}$$

Cuando consideramos una representación del tipo (2.12), esta en general es reducible y se descompone en una suma de representaciones irreducibles, la propiedad $[D, P] = 0$ significa que dentro de una representación irreducible todas las funciones tienen la misma propiedad de simetría bajo S_m . Por lo que existe una relación entre las representaciones de un grupo G y el grupo S_m y es posible asociar diagramas de Young a las representaciones de G .

Ejemplo 11. Para $m = 3$ se obtienen los diagramas

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Hemos visto en este capítulo las simetrías de las funciones correspondiente a estas representaciones.

Nota 10. Este procedimiento se puede aplicar tanto a grupos finitos como a grupos continuos.

Capítulo 3

Aspectos de $SU(2)$

Una de las características de los grupos discretos es que ya sea que tengan un número finito o infinito de elementos, todos ellos pueden ser enumerados. En los grupos continuos esto no es posible porque cuentan con un número infinito no numerable de elementos. Uno de los logros más importantes de Sophus Lie fue el descubrimiento de que los grupos continuos (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos estudiando los generadores infinitesimales correspondientes, los cuales obedecen una estructura algebraica.

3.1. Introducción a grupos de Lie

En una variedad n -dimensional analítica hay un conjunto de abiertos U_p alrededor de puntos en el espacio que define la variedad tales que existen biyecciones analíticas $\psi_p : U_p \longrightarrow O_p \subset \mathbb{R}^n$, donde O_p son abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.1. *Un grupo de Lie es una variedad analítica con estructura de grupo y además*

$$\begin{aligned} -1 & : G \longrightarrow G \text{ es decir } g \mapsto g^{-1} \\ \cdot & : G \times G \longrightarrow G \text{ es decir } (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned}$$

son mapeos analíticos.

Definición 3.1.2. *La dimensión del grupo es igual a la dimensión de la variedad.*

Nota 11. *Una variedad es arco-conexa si dos cualesquiera puntos de esta variedad pueden ser unidos por una curva continua que vive en la misma variedad. Un grupo continuo puede estar constituido por más de una componente conexa.*

Ejemplo 12. *El conjunto de matrices unitarias de $n \times n$ que denotamos por $U(n)$ son transformaciones*

$$U(n) = \{A \in \mathbb{C}(n) : A^\dagger A = \mathbb{1}\}$$

es decir para una matriz unitaria de $n \times n$ tenemos $2n^2$ parámetros reales. El hecho que sean matrices unitarias implica que se tengan n^2 condiciones reales dejando así n^2 parámetros reales independientes.

El subgrupo invariante $SU(n)$ cuenta además con la condición $\det A = 1$ con lo que

obtenemos una condición real adicional quedando un total de $n^2 - 1$ parámetros independientes.

Si consideramos un elemento de $SU(2)$ este es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \in SU(2)$$

entonces por las condiciones del grupo tenemos $|a|^2 + |b|^2 = 1$ es decir un punto de la esfera $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, por lo tanto $SU(2)$ es S^3 visto como variedad. $SU(2)$ es arcoconexa. $U(n)$ no es arcoconexa porque un elemento con $\det A = -1$ no puede conectarse con la identidad.

3.1.1. Transformaciones infinitesimales

Consideremos un grupo de Lie n -dimensional. Un elemento arbitrario de este grupo es una función analítica de n parámetros (o coordenadas) $\psi^\alpha(g) = \theta^\alpha$. Definimos una representación fiel¹ como $\phi(\theta) \equiv \phi(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$, consideramos $\phi(0) = e$ por conveniencia. Puesto que la función ϕ es analítica podemos desarrollarla en serie de Taylor alrededor de cero

$$\phi(\theta) = e + i t_\alpha \theta^\alpha + \frac{1}{2} t_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + \dots \quad (3.1)$$

donde t_α son matrices definidas como

$$t_\alpha \equiv -i \frac{\partial \phi}{\partial \theta^\alpha} \Big|_{\theta=0}$$

llamadas generadores de grupo. Notamos que $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$.

La multiplicación de dos elementos de un grupo de Lie queda como

$$\phi(\theta) \phi(\bar{\theta}) = \phi(f(\theta, \bar{\theta}))$$

donde $f(\theta, \bar{\theta})$ es también una función analítica llamada función de estructura que cumple con

$$f(0, \bar{\theta}) = \bar{\theta}, \quad f(\theta, 0) = \theta, \quad \forall \theta, \bar{\theta} \quad (3.2)$$

$$f(f(\theta, \bar{\theta}), \theta') = f(\theta', f(\bar{\theta}, \theta)), \quad \forall \theta, \bar{\theta}, \theta' \quad (3.3)$$

$$f(\theta, a) = 0 \text{ tiene solución única en } a \quad \forall \theta \quad (3.4)$$

debido a los axiomas de grupo.

Expandiendo en serie de Taylor tenemos

$$\phi(\theta) \phi(\bar{\theta}) = e + i t_\alpha \theta^\alpha + i t_\mu \bar{\theta}^\mu + i^2 t_\alpha t_\mu \theta^\alpha \bar{\theta}^\mu + \frac{1}{2} t_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \bar{\theta}^\mu \bar{\theta}^\nu + \dots \quad (3.5)$$

y como la serie de Taylor para $f(\theta, \bar{\theta})$ es

$$f^\alpha(\theta, \bar{\theta}) = \theta^\alpha + \bar{\theta}^\alpha + R_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \bar{\theta}^\gamma + \dots \quad (3.6)$$

¹Una representación fiel es una representación en la cual los morfismos son inyectivos.

para que cumpla con (3.2). Por lo que,

$$\phi(f^\alpha(\theta, \bar{\theta})) = e + it_\alpha \theta^\alpha + it_\alpha \bar{\theta}^\alpha + \frac{1}{2} t_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + \frac{1}{2} t_{\alpha\beta} \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta + t_{\alpha\beta} \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta + it_\alpha R_{\mu\nu}^\alpha \theta^\mu \bar{\theta}^\nu + \dots \quad (3.7)$$

igualando las ecuaciones (3.5) y (3.7) y renombrando índices obtenemos

$$-t_\alpha t_\beta \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta = t_{\alpha\beta} \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta + it_\mu R_{\alpha\beta}^\mu \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta \quad (3.8)$$

como θ^α y $\bar{\theta}^\beta$ son parámetros arbitrarios entonces

$$-t_\alpha t_\beta = t_{\alpha\beta} + it_\mu R_{\alpha\beta}^\mu. \quad (3.9)$$

Usando que $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$ tenemos

$$-t_\beta t_\alpha = t_{\alpha\beta} + it_\mu R_{\beta\alpha}^\mu \quad (3.10)$$

restando ambas expresiones llegamos a

$$t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha = it_\mu (R_{\beta\alpha}^\mu - R_{\alpha\beta}^\mu) \quad (3.11)$$

donde $R_{\beta\alpha}^\mu - R_{\alpha\beta}^\mu = f_{\alpha\beta}^\mu$ son las constantes de estructura de un grupo de Lie que cumplen

$$f_{\alpha\beta}^\mu = -f_{\beta\alpha}^\mu. \quad (3.12)$$

Por lo tanto obtenemos el álgebra del grupo

$$[t_\alpha, t_\beta] \equiv t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha = it_\mu f_{\alpha\beta}^\mu \quad (3.13)$$

Que además cumple la identidad de Jacobi

$$[t_\alpha, [t_\beta, t_\gamma]] + [t_\beta, [t_\gamma, t_\alpha]] + [t_\gamma, [t_\alpha, t_\beta]] = 0 \quad (3.14)$$

con estas dos ecuaciones obtenemos una condición para las constantes de estructura

$$f_{\alpha\beta}^\delta f_{\delta\mu}^\eta + f_{\beta\mu}^\delta f_{\delta\alpha}^\eta + f_{\mu\alpha}^\delta f_{\delta\beta}^\eta = 0 \quad (3.15)$$

Como $R_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial \theta^\alpha \partial \theta^\beta} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0}$ el conjunto de $R_{\alpha\beta}^\mu$ determina completamente las constantes de estructura del grupo. Un conjunto de constantes que cumplen (3.12) están asociadas con un grupo si y solo si cumplen con (3.15).

Observación 7. *El estudio de álgebras de Lie simplifica y hace más sencillo el estudio de los grupos de Lie aunque sea de una forma local, debido a que el álgebra tiene asociada la estructura del grupo.*

Operadores invariantes

Existen operadores escalares para los grupos de Lie llamados operadores de Casimir, que son construidos apartir de los mismos generadores de grupo, los cuales conmutan con todos los generadores y por tanto con todas las transformaciones del grupo. Un caso particular de estos operadores invariantes es el operador de Casimir cuadrático

$$G^2 = g^{\rho\sigma} t_\rho t_\sigma$$

donde $g^{\rho\sigma}$ es la metrica de Cartan que se define come el inverso de la matriz $g_{\rho\sigma} = f_{\rho\nu}^\mu f_{\sigma\mu}^\nu$. Se puede demostrar que para grupos compactos $g_{\rho\sigma} = g\delta_{\rho\sigma}$.

En el caso general para un grupo de Lie n -dimensional tenemos tantos operadores de Casimir como el rango² del grupo.

Finalmente, tenemos que para un grupo de Lie de orden uno, una transformación infinitesimal alrededor de la identidad está dada por

$$S_{\delta a} = 1 + \delta a t$$

si consideramos $\delta a = \frac{a}{N}$, con N arbitrario y suficientemente grande obtenemos

$S_a := (S_{\delta a})^N = \left(1 + \frac{a}{N} t_\sigma\right)^N$ cuando $N \rightarrow \infty$ obtenemos.

$$S_a = e^{a \cdot t}$$

Generalizando este resultado a los los grupos compactos y conexos de onden n , se obtiene

$$\phi(\theta) = e^{i\theta^a t_a}. \quad (3.16)$$

Donde el álgebra de Lie asociada es (3.13).

3.2. SU(2)

Los elementos de $SU(2)$ pueden escribirse como

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

que cumplen las condiciones

$$u^\dagger u = uu^\dagger = \mathbb{1}, \quad \det(u) = 1.$$

Como

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = u^\dagger$$

Finalmente, los elementos de $SU(2)$ son las matrices de la forma

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

que tienen que cumplir

$$\det(u) = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (3.17)$$

lo que nos deja un total de 3 grados de libertad, es decir, este grupo cuenta con tres generadores. Podemos ver que $SU(2) \equiv S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es compacto y simplemente conexo.

²Entenderemos como rango el número maximal de generadores que conmutan entre sí. Para $SU(n)$ un resultado bien conocido es que existen $n - 1$ generadores de este tipo.

3.2.1. Matrices de Pauli

Consideremos una transformación infinitesimal alrededor de la identidad para encontrar los generadores de este grupo. Usando una parametrización ³

$$a = 1 - \frac{i}{2}\delta\alpha_3 \quad b = -\frac{1}{2}\delta\alpha_2 - \frac{i}{2}\delta\alpha_1$$

donde $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3$ son reales y pequeños, $|\delta\alpha_i| \ll 1$, e independientes. Podemos reescribir los elementos del grupo

$$u = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{2}\delta\alpha_3 & -\frac{1}{2}\delta\alpha_2 - \frac{i}{2}\delta\alpha_1 \\ -(\frac{1}{2}\delta\alpha_2 - \frac{i}{2}\delta\alpha_1)^* & (1 - \frac{i}{2}\delta\alpha_3)^* \end{pmatrix}$$

expandiendo en serie de Taylor a primer orden tenemos,

$$u = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\delta\alpha_3\sigma_z - \frac{i}{2}\delta\alpha_1\sigma_x - \frac{i}{2}\delta\alpha_2\sigma_y \quad (3.18)$$

donde los generadores del grupo son las matrices de Pauli

$$\frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

cuya álgebra de Lie es

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (3.20)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita.

3.3. Representaciones de SU(2)

Tomando para fines prácticos $L_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ tenemos que el álgebra $su(2)$ es

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \quad (3.21)$$

Definimos el operador $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ que es un operador escalar y conmuta con los generadores del grupo,

$$[L^2, L_i] = 0 \quad (3.22)$$

con ello obtenemos un operador invariante para $SU(2)$ llamado operador de Casimir cuadrático.

Utilizando por convención el generador L_z , la ecuación (3.22) indica que L^2 y L_z tienen eigenvectores en común y los eigenvalores están relacionados en la manera (Ver apéndice A)

$$L^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle \quad (3.23)$$

$$L_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad (3.24)$$

³En dicha parametrización a podría admitir una variación infinitesimal real adicional pero en virtud de (3.17) esta es necesariamente cero.

donde l toma valores $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ y $m = -l, -l+1, -l+2, \dots, 0, \dots, l-2, l-1, l$. Llamamos pesos a los valores de m y como existen $2l + 1$ valores para m el espacio vectorial es de dimensión $2l + 1$.

Usando los resultados del Apéndice A podemos construir las representaciones para $SU(2)$. Tomando $l = 0$ obtenemos la representación 1-dimensional y que representamos por el diagrama de Young $\square$

Para $l = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$ obtenemos la representación 2-dimensional llamada también representación fundamental cuyo diagrama de Young asociado es $\square$

Notamos que la representación 2-dimensional de los generadores de $SU(2)$ son las matrices de Pauli (3.19).

Una representación 3-dimensional (también representación vectorial) representada por $\square\square\square$ se obtiene con $l = 1$ y $m = 1, 0, -1$ cuyas matrices son

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4. Representación conjugada

Dada una representación matricial $D(g)$ de un grupo G , se puede construir una nueva representación tomando las complejas conjugadas de las matrices $D(g)$ es decir $\overline{D}(g) := D^*(g)$ y cumple con

1. $\overline{D}(e) = \mathbb{I} = \mathbb{I}^*$
2. $\overline{D}(gh) = \overline{D}(g)\overline{D}(h)$

Ya que los elementos de esta representación se escriben $D^*(g) = e^{-i\theta^k L_k^*}$, el álgebra correspondiente queda dada en la manera

$$[-L_i^*, -L_j^*] = -i\epsilon_{ijk}L_k^* \quad (3.25)$$

No siempre la representación conjugada $D^*(g)$ es equivalente a la representación $D(g)$ ⁴. Para el caso de $SU(2)$ estas si lo son, lo que significa que podemos escribir $u^* = TuT^{-1}$, tomando como caso particular $T = -i\sigma_y$ para este grupo.

En la notación de los diagramas de Young esto representa

$$\overline{\square} \equiv \square$$

Nota 12. Usaremos este concepto más adelante en conexión con las antiparticulas.

⁴Cuando esto sucede la representación se llama real.

Capítulo 4

Aspectos de SU(3)

4.1. Grupo SU(3)

El grupo SU(3) es generado por 8 matrices hermitianas 3×3 llamadas matrices de Gell-Mann y pueden ser encontradas de la misma manera que en SU(2).

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

El álgebra asociada $su(3)$ es

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k$$

donde f_{ijk} es un tensor antisimétrico bajo la permutación de cualesquiera de sus índices, y

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tomando un cambio de base por convención, ya que este es usado en física de partículas como notación estándar, dejaremos todos los generadores en términos de:

$$\hat{Y} = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}, \quad \hat{I}_3 = \frac{\lambda_3}{2}, \quad \hat{I}_\pm = \frac{\lambda_1}{2} \pm i\frac{\lambda_2}{2}, \quad \hat{V}_\pm = \frac{\lambda_4}{2} \pm i\frac{\lambda_5}{2}, \quad \hat{U}_\pm = \frac{\lambda_6}{2} \pm i\frac{\lambda_7}{2} \quad (4.1)$$

que cumplen las relaciones

$$[\hat{Y}, \hat{I}_3] = 0, \quad [\hat{Y}, \hat{I}_\pm] = 0, \quad [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm\hat{V}_\pm, \quad [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm\hat{U}_\pm \quad (4.2)$$

$$[\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] = \pm\hat{I}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{V}_\pm] = \pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{U}_\pm] = \mp\frac{1}{2}\hat{U}_\pm \quad (4.3)$$

$$[\hat{I}_+, \hat{I}_-] = 2\hat{I}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = \frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{I}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{I}_3 \quad (4.4)$$

$$[\hat{U}_+, \hat{V}_-] = \hat{I}_-, \quad [\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0, \quad [\hat{U}_+, \hat{I}_-] = 0 \quad (4.5)$$

$$[\hat{V}_+, \hat{I}_+] = 0, \quad [\hat{I}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{I}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+ \quad (4.6)$$

además

$$(\hat{I}_+)^{\dagger} = \hat{I}_-, \quad (\hat{U}_+)^{\dagger} = \hat{U}_-, \quad (\hat{V}_+)^{\dagger} = \hat{V}_- \quad (4.7)$$

$$[\hat{I}^2, \hat{I}_3] = 0, \quad [\hat{I}^2, \hat{Y}] = 0 \quad (4.8)$$

por lo que podemos diagonalizarlos simultaneamente.

4.2. Representación fundamental

Una representación fundamental de $SU(3)$ asociada con el diagrama $\square$ es 3-dimensional. La base canónica en este espacio es:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de los operadores $\hat{Y}$, $\hat{I}_3$ son:

$$\hat{Y}u = \frac{1}{3}u, \quad \hat{Y}d = \frac{1}{3}d, \quad \hat{Y}s = -\frac{2}{3}s$$

$$\hat{I}_3u = \frac{1}{2}u, \quad \hat{I}_3d = -\frac{1}{2}d, \quad \hat{I}_3s = 0$$

En general definimos el peso de una función α como:

$$w[\alpha] = [I_3, Y] \quad (4.9)$$

donde I_3 , Y son valores propios de $\hat{I}_3$, $\hat{Y}$ en el estado α . Consideremos dos funciones a , b con pesos $w[a] = [I_3, Y]$, $w[b] = [I'_3, Y']$. Comparando las funciones en la siguiente manera,

$$w[a] - w[b] = [I_3 - I'_3, Y - Y'] \quad (4.10)$$

si $I_3 - I'_3 > 0$ o $I_3 - I'_3 = 0$ y $Y - Y' > 0$ entonces decimos que $w[a] > w[b]$, de lo contrario $w[b] > w[a]$.

Por lo que los pesos de las funciones u, d, s quedan como:

$$w[u] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}], \quad w[d] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}], \quad w[s] = [0, -\frac{2}{3}]. \quad (4.11)$$

Graficamos los pesos de las funciones base en un diagrama I_3 , Y , llamado diagrama de pesos como mostramos a continuación.

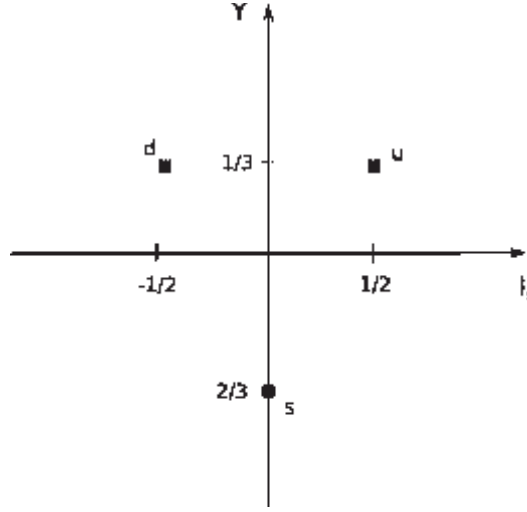


Figura 4.1: Diagrama de peso de la representación fundamental de SU(3).

La relación entre los pesos de esta representación es

$$w[u] > w[s] > w[d]. \quad (4.12)$$

Cuando los operadores $\hat{I}_\pm$, $\hat{U}_\pm$, $\hat{V}_\pm$ actúan a la base se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{I}_- u &= d, & \hat{I}_- d &= 0, & \hat{I}_- s &= 0, & \hat{I}_+ u &= 0, & \hat{I}_+ d &= u, & \hat{I}_+ s &= 0 \\ \hat{V}_- u &= s, & \hat{V}_- d &= 0, & \hat{V}_- s &= 0, & \hat{V}_+ u &= 0, & \hat{V}_+ d &= 0, & \hat{V}_+ s &= u \\ \hat{U}_- u &= 0, & \hat{U}_- d &= s, & \hat{U}_- s &= 0, & \hat{U}_+ u &= 0, & \hat{U}_+ d &= 0, & \hat{U}_+ s &= d \end{aligned}$$

esquemáticamente la acción de los operadores $\hat{I}_\pm$, $\hat{U}_\pm$, $\hat{V}_\pm$ en las funciones base se interpreta como:

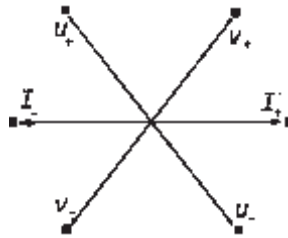


Figura 4.2: Acción de los operadores $\hat{I}_\pm$, $\hat{U}_\pm$, $\hat{V}_\pm$.

esto significa que dichos operadores llevan de un estado a otro. El hecho que $\hat{I}_+ u = 0, \hat{V}_+ u = 0$ y $\hat{U}_+ u = 0$ significa que estamos tomando el vector de peso máximo.

4.3. Una representación totalmente simétrica

El producto tensorial entre dos representaciones fundamentales está dado por

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

donde $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ es una representación 3- dimensional, lo que puede demostrarse de manera similar a como mostramos en el Apéndice B para $SU(2)$. La representación $\square\square$ es una representación 6-dimensional que cuenta con seis funciones base totalmente simétricas

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u \otimes u, \quad \phi_2 = d \otimes d, \quad \phi_3 = s \otimes s, \quad \phi_4 = u \otimes d + d \otimes u \\ \phi_5 &= u \otimes s + s \otimes u, \quad \phi_6 = d \otimes s + s \otimes d \end{aligned}$$

de las cuales solo una es la que tiene peso máximo. Para saber cual es veremos como actúan los operadores $\hat{I}_3, \hat{Y}$ en ellas.

Nota 13. *Haremos los calculos detallados solo para la función ϕ_1 . Para las demás funciones se procede de manera similar.*

Para esta representación los operadores $\hat{Y}, \hat{I}_3$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \hat{Y}^{(6)} &= \hat{Y} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{Y} \\ \hat{I}_3^{(6)} &= \hat{I}_3 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{I}_3 \end{aligned}$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad 3-dimensional. Estos actúan como

$$\begin{aligned} \hat{I}_3 \phi_1 &= (\hat{I}_3 \otimes \mathbb{1})(u \otimes u) + (\mathbb{1} \otimes \hat{I}_3)(u \otimes u) = (\hat{I}_3 u \otimes \mathbb{1} u) + (\mathbb{1} u \otimes \hat{I}_3 u) \\ &= \frac{1}{2} u \otimes u + u \otimes \frac{1}{2} u = (u \otimes u) = \phi_1 \\ \hat{Y} \phi_1 &= (\hat{Y} \otimes \mathbb{1})(u \otimes u) + (\mathbb{1} \otimes \hat{Y})(u \otimes u) = (\hat{Y} u \otimes \mathbb{1} u) + (\mathbb{1} u \otimes \hat{Y} u) \\ &= \frac{1}{3} u \otimes u + u \otimes \frac{1}{3} u = \frac{2}{3} (u \otimes u) = \frac{2}{3} \phi_1 \end{aligned}$$

por lo tanto la función de peso queda expresada de la siguiente manera

$$w[\phi_1] = [1, \frac{2}{3}] \tag{4.13}$$

Observación 8. *Es importante notar que cuando los operadores $\hat{I}_3, \hat{Y}$ actúan en las funciones base, los pesos de una representación siempre se irán sumando, sin importar la simetría de las funciones.*

Con esto y procediendo de la misma manera, calculamos los pesos de todas las funciones

$$\begin{aligned} w[\phi_2] &= [-1, 1], \quad w[\phi_3] = [0, -\frac{4}{3}], \quad w[\phi_4] = [0, \frac{5}{3}] \\ w[\phi_5] &= [1, -\frac{2}{3}], \quad w[\phi_6] = [0, -\frac{1}{3}] \end{aligned}$$

Comparando los pesos con la relación (4.10), podemos ver que ϕ_1 tiene el peso máximo.

4.4. Diagrama de pesos de las representaciones irreducibles de $SU(3)$

Para construir los diagramas de peso de una representación irreducible es necesario saber primeramente que representación es. Las representaciones irreducibles de un grupo quedan determinadas completamente por los eigenvalores de los operadores invariantes, ya que estos operadores proporcionan valores que etiquetan una representación irreducible particular. $SU(3)$ cuenta con dos operadores invariantes F^2 y G^3 definidos como:

$$F^2 = \frac{1}{4} \sum \lambda_i \lambda_i \quad (4.14)$$

$$G^3 = \sum d_{ijk} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \quad (4.15)$$

con d_{ijk} es un tensor totalmente simétrico (Ver [1] pág.278).

Una manera más practica de caracterizar una representación irreducible es mediante los diagramas de Young. Una representación donde en la primera fila tenemos n_1 bloques y n_2 bloques en la segunda es de la forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & & & \\ \hline \end{array} \quad (4.16)$$

La dimensión de esta representación es (Ver [1] pág.289)

$$d_{n_1, n_2}^{SU(3)} = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + 2).$$

Observación 9. Una representación donde tenemos una columna de tres bloques es equi-

valente a la identidad. Por ejemplo si tenemos una representación



esta es equivalente

a $\square$. No es posible tener una columna con más de tres bloques debido a que el tensor asociado a esta representación tendría al menos una de sus componentes repetida por lo que este sería cero, debido a la antisimetría de la columna.

Denotamos un vector base de una representación irreducible de $SU(3)$ con $|n_1, n_2; I^2, I_3, Y\rangle$. Una representación del tipo (4.16) cuenta con funciones base de simetría mixta lo que hace complicado escribir cada una de ellas. En una manera más sencilla las podemos obtener si construimos primero la función de peso máximo asociada a una representación, usando la propiedad de que los pesos son aditivos. Si colocamos en todo el primer renglón vectores u y en el segundo vectores s obtendremos la función de peso máximo ϕ_{max} y con la ayuda de los operadores $I_{\pm}, V_{\pm}$ y $U_{\pm}$ que llevan de un estado a otro podemos construir todas las demás funciones base de cualquier representación.

Observación 10. No podemos colocar u en todo el diagrama, tratando de conseguir que tenga el peso máximo, debido a que no podemos tener una función con simetría mixta compuesta sólo de vectores u .

El peso de ϕ_{max} queda determinado por los eigenvalores de $\hat{I}_3, \hat{Y}$

$$\hat{Y}\Phi_{max} = [n_1 Y(u) + n_2 Y(s)]\phi_{max} = (\frac{1}{3}n_1 - \frac{2}{3}n_2)\Phi_{max} \quad (4.17)$$

$$\hat{I}_3\Phi_{max} = [n_1 I_3(u) + n_2 I_3(s)]\phi_{max} = \frac{1}{2}n_1\Phi_{max} \quad (4.18)$$

Ahora mostraremos como construir los vectores base de la representación 8-dimensional. El producto tensorial de tres representaciones fundamentales de SU(3) queda

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

donde $\square\square\square$ es 10-dimensional, $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ 8-dimensional y 1-dimensional $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$

La función de peso máximo para la representación $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ es $\phi_{max} = uus - usu$ y con la ayuda de los operadores de subida y bajada de SU(3), es decir los operadores $I_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$, podemos construir las demás funciones base.

Por ejemplo:

$$U_+\phi_{max} = U_+(u \otimes u \otimes s - u \otimes s \otimes u) = u \otimes u \otimes d - u \otimes d \otimes u \equiv \phi_1$$

Así sucesivamente para las diferentes funciones obtenemos todas las funciones base y quedan como

$$\begin{array}{lll} \phi_{max} = uus - usu & \phi_1 = uud - udu & \phi_2 = dud - ddu \\ \phi_3 = dsd - dds & \phi_4 = ssd - sds & \phi_5 = ssu - sus \end{array}$$

donde sus pesos son

$$\begin{array}{lll} w[\phi_{max}] = [1, 0], & w[\phi_1] = [1/2, 1], & w[\phi_2] = [-1/2, 1], \\ w[\phi_3] = [-1, 0], & w[\phi_4] = [-1/2, -1], & w[\phi_5] = [1/2, -1], \end{array}$$

vistas en el diagrama de pesos son

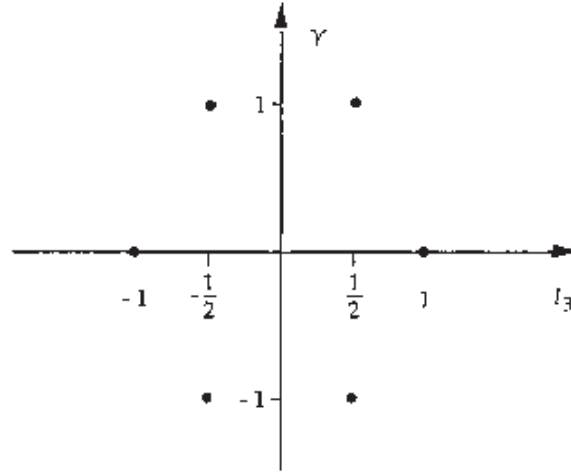
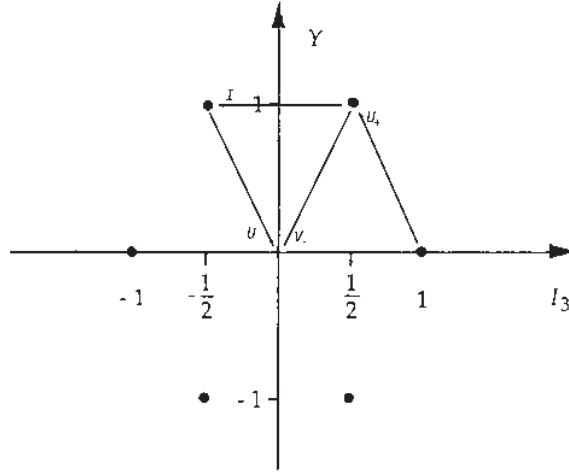


Figura 4.3: Diagrama de peso de las funciones ϕ_{max} , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 de $SU(3)$

Las funciones ϕ_6 y ϕ_7 se obtienen en la siguiente manera visto desde el diagrama de pesos



lo que equivale a

$$\begin{aligned} V_-(\phi_1) &= sud + usd - sdu - uds \\ U_-(\phi_2) &= sud + dus - sdu - dsu \end{aligned} \quad (4.19)$$

El hecho de que no obtengamos las mismas funciones que en un principio esperábamos ya que estos dos operadores te llevan al mismo punto del diagrama, significa que hay una degeneración en este punto y representa dos funciones (o partículas) distintas.

$$\phi_6 = sud + usd - sdu - uds, \quad \phi_7 = sud + dus - sdu - dsu$$

que se distinguen por $\phi_6 = |2, 1; 2, 0, 0\rangle$ y $\phi_7 = |2, 1; 0, 0, 0\rangle$.

Los pesos de estas funciones son

$$w[\phi_6] = [0, 0], \quad w[\phi_7] = [0, 0]$$

Finalmente, el diagrama de pesos de la representación 8-dimensional es:

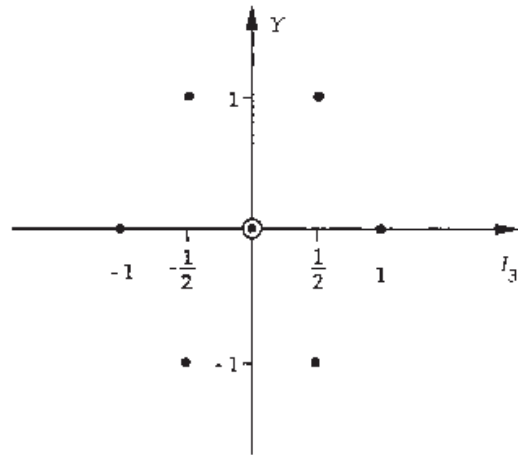


Figura 4.4: Diagrama de peso del octete de SU(3)

En el caso de la representación 10 dimensional, para obtener las funciones se procede de la misma manera, en cuyo caso el diagrama de peso asociado es:

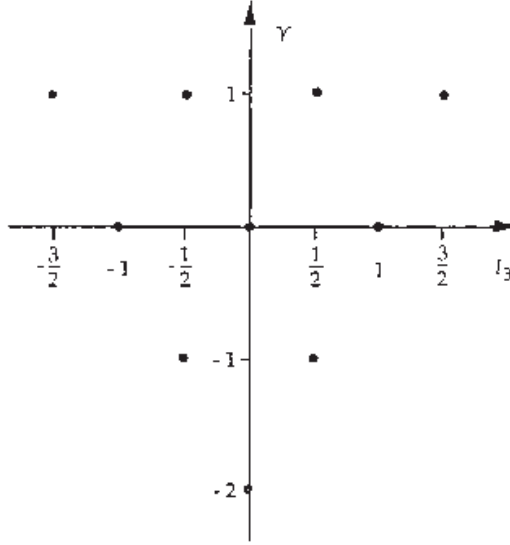


Figura 4.5: Diagrama de peso del decuplete de $SU(3)$

4.5. Representación conjugada

En la sección 3.4 del capítulo anterior hablamos acerca de como construir una representación conjugada. Para $SU(3)$ los generadores de la representación conjugada son: $-\lambda_1^*, -\lambda_2^*, \dots, -\lambda_8^*$. Los vectores base de la representación fundamental conjugada son

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuando los operadores $\hat{I}_3, \hat{Y}$ que se han transformado en $-\hat{I}_3, -\hat{Y}$ actúen a los vectores de esta representación, los eigenvalores solo cambian de signo, por lo que el peso queda definido

$$w[\bar{u}] = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}], \quad w[\bar{s}] = [0, \frac{2}{3}], \quad w[\bar{d}] = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}] \quad (4.20)$$

entonces

$$w[\bar{d}] > w[\bar{s}] > w[\bar{u}]. \quad (4.21)$$

y el diagrama de pesos correspondiente es

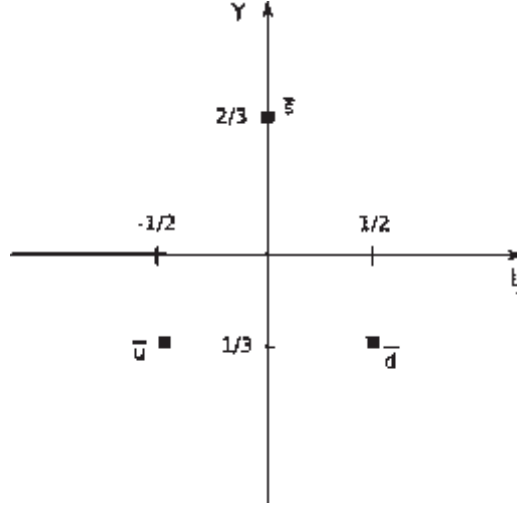


Figura 4.6: Diagrama de pesos de la representación fundamental conjugada de SU(3)

En general toda representación irreducible al ser conjugada sigue siendo una representación irreducible que no es necesariamente equivalente a la original, pero es posible asociarle un diagrama de Young.

Ejemplo 13. Para la representación fundamental $\square$ donde la función de peso máximo es u y el peso es

$$\hat{Y}\phi_{1,0}^{max} = \frac{1}{3}\phi_{1,0}^{max} \quad \hat{I}_3\phi_{1,0}^{max} = \frac{1}{2}\phi_{1,0}^{max}$$

Si consideramos la representación fundamental conjugada la función de peso máximo será $\bar{d}$. Tomando en cuenta (4.16) y (4.17) el peso de queda determinado por

$$\hat{Y}\phi_{m_1,m_2}^{max} = \frac{m_1 - 2m_2}{3}\phi_{m_1,m_2}^{max} \quad \hat{I}_3\phi_{m_1,m_2}^{max} = \frac{m_1}{2}\phi_{m_1,m_2}^{max} \quad (4.22)$$

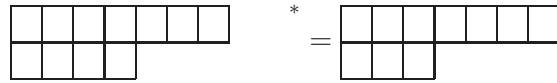
De (4.20) tenemos que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, es decir el diagrama correspondiente es $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$.

Para el caso general, supondremos que el diagrama asociado a una representación irreducible conjugada del tipo (4.16) sea otra representación con m_1 bloques en el primer renglón y m_2 en el segundo renglón cuyo peso máximo esta determinado por (4.22)

Por otro lado, tomando en cuenta la relación (4.21), la función de peso máximo de una representación (4.16) conjugada se obtiene sumando los pesos de las funciones cuando colocamos $\bar{d}$ y $\bar{s}$ en el primer y segundo renglón respectivamente. El peso de esta función queda determinada por

$$\hat{Y}\bar{\phi}_{n_1,n_2}^{max} = \frac{2n_2 - n_1}{3}\bar{\phi}_{n_1,n_2}^{max} \quad \hat{I}_3\bar{\phi}_{n_1,n_2}^{max} = \frac{n_1}{2}\bar{\phi}_{n_1,n_2}^{max}$$

Lo que equivale a $m_1 = n_1$, $m_2 = n_1 - n_2$. Por lo que el diagrama de Young de una representación conjugada queda



donde en la primera fila tenemos n_1 bloques y en la segunda $n_1 - n_2$ bloques.

Observación 11. *De manera práctica para construir el diagrama de Young de una representación conjugada solo tenemos que completar el diagrama de Young a una identidad y girar el complemento obtenido.*

Capítulo 5

Clasificación de hadrones

Cuando nos ponemos a pensar y tratamos de entender y describir la naturaleza, una de las interrogantes que aún seguimos sin saber con certeza es; ¿cuáles son las componentes fundamentales que constituyen la materia?. Demócrito pensaba que la materia estaba compuesta de átomos y que estas partículas eran indivisibles. Posteriormente con los descubrimientos tanto del electrón por Thompson en 1897, el núcleo atómico en 1911 por Rutherford, el neutrón en 1932 por Chadwick, la idea de Demócrito es replasada por la idea que estas partículas eran las componentes fundamentales de la naturaleza. Con el descubrimiento que el núcleo de los átomos contiene protones cuya carga era positiva, surgió la pregunta ¿cómo era posible que partículas cargadas positivamente pudieran mantenerse unidas?. La respuesta fué que existía una fuerza lo suficientemente fuerte que interactuaba a corta distancia que podía lograrlo: la fuerza nuclear fuerte.

De acuerdo con la teoría cuántica de campos que se basa en la suposición de que cuando tenemos una interacción a distancia esta lleva asociada un intercambio de partículas y para crear una partícula de masa m se necesita una energía mc^2 . De acuerdo con el principio de incertidumbre, esta energía puede crearse durante un tiempo suficientemente corto, $\tau = \hbar/(mc^2)$, y durante ese tiempo, la partícula puede viajar una distancia dada por $\lambda = \tau c$, que es el alcance de la interacción. La interacción de la fuerza nuclear fuerte tiene un alcance de $\lambda \approx 1 fm(10^{-15} mts)$, por lo que debe llevar asociada una partícula de masa $mc^2 \approx 200 MeV^1$.

La primera partícula que se detectó fue el muón μ cuya masa resultó ser unas 210 veces mayor que la masa del electrón². Sin embargo se encontró que esta partícula no interactuaba fuertemente. Posteriormente se descubrió, el pión que aparecía con carga eléctrica positiva π^+ , negativa π^- o neutra π^0 y masa aproximadamente entre 135 y 140 MeV. Se descubrió también que esta partícula sí interactuaba fuertemente con protones y neutrones.

Más adelante se encontraron los kaones $K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0$, de los cuales K^+ y K^- se descomponen principalmente en muón y neutrino, o en dos piones por medio de la fuerza nuclear débil. A estas partículas se les denominó partículas “extrañas” por el hecho que interactuen fuertemente y decaigan por medio de la fuerza débil.

¹1 eV es la energía necesaria para arrancar un electron del atomo.

²La masa del electron es $500 KeV/c^2$.

Tambien se encontraron partículas, llamadas hiperones como Λ y las partículas Σ^+ , Σ^- , Σ^0 , Ξ^0 , Ξ^- . Todas estas partículas junto con el protón, neutrón, electrón y neutrino y sus antipartículas eran ya conocidas a mediados de los 50's y posteriormente con los aceleradores de partículas se descubrierón muchas más. Por lo que se vio la necesidad de clasificarlas.

5.1. Hadrones

Las partículas que interactúan fuertemente se denominan **hadrones** y se dividen en **mesones** (bosones con spin entero) y **bariones** (fermiones con spin semi-entero). Cada partícula está caracterizada por su masa m , carga eléctrica Q , spin j , número bariónico B , extrañeza S , isospin I_3 , paridad J^π . Por ejemplo a continuación mostramos algunas tablas con estas propiedades de algunas partículas.

Mesones	I	S	I_3	Y	Masa (MeV)
$\pi^\pm$	1	0	± 1	0	139.57018
π^0	1	0	0	0	134.9766
η	0	0	0	0	547.30
$K^+(K^-)$	1/2	1(-1)	1/2(-1/2)	± 1	493.677
$K^0(\bar{K}^0)$	1/2	1(-1)	-1/2 (1/2)	1(-1)	497.672

Tabla 2. *Tabla de mesones con $J^\pi = 0^-$*

Mesones	I	S	I_3	Y	Masa (MeV)
$\rho^\pm$	1	0	± 1	0	770
ρ^0	1	0	0	0	770
ω	0	0	0	0	782
$(K^\pm)^*$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	891.66
$(K^0)^*$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	896.1
$(\bar{K}^0)^*$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	896.1

Tabla 3. *Tabla de mesones con $J^\pi = 1^-$*

Bariones	I	S	Y	I_3	Masa (MeV)
p	1/2	0	1	1/2	938.27
n	1/2	0	1	-1/2	939.56
Λ	0	-1	0	0	1115.68
Σ^+	1	-1	0	1	1189.37
Σ^0	1	-1	0	0	1192.6442
Σ^-	1	-1	0	-1	1197.44
Ξ^+	1/2	-2	-1	1/2	1314.83
Ξ^-	1/2	-2	-1	-1/2	1321.31

Tabla 4. *Tabla de bariones con $J^\pi = 1/2^+$*

Bariones	I	S	Y	I_3	Masa (MeV)
Δ^{++}	3/2	0	1	3/2	1232
Δ^+	3/2	0	1	1/2	1232
Δ^0	3/2	0	1	-1/2	1232
Δ^-	3/2	0	1	-3/2	1232
$(\Sigma^+)^*$	1	-1	0	1	1382.8
$(\Sigma^0)^*$	1	-1	0	0	1383.7
$(\Sigma^-)^*$	1	-1	0	-1	1387.2
$(\Xi^-)^*$	1/2	-2	-1	1/2	1531.8
$(\Xi^0)^*$	1/2	-2	-1	-1/2	1535.0
Ω^-	0	-3	-2	0	1572.45

Tabla 5. *Tabla de bariones con $J^\pi = 3/2^-$*

El número barionico B se introdujo para justificar el hecho de que el protón era estable, y que otras partículas como $n, \Lambda, \Sigma, \dots$ decaen al protón. Se le asignó el número barionico $B = 1$ al protón y hadrones que decaen en él, $B = -1$ a sus antipartículas y $B = 0$ a los hadrones que no decaen al protón. Empíricamente se encuentra que los bariones tienen $B = 1$, sus antipartículas (anti-bariones) $B = -1$ y los mesones tienen todos $B = 0$.

La extrañeza S se introduce para explicar el hecho que algunos hadrones como $K, \Lambda, \Sigma, \dots$ tengan vidas relativamente largas, lo cual implica que no decaen a otros hadrones más ligeros como p, π por la interacción fuerte sino por la débil. Una particularidad de este número cuántico S , es que tenía que ser conservado por la interacción fuerte pero podía no serlo por la débil. Para los hadrones más ligeros (p, n, π) $S = 0$, $S = 1$ para los kaones K^0 y K^+ , $S = -1$ para $\bar{K}^0, K^-, \Lambda, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ y $S = 2$ para Ξ^0, Ξ^- . Las antipartículas tienen extrañeza opuesta a las partículas para que puedan aniquilarse con ellas sin violación de S .

El isospín I se introduce a partir del hecho de que los hadrones aparecen en grupos de partículas, llamados multipletes, con masas muy parecidas, y con propiedades muy similares, excepto que tienen carga eléctrica que varía de uno en uno. A estos multipletes se les asoció con las representaciones irreducibles de $SU(2)$. Por ejemplo: el protón y neutrón están en el mismo multiplete, los piones (π^+, π^0, π^-) también, etc. El peso de los vectores base, que es el que define a cada partícula en cada multiplete, es la componente de isospín I_3 que es relacionado con la carga eléctrica y puede escribirse como $I_3 = -\frac{Y}{2} + \frac{Q}{e}$, donde Y es hipercarga definida como $Y = B + S$. Por ejemplo $I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$ y $I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$.

Por analogía con el momento angular, todas las partículas del multiplete son eigenvectores del operador I^2 correspondiente a un valor $I(I + 1)$. El número de partículas en el multiplet es $2I + 1$. La introducción del isospín permite considerar que las partículas de un multiplet son partículas idénticas, que, además de venir caracterizadas por su función de onda orbital y su función de onda de spin, tienen una función de onda de isospin.

En física de partículas se distingue entre “partículas estables” que son las que decaen por la interacción débil y “resonancias” que son las partículas que decaen por la interacción fuerte. En el decaimiento de una partícula se debe conservar siempre la energía y el momento. Ello hace que el decaimiento de un fermión, con spin semi-entero, deba aparecer

un número impar de fermiones, mientras que el decaimiento de un bosón deberán aparecer un número par de fermiones. También deben de conservarse siempre la carga eléctrica Q , el número bariónico B , y en interacciones fuertes se conserva también la extrañeza S e isospin I .

En la naturaleza, los bariones y los mesones aparecen a muchas energías. Sin embargo, los valores del isospin e hipercarga no aparecen de forma arbitraria. Por ejemplo, si consideramos bariones de spin $1/2$ y paridad positiva $J = 1/2^+$, aparecen:

Los nucleones, protón y neutrón con $Y = 1$, $I = 1/2$, las partículas Σ con $Y = 0$, $I = 1$, las partículas Ξ con $Y = -1$, $I = 1/2$, y la partícula Λ^0 , $Y = 0$, $I = 0$, que corresponden a la representación octete del grupo $SU(3)$

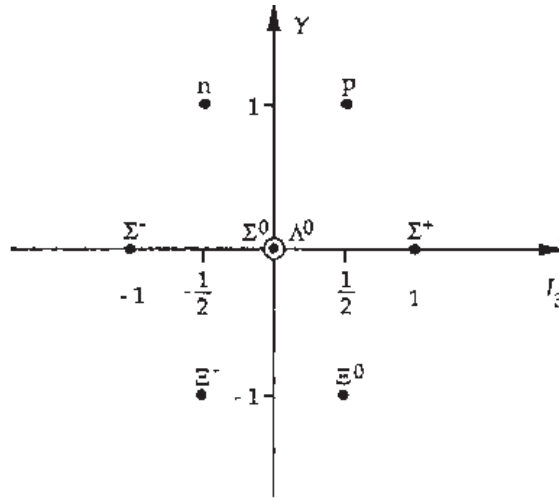


Figura 5.1: Octuplete de bariones con $J^\pi = 1/2^+$

Del mismo modo si consideramos $J = 3/2^+$ aparecen las resonancias Δ con $Y = 1$, $I = 3/2$, las resonancias Σ^* con $Y = 0$, $I = 1$, las resonancias Ξ^* con $Y = -1$, $I = 1/2$ y Ω con $Y = -2$, $I = 0$. Los números cuánticos de estas partículas corresponden a la representación decuplete de $SU(3)$.

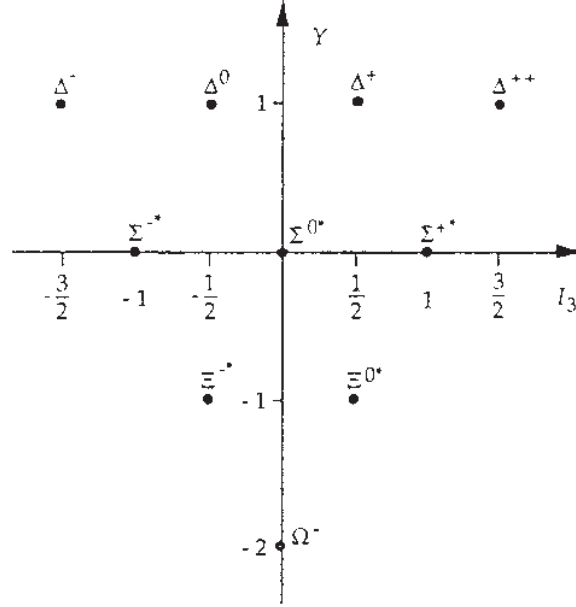


Figura 5.2: Decuplete de bariones con $J^\pi = 3/2^+$

Si consideramos las partículas con $J = 1/2^+$, encontramos a bajas energías solo una resonancia Λ^* con $Y = 0$, $I = 0$. Esta representación corresponde al singlete de $SU(3)$. Del mismo modo, todas las demás resonancias de bariones pueden ser agrupadas como singlete, decuplete u octuplete.

En los mesones con $J = 0^-$ aparecen: los kaones K con $Y = 1$, $I = 1/2$ y anti kaones $\bar{K}$ con $Y = -1$, $I = 1/2$, los piones con $Y = 0$, $I = 1$, la partícula η con $Y = 0$, $I = 0$.

Así mismo los mesones con $J = 1^-$, aparecen: las resonancias de los kaones K^* con $Y = 1$, $I = 1/2$ y los anti-kaones con $Y = -1$, $I = 1/2$, ρ con $Y = 0$, $I = 1$, ω con $Y = 0$, $I = 0$.

Por otro lado, el mesón η' con $Y = 0$, $I = 0$ y la partícula ϕ con $Y = 0$, $I = 0$ corresponden cada uno a un singlete.

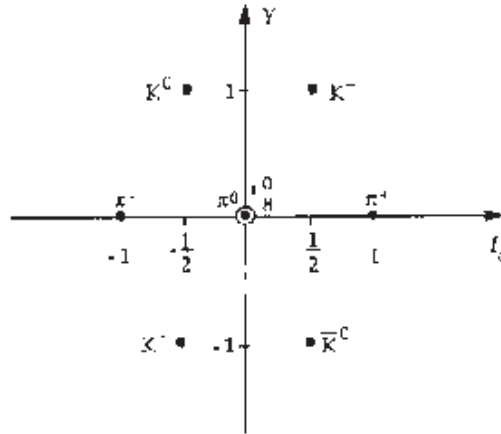


Figura 5.3: Octuplete de mesones $J^{\pi} = 0^{-}$

Este hecho lleva a considerar que los hadrones que aparecen en la naturaleza generan representaciones irreducibles de un grupo de transformaciones $SU(3)$, que contiene al subgrupo $SU(2)$ de las transformaciones de isospín y al subgrupo $U(1)$ de transformaciones generadas por la hipercarga. El grupo $SU(3)$ tiene como generadores Y, I_3, I_+, I_- y los operadores U_+, U_-, V_+, V_- que cambian el valor de isospín e hipercarga.

Sin embargo aunque con el grupo $SU(3)$ podemos relacionar muchas propiedades de los hadrones este es sólo un modelo que no explica porqué los bariones sólo aparecen en las representaciones octete, decuplete y singlete, mientras que los mesones solo aparecen en singlete y octiplete y no en otra forma.

5.2. Modelo de quarks

Alrededor de 1963 Gell-Mann postuló un modelo donde podrían clasificarse todos los hadrones si se suponía la existencia de unas partículas más elementales a las que llamó quarks, que no se pueden encontrar individualmente y son junto con los leptones los constituyentes fundamentales de la materia.

En un principio el modelo de quarks proponía solo tres tipos ('sabores') u, d, s (up, down, strange) de partículas y cada sabor podría tener uno de tres diferentes 'colores'³. En esta manera se puede comprender mejor como es que los bariones y los mesones tengan solo estas representaciones.

Nota 14. *Los quarks se pueden combinar de distintas maneras sin importar el sabor, pero si el color. Nunca podemos formar una combinación de quarks con el mismo color. Un hadron siempre es 'blanco' (sin color).*

³No en el sentido convencional de la palabra, color se refiere a una carga fuerte.

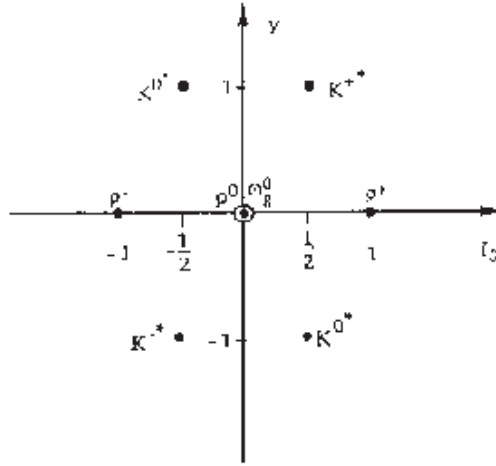


Figura 5.4: Octete de mesones con $J^{\pi} = 1^{-}$

5.2.1. Bariones

Los tres sabores de los quarks forman la representación fundamental de $SU(3)$. Si se considera que los bariones están formados por tres quarks, el producto directo de representaciones irreducibles fundamentales de $SU(3)$:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

describe muy bien la clasificación de todos los bariones, que aparecen en la forma de octetes, decupletes y singletes.

5.2.2. Mesones

La antipartícula de un quark es el antiquark y tiene estados (sabores) $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$, cuyos números cuánticos son los opuestos a los de u,d,s. Por lo tanto los estados de los antiquarks generan la representación fundamental conjugada descrita por el diagrama de Young $[1,1]$. En el modelo de quarks los mesones son sistemas quark-antiquark. Por lo tanto su número bariónico es cero y si consideramos el producto directo de representaciones irreducibles de $SU(3)$, en este caso una fundamental con una fundamental conjugada se obtiene

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Obtenemos precisamente los multipletes de estas partículas.

Las propiedades de los quarks y antiquarks se muestran en la siguiente tabla

Sabor	I_3	Q	B	Masa (MeV)
u	1/2	2/3	1/3	336
d	-1/2	-1/3	1/3	338
s	0	-1/3	1/3	540
$\bar{u}$	-1/2	-2/3	-1/3	336
$\bar{d}$	1/2	1/3	-1/3	338
$\bar{s}$	0	1/3	-1/3	540

Tabla 5. *Propiedades de los quarks*

5.3. Funciones de onda de los hadrones

Apartir de los valores de I_3 e Y de los bariones, podemos inferir cuál es su contenido en quarks. Por ejemplo podemos ver la siguiente tabla:

Mesones	Quarks
π^+	$u\bar{d}$
π^0	$u\bar{u}, d\bar{d}$
π^-	$d\bar{u}$
η	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
K^+	$u\bar{s}$
K^0	$d\bar{s}$
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$
K^-	$s\bar{u}$

Tabla 5. *Contenido de quarks en los mesones*

Bariones	Quarks
p	uud
n	udd
Σ^+	uus
Σ^0	uds
Σ^-	dds
Λ	uds
Ξ^0	uss
Ξ^-	dss
Δ^{++}	uuu
Δ^+	uud
Δ^0	udd
Δ^-	ddd
Ω	sss

Tabla 5. *Contenido de quarks para los bariones*

Los estados concretos de los hadrones generan representaciones irreducibles del grupo SU(3). Por ejemplo; la partícula Σ^0 y Λ son combinaciones completamente simétricas de u, d y s pero corresponden a distintos multipletes de isospin.

$$\Sigma^0 = |2, 1; 1, 0, 0\rangle = S_{123}|uds\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle + |usd\rangle + |dsu\rangle + |dus\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle)$$

y para la particion $[1,1,1]$

$$\Lambda = |2, 1; 1, 0, 0\rangle = S_{132}|uds\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle - |usd\rangle + |dsu\rangle - |dus\rangle + |sud\rangle - |sdu\rangle)$$

Posteriormente al encontrarse nuevas partículas que no podían ser explicadas con los tres sabores ya definidos, el modelo de quark tuvo que extenderse e incluir nuevos quarks. Actualmente se cree que existen seis sabores up, down, strange, charmed, top, bottom y sus respectivos antiquarks. El hecho que se utilice $SU(3)$ para describir las primeras partículas encontradas sólo es una aproximación para describir la simetría de sabor de la fuerza nuclear fuerte, en el caso cuando se incluyen los tres nuevos quarks se extiende al estudio $SU(6)$ pero este modelo no conserva la simetría en el sentido que las masas de las partículas que aparecen en los multipletes de isospin son muy diferentes.

5.4. Color

Aunque el modelo de quarks es una manera indirecta para describir la existencia de partículas 'fundamentales'(quarks), sigue siendo sólo un modelo y dicho modelo siguió siendo visto con escepticismo hasta que en 1968 aparecieron las primeras evidencias experimentales directas sobre la existencia de una estructura interna para el protón. No quiere decir que se hayan visto los quarks independientemente sino que los experimentos señalan que el protón está constituido por partículas más pequeñas.

El mismo año en que apareció el modelo de los quarks, Oscar Wallace Greenberg propuso que los quarks no obedecen ni la estadística de Fermi, ni la de Bose, sino una paraestadística en que se permitía a tres quarks idénticos ocupar un mismo estado. Una alternativa, aparentemente independiente, fue publicada por Moo-Young Han y Yoichiro Nambu en 1965. Esta consistía en asociar a los quarks una cualidad extra, que se denominó color, que se puede considerar como una nueva carga de las partículas asociada a la interacción fuerte.

Según este modelo existen tres colores, rojo, verde y azul. Los quarks están dotados de color y los antiquarks de anticolor. La suma de un color con su anticolor, así como la suma de los tres colores, da como resultado partículas sin color. Color y anticolor, así como colores distintos, se atraen. Colores o anticolores iguales se repelen. El resultado: los quarks tienden a agruparse, ya sea por pares quark-antiquark de un mismo color, formando mesones sin color, ya sea por ternas de quarks de diferentes colores, formando bariones incoloros. En resumen, el color de los hadrones es siempre cero. En 1966 Greenberg demostró que el modelo del color era equivalente a su modelo de la paraestadística, razón por la cual algunos autores atribuyen a Greenberg la introducción del color en la teoría de los quarks.

El modelo del color resuelve elegantemente el problema de la estadística, ya que ninguno de los quarks que forman un barión son idénticos, pues poseen distinto color. Los colores introducidos al formalismo de los grupos agregan una nueva representación de $SU(3)$. La fuerza entre los quarks es transmitida por los gluones. Los gluones intercambian el color de los quarks. Con tres colores y tres anticolores se pueden lograr nueve combinaciones; sin embargo, una de ellas recibe contribuciones iguales de rojo combinado

con antirrojo, azul con antiazul y verde con antiverde, lo que da por resultado una mezcla incolora. Las ocho combinaciones restantes generan el octete de gluones de color.

La introducción del color tiene como consecuencia multiplicar el número de quarks por tres. Sin embargo, la condición de que los hadrones sean incoloros evita que aumente el número de hadrones predichos, pues todas las combinaciones de quarks que contienen color diferente de cero se eliminan. La inclusión del color daba una salida al problema de la estadística, y explicaba el origen de más de ochenta hadrones conocidos entonces con base en sólo tres quarks. Otra complicación era justificar las reglas de interacción entre los quarks de colores, y dar una formulación para el campo gluónico y esta es explicada en la teoría de cromodinámica cuántica.

Conclusiones

Con la ayuda del estudio de algunos conceptos de teoría de grupos que son muy importantes en física para poder describir las simetrías de un sistema, pudimos entender los resultados del trabajo publicado por Murray Gell-Mann a principio de los años 60s sobre la clasificación y predicción de partículas elementales. El cual consistía en proponer los quarks como partículas más elementales y al asociarlas con funciones base de la representación fundamental del grupo $SU(3)$. Cuando tomamos el producto tensorial entre representaciones fundamentales obtenemos las funciones de onda de las partículas compuestas por quarks con las simetrías de determinadas representaciones de dimensiones específicas en las cuales, el peso de sus funciones base quedan descritos en los diagramas de peso. Se ha explicado a lo largo de esta tesis primeramente los conceptos necesarios para poder entender las representaciones de grupo, se procedió primeramente a entender que es un grupo, sus propiedades, que son las representaciones lineales de grupo, cuáles son las representaciones irreducibles, cómo se pueden asociar representaciones irreducibles con diagramas de Young, las propiedades de simetría de los tensores asociados a dichos diagramas. También fué necesario una introducción a los grupos de Lie ya que los grupos que estamos interesados en estudiar $SU(2)$ y $SU(3)$ son grupos de Lie, también fué importante ver qué son los generadores de grupo y con ello poder explicar cómo es posible simplificar el estudio de los grupos de Lie mediante su álgebra de Lie. En los últimos dos capítulos de esta tesis, que corresponden al estudio de $SU(3)$ y la clasificación de hadrones, se han explicado los detalles necesarios para entender como se construyen en una manera práctica las funciones base de las representaciones irreducibles que se obtienen como el producto tensorial de tres representaciones fundamentales, para así, poder describir a los bariones en el diagrama de peso de dichas funciones. De igual manera el producto tensorial de una representación fundamental y una representación fundamental conjugada puede explicar la clasificación de los mesones, compuestos por combinaciones de quark-antiquark..

Apendice A

Momento angular

Las componentes del momento angular en mecánica cuántica satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (1)$$

aquí ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. Definiremos el operador diferencial correspondiente al cuadrado del momento angular

$$L^2 = L \cdot L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (2)$$

que es un operador escalar y satisface por tanto.

$$[L^2, L_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Lo que implica que si consideremos el operador L como un operador hermitiano es posible diagonalizar simultáneamente L_z y L^2 lo que nos lleva a que estos operadores tienen eigenvectores en común con eigenvalores reales.

$$L_z|\lambda, m\rangle = m|\lambda, m\rangle, \quad L^2|\lambda, m\rangle = \lambda|\lambda, m\rangle \quad (4)$$

Utilizaremos particularmente los operadores de subida y bajada para mostrar que el eigenvalor $\lambda = l(l+1)$ donde l puede tomar valores semienteros positivos. Un operador de subida L_+ o bajada L_- se define como:

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y \quad (5)$$

El operador L^2 escrito en términos de ellos queda

$$L^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$$

A partir de las relaciones de conmutación, encontramos que

$$[L_z, L_+] = +L_+, \quad [L_z, L_-] = -L_-, \quad [L_+, L_-] = 2L_z \quad (6)$$

Como L_+ y L^2 conmutan debido a (3)

$$L^2(L_+|\lambda, m\rangle) = L_+(L^2|\lambda, m\rangle) = \lambda(L_+|\lambda, m\rangle)$$

Por lo tanto, $L_+|\lambda, m\rangle$ y $L_-|\lambda, m\rangle$ todavía son eigenvectores de L^2 con eigenvalores λ . Por otro lado,

$$L_z L_+ = L_+ (L_z + \mathbb{I}) \quad (7)$$

$$L_z (L_+|\lambda, m\rangle) = L_+ (L_z + \mathbb{I})|\lambda, m\rangle = (m+1)(L_+|\lambda, m\rangle) \quad (8)$$

Por lo tanto, $L_+|\lambda, m\rangle$ todavía es eigenvector de L_z con eigenvalor $m+1$ por lo que L_+ ha elevado el eigenvalor por 1 y por eso es llamado operador de subida. De manera similar L_- baja los eigenvalores por 1 y éste es llamado el operador de bajada.

Tomando los valores esperados y usando $L_x^\dagger = L_x$, $L_y^\dagger = L_y$,

$$\langle\lambda, m|L^2 - L_z^2|\lambda, m\rangle = \langle\lambda, m|L_x^2 + L_y^2|\lambda, m\rangle = |L_x|\lambda, m\rangle|^2 + |L_y|\lambda, m\rangle|^2$$

vemos que $\lambda - m^2 \geq 0$ es decir m es acotado $-\lambda \leq m \leq \lambda$. Sea l el valor más grande de m . Luego $L_+|\lambda, l\rangle = 0$, lo cual implica que $L_-L_+|\lambda, l\rangle = 0$. Como

$$L^2 = L_-L_+ + L_z(L_z + \mathbb{I})$$

encontramos que a partir de esta ecuación tenemos

$$0 = L_-L_+|\lambda, l\rangle = (L^2 - L_z^2 - L_z)|\lambda, l\rangle = (\lambda - l^2 - l)|\lambda, l\rangle$$

por lo tanto

$$\lambda = l(l+1) \geq 0$$

con l no negativo. Ahora reetiquetamos los estados $|\lambda, m\rangle = |l, m\rangle$. Similarmente, sea l' el más pequeño de los m . Entonces $L_-|l, l'\rangle = 0$. A partir de

$$L^2 = L_+L_- + L_z(L_z - \mathbb{I})$$

vemos que

$$0 = L_+L_-|l, l'\rangle = (L^2 + L_z - L_z^2)|l, l'\rangle = (\lambda + l' - l'^2)|l, l'\rangle$$

Esta ecuación tiene dos soluciones $l'=-1$ y $l'=l+1$, pero esta última es imposible ya porque l es el valor máximo.

Así $l' = -l$ y m corre en pasos enteros desde $-l$ a $+l$, esto es, $-l \leq m \leq l$. Comenzando desde $|l, l\rangle$ y aplicando L_- repetidas veces, alcanzaremos todos los otros estados $|l, m\rangle$. De manera que $|l, m\rangle$ forma una representación irreducible; m varía y l está fijo. Entonces usando las ecuaciones del álgebra (6) de la nueva base y las expresiones de L^2 en términos de L_z y con los operadores (5) tenemos

$$\begin{aligned} L_-L_+|l, m\rangle &= [l(l+1) - m(m+1)]|l, m\rangle = (l-m)(l+m+1)|l, m\rangle, \\ L_+L_-|l, m\rangle &= [l(l+1) - m(m-1)]|l, m\rangle = (l+m)(l-m+1)|l, m\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Ya que L_+ aumenta el valor de m a $m+1$, el eigenvector resultante es proporcional a $|l, m+1\rangle$. La normalización está dada por:

$$\begin{aligned} L_+|l, m\rangle &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l, m+1\rangle, \\ L_-|l, m\rangle &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente, ya que m va desde $-l$ a $+l$ en pasos enteros, entonces hay $2l+1$ estados $|l, m\rangle$ por lo que l es un entero positivo o la mitad de un entero positivo y escribimos $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^+$.

Observación 12. La representación está determinada totalmente por el semientero l y está clasificada por su dimensión, que es $2l+1$.

Apendice B

Representaciones de $SU(2)$

El producto tensorial entre dos representaciones fundamentales de $SU(2)$ está dado por

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

en donde $\square$ representa un espacio 2-dimensional, en donde $D(g)$ es una matriz $2 \otimes 2$. Hemos mencionamos que el producto tensorial genera una matriz de mayor dimension en este caso la nueva matriz es 4 – *dimensional*. Representamos por m la matriz 2–dimensional y por M la matriz resultante. Simbolicamente tenemos

$$m \otimes m = M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$$

Por lo que la matriz resultante del producto directo es suma directa de una matriz completamente simétrica y una completamente antisimétrica.

Consideremos el vector base $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ que está asociado a una representación dos dimensional cuyos elementos son de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, este se transforma como $\psi = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix}$.

En el caso de la representacion cuyo diagrama es $\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$, la función base es $I_{\alpha\beta} := (\psi \otimes \phi - \phi \otimes \psi)_{\alpha,\beta} = \psi_\alpha \phi_\beta - \psi_\beta \phi_\alpha$

Entonces pedimos que $I'_{\alpha\beta} = (DI)_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} I' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi'_1 \phi'_2 - \psi'_2 \phi'_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)(\alpha^* \phi_2 - \beta^* \phi_1) - (\alpha^* \psi_2 - \beta^* \psi_1)(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(\psi_1 \phi_2 - \psi_2 \phi_1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \phi_2 - \psi_2 \phi_1) \end{aligned}$$

por lo tanto en esta representación

$$D = \mathbb{1}$$

Para la representación totalmente simétrica las funciones base que describe el diagrama $\square\square$ son $\xi_1 = \psi_1\phi_1$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\phi_2 + \psi_2\phi_1)$, $\xi_3 = \psi_2\phi_2$. Después de actuar con los elementos de $SU(2)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \psi'_1\phi'_1 = (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \\
&= \alpha^2\psi_1\phi_1 + \alpha\beta(\psi_1\phi_2 + \psi_2\phi_1) + \beta^2\psi_2\phi_2 \\
\xi'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi'_1\phi'_2 + \psi'_2\phi'_1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(\alpha^*\phi_2 - \beta^*\phi_1) + (\alpha^*\psi_2 - \beta^*\psi_1)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\psi_1\phi_2 + \psi_2\phi_1) + \frac{2}{\sqrt{2}}\beta\alpha^*\psi_2\phi_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\beta^*\alpha\psi_1\phi_1 \\
\xi'_3 &= \psi'_2\phi'_2 = (\alpha^*\psi_2 - \beta^*\psi_1)(\alpha^*\phi_2 - \beta\phi_1) \\
&= \alpha^{*2}\psi_2\phi_2 + \alpha^*\beta^*\psi_2\phi_1 - \beta^*\alpha^*\psi_1\phi_2 + \beta^{*2}\psi_1\phi_1
\end{aligned}$$

Como es de esperarse ξ se transforma en modo lineal, entonces

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\beta^*\alpha & \alpha\alpha^* & \sqrt{2}\beta\alpha^* \\ \beta^{*2} & -\sqrt{2}\beta^*\alpha^* & \alpha^{*2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Esto define una representación 3 dimensional del grupo $SU(2)$.

Bibliografía

- [1] F1. Stancu, "Group Theory in Subnuclear Physics", Oxford science publications, 1996.
- [2] Howard Georgi, "Lie Algebras in Particle Physics from Isospin to Unified Theories", Westview Press ABP, 1999.
- [3] Joseph J. Rotman, "An Introduction to the Theory of Groups", Fourth Edition, Edit. Springer, 1991.
- [4] L. O'Raifeartaigh, "Group Structure of Gauge Theories", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1986.
- [5] V.Ch. Zhukovski et al, "Quantum Electrodynamics", Edit. Mir, 1988.
- [6] V.S. Varadarajan, "Lie groups, Lie algebras ad Their Representation", Springer Verlag, 1984.
- [7] Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambrige University Press, 1995.
- [8] Hermann Weyl, "The Theory of Groups and Quantum Mechanics", Howard Percy Robertson.
- [9] J.J. Sacurai," Modern Quantum Mechanics", Addison- Wesley, 1992
- [10] L. D. Landau, "Curso Abreviado de Física Teórica Vol.2", Edit. Mir, 1985
- [11] Francis Halzen and Alan D. Martin, "Quarks y Leptons: An Introductory Course in Modern Prticle Physics, Edit. John Wiley y sons,1984