Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Geometría y curvatura Gaussiana no constante en superficies de Riemann compactas.

TESIS

Que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:
Oscar Alberto Pizá Morales

Director:
Dr. Luis Abel Castorena Martínez

Morelia Michoacán, México, Agosto 2009.

A mis padres Ángel y María Elena
A mis hermanas Arleth y Janeth
A mis abuelos Israel, José Leonides y Marina.

Agradecimientos

Es un orgullo y motivo de gran satisfacción para mí haber terminado mis estudios de licenciatura, así mismo es para mí un honor el hecho que la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo importante institución de fomento educativo, cultural e histórica desde su fundación, me haya dado la oportunidad de realizar mis estudios en esta institución, formándome no solo académicamente sino cultural y humanamente también, en esta etapa de aprendizaje y maduración.

Esta etapa no fue producto de un proceso aislado y es a través de este apartado que quiero agradecer a aquellas personas e instituciones que me acompañaron durante estos 5 años.

En primer lugar quiero agradecer a Dios que me dio la oportunidad de culminar este proceso. Madre, gracias por siempre estar al pendiente de mí, cuidarme y darme incondicionalmente tu apoyo. Padre, gracias por tu apoyo ético, moral y económico. Arleth y Janeth, gracias por darme ánimos de seguir adelante al considerarme su modelo de persona a seguir. Abuelos, gracias por sus consejos, su apoyo e importante parte en mí persona. En general gracias a toda mi familia, que siempre se han sentido orgullosos de mí y eso me ha dado motivo a seguir adelante a pesar de las adversidades que hemos tenido.

A mis amigos Nozair, Rocío, Ana, Erick, Fátima, gracias por preocuparse por mí, por sus consejos, su apoyo, por su atención, escucharme y el saber que siempre podré confiar en ustedes. Antonio y Salvador, gracias por su aporte académico. A mis demás amigos, gracias por sus ánimos y por estar dispuestos a convivir conmigo.

También quiero agradecer profunda y respetuosamente a todos mis profesores, que compartieron su conocimiento conmigo. De manera especial quiero mencionar a Rafael y Francisco grandes amigos que en todo momento han estado al pendiente de mí y sin su guía en los primeros semestres no estaría aquí en estos momentos. Armando, Fernando, Jorge Luis, gracias por brindarme su amistad, su apoyo y que mas que profesores fueron tutores para mí, dándome una importante formación desde la segunda mitad de mi proceso académico. Gloria, gracias por todo tu apoyo, amistad y aporte en este trabajo de tesis, ha sido un placer discutir e intercambiar ideas contigo.

De manera especial quiero mencionar a Abel, gracias por haber aceptado este trabajo de tesis, aprendí mucho gracias a tus consejos; se que no capto todo en un primer instante, así que te agradezco tu atención y el que me hayas tenido mucha paciencia, así mismo valoro mucho la amistad que me has dado.

Por último agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, que me dio apoyo académico y económico durante 6 meses bajo elproyecto PAPIIT IN1000909-2 “Aspectos geométricos en el espacio moduli de curvas y fibrados vectoriales” y ahí me detengo en agradecimientos que sino no comenzamos con mi tesis.

Gracias a todos.

Oscar Alberto Pizá Morales.

Introducción

A mediados del siglo XIX Bernhard Riemann comenzó a formar la idea de una superficie de Riemann, con los intentos de extender de manera natural funciones analíticas definidas sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Esto se logró sobre copias del mismo abierto que se solapaban.

La teoría actual de superficies de Riemann además de hacer uso del análisis complejo útiliza diversos conceptos de topología, álgebra y geometría diferencial. A continuación mencionaremos algunos aspectos importantes de esta teoría que nos serviran para el desarrollo de este trabajo.

Dentro de las propiedades geométricas de una superficie S se encuentra su curvatura, la cual es descrita por dos valores en cada punto, llamados curvaturas principales (k_1, k_2).

Una propiedad en $\mathbb{R}^3$ se llama *intrínseca* si esta es preservada por *isometrías*, sin embargo las curvaturas principales de una superficie no son intrínsecas, por ejemplo si consideramos S_1 el plano $x - y$ encajado en $\mathbb{R}^3$ sus curvaturas principales son $k_1 = k_2 = 0$ y S_2 el cilindro $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ tenemos que sus curvaturas principales son $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Sin embargo si consideramos el difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$, $f(x, y, z) = (x, \cos y, \sin y)$ este preserva ángulos de curvas, por lo tanto es una isometría.

Pensando en que las curvaturas principales no son una propiedad intrínseca, fue Gauss en 1827 quien encontró una particular combinación entre ellas la cual es intrínseca. El encontró que $K = k_1 k_2$, llamada ahora *curvatura Gaussiana* es intrínseca.

Dentro de la teoría de superficies de Riemann tenemos dos teoremas muy importantes que a continuación mencionamos.

Teorema 0.1 (Teorema de uniformización) Cada superficie de Riemann M, es conformalmente equivalente a un cociente U/G donde U puede ser uno de los siguientes tres espacios:

1. $\mathbb{C} \cup \infty$
2. $\mathbb{C}$
3. el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$.

y G un subgrupo de transformaciones de Mobious que actúan libre y discontinuamente y preservan U.

Teorema 0.2 (Teorema de Gauss-Bonet) Sea M una 2-variedad diferenciable compacta y orientada con una métrica Riemaniana. Entonces

$$\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$$

donde $\chi(M)$ es la *característica de Euler* de M (la cual es igual a 0 si es la esfera, 1 si es el toro y $2-2g$ si es una superficie orientable de género g).

El teorema de uniformización es un teorema de clasificación de superficies, mientras que que el teorema de Gauss-Bonet es un teorema que relaciona la topología con la curvatura de la superficie. Estos dos teoremas nos dan ciertas restricciones sobre las métricas que pueden existir sobre una superficie. Por ejemplo una consecuencia del teorema de Gauss-Bonet es que la única superficie conexa, compacta y orientable que admite una métrica con curvatura Gaussiana estrictamente positiva es la esfera S^2. También nos dice que una superficie conexa, compacta y orientable de género g mayor igual que 1 admite una métrica con curvatura Gassiana negativa.

Nosotros estudiaremos métricas sobre superficies de Riemann compactas y su curvatura Gaussiana, y motivados por [Lew69], trataremos de identificar y caracterizar los puntos donde la curvatura es máxima, mínima y otros puntos críticos degenerados por medio de automorfismos. Esto último no es fácil de hacerlo y hasta el momento se sabe poco al respecto.

Oscar Alberto Pizá Morales
Morelia, Michoacán
UMSNH.

Agosto de 2009

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos una breve introducción a las superficies de Riemann y algunos de sus principales resultados, los cuales nos ayudaran para el desarrollo de este trabajo. Para un estudio más completo de las superficies de Riemann, el lector puede consultar por ejemplo [Mir95],[For81].

1.1. Superficies de Riemann

Definición 1.1 Sea M un espacio topológico conexo, Hausdorff y segundo numerable. Decimos que M es una *variedad diferenciable de dimensión n o n-variedad real*, si existe una colección de subconjuntos abiertos $\{U_i\}$ de M indexados por un conjunto I, tal que para cada $i \in I$ existe un homeomorfismo $\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{R}^n$, donde $U_i \subset M$ y V_i es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y se cumple que:

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
2. Dados dos homeomorfismos $\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_j : U_j \subset M \to V_j \subset \mathbb{R}^n$ estos son C^∞*-compatibles*, es decir, la intersección de sus dominios es vacía ó si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces se satisface que:

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

es un *difeomorfismo*, es decir, φ_{ij} y su inversa son funciones C^∞.

A los homeomorfismos $\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ se le llama *cartas reales de dimensión n sobre M*, los abiertos U_i son llamados *vecindades coordenadas*, si denotamos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas estándares del espacio $\mathbb{R}^n$, $x \circ \varphi_i$ será llamado *sistema local coordenado*, el cual usualmente se denota por (x, U_i).

Si en nuestra definición de variedad diferenciable cambiamos nuestro espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^m$ y los homeomorfismos $\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{C}^m$, $\varphi_j : U_j \subset M \to V_j \subset \mathbb{C}^m$, son *holomorfamente compatibles*, es decir, $U_i \cap U_j = \emptyset$ ó

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \subset \mathbb{C}^m \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^m$$

es un biholomorfismo (es decir, $\varphi_{ij} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \subset \mathbb{C}^m \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^m$ y su inversa son funciones holomorfas en m variables), en este caso diremos que M es una *variedad compleja* de dimensión compleja m. Al atlas $\{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}^m\}$ también se le llama atlas analítico y se dice que M ádmite una estructura compleja [1]. La carta se dice *centrada en* $p \in U$ si $\varphi_i(p) = 0$.

Veamos algunos ejemplos de n-variedades para comprender estos conceptos.

Ejemplo 1.1 (Espacios Euclideanos) Los espacios Euclideanos $\mathbb{R}^n$ son las variedades más sencillas, pues notemos que con su topología usual $\mathbb{R}^n$ es conexo, Hausdorff y segundo numerable. Si tomamos el abierto $U = \mathbb{R}^n$ y $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dado por $\varphi(x) = x$, tenemos que con esta función y este abierto se satisface la defínción de variedad diferenciable. La definición de variedad diferenciable esta basada sobre el deseo de hacer las cosas localmente como $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2 (superficie de Riemann) Una superficie de Riemann X es una variedad compleja de dimensión uno. Si X es compacto como espacio topológico, se dice que X es una *superficie de Riemann compacta.*

A continuación damos algunos ejemplos de superficies de Riemann.

Ejemplo 1.3 (El plano complejo) Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ con su topología usual, como sabemos $\mathbb{C}$ es un espacio Hausdorff, conexo y segundo numerable. La estructura compleja esta definida por el atlas complejo con única carta $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = z$.

Ejemplo 1.4 (La esfera de Riemann) La *esfera de Riemann* se define como $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto que no está en $\mathbb{C}$. Introduzcamos la siguiente topología sobre $\mathbb{C}_\infty$, los conjuntos abiertos son los conjuntos abiertos usuales $U \subset \mathbb{C}$ y los conjuntos de la forma $V \cup \{\infty\}$, donde V es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, con esta topología $\mathbb{C}_\infty$, es un espacio topológico Hausdorff.

Sea $U_1 = \mathbb{C}$ y $U_2 = \mathbb{C}_\infty \backslash \{0\}$, como U_1 y U_2 son conexos y su intersección es no vacia entonces su unión $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}_\infty$ es conexa, ahora consideremos las cartas $\varphi_1 = id : U_1 \to \mathbb{C}$, $\varphi_1(z) = z$ y $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z & z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

Notemos que $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$ y

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{C} \to U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{C}$$

está dado por $\varphi_{12}(z) = 1/z$, el cual está bien definido en el dominio de definición, por lo tanto tenemos que las cartas son compatibles y de este modo vemos que $\mathbb{C}_\infty$ es una superficie de Riemann. Más aún se puede demostrar que la esfera de Riemann es homeomorfa a la 2-esfera unitaria S^2 en $\mathbb{R}^3$ mediante la proyección esteográfica.

[1] Tales conceptos involucran herramientas de teoría de conjuntos para ellos puede consultar [Her98].

Ejemplo 1.5 (El toro complejo) Fijemos dos números complejos w_1, w_2 que sean linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Definimos la retícula Λ como

$$\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

La retícula Λ es un subgrupo abeliano discreto del grupo aditivo $\mathbb{C}$. Sea $X = \mathbb{C}/\Lambda$ el grupo cociente y consideremoa la función proyección $\pi : \mathbb{C} \to X$. Por medio de la función π podemos dar la topología cociente a X, es decir, $U \subset X$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{C}$. Esta definición hace a π continua entonces $\mathbb{C}/\Lambda$ es Hausdorff y como $\mathbb{C}$ es conexo, entonces X es conexo pues la proyección es sobreyectiva. Sea $z \in \mathbb{C}$, como w_1 y w_2 es una base sobre los reales para $\mathbb{C}$ existen números reales r_1 y r_2 tal que $z = r_1 w_1 + r_2 w_2$. Sean m, n enteros tal que $m \leq r_1 \leq m + 1$, $n \leq r_2 \leq n + 1$, y sean $a_1 = r_1 - m$ y $a_2 = r_2 - n$. Notemos que $w := a_1 w_1 + a_2 w_2 \in P$, donde $P := \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$ y además $z - w \in \Lambda$, es decir, dado cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene que z es congruente módulo Λ a un punto $w \in P$ (ver figura 1.1). Lo anterior nos dice que $\pi(P)$ es sobreyectiva.

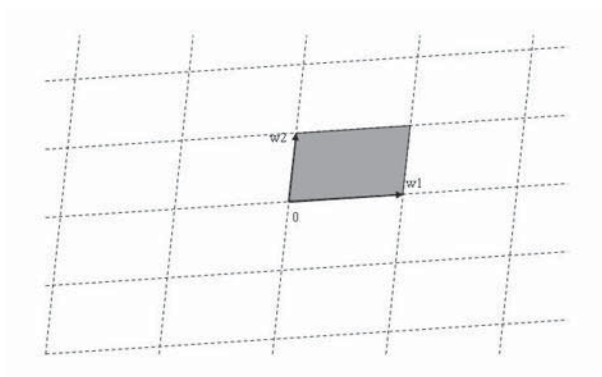

Figura 1.1: Retícula Λ formada por w_1, w_2

A P se le llama el paralelogramo fundamental de la retícula Λ. Como P es un rectángulo compacto y π es continua entonces $\pi(P) = \mathbb{C}/\Lambda$ es compacto. Todo conjunto abierto en X es la imagen de un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, pues U es abierto en X, $U = \pi\left(\pi^{-1}(U)\right)$. Ahora notemos que π es una función abierta, pues dado $V \subset \mathbb{C}$ abierto queremos probar que $\pi(V)$ es abierto en $\mathbb{C}/\Lambda$, es decir, $\tilde{V} = \pi^{-1}\left(\pi(V)\right) \subset \mathbb{C}$ es abierto.

$$\tilde{V} = \pi^{-1}\left(\pi(V)\right) = \{w \in \mathbb{C} \mid w + \Lambda \in \pi(V)\} = \{w \in \mathbb{C} \mid w = v + \tilde{v} \; con \; v \in V \; y \; \tilde{v} \in \Lambda\}$$

$$= \bigcup_{w \in \Lambda} (w + V)$$

que es la unión de traslaciones de V, los cuales son todos abiertos en $\mathbb{C}$.

Sea $V \subset \mathbb{C}$ abierto tal que cualesquiera dos puntos en V no son congruentes módulo Λ. Entonces si definimos $U := \pi(V)$, éste es un abierto y $\pi\,|_V \colon V \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}/\Lambda$ es una función biyectiva, ya que por definición es suprayectiva y es inyectiva pues V no tiene puntos congruentes módulo Λ, por lo tanto como π es continua y abierta entonces $\pi\,|_V$ es un homeomorfismo.

La función inversa $\varphi := \pi^{-1} : U \to V$ de $\pi\mid_V$ es una carta compleja en $\mathbb{C}/\Lambda$. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las cartas obtenidas de esta manera, entonces $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{C}/\Lambda$ ya que si tenemos dos cartas $\varphi_i : U_i \to V_i$, $\varphi_j : U_j \to V_j$, con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas está dado por

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_1 \cap U_2) \to \varphi_j(U_1 \cap U_2)$$

donde para cada $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ se tiene que $\pi(\varphi_{ij}(z)) = \pi(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z)) = \pi(\varphi_j(\pi^{-1}(z))) = \pi(z)$, de esta manera $\varphi_{ij}(z) - z \in \Lambda$. Dado que Λ es discreto y φ_{ij} es continua, estonces $\varphi_{ij}(z) - z$ es constante en cada componente conexa de $\varphi_i(U_1 \cap U_2)$, es decir, $\varphi_{ij} = z + c$ (c una constante) localmente, por lo tanto φ_{ij} es holomorfa. Similarmente φ^{-1} es también holomorfa. Así, $\mathbb{C}/\Lambda$ tiene la estructura compleja definida por el atlas complejo $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathbb{C}/\Lambda$, es una superficie de Riemann.

Curvas algebraicas.

Sea $V \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y g una función holomorfa sobre todo V. Definamos $X := \{(z, g(z)) \mid z \in V\} \subset \mathbb{C}^2$, la *gráfica de X en g*. Démosle la topología subespacio a X y defínase la función $\pi : X \to V$ como $, \pi(z, g(z)) = z$, su función inversa $\pi^{-1} : V \to X$ está dada por $\pi^{-1}(y) = (y, g(y))$, por lo tanto π es un biholomorfismo sobre su imagen, es decir, π es una carta compleja sobre X, más aún (π, X) por si sola es un atlas complejo sobre X por lo tanto X, es una superficie de Riemann. A continuación recordemos el teorema de la función implícita.

Teorema 1.1 Sea $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio y $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | f(z, w) = 0\} = f^{-1}(0)$. Sea $p_0 = (z_0, w_0) \in X$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial w}(p_0) \neq 0$, entonces existe una función $g(z)$ definida y holomorfa en una vecindad de z_0 tal que en una vecindad abierta U de $p_0 \in X$ se tiene que $U \cap X = \{(z, g(z))\}$. Además $g' = \frac{-\partial f/\partial z}{\partial f/\partial w}$.

Una demostración de este teorema puede ser consultada en [Spi88] pág. 39.

Definición 1.2 Una *curva plana afín* $X \subset \mathbb{C}^2$ son los ceros de un polinomio $f(z, w)$, es decir,

$$X = \{(z, w) \mid f(z, w) = 0\}.$$

Definición 1.3 Decimos que $f(z, w)$ es *no singular* en una raíz $p_0 = (z_0, w_0)$ de f si:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}\right)(p_0) \neq (0, 0)$$

También decimos que X es no singular en un punto $p_0 = (z_0, w_0) \in X$ si f es no singular en p_0. A X se le llama no singular si para todo $p \in X$, X es no singular en p.

Enseguida enunciaremos un teorema, que no se demostrará, pues se necesitan algunos resultados importantes de la geometría algebraica.

Teorema 1.2 Sea X la curva obtenida por los ceros de un polinomio f. Sí $f(z, w)$ es irreducible como polinomio en $\mathbb{C}[z, w]$ (es decir, ya no se puede descomponer en más factores), entonces X es conexo. Por lo tanto si $f(z, w)$ es no singular e irreducible X es una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.6 (Superficies hiperelípticas) Sea $h(x)$ un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado $2g+1+\epsilon$ donde ϵ es 0 ó 1, y supóngase que las raíces de $h(x)$ son todas distintas. Sea Y_1 la curva obtenida por los ceros del polinomio

$$f(x, y) = y^2 - h(x) = y^2 - \prod_{i=1}^{2g+1+\epsilon} (x - x_i) \qquad x_i \neq x_j, i \neq j,$$

note que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

entonces fuera de las raíces del polinomio $h(x)$ (que es donde $y = 0$), $\partial f/\partial y \neq 0$, ahora bien si estamos en una raíz x_i del polinomio $h(x)$ entonces $\partial f/\partial x = -\prod_{j\neq i}(x - x_j) \neq 0$. Por lo tanto la curva plana afín

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid f(x, y) = 0\},$$

es no singular fuera de las raíces de h. Por último dado que las $2g + 1 + \epsilon$ raíces del polinomio $h(x)$ son distintas tenemos que $f(x, y)$ es irreducible, por el teorema 1.2, Y_1 es una superficie de Riemann.

Formemos el conjunto $U_{1,2} = \{(x, y) \in Y_1 \mid x \neq 0\}$; $U_{1,2}$ es un subconjunto abierto de Y_1. Ahora bien consideremos la transformación $z = 1/x$ y tomemos

$$k(z) = z^{2g+2}h(1/z) = z^{2g+2} \prod_{i=1}^{2g+1+\epsilon} (1/z - 1/x_i)$$

note que $k(z)$ es un polinomio en z y tiene todas sus raíces distintas ya que las raíces de h lo son. De manera análoga formemos la curva plana afín $Y_2 \subset \mathbb{C}^2$, dada como los ceros del polinomio

$$g(z, w) = w^2 - k(z) = w^2 - \prod_{i=1}^{2g+1+\epsilon} (z - z_i).$$

Consideremos el subconjunto abierto $U_{2,1} = \{(z, w) \in Y_2 \mid z \neq 0\}$ y definamos el isomorfismo $\varphi : U_{1,2} \to U_{2,1}$ por:

$$\varphi_{1,2}(x, y) = (z, w) = (1/x, y/x^{g+1}).$$

Sea X el espacio topológico obtenido por el pegado de Y_1 y Y_2 mediante el isomorfismo φ de $U_{1,2}$ a $U_{2,1}$. Claramente X es Hausdorff y segundo numerable, proveyendo la estructura compleja formada por las cartas de Y_1 y Y_2 las cuales son compatibles pues en $Y_1 \cap Y_2$ tenemos el isomorfismo φ, tenemos que X es una superficie de Riemann compacta, a este tipo de superficies se les llama *superficies de Riemann hiperelípticas*.

1.2. Funciones sobre superficies de Riemann.

Como una superficie de Riemann es localmente $\mathbb{C}$ utilizaremos las cartas complejas para trasladar algunos conceptos de variable compleja a superficies de Riemann iniciando con el concepto de función folomorfa.

Definición 1.4 Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$, $Y \subset X$ un abierto que contenga p. Decimos que $f : Y \to \mathbb{C}$ es *holomorfa en p*, si para cada carta $\varphi : U \to V$ sobre X con $p \in U$, la función $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\varphi(p)$. De esta manera también podemos hablar de funciones holomorfas sobre subconjuntos abiertos de X

Notemos que cada carta $\varphi : U \to V$ sobre X es en particular una función compleja en U. Trivialmente es holomorfa. El conjunto de todas las funciones holomorfas sobre Y lo denotaremos por $\mathcal{O}(Y)$.

En las siguientes definiciones haremos uso de algunos conceptos y teoremas de variable compleja, como lo es el teorema de expansión de serie de Laurent, singularidad aislada, polo y singulariadad esencial (ver [MH96]).

Definición 1.5 Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y f una función compleja univaluada en una vecindad agujerada de p, digamos $U - \{p\}$, $U \subset X$ abierto.

1. f tiene singularidad removible en p si y sólo si existe una carta $\varphi : U_0 \to V_0 \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ \varphi_1^{-1}$ tiene singularidad removible en $\varphi(p)$.
2. f tiene un polo en p si y sólo si existe una carta ψ alrededor de p tal que $f \circ \psi^{-1}$ tiene un polo en $\psi(p)$.
3. f tiene singularidad escencial en p si y sólo si existe una carta ϕ alrededor de p tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene singularidad escencial alrededor de $\phi(p)$.

Teorema 1.3 (Teorema de las singularidades removibles para las superficies de Riemann) Sea U un abierto de X y sea $p \in U$. Supóngase que la función f es holomorfa en $U \setminus \{p\}$ y acotada en alguna vecindad de p. Entonces f puede ser extendida a una única función $\tilde{f}$, holomorfa en todo U.

Definición 1.6 Sea X superficie de Riemann y $f : X \to \mathbb{C}$ continua, f se dice *meromorfa en p* si se cumple uno de los siguientes casos:

1. f es holomorfa en p.
2. f tiene polo en p.
3. f tiene singularidad removible en p.

Dado $U \subset X$ un subconjunto abierto de X. Denotaremos por $\mathcal{M}(U)$ el conjunto de todas las funciones meromorfas sobre U.

Series de Laurent.

Sea X una superficie de Riemann y f una función holomorfa en una vecindad agujerada $W - \{p\}$ con $p \in X$. Sea $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ una carta sobre X tal que $p \in U$. Sean $z = \varphi(x)$ y $z_0 = \varphi(p)$ entonces tenemos que $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad agujerada de z_0; así existe una expansión de $f \circ \varphi^{-1}$ en serie de Laurent alrededor del punto z_0 (ver, [MH96] 3.3 págs. 243-257).

$$f \circ \psi^{-1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

Esta es llamada *la serie de Laurent para f alrededor de p con respecto a φ*. Los coeficientes c_n son llamados *coeficientes de Laurent*. Tal serie depende de la elección de la carta.

Definimos el *orden de f en p* denotado por $ord_p(f)$, como

$$ord_p(f) := min\{n | c_n \neq 0\}$$

el orden de f en p no depende de la elección de la carta. Sean f, g,dos funciones meromorfas entonces tenemos las siguientes propiedades:

1. $ord_p(fg) = ord_p(f) ord_p(g)$
2. $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
3. $ord_p(1/f) = -ord_p(f)$
4. $ord_p(f \pm g) \geq min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$

Funciones entre superficies de Riemann.

Definición 1.7 Sean X y Y superficies de Riemann. Una función continua $f : X \to Y$ se llama holomorfa si para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ en X y $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ en Y con $f(U_1) \subset U_2$, la aplicación $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ es holomorfa en el sentido usual. Una función $f : X \to Y$ se dice *biholomorfa* si f es biyectiva y si ambas $f : X \to Y$ y $f^{-1} : X \to Y$ son holomorfas. Dos superficies de Riemann X y Y se dicen *isomorfas analíticamente* si existe un biholomorfismo $f : X \to Y$. Un automorfismo de X es un biholomorfismo de X en X.

Dada una función meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ está la podemos ver como una función holomorfa $F : X \to \mathbb{C}_\infty$, definiéndola por

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } x \text{ es un polo de } f \end{array} \right\}$$

Esta construcción induce una correspondencia 1-1 entre las funciones meromorfas sobre X y las funciones holomorfas $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ no idénticamente ∞.

A continuación mencionaremos solo algunas propiedades de las funciones holomorfas. El lector interesado en estudiar más teoremas de funciones holomorfas puede consultar [For81], [Mir95], por ejemplo.

Teorema 1.4 (Teorema de la Identidad) Sean f y g dos funciones holomorfas de X a Y. Si $f = g$ en un subconjunto S de X con un punto límite en X, entonces $f = g$.

Continuemos con un teorema el cual es muy importante pues nos caracteriza localmente el comportamiento de las funciones holomorfas.

Teorema 1.5 (Comportamiento Local de funciones Holomorfas) Sean X, Y superficies de Riemann y $f : X \to Y$ una función holomorfa no constante. Supóngase $p \in X$ y $q := f(p)$. Entonces existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi : U \to V$ con $p \in U$ y $\phi : U' \to V'$ con $q \in U'$ con las siguientes propiedades:

1. $\varphi(p) = 0$ y $\phi(q) = 0$.
2. $f(U) \subset U'$.
3. La función $F := \phi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V$ está dada por

$$F(z) = z^k, \quad \forall z \in V$$

Demostración. Nótese que existen cartas $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ en X y $\phi_1 : U' \to V'$ en Y que satisfacen 1) y 2) si se reemplaza (U, φ) por (U_1, φ_1). Del Teorema de la Identidad se sigue que

$$\tilde{f} := \phi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$

es no constante pues f no lo es. Como $\tilde{f}(0) = 0$, entonces existe un entero $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en V_1 con $g(0) \neq 0$. Luego existe una vecindad de 0 y una función holomorfa h en esta vecindad tal que $h^k = g$. La correspondencia $z \longmapsto zh(z)$ define una función biholomorfa $\alpha : V_2 \to V$ de una vecindad abierta $V_2 \subset V_1$ satisfaciendo 1). Sea $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$. Remplace ahora la carta $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ por la carta $\varphi : U \to V$, donde $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$. Entonces, por construcción la función $F = \phi \circ f \varphi^{-1}$ satisface $F(z) = z^k$.

■

El número k del teorema anterior puede ser caracterizado de la siguiente forma. Para cada vecindad U_0 de p existen vecidades $U \subset U_0$ de p y W de $q := f(p)$ tales que el conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ contiene exactamente k elementos de cada punto y en W, $y \neq q$.

Definición 1.8 Con la notación del teorema anterior, al entero $k \geq 1$ asociado al punto $p \in X$ y la función holomorfa $f : X \to Y$, se le llama la *multiplicidad* de f en p, el cual denoteremos por $mult_p(f)$. Un punto $p \in X$ es un *punto de ramificación* de f, si $mult_p(f) \geq 2$. Un punto $y \in Y$ es *ramificado* si es la imagen de un punto de ramificación de f.

1.3. La característica de Euler y fórmula de Riemann-Hurwitz

Dentro de las propiedades geométricas de las superficies de Riemann y en general de las variedades diferenciables, tenemos la noción de orientabilidad. Sea M variedad diferenciable, decimos que M es orientable si existe un atlas $\{\varphi_i, U_i\}_{i\in I}$ de M tal que para todo $i, j \in I$, $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(U_i)$ cumple que el determinante del jacobiano es positivo en todo punto de su dominio (ver [Dar94] págs. 167 y 168; [Sha94] pág.35).

Proposición 1.1 Toda superficie de Riemann es orientable.

Demostración: Sea X una superficie de Riemann. Sean $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$, $\varphi_\beta : U_\beta \to \mathbb{C}$ dos cartas complejas, entonces se tiene que la función $\varphi_{\alpha\beta}$ es un biholomorfismo. Sea $\varphi_{\beta\alpha}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Por las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene que la matriz derivada de $\varphi_{\beta\alpha}$ es

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

y su determinante es $det(D) = (\partial u^2/\partial x)^2 + (\partial v^2/\partial x)^2$. De esta manera en cada punto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ el determinante $det(D) \geq 0$. Pero como $\varphi_{\beta\alpha}^{-1}$ es biholomorfa, entonces $det(D) \neq 0$. Por lo tanto $det(D) > 0$, así X es orientable.

■

Desde el punto de vista topológico de una superficie, también se encuentra la noción de *triangulación*.

Definición 1.9 Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión dos. Una *triangulación* de M es una descomposcición de M por conjuntos cerrados $\Delta_M = \{T_\alpha\}$, donde cada T_α es homeomorfo a un triángulo de $\mathbb{R}^2$, tal que cualesquiera dos triángulos: son disjuntos ó se intersectan en un vértice ó a lo largo de una arista. Si se denota por

$$v = \textit{número de vértices}$$

$$e = \textit{número de aristas}$$

$$t = \textit{número de triángulos}$$

de alguna triangulación Δ_M , la *característica de Euler* de M con *respecto a la triangulación* Δ_M, es el entero $e(M) := v - e + t$.

Proposición 1.2 El número $e(M)$ es independiente de la triangulación (ver [Mir95] pág. 51).

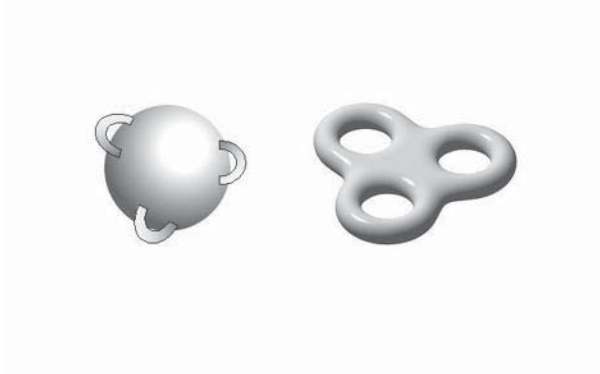

Figura 1.2: Ejemplo de una superficie de $3 - asas$

Un teorema de clasificación afirma que toda superficie X compacta orientable y sin frontera es homeomorfa a una esfera con *g-asas*. El número g se llama el *género* de X, el cual es un invariante topológico.

Por ejemplo sabemos que la esfera de Riemann es homeomorfa a la 2-esfera unitaria S^2, entonces podemos concluir que el género de la esfera de Riemann es 0.

Teorema 1.6 Sea M una variedad diferenciable de dimensión dos, orientable, compacta y sin frontera de género g. Entonces $e(M) = 2 - 2g$.

Fórmula de Riemann-Hurwitz.

Definición 1.10 Sean X, Y superficies de Riemann compacta y $f : X \to Y$ una función holomorfa no constante. Dado $y \in Y$ definimos

$$d_y(f) = \sum_{p \in f^{-1}(y)} mult_p(f).$$

Este número es constante y no depende de y, a este número se le llama el grado de f y se denota por $deg(f)$.

Teorema 1.7 (Fórmula de Riemann-Hurwitz) Sea $f : X \to Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces

$$2g(X) - 2 = deg(f)(2(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(f) - 1].$$

1.4. Espacios tangentes y cotangentes

Sea M una n-variedad diferenciable y $p \in M$. Una función diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, con $\alpha(p) = 0$ es llamada una curva diferenciable a través de p. Bajo un sistema local coordenado $(x_1, \ldots, x_n)$ cerca de p, α se puede expresar como una función vector-valuada $\alpha(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$. Ahora si $\beta : (-\delta, \delta) \to M$ es otra curva diferenciable a través de p con la expresión $\beta(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))$ bajo x, entonces diremos que α y β tienen la misma *velocidad inicial en* p si:

$$(a_1'(0), \ldots, a_n'(0)) = (b_1'(0), \ldots, b_n'(0)).$$

Esta condición es independiente de las coordenas locales, y define una relación de equivalencia sobre todo el conjunto de curvas diferenciables a través de p. Denotaremos la clase de equivalencia $[\alpha]$ por $\alpha'(0)$, y lo llamaremos un *vector tangente en* p. El conjunto de todos los vectores tangentes en p será denotado por T_pM, y lo llamaremos el *espacio tangente* a M en p. Si denotamos: $\frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \mid_p = (0, \ldots, 0, 1)$, tenemos que bajo un sistema local de coordenadas x el conjunto T_pM es el espacio vectorial generado por todas las combinaciones lieales de $\{\frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \mid_p\}$. Entonces T_pM es un espacio vectorial de dimensión n y la elección de un sistema local coordenado (U, x) nos da una base de T_pM para cada $p \in M$.

Sea C_p^∞ el conjunto de todas las funciones diferenciables en un punto $p \in M$. Definamos una relación de equivalencia en C_p^∞ por: $f, g \in C_p^\infty$, $f \sim g$ si y sólo si existe una vencidad H en p tal que $f \mid_H = g \mid_H$. Denotaremos las clases de equivalencia por $[f]$ llamado el *gérmen* C^∞ *en* p sobre M. Sea

$$\mathcal{F}_p = C_p^\infty / \sim = \{[f] \mid f \in C_p^\infty\}.$$

Definiendo suma y multiplicación por esacalar como $[f] + [g] = [f + g]$ y $[af] = a[f]$, respectivamente, tenemos que $\mathcal{F}_p$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$. Sea α una curva diferenciable a través de p, en un sistema local coordenado x. Denotaremos por $\langle\langle \alpha, [f] \rangle\rangle = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \mid_{t=0}$. Sea

$$\mathcal{H}_p = \{[f] \in \mathcal{F}_p \mid \langle\langle \alpha, [f] \rangle\rangle = 0, \quad \text{para toda curva diferenciable a través de } p\}$$

la clase de equivalencia de $\mathcal{H}_p$ del gérmen $[f]$ es denotado por $(df)_p$ y es llamado *vector cotangente* sobre M en p, el conjunto de todas las clases $\mathcal{F}_p / \mathcal{H}_p$ forman el espacio dual a T_pM llamado el *espacio cotangente a* M en p, denotado por T_pM^*.

1.5. Formas diferenciales

Definición 1.11 Supóngase que $U \subset X$ es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X. Una *forma diferencial de grado uno* o simplemente *1-forma* ω sobre U, es una función

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_pM^*$$

con $\omega(p) \in T_pM^*$ para todo $p \in U$.

Definición 1.12 Supóngase que $U \subset X$ es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X. Una *1-forma diferenciable* ω sobre U, es una expresión tal que con respecto a cada carta (U, z), ω puede escribirse como

$$\omega = f dz + g d\overline{z}, \quad \textit{donde } f, g \textit{ son } C^\infty.$$

Una 1-forma diferenciable es del tipo $(1,0)$ si localmente es de la forma $\omega = f(z,\overline{z})dz$, de manera similar decimos que una 1-forma diferenciable es del tipo $(0,1)$ si localmente es de la forma $\omega = g(z,\overline{z})d\overline{z}$. Como las reglas de transformación para las formas diferenciables preservan la parte dz y $d\overline{z}$, esta definición es bien definida: si una 1-forma diferenciable se representa localmente como con una 1-forma del tipo $(1,0)$ sobre una carta U, estonces lo será sobre cualquier otra carta sobre el dominio común con la carta U.

Definición 1.13 Una 1-forma ω sobre una superficie de Riemann X se dice holomorfa (respectivamente meromorfa) si para cada carta local $\phi : U \to V$, ω se expresa como

$$\omega = f(z)dz, \quad \textit{donde: } f : U \to \mathbb{C} \textit{ es holomorfa (respectivamente meromorfa).}$$

Sea ω una 1-forma meromorfa definida en una vecindad de un punto p. Elijamos una carta coordenada local centrada en p, entonces escribiremos $\omega = f(z)dz$, donde f es una función meromorfa en 0. El *orden de ω en p* denotado por $ord_p(\omega)$, es el orden de la función f en 0. Esta definición es independiente de la carta, notemos que una 1-forma ω es holomorfa en p si y sólo si $ord_p(\omega) \geq 0$.

Decimos que p es un *cero de ω de orden n* si $ord_p(\omega) = n\rangle 0$. Decimos que p es un *polo de orden n* si $ord_p(\omega) = m\langle 0$. El conjunto de ceros y polos de una 1-forma meromorfa es un conjunto discreto.

Pull-Back de Formas Diferenciales.

Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa no constante entre dos superficies de Riemann X y Y. Sea ω una 1-forma diferenciable sobre Y. Podemos definir una 1-forma diferenciable sobre X, por medio de la siguiente regla. Dada una carta $\varphi : U \to V$ sobre X tal que $F(U)$ está contenida en el dominio U' de una carta $\phi : U' \to V'$ de Y. Esto nos da coordenadas locales z sobre U' y w sobre U y en términos de coordenadas locales F tiene la forma $z = h(w)$ para alguna función holomorfa h.

Supóngase que ω es igual a $f(z,\overline{z})dz + g(z,\overline{z})d\overline{z}$ en la coordenada z. Definimos el *pullback de ω bajo F* como la 1-forma diferenciable $F^*\omega$ con respecto a la variable w dada por

$$F^*\omega = f(h(w),\overline{h(w)})h'(w)dw + g(h(w),\overline{h(w)})\overline{h'}(w)d\overline{w}.$$

Con esta definición vamos a calcular el grado de una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta.

Sea $f : X \to \mathbb{CP}^1$ holomorfa y sea $\omega = dz$ una 1-forma meromorfa no constante sobre $\mathbb{CP}^1$, consideremos la 1-forma meromorfa del pullback dado por $\eta = f^*(\omega)$. Entonces

$$deg(div(\eta)) = deg(f^*(\omega)) = \sum_{p\in X} ordp(\eta) =$$

$$\sum_{p\in f^{-1}(q);q\neq\infty} ([1 + ord_{f(p)}(\omega)]mult_p(f) - 1) + \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} ([1 + ord_{f(p)}(\omega)]mult_p(f) - 1) =$$

$$\sum_{p\in f^{-1}(q);q\neq\infty} (mult_p f - 1) - \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} (mult_p f - 1) = 2g - 2 + 2deg(f) - 2deg(f)$$

$$= 2g - 2$$

Con esto tenemos que dada ω una 1-forma meromorfa no cero sobre X, su grado es: $deg(\omega) = 2g - 2$ con g = género de X.

1.6. Base de diferenciales holomorfas para superficies de Riemann hiperelípticas.

Un teorema importante en la teoría de superficies de Riemann compactas (ver [For81]) afirma que sobre una superficie de Riemann compacta X de género g existen g diferenciales holomorfas linealmente independientes, es decir, estas diferenciales holomorfas forman un espacio vectorial complejo de dimensión g, a este espacio vectorial lo denotaremos por $H^0(X, \Omega)$. Nosotros estamos interesados en calcular dicha base para una superficie de Riemann compacta hiperelíptica de género g para ello conviene dar otra definición de superficies hiperelípticas.

Definición 1.14 Una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno que ádmite un cubriente doble de $\mathbb{C}_\infty$ se llama hiperelíptica.

Tenemos el siguiente lema.

Lema 1.1 Cualquier superficie de Riemann compacta hiperelíptica de género g es la compactificación en $\mathbb{C}^2$ de una ecuación del estilo

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - a_i)$$

donde a_i son todos números complejos distintos entre si.

Demostración: Sea X superficie de Riemann compacta hiperelítica de género $g > 1$, y sea $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ holomorfa y no constante de grado 2. Sea $b = \sum_{p \in X}(b_p(f))$, por la fórmula de una aplicación holomorfa y no constante de grado 2, es decir, f es un cubriente dobre de $\mathbb{C}_\infty$. Riemann-Hurwitz tenemos que:

$$2g - 2 = deg(f)(-2) + b = -4 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 2g + 2.$$

Dado que f es un cubriente doble, entonces no existen puntos de ramificación de multiplicidad mayor que dos. Por lo tanto existen $2g+2$ puntos distintos digamos $\{p_1, \ldots, p_{2g+2g}\} \in X$ de mulplicidad 2. Sean $a_1 = f(p_1), \ldots, a_{2g+2} = f(p_{2g+2}) \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$. Sea $g(z; w) = w^2 - \prod_{i=1}^{2g+2}(z - a_i)$, entonces

$$C_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid g(z, w) = 0\}$$

es una curva algebraica afín suave fura de los puntos de ramificación. Sea $\pi : C_0 \to \mathbb{C}$ la proyección sobre la primera coordenada y $R\rangle$máx$\{| a_i |\}$, sea $B = \{z \in \mathbb{C} :| z |\rangle R\}$, tenemos que $\pi^{-1}(B)$ consiste de dos discos disjuntos agujerados, compactificando cada uno de ellos por medio de compactación por un punto tenemos que π se extiende holomorfamente a $\pi : C \to \mathbb{C}_\infty$, donde C es una superficie de Riemann compacta, la compactificación de C_0 y además π se ramifica en a_1, a_2 hasta a_{2g+2}. Se tiene que X es isomorfa a C. Notemos que hemos agregado dos puntos a C_0 sobre el ∞, es decir, $\pi^{-1}(\infty) = \{q_1, q_2\}$. A los $2g+2$ puntos distintos obtenidos en este lema, se les llama *puntos de Wierstrass hipelípticos*.

■

Teorema 1.8 Las diferenciales

$$\omega_j = \frac{z^{j-1}dz}{w}, j = 1, \ldots, g$$

forman una base de las diferenciales holomorfas de una superficie de Riemann hiperelíptica

$$w^2 = \prod_{i=1}^{N}(z - \lambda_i), \lambda_i \neq \lambda_j$$

donde $N = 2g + 1$ o $N = 2g + 2$.

Demostración: Sea C la compactificación del locus de $w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(z-a_i) \subset \mathbb{C}^2$, consideremos el siguiente automorfismo $\iota : C \to C$ dado por $\iota(z, w) = (z, -w)$, notemos que $\iota \circ \iota = \iota^2 = id$, a ι se llama la *involución hiperelíptica*. Tal involución induce una aplicación lineal $\iota^* : H^0(X, \Omega) \to H^0(X, \Omega)$ de orden dos también, por lo tanto tenemos la descomposición de $H^0(X, \Omega)$ en dos espacios propios V_{+1} y V_{-1} con valores propios +1 y -1 respectivamente, así tenemos que $H^0(X, \Omega)$ es dividido en dos espacios.

$$V_{+1} = \{\omega \in H^0(X, \Omega) \mid j^*(\omega) = \omega\}$$

$$V_{-1} = \{\omega \in H^0(X, \Omega) \mid j^*(\omega) = -\omega\}.$$

Sea $\pi : C \to \mathbb{C}_\infty$ cubriente doble como en el lema anterior, obsérvese que el espacio propio V_{+1} es el trivial, pues si existe una 1-forma holomorfa en C tal que $\iota^*(\omega) = \omega$ que desciende a una 1-forma holomorfa en $\mathbb{C}_\infty$, es decir, si $\eta = (\pi \circ \iota)_*(\omega)$ entonces, $deg(\eta) = 2g_{\mathbb{C}_\infty} - 2 \geq 0$ lo cual no es posible. Entonces tenemos que $\iota^*(\omega) = -\omega$ para todo $\omega \in H^0(X, \Omega)$.

Considereremos la 1-forma

$$\omega_0 = dz/w$$

Notemos que ω_0 es holomorfa y no cero fuera del ∞, pues en los puntos donde $w = 0$, se tiene que $dz = 0$. Para ver esto, recordemos que C es la compactificación de una curva suave, es decir, la dada por los ceros de un polinomio $\{f(z, w) = 0\}$, sea $p \in C$ tal que $w = 0$, es decir, z es una raíz, dado que

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 2w = 0 \Longleftrightarrow w = 0$$

entonces $\partial f/\partial w \neq 0$, y por el teorema de la función implícita tenemos que $z = g(w)$ y $g'(w) = \frac{\partial f/\partial w}{\partial f/\partial z}$, en una vecindad de p, por lo tanto en $w = 0$ tenemos que $dz = g'(w) = 0$.

También tenemos que $deg(\omega_0) = 2g - 2$, ω_0 tiene el mismo de orden de cero o polo en los puntos $q_1, q_2 \in C$ tales que $z(q_i) = \pi(q_i) = \infty$, ω_0 tendra un cero de orden $g - 1$ en cada punto q_1, q_2.

Sea ω otra 1-forma holomorfa en C, es decir,$\omega \in H^0(X, \Omega)$, entonces obtenemos $\omega/\omega_0 = h$, con h una función meromorfa sobre C y holomorfa fuera del ∞, entonces tenemos que $\omega = h\omega_0$, aplicando ι^* tenemos:

$$-\omega = \iota^*(\omega) = \iota^*(h\omega_0) = \iota^*(h)\iota^*(\omega) = -\iota^*(h)\omega_0$$

por lo tanto $\iota^*(h) = h$, es decir, h solo depende de la variable z, además $h(\infty) = \infty$, por lo tanto h es un polinomio en la variable z. Por último, si $d = deg(h)$, entoces h tiene $2d$ ceros en C, entonces h tiene un polo de orden d en cada uno de los puntos q_1, q_2, como ω_0 tiene un cero de orden $g - 1$ en ∞ y $h\omega_0 = \omega$ es holomorfa, tenemos que $deg(h) \leq g - 1$. Así la base para $H^0(X, \Omega)$ esta dada por

$$\{\frac{dz}{w}, \frac{zdz}{w}, \ldots, \frac{z^{g-1}dz}{w}\}.$$

■

Capítulo 2

Métricas en superficies de Riemann de género $g \geq 2$

Hasta el momento hemos sentado las bases sobre el tema en el que se desarrollará este trabajo. Continuando en este sentido, en este capítulo proporcionaremos los conceptos necesarios para hablar de las propiedades geométricas mencionadas anteriormente en la introducción, de manera particular, nos centraremos en el estudio de las métricas sobre las superficies de Riemann, así como en algunos ejemplos de ellas y sus propiedades, como refencia puede consultar [CCL99], [Jos91], [Zhe62].

2.1. Métricas sobre variedades diferenciables

Definición 2.1 Sea M una n-variedad diferenciable. Si para cada punto $p \in M$ el espacio tangente T_pM es provisto de un producto interior real y definido positivo

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

de tal manera que g_p varía de manera C^∞ en p, decimos que $g = \{g_p \mid p \in M\}$, es una *métrica Riemaniana* sobre M. También decimos que M es una *variedad Riemaniana.*

Sea (U, x) una carta coordenada local de M. Si definimos

$$g_{ij}(p) = g_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big), \qquad p \in U$$

entonces g_{ij} es una función en términos de $x_1, \ldots, x_n$. Decimos que g es C^∞ si las funciones g_{ij} son C^∞. Escribiremos

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \quad \text{o bien solo escribiremos } ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

que es una manera clásica de expresar la métrica riemaniana.

Notemos que toda forma cuadrática tiene asociada una matriz $G = (g_{ij})$, entonces podemos escribir:

$$ds^2(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = x^t G y = \langle x, y \rangle_g$$

para todos los puntos $x, y \in T_p(M)$, $p \in M$. De nuestra definición de producto interior obtenemos que $g_{ij} = g_{ji}$, concluimos que G es una matriz cuadrada, simétrica, definida positiva y no degenerada.

Definición 2.2 Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades diferenciales, con métricas g y $\tilde{g}$ respectivamente, f es una *isometría* si $f^* \tilde{g} = g$, es decir,

$$ds^2(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g_{ij}} df_p(x_i) df_p(y_j) = d\tilde{s}^2(df_p(x), df_p(y))$$

para todos los puntos $x, y \in T_p(M)$, $p \in M$.

Una isometría $f : M \to M$ con métricas g y $\tilde{g}$ es llamada *isometría de* M, o bien diremos que (M, g) y $(M, \tilde{g})$ son isométricas.

Observación: De manera similar a lo anterior podemos dar una interpretación matricial a la definición de isometría. De nuestra definición tenemos que $f : M \to N$ es una isometría si $ds^2(x, y) = d\tilde{s}^2(df_p(x), df_p(y))$, es decir,

$$x^t G y = df_p(x)^t \tilde{G} df_p(y)$$

para todos los puntos $x, y \in T_p(M)$, $p \in M$ y $G = (g_{ij})$, $\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij})$.

Ahora bien recordemos que una transformación lineal ψ entre dos espacios vectoriales V y W de dimensión n y m respectivamente, en notación matricial $\psi : V \to W$ es representada por:

$$[\psi(x)]_{\beta'} = A[x]_\beta$$

donde A es la matriz de $n \times m$ asociada a la transfomarción lineal ψ, $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ es la base de V y $\beta' = \{\beta'_1, \ldots, \beta'_m\}$ es la base de W.

Por lo tanto podemos concluir que $f : M \to N$ es una isometría sí:

$$ds^2(x, y) = x^t G y = x^t P^t \tilde{G} P y = d\tilde{s}^2(df_p(x), df_p(y))$$

para todos los puntos $x, y \in T_p(M)$, $p \in M$ y P la matriz asociada a la transformación lineal df_p.

Producto interior hermitiano.

Definición 2.3 Supóngase que V es un espacio vectorial complejo. Si $H : V \times V \to \mathbb{C}$ es una función en dos variables la cual satisface:

1. Para cualquier $v_1, v_2, w \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tenemos

$$H(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 H(v_1, w) + \lambda_2 H(v_2, w)$$

2. Para cualesquiera $v, w \in V$ tenemos

$$H(w, v) = \overline{H(v, w)}$$

$H(v, w)$ se llama *producto interior Herminitiano*, H es *definido positivo* si para cualquier $v \in V$, $v \neq 0$, $H(v, v)\rangle 0$

Si separamos la parte real e imaginaria de $H(v, w)$ y escribimos

$$H(v, w) = F(v, w) + iG(v, w).$$

Entonces tenemos que F y G son funciones bilineales real valuadas sobre V. De la condición 2 de nuestra definición anterior obtenemos:

$$F(v, w) = F(w, v) \quad y \quad G(v, w) = -G(w, v)$$

De aquí que F es una función bilineal simétrica y G es una función bilineal antisimétrica.

2.2. Métricas sobre una superficie de Riemann

Definición 2.4 Una métrica conforme sobre una superfice de Riemann X es una expresión en coordenandas locales (U, z) dada por

$$\lambda^2(z)dzd\overline{z}$$

donde $\lambda\rangle 0$ y $\lambda : U \to \mathbb{R}$ es C^∞.

Si $w \longmapsto z(w)$ es una transformación de coordenadas locales, entonces la métrica será transformada a

$$\lambda^2(z)\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}dwd\overline{w}$$

donde $w = u + iv$, $\partial/\partial w = 1/2(\partial/\partial u - i\partial/\partial v)$ y $\partial/\partial \overline{w} = 1/2(\partial/\partial u + i\partial/\partial v)$

Definición 2.5 El operador Laplaciano-Beltrami con respecto a la métrica $\lambda^2(z)dzd\overline{z}$ es definida por

$$\Delta := \frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\Big).$$

Definición 2.6 La curvatura Gaussiana de la métrica $\lambda^2(z)dzd\overline{z}$ es definida por

$$K = -\Delta log(\lambda).$$

Observación 2.1 Notemos que con $z = x + iy$, tenemos $\lambda^2(z)dzd\overline{z} = \lambda^2(z)(dx^2 + dy^2)$. Entonces la métrica define la métrica Euclideana solamente por el factor conformal λ^2. En particular los ángulos con respecto a $\lambda^2(z)dzd\overline{z}$ son los mismos que con respecto a la métrica Euclideana.

Existe un teorema llamado *Teorema de Egregium-Gauss* el cual nos dice que la curvatura Gaussiana K es invariante bajo isometrías. Puede consultar su demostración en [dC76] pág. 234.

Observemos que una isometría tiene entonces el mismo efecto que un cambio de coordenadas

Lema 2.1 Toda superficie de Riemann compacta X admite una métrica conforme.

Una vez vistos estos conceptos comencemos con el estudio de algunas métricas sobre superficies de Riemann.

2.3. Métrica hiperbólica

Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ y consideremos el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z)\rangle 0\}$, con la métrica

$$\rho = \frac{1}{y^2}dzd\overline{z} = \frac{1}{y^2}dx^2 + dy^2,$$

entonces $\mathbb{H}$ se convierte en un modelo del *plano hiperbólico* o plano de *Lobachevski*. Cualesquiera dos puntos en $\mathbb{H}$ pueden ser únidos por una única geodésica y la distancia entre estos dos puntos es la medida a lo largo de esta geodésica. La geometría en $\mathbb{H}$ no es euclideana pues no se cumple el 5° postulado de la geométria de Euclides.

Ahora bien sea $g \in SL(2, \mathbb{R})$[1]

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Recordemos su traza está dada por $tr(g) = a + d$. $SL(2, \mathbb{R})$ es llamado el *grupo unimodular*.

El conjunto de todas las transformaciones de Mӧbius de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ (o transformaciones fraccionales) son de la forma

$$\mathbb{M} = \left\{ z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad ad - bc = 1 \right\}$$

forman un conjunto tal que el producto de dos transformaciones corresponde al producto de sus matrices correspondientes y el inverso corresponde a la matriz inversa.

Cada transformación $T \in \mathbb{M}$ es representada por un par de matrices $\pm g \in SL(2, \mathbb{R})$. Entonces $\mathbb{M}$ es llamado $PSL(2, \mathbb{R})$ y es isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ (donde I_2 es la matriz identidad de 2×2). Tenemos que $tr(-g) = -tr(g)$, entonces

$$tr^2(T) = tr^2(g) \quad \text{y} \quad tr(t) = \mid tr(g) \mid$$

[1] $SL(n, \mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices de $n \times n$ con determinante igual a 1.

son funciones bien definidas de T.

Note que $PSL(2,\mathbb{R})$ contiene todas las transformaciones de *Möbius* de la forma $z \longmapsto az + b/cz + d$, con $\Delta = ad - bc\rangle 0$, pues dividiendo el numerador y denominador por $\sqrt{\Delta}$ obtenemos una nueva matriz de determinante 1.

El conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{H}$ es un grupo que denotaremos por $Isom(\mathbb{H})$. Existe un teorema el cual afirma que $PSL(2,\mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$ y $Isom(\mathbb{H}) \simeq PS^*L(2,\mathbb{R}) = S^*L(2,\mathbb{R})/\pm id_2$, donde $S^*L(2,\mathbb{R})$ es el grupo de matrices de 2×2 con determinante igual a ± 1 (ver [Kat92] cap. 1).

Consideremos el disco unitario:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid \langle 1\}.$$

Definimos sobre $\mathcal{D}$ la métrica de Poincare

$$ds^2 = \frac{4dzd\overline{z}}{(1- \mid z \mid^2)^2}$$

como $\mathcal{D}$ y $\mathbb{H}$ son biholomorfos, estos dos modelos de geométria hiperbólica son conocidos como modelos de Poincare.

Ahora bien la curvatura Gaussiana K de la métrica hiperbólica ρ en un punto $z = x + iy$ viene dada por:

$$K = -\Delta(log\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\Big(\frac{\partial^2(log\rho)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(log\rho)}{\partial y^2}\Big) = -y^2\Big(\frac{\partial^2(log(1/y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(log(1/y))}{\partial y^2}\Big)$$

$$= -y^2(\frac{1}{y^2}) = -1,$$

es decir, la curvatura Gaussiana K de esta métrica es constante igual -1, por lo tanto la derivada de K, dK, vale cero en todo punto. Por el teorema de uniformización toda superficie de Riemann compacta X admite una métrica de curvatura constante, el cual nos dice que una superficie de Riemann compacta X es conformalmente equivalente a $\tilde{X}/G$ donde $\tilde{X}$ es su cubriente universal y G un grupo propio discreto de isométrias que actúa libre y discontinuamente sobre $\tilde{X}$; por lo tanto si $\tilde{X}$ es $\mathbb{H}$ podemos inducir una métrica invariante bajo G de curvatura Gaussiana K igual a -1 sobre X.

2.4. Cadenas, ciclos y homología.

Por una ”1-cadena”sobre una superficie de Riemann X entederemos una combinación lineal finita con coeficientes enteros

$$c = \sum_{j=1}^{k} n_j c_j, \qquad n_j \in \mathbb{Z}$$

donde los $c_j : [0,1] \to X$ son curvas. La integral sobre c de una 1-forma diferencial ω cerrada es definida por

$$\int_c \omega := \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{c_j} \omega.$$

El conjunto de todas las $1-$*cadenas* sobre X forman bajo la suma de manera natural un grupo abeliano, que se denota por $C_1(X)$.

Sea $C : [0,1] \to X$ una curva, definimos el operador frontera ∂ sobre las 1-cadenas como:

$$\begin{cases} \partial C = 0 & \text{si } C(0) = C(1). \\ \partial C(1) = +1, \partial C(0) = -1 \text{ y cero en todos los demás puntos} & \text{si } C(0) \neq C(1) \end{cases}$$

Para una $1-$*cadena* arbitraria $C = \sum_j n_j \partial c_j$. El conjunto $Z_1(X) := \{C \in C_1(X) \mid \partial C = 0\}$ forman un subgrupo abeliano de $C_1(X)$, este grupo se llama el *grupo de 1-ciclos* sobre X. En particular toda curva cerrada es un $1-$*ciclo*.

Dos ciclos $c, c' \in Z_1(X)$ se dicen homólogos si para toda 1-forma ω tenemos que:

$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega.$$

Esto nos define una relación de equivalencia y el conjunto de todas las clases de homología de $1-$*ciclos* ($[c]$), forman un grupo aditivo $H_1(X,\mathbb{Z}) := \{[c] \mid c \text{ es un 1-ciclo}\}$, este grupo se llama *el primer grupo de homología* de X . Se puede demostrar que $H_1(X,\mathbb{Z})$ tiene $2g$ generadores $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ (Ver [GH78]).

Sea $\omega_1, ..., \omega_g \in H^0(X, \Omega)$ una base para el espacio de 1-formas holomorfas sobre X . La *matriz de periodos* de X es la matriz $g \times 2g$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\beta_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\alpha_1} \omega_g & \cdots & \int_{\beta_g} \omega_g \end{pmatrix},$$

las columnas de vectores $\prod_i = (\int_{\alpha_i} \omega_1, \ldots, \int_{\alpha_i} \omega_g)$ y $\prod_{g+j} = (\int_{\beta_j} \omega_1, \ldots, \int_{\beta_j} \omega_g)$ son llamados *periodos*. Dada una superficie de Riemann compacta X de género $g \rangle 0$, existe una base $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ de $H_1(X,\mathbb{Z})$ que satisfacen las siguientes relaciones de intersección:

- $\alpha_i \beta_j = \delta_{ij}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, g\}$
- $\beta_j \alpha_i = -\delta_{ij}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, g\}$.

Esta base se llama *base simpléctica*, los ciclos $\alpha_1, ..., \alpha_g$ son llamados $A-$*ciclos* y los $\beta_1, ..., \beta_g$ son llamados $B-$*ciclos*. Se puede demostrar (ver [GH78] págs. 224-232) que dada un base simpléctica $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ de $H_1(X,\mathbb{Z})$, existe una base $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ de $H^0(X, \Omega)$ (llamada base normalizada) tal que:

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij} \qquad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq g,$$

es decir, la matriz de periodos tiene la forma (I_g, B). Por las relaciones bilineales de Riemann se tiene que B es simétrica e $Im(B)$ es definida positiva.

2.5. Métrica Theta y métrica de Bergman.

Supongamos que tenemos una base simpléctica de homología y una base normalizada de diferenciales holomorfas de una superficie de Riemann compacta X de género $g\rangle 0$ con matriz de periodos (I, B), donde $B = B^t$ e $ImB\rangle 0$. Sean e_j, B_j, $j = 1, \dots, g$ los vectores columna de las matrices I y B respectivamente, estos vectores son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, así podemos formar una retícula $\Lambda = \{m_1e_1 + \cdots + m_ge_g + m_{g+1}B_1 + \cdots + m_{2g}\Delta_{2g}\}$ en $\mathbb{C}^g$; definimos la *variedad Jacobiana* $\mathcal{J}(X)$ de X como el toro complejo $\mathbb{C}^g/\Lambda$. Por medio de traslaciones en $\mathcal{J}(X)$ podemos identificar a $\mathbb{C}^g$ como el espacio tangente al toro en el origen $T_0\mathcal{J}(X)$. Dado que B es simétrica y definida positiva, tenemos una métrica sobre $\mathbb{C}^g = T_0\mathcal{J}(X)$ dada por $\langle x, y\rangle = x^t(ImB)^{-1}\overline{y}$. Si $(ImB)^{-1} = (a_{ij})$ dicha métrica la denotaremos por $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{g} a_{ij}dz_id\overline{z}_j$.

Ahora bien fijemos un punto $p_0 \in X$, en coordenadas locales tenemos la aplicación de Abel-Jacobi $\mu_{p_0} : X \to J(X)$ dada por:

$$\mu_{p_0}(p) \longmapsto \Big(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \Big).$$

El teorema de Abel (ver [GH78] págs. 235-240) nos dice que μ_{p_0} es un encaje por lo tanto podemos restringir la métrica ds^2 a X, a esta métrica le llamamos métrica Theta. Localmente la podemos ver de la siguiente manera: sea $p \in X$ y $z : U \subset X \to \mathbb{C}$ una carta alrededor del punto p. Sea $f_i : U \to \mathbb{C}$ una expresión local de ω_i en la coordenada z, donde $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ es una base de $H^0(X, \Omega)$. Sea $f_i(z) := f_i \circ z^{-1} : z(U) \to \mathbb{C}$ y $f(z) = (f_1(z), \dots, f_g(z))$. La métrica Theta es dada por $\rho^2(z)dzd\overline{z}$ donde

$$\rho^2(z) = \langle f(z), f(z)\rangle_B = f(z)^t(ImB)^{-1}\overline{f(z)} = \Big(\sum_{i,j=1}^{g} a_{ij} f_i(z)\overline{f_j(z)} \Big).$$

La métrica Theta no depende del punto p_0 de la aplicación de Abel-Jacobi.

Teorema 2.1 Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y sea $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ una base del espacio de 1-formas holomorfas sobre X. Entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i(z)\overline{\omega_i}(z),$$

define una métrica sobre X con curvatura no positiva, llamada métrica de Bergman. Además la curvatura Gaussiana de esta métrica es cero en a lo más un número finito de puntos.

Demostración: En coordenadas locales escribimos $\omega_i(z) = f_i(z)dz$ con f_i holomorfas ($i = 1, \ldots, g$). La métrica biene dada por

$$\sum_{i=1}^{g} f_i(z)\overline{f_i}(z)dzd\overline{z} := \langle f, f\rangle dz^2 = \rho^2 dzd\overline{z},$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_g)$ y $\langle f, f\rangle$ denota el producto interior de $\mathbb{C}^g$ inducido por la matriz identidad. Esta métrica es definida positiva pues existe un teorema que afirma que no existe un punto $z \in X$, tal que todas las 1-formas holomorfas se anulen en ese punto (ver [Jos91] pág. 221).

Usando que las f_i son holomorfas entonces tenemos que la curvatura Gaussiana de la métrica de Bergman esta dada por la expresión:

$$K(z) = -\Delta log\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{4}{\langle f(z), f(z)\rangle}\partial\overline{\partial}(log(\rho)) = \frac{4}{\langle f(z), f(z)\rangle}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(log\left(1/\langle f(z), f(z)\rangle^{1/2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\langle f(z), f(z)\rangle}\frac{\partial}{\partial z}\left(-1/2\frac{\langle f(z), f'(z)\rangle}{\langle f(z), f(z)\rangle}\right)$$

$$= \frac{4}{\langle f(z), f(z)\rangle}\left(-1/2\frac{\langle f(z), f(z)\rangle\langle f'(z), f'(z)\rangle - \langle f(z), f'(z)\rangle\langle f'(z), f(z)\rangle}{\langle f(z), f(z)\rangle^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{\langle f(z), f(z)\rangle^3}\left(\langle f(z), f(z)\rangle\langle f'(z), f'(z)\rangle - \mid \langle f'(z), f(z)\rangle \mid^2\right)$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz tenemos que

$$\langle f(z), f(z)\rangle\langle f'(z), f'(z)\rangle - \mid \langle f'(z), f(z)\rangle \mid^2 \geq 0.$$

Por lo tanto la curvatura Gaussiana K es menor igual a 0. K es igual a cero cuando f y $f'(z) := (\partial f_1/\partial z, \ldots, \partial f_g/\partial z)$ son linealmente dependientes, es decir, $f'(z) = \lambda f(z)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, esto sucede a lo más en un número finito de puntos.

■

Notemos que la métrica de Bergman y la métrica de Theta difieren solamente por lo coeficientes a_{ij} en el próximo capítulo analizaremos la curvatura Gaussiana de la métrica de Bergman pues se nos facilitan los cálculos al no aparecer los coeficientes a_{ij} en su expresión.

Capítulo 3

Curvatura Gaussiana no constante en superficies de Riemann de género bajo

Nuestro objetivo ahora es hacer un estudio de los puntos críticos de la función curvatura Gaussiana K de la métrica de Bergaman. En este análisis nos enfocaremos a las superficies de Riemann compactas hiperelípticas X, aunque algunos teoremas y resultados tienen aplicación general, tal estudio lo realizaremos haciendo uso de los automorfismos de X y al mismo tiempo haremos su estudio analítico.

La motivación del estudio de diferentes métricas sobre las superficies de Riemann compactas, fue para hacer una comparación entre ellas y el hacer notar que para nuestro interes la métrica hiperbólica no funciona pues tiene curvatura Gaussiana K constante en cualquier punto.

3.1. Función de Morse sobre las variedades diferenciales.

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función real valuada sobre una variedad M. Un punto $p \in M$ es llamado un *punto crítico de* f si la función inducida $f_* : T_pM \to T_p\mathbb{R}$ es cero. Es decir, si elejimos un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ en una vecindad U de p esto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

la diferencial de f en p es cero. El número real $f(p)$ es llamado *valor crítico de* f. Un punto crítico p es llamado *no degenerado* si y solo si la matriz de segundas derivadas parciales

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)$$

también llamado el Hessiano de f en p, es no singular, si el Hessiano es singular entonces p es un *punto crítico degenerado*.

Definición 3.1 Una función diferenciable real valuada sobre una variedad M es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados.

El *índice* de un punto crítico no degenerado p de f, se define como la dimensión del subespacio maximal de T_pM sobre el cual el Hessiano es definido negativo, la *nulidad* es la dimensión de el espacio nulo, entonces p es no degenerado si y solo si la nulidad es cero. Se puede checar de la definición que el ser no degenerado y el índice no depende del sistema coordenado, ver [Mil63] cap. 1.

Lema 3.1 (Lema de Morse) Sea p un punto crítico no degenerado de f, entonces existe un sistema de coordenadas locales $(y_1, \ldots, y_n)$ en una vecindad U de p, tal que $y_i = 0$ para todo i y

$$f = f(p) - y_1^2 -, \cdots, -y_\alpha^2 + y_{\alpha+1}^2 +, \cdots, y_n^2$$

en U, donde α es el índice de f en p.

Corolario 3.1 Los puntos críticos no degenerados son aislados

Recordemos que la característica de Euler de una superficie de Riemann compacta M esta dada por $e(M) = 2 - 2g$, uno de los principales resultados que tenemos de la teoría de Morse es el siguiente (ver [God71] pág. 192):

Teorema 3.1 Sea M una superficie de Riemann compacta y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse sobre M, designemos por C_α el número de puntos críticos de índice α. Entonces

$$e(M) = \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha C_\alpha.$$

A continuación recordamos la manera de distinguir entre máximos y mínimos de una función definida en dos variables $f(x, y)$.

Definición 3.2 Sea $f(x, y)$ una función en dos variables definida en una vecindad de un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, supongamos que f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y sea (x_0, y_0) un punto crítico de f. Si en el punto (x_0, y_0) tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big)^2 \rangle 0$$

entonces:

1. (x_0, y_0) es un máximo si:
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2}\langle 0.$$
2. (x_0, y_0) es un mínimo si:
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rangle 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2}\rangle 0.$$

El punto (x_0, y_0) es un punto silla si:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big)^2 \langle 0.$$

Ahora bien dado que la curvatura Gaussiana $K : X \to \mathbb{R}$ es una función C^∞ sobre las superficies de Riemann, entonces dado $p \in X$ un punto crítico de K tenemos:

1. Si p es un punto mínimo de K
$$\alpha = 0.$$
2. Si p es un punto silla de K
$$\alpha = 1.$$
3. Si p es un punto máximo de K
$$\alpha = 2.$$

Ahora consideremos primeramente las superficies hiperelípticas para hacer un estudio detallado de los puntos críticos de la función curvatura Gaussiana bajo la métrica de Bergman y comprobemos lo visto en está sección, comencemos con un análisis general para el caso de las superficies hiperelípticas de género 2.

NOTA 3.1 Para hacer el análisis de la función curvatura Gaussiana K sobre superficies de Riemann hiperelípticas y visualizar algunos aspectos geométricos de dicha función haremos uso de la propiedad de que la función proyección sobre la primera coordenada $\pi : X \to \mathbb{C}_\infty$ es un cubriente doble ramificado, es decir, para cada vecindad abierta $U \subset \mathbb{C}_\infty$ que no contenga ningún punto de ramificación de π entonces $\pi^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$ es la unión disjunta de dos abiertos $U_1, U_2 \subset X$. Pero sabemos que los abiertos de X son biholomorfos a abiertos de $\mathbb{C}$, por lo que podemos hacer los cálculos pensando que nuestros abiertos son abiertos de $\mathbb{C}$.

3.2. Superficies hiperelípticas de género 2

Para el estudio de la curvatura haremos uso del siguiente teorema que se encuentra en [Lew69].

Teorema 3.2 Sea X superficie de Riemann compacta hiperelíptica de género $g \geq 2$, la curvatura Gaussiana K de la métrica de Bergman alcanza su máximo global y este es igual a cero precisamente en los $2g + 2$ puntos de Weierstrass.

Una superficie hiperelíptica X de género 2 se puede escribir como:

$$w^2 = f(z),$$

con f un polinomio de grado 6 o 5. La base del espacio de 1-formas holomorfas $H^0(X, \Omega)$ para X se encontrará dada por:

$$\{\frac{dz}{w}, \frac{zdz}{w}\}.$$

Si consideramos la métrica de Bergman, la curvatura Gaussiana por lo visto anteriormente se encontrará dada por la ecuación:

$$K = \frac{-2}{\langle f, f\rangle^3}[\langle f, f\rangle\langle f', f'\rangle - \langle f, f'\rangle\langle f', f\rangle],$$

en donde $f = (\frac{1}{y}, \frac{z}{y})$, y tenemos las siguientes igualdades:

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{|w|^2}(1 + |z|^2).$$

$$\langle f', f'\rangle = \frac{1}{|w|^2}.$$

$$\langle f, f'\rangle = \frac{z}{|w|^2}.$$

$$\langle f', f\rangle = \frac{\overline{z}}{|w|^2}.$$

Entonces se obtiene lo siguiente

$$\langle f, f\rangle\langle f', f'\rangle - \langle f, f'\rangle\langle f', f\rangle = \frac{1}{|w|^4}(1 + |z|^2 - |z|^2) = \frac{1}{|w|^4}.$$

Por lo tanto la curvatura Gaussiana se encontrará dada por la ecuación

$$K = \frac{-2|w|^2}{(1 + |z|^2)^3} = \frac{-2|f(z)|}{(1 + |z|^2)^3} = \frac{-2(f\overline{f})^{1/2}}{(1 + |z|^2)^3}.$$

Como $dK^2 = 2KdK$, entonces podemos decir que K y K^2 a excepción de los puntos de Weierstrass que es donde K se anula, tienen los mismos puntos críticos, para encontrar tales puntos críticos consideremos K^2.

$$K^2 = 4\frac{f\overline{f}}{(1 + |z|^2)^6}.$$

Para simplificar notación, pongamos

$$\beta = 1 + z\overline{z}.$$

Calculando las derivadas parciales con respecto a z y $\overline{z}$, tenemos:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial K^2}{\partial z} = \frac{f'\overline{f}}{\beta^6} - 6\frac{f\overline{f}\overline{z}}{\beta^7}.$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial K^2}{\partial \overline{z}} = \frac{f\overline{f'}}{\beta^6} - 6\frac{f\overline{f}z}{\beta^7}.$$

Para encontrar los puntos críticos tenemos que $\frac{\partial K^2}{\partial z}(z_0) = 0 = \frac{\partial K^2}{\partial \overline{z}}(z_0)$, suponinedo que $f(z_0) \neq 0$, entonces los puntos z_0 tales que cumplan la siguiente condición:

$$f'(z_0) = \frac{6f(z_0)\overline{z_0}}{1+z_0\overline{z_0}}.$$

$$\overline{f'(z_0)} = \frac{6\overline{f(z_0)}z_0}{1+z_0\overline{z_0}}.$$

Serán los puntos críticos de K. Una vez encontrados los puntos críticos regresemos con K y calculemos sus derivadas parciales.

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{-(f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f}}{\beta^3} + 6\frac{(f\overline{f})^{1/2}\overline{z}}{\beta^4}.$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial \overline{z}} = \frac{-(f\overline{f})^{-1/2}f\overline{f'}}{\beta^3} + 6\frac{(f\overline{f})^{1/2}z}{\beta^4}.$$

Calculando el Hessiano tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} &= \frac{1/2(f\overline{f})^{-3/2}(f'\overline{f})^2 - (f\overline{f})^{-1/2}f''\overline{f}}{\beta^3} + 3\frac{(f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f}\overline{z}}{\beta^4} + 3\frac{(f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f}\overline{z}}{\beta^4} - 24\frac{(f\overline{f})^{1/2}\overline{z^2}}{\beta^5} \\ &= \frac{1/2(f\overline{f})^{-3/2}(f'\overline{f})^2 - (f\overline{f})^{-1/2}f''\overline{f}}{\beta^3} + 6\frac{(f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f}\overline{z}}{\beta^4} - 24\frac{(f\overline{f})^{1/2}\overline{z^2}}{\beta^5}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \overline{z^2}} = \frac{1/2(f\overline{f})^{-3/2}(f\overline{f'})^2 - (f\overline{f})^{-1/2}f\overline{f''}}{\beta^3} + 6\frac{(f\overline{f})^{-1/2}f\overline{f'}z}{\beta^4} - 24\frac{(f\overline{f})^{1/2}z^2}{\beta^5}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial \overline{z}} &= \frac{1/2(f\overline{f})^{-3/2}(f\overline{f'})(f'\overline{f}) - (f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f'}}{\beta^3} + 3\frac{(f\overline{f})^{-1/2}f'\overline{f}z}{\beta^4} + \\ &+ \frac{6(f\overline{f})^{1/2} + 3(f\overline{f})^{-1/2}f\overline{f'z}}{\beta^4} - 24\frac{(f\overline{f})^{1/2}z\overline{z}}{\beta^5}.\end{aligned}$$

Evaluando en los puntos z_0 tales que $f'(z_0) = \frac{6f(z_0)\overline{z_0}}{1+z_0\overline{z_0}}$ y $\overline{f'(z_0)} = \frac{6\overline{f(z_0)}z_0}{1+z_0\overline{z_0}}$ tenemos:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}(z_0) = \frac{30\mid f(z_0)\mid \overline{z_0}}{(1+z_0\overline{z_0})^5} - \frac{f''(z_0)\overline{f(z_0)}}{\mid f(z_0)\mid (1+z_0\overline{z_0})^3}.$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \overline{z^2}}(z_0) = \frac{30\mid f(z_0)\mid z_0}{(1+z_0\overline{z_0})^5} - \frac{f(z_0)\overline{f''(z_0)}}{\mid f(z_0)\mid (1+z_0\overline{z_0})^3}.$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) = \frac{6 \mid f(z_0) \mid}{(1 + z_0\overline{z_0})^5}.$$

Ahora bien consideremos el cambio de coordenadas $z = x + iy$, dado por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{z^2}}\Big).$$
$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - \Big(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{z^2}}\Big).$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial^2}{\partial \overline{z^2}} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big).$$

Por lo tanto tendremos que Hessiano de la curvatura Gaussiana evaluado en los puntos críticos $z_0 = x_0 + iy_0$ se encuentra dado por:

$$Hess(K(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} 2\frac{|f|}{\beta^5}\Big(6 + 30Re(z) - \frac{\beta^2}{|f|^2}Re(f''\overline{f})\Big) & \frac{2|f|}{i\beta^5}\Big(30Im(z) - \frac{\beta^2}{|f|^2}Im(f''\overline{f})\Big) \\ \frac{2|f|}{i\beta^5}\Big(30Im(z) - \frac{\beta^2}{|f|^2}Im(f''\overline{f})\Big) & 2\frac{|f|}{\beta^5}\Big(6 - 30Re(z) + \frac{\beta^2}{|f|^2}Re(f''\overline{f})\Big) \end{pmatrix}_{z_0}.$$

Sí además los puntos críticos z_0 cumplen la condición $f''(z_0) = \frac{30f(z_0)\overline{z_0^2}}{(1+z_0\overline{z_0})^2}$ entonces obtenemos:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}(z_0) = 0 = \frac{\partial^2 K}{\partial \overline{z^2}}(z_0).$$
$$\frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) = \frac{6 \mid f(z_0) \mid}{(1 + z_0\overline{z_0})^5}.$$

Entonces la nueva nueva forma del Hessiano de K evaluado en estos puntos será:

$$Hess(K(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} 12\frac{|f(z_0)|}{(1+z_0\overline{z_0})^5} & 0 \\ 0 & 12\frac{|f(z_0)|}{(1+z_0\overline{z_0})^5} \end{pmatrix}.$$

Es decir, tales puntos $z_0 = x_0 + iy_0$ son minimos locales de la curvatura Gaussiana.

En escencia, el argumento citado anteriormente es la demostración de la proposición siguiente.

Proposición 3.1 Sea $w^2 = f(z)$ la ecuación de una curva hiperelíptica de género 2, tal que f evaluada en un punto z_0 es distinto de cero.

1. Si $f'(z_0) = \frac{6f(z_0)\overline{z_0}}{1+z_0\overline{z_0}}$, entonces el punto z_0 es un punto critico de la función curvatura gaussiana.

2. Si además $f''(z_0) = \frac{30f(z_0)\overline{z_0^2}}{(1+z_0\overline{z_0})^2}$, entonces el punto z_0 es un mínimo local de la función curvatura gaussiana.

■

Corolario 3.2 Sea $w^2 = f(z)$ la ecuación de una curva hiperelíptica de género 2, tal que f evaluado en $z = 0$ es distinto de cero.

1. Si $f'(0) = 0$, entonces es un punto critico de la función curvatura gaussiana.
2. Si además $f''(0) = 0$, entonces es un mínimo local de la función curvatura gaussiana.

■

Ahora bien analicemos la función curvatura de los diferentes tipos de curvas hiperelípticas de género 2. Primero analicemos algunas curvas en las que podemos aplicar estas dos ultimas proposiciones

$\mathbf{w^2 = z^6 - 1}$.

La curvatura Gaussiana K de la superficie hiperelíptica de género 2 dada por $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z^6 - 1\}$. Esta dada la ecuación:

$$K(z) = \frac{-2 \mid w \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^3} = \frac{-2 \mid f(z) \mid}{(1+ \mid z \mid^2)^3}.$$

Notemos que $K(z) = K(1/z)$, considerando coordenadas polares, K es igual a:

$$K(r, \theta) = \frac{-2(r^{12} - 2r^6 \cos 6\theta + 1)^{1/2}}{(1 + r^2)^3}.$$

y $K^2(r, \theta)$ es:

$$K^2(r, \theta) = 4\frac{r^{12} - 2r^6 \cos 6\theta + 1}{(1 + r^2)^6}.$$

Calculemos las derivadas parciales con respecto a r y θ de K^2 para encontrar los puntos críticos de K.

$$\frac{\partial K^2}{\partial \theta} = \frac{12r^6 \sin 6\theta}{(1 + r^2)^6}.$$

Los puntos es los que $\frac{\partial K^2}{\partial \theta} = 0$ son las rectas cuyo ángulo es $\theta_k = \frac{k\pi}{6}$, $k = 0, ..., 11$. Por otra parte

$$\frac{\partial K^2}{\partial r} = \frac{12r^{11} - 12r^5 \cos 6\theta}{(1 + r^2)^6} - \frac{12r(r^{12} - 2r^6 \cos 6\theta + 1)}{(1 + r^2)^7}.$$

Para encontrar los puntos críticos tenemos que se debe cumplir la ecuación $\frac{\partial K^2}{\partial r}(r_0,\theta_0) = 0 = \frac{\partial K^2}{\partial \theta}(r_0,\theta_0)$. Notemos que los puntos $r = 1$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{k}$, $k = 0, .., 5$, son las soluciones posibles, pues no estamos tomando en cuenta los puntos de Weierstrass. Los cuales coinciden si aplicamos la primera condición de la proposición 3.1

Una vez encontrados los puntos críticos calculemos las derivadas parciales de K

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{-(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-1/2}(12r^{11} - 12r^5\cos 6\theta)}{(1+r^2)^3} + \frac{12r(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}}{(1+r^2)^4}.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{-(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-1/2}12r^6\sin 6\theta}{(1+r^2)^3}.$$

Calculando el Hessiano tenemos de K, para ver que tipo de puntos críticos son tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} &= \frac{(12r^{11} - 12r^5\cos 6\theta)^2}{2(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{3/2}(1+r^2)^3} - \frac{132r^{10} - 60r^4\cos 6\theta}{(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}(1+r^2)^3}\\ &+ \frac{6r(12r^{11} - 12r^5\cos 6\theta)}{(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}(1+r^2)^4} + \frac{12(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}}{(1+r^2)^4}\\ &+ \frac{6r(12r^{11} - 12r^5\cos 6\theta)}{(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}(1+r^2)^4} - \frac{96r^2(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}}{(1+r^2)^5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2} &= \frac{1/2(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-3/2}(12r^6\sin 6\theta)^2 - 72(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-1/2}r^6\cos 6\theta}{(1+r^2)^3}\\ &= \frac{(12r^6\sin 6\theta)^2}{2(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{3/2}(1+r^2)^3} - \frac{72r^6\cos 6\theta}{(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{1/2}(1+r^2)^3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial r} &= \frac{1/2(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-3/2}(12r^{11} - 12r^5\cos 6\theta)(12r^6\sin 6\theta)}{(1+r^2)^3}\\ &- \frac{72(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-1/2}r^5\sin 6\theta}{(1+r^2)^3} + \frac{72(r^{12} - 2r^6\cos 6\theta + 1)^{-1/2}r^7\sin 6\theta}{(1+r^2)^4}.\end{aligned}$$

Evaluando en los puntos $r_0 = 1$, θ_k, tenemos

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(1,\theta_k) = -3.$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial r}(1,\theta_k) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2}(1,\theta_k) = \frac{9}{2}.$$

Por lo tanto

$$Hess(K(1,\theta_k)) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

es decir, los puntos $e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{k}$, $k = 0, .., 5$, son puntos sillas. El punto $z = 0$ en coordenadas polares no lo podemos ver, pero si aplicamos la prosición 3.1 y corolario 3.2 y dado que $f(0) = -1$, $f'(0) = 0 = f''(0)$, podemos afirmar que tal punto es un mínimo local. En la figura 3.1 presentamos la gráfica de la curvatura de tal función.

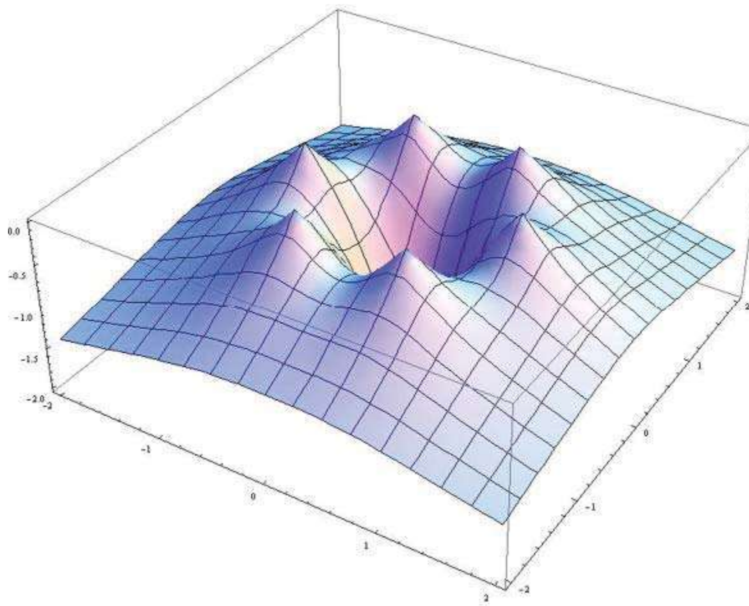

Figura 3.1: Gráfica de la curvatura de la superficie dada por $w^2 = z^6 - 1$

Notemos que la curvatura K desciende $\mathbb{C}_\infty$ y satisface $K(z) = K(1/z)$, por lo tanto los puntos sobre el 0 e ∞ son puntos mínimos de la curvatura Gaussiana K.

Por último veamos que se cumple el teorema 3.1. Tenemos dos puntos mínimos de la curvatura 0 e ∞, además estos puntos no son puntos de ramificación del cubriente doble de X en $\mathbb{C}_\infty$ (no son raíces de $z^6 - 1 = 0$), por lo tanto $C_0 = 4$, tenemos 6 puntos sillas que no son de ramificación, por los tanto $C_1 = 12$ y 6 puntos de curvatura máxima que son los puntos de Weierstrass, de aquí que $C_2 = 6$, por lo tanto

$$e(X) = \sum_{\alpha=0}^{2} (-1)^\alpha C_\alpha = 4 - 12 + 6 = -2 = 2 - 2g.$$

Observación: Si consideramos el automorfismo $\sigma : X \to X$, dado por $\sigma(z, w) = (e^{\frac{\pi}{6}i} z, w)$, entonces obetenemos que la superficie se encontrará definida por la ecuación $w^2 = z^6 + 1$, hagamos un análisis de la función curvatura Gaussiana K para está superficie.

$$w^2 = z^6 + 1.$$

La curvatura Gaussiana se encuentra dada por la ecuación

$$K = \frac{-2 \mid w \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^3} = \frac{-2 \mid f(z) \mid}{(1+ \mid z \mid^2)^3}.$$

Considerando el cambio a coordenadas polares, K será igual a

$$K = \frac{-2(r^{12} + 2r^6 \cos 6\theta + 1)^{1/2}}{(1 + r^2)^3}.$$

Ahora bien considerando K^2 en términos de z y $\overline{z}$ tenemos:

$$K^2 = 4\frac{| f(z) |^2}{(1+ | z |^2)^6}.$$

Considerando el cambio a coordenadas polares tenemos:

$$K^2 = 4\frac{r^{12} + 2r^6 \cos 6\theta + 1}{(1 + r^2)^6}.$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho anteriormente realizamos los cálculos tanto en coordenadas polares como en término de z y $\overline{z}$ para encontrar los puntos críticos de la curvatura Gaussiana K, evaluados en $Hess(K)$ tenemos:

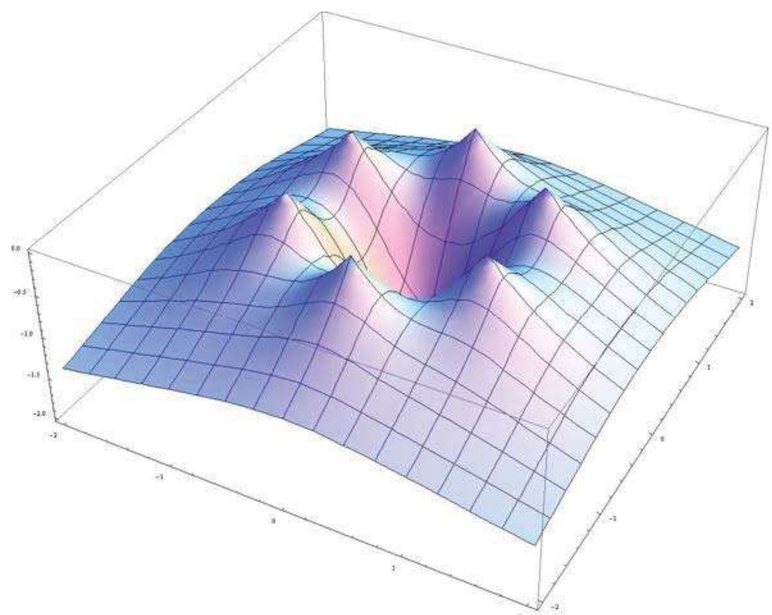

Figura 3.2: Gráfica de la curvatura de la superficie dada por $w^2 = z^6 + 1$

- puntos de curvatura máxima de K: Son las raíces del polinomio $z^6 + 1 = 0$, es decir, los puntos $e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{k}$, $k = 0, .., 5$.
- puntos de curvatura mínima de K: Son el 0 e ∞.
- puntos sillas de K: Son los puntos $e^{i\theta_k}$, $\theta_k = \frac{(2k)\pi}{k}$, $k = 0, .., 5$

ver figura 3.2

Por medio del automorfismo $\sigma(z,w) = (e^{\frac{\pi}{6}i}z, w)$, tenemos que los puntos de curvatura máxima de la curva $w^2 = z^6 - 1$ van a dar a los puntos silla de la curvatura de la superficie $w^2 = z^6 + 1$ y viceversa. Este es un fenomeno que se deberá entender bien.

$\mathbf{w^2 = (z^3 - a^3)(z^3 - 1/a^3)}$.

Ejemplo de la curvatura de la superficie hiperliptica de género 2 dada por la ecuación

$$w^2 = (z^3 - a^3)(z^3 - 1/a^3).$$

Supongamos como caso particular por cuestiones de complejidad de cálculos que $a^3 = 2$, entonces la curvatura se encuentra dada por la ecuación:

$$K = \frac{-2 \mid w \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^3} = \frac{-2 \mid f(z) \mid}{(1+ \mid z \mid^2)^3}.$$

Considerando coordenadas polares, K está dada por la expresión

$$K = \frac{-2\Big((r^6 - 4r^3 \cos 3\theta + 4)(r^6 - r^3 \cos 3\theta + 1/4)\Big)^{1/2}}{(1 + r^2)^3}.$$

Ahora considerando K^2 en término de z y $\overline{z}$ tenemos:

$$K^2 = 4\frac{\mid f(z) \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^6}.$$

Tomando coordenadas polares tenemos:

$$K^2 = 4\frac{(r^6 - 4r^3 \cos 3\theta + 4)(r^6 - r^3 \cos 3\theta + 1/4)}{(1 + r^2)^6}.$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho anteriormente realizamos los cálculos tanto en coordenadas polares como en término de z y $\overline{z}$ para encontrar los puntos críticos de la curvatura Gaussiana K, evaluados en $Hess(K)$ tenemos:

- $r = 1$, $\theta_k = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 4{,}88 & 0 \\ 0 & -4{,}5 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

- $r = 1$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} -1{,}13 & 0 \\ 0 & 4{,}5 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

El punto $z = 0$ en coordenadas polares no lo podemos ver, pero si aplicamos la propisción 3.1 y su corolario 3.2, dado que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0 = f''(0)$, podemos afirmar que tal punto es un mínimo local. En la figura 3.3 presentamos la gráfica de la curvatura de tal función.

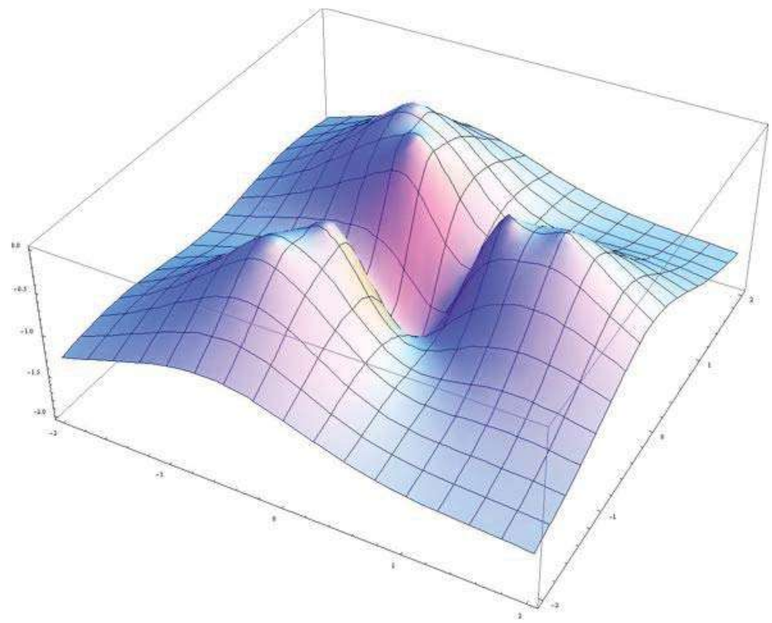

Figura 3.3: Gráfica de la función curvatura de la superficie dada por $w^2 = (z^3-a^3)(z^3-1/a^3)$

Por último veamos que se cumple el teorema 3.1. Tenemos dos puntos de curvatura mínima 0 e ∞ que no son de ramificación, por lo tanto $C_0 = 4$, tenemos 6 puntos sillas que no son de ramificación, por los tanto $C_1 = 12$ y 6 puntos de cruvatura máxima que son los puntos de Weierstrass de X, de aquí que $C_2 = 6$, por lo tanto

$$e(X) = \sum_{\alpha=0}^{2}(-1)^{\alpha}C_{\alpha} = 4 - 12 + 6 = -2 = 2 - 2g.$$

En los dos ejemplos siguientes sólo podemos aplicar la primera afirmación de la proposición 3.1, ya que no se cumple la segunda condición.

$\mathbf{w^2 = z(z^2 - a^2)(z^2 - 1/a^2)}$.

Ejemplo de la curvatura de la superficie hiperelíptica de género 2 dada por la ecuación

$$w^2 = z(z^2 - a^2)(z^2 - 1/a^2).$$

Supongamos como caso particular que $a^2 = 3$, entonces la curvatura se encuentra dada por la ecuación

$$K = \frac{-2\mid w\mid^2}{(1+\mid z\mid^2)^3} = \frac{-2\mid f(z)\mid}{(1+\mid z\mid^2)^3}.$$

Si consideramos el cambio a coordenadas polares, entonces K está dada por

$$K = \frac{-2\left(r^2(r^4 - 6r^2\cos 2\theta + 9)(r^4 - 2/3r^2\cos 2\theta + 1/9)\right)^{1/2}}{(1+r^2)^3}.$$

Ahora bien considerando K^2 en términos de z y $\overline{z}$ tenemos:

$$K^2 = 4\frac{\mid f(z)\mid^2}{(1+\mid z\mid^2)^6}.$$

Tomando el cambio a coordenadas polares tenemos:

$$K^2 = 4\frac{r^2(r^4 - 6r^2\cos 2\theta + 9)(r^4 - 2/3r^2\cos 2\theta + 1/9)}{(1+r^2)^6}.$$

Haciendo cálculos tanto en coordenadas polares como en términos de z y $\overline{z}$ encontramos los puntos críticos de la curvatura Gaussiana K, evaluados en $Hess(K)$ tenemos:

- $r = 2 - \sqrt{3}$, $\theta_k = k\pi$, $k = 0, 1$.

$$Hess(K(2-\sqrt{3}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 10{,}4 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

- $r = 2 + \sqrt{3}$, $\theta_k = k\pi$, $k = 0, 1$.

$$Hess(K(2+\sqrt{3}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 0{,}0538 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

- $r = 1$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k = 0, 1$.

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son mínimos locales.

- $r = 1$, $\theta_k = k\pi$, $k = 0, 1$.

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

En la figura 3.4 presentamos la gráfica de la curvatura de tal función.

Por último veamos que se cumple el teorema 3.1. Tenemos dos puntos de curvatura mínima que no son de ramificación, por lo tanto $C_0 = 4$, tenemos 6 puntos sillas que no

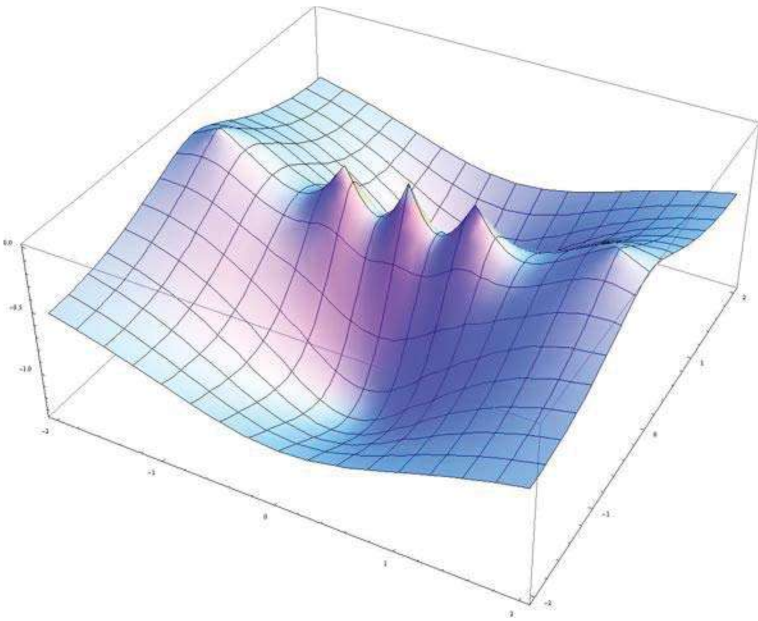

Figura 3.4: Gráfica de la función curvatura de la superficie dada por $w^2 = z(z^2 - a^2)(z^2 - 1/a^2)$.

son de ramificación, por los tanto $C_1 = 12$ y 6 puntos de curvatura máxima que son los puntos de Weierstrass de X, de aquí que $C_2 = 6$, por lo tanto

$$e(X) = \sum_{\alpha=0}^{2}(-1)^{\alpha} C_{\alpha} = 4 - 12 + 6 = -2 = 2 - 2g.$$

$\mathbf{w^2 = z^5 - z}$.

Ejemplo de la curvatura de la superficie hiperliptica de género 2 dada por la ecuación

$$w^2 = z^5 - z.$$

La curvatura se encuentra dada por la ecuación

$$K = \frac{-2 \mid w \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^3} = \frac{-2 \mid f(z) \mid}{(1+ \mid z \mid^2)^3}.$$

Si consideramos el cambio de coordenadas a coordenadas polares, entonces K está dada por

$$K = \frac{-2(r^{10} - 2r^6 \cos 4\theta + r^2)^{1/2}}{(1 + r^2)^3}.$$

Ahora bien considerando K^2 en términos de z y $\overline{z}$ tenemos:

$$K^2 = 4\frac{\mid f(z) \mid^2}{(1+ \mid z \mid^2)^6}.$$

Tomando coordenadas polares tenemos:

$$K^2 = 4\frac{r^{10} - 2r^6 \cos 4\theta + r^2}{(1 + r^2)^6}.$$

Haciendo cálculos tanto en coordenadas polares como en términos de z y $\bar{z}$ encontramos los puntos críticos de la curvatura Gaussiana K, evaluados en $Hess(K)$ tenemos:

- $r = -1 + \sqrt{2}$, $\theta_k = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$Hess(K(-1 + \sqrt{2}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 5{,}83 & 0 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

- $r = 1 + \sqrt{2}$, $\theta_k = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$Hess(K(1 + \sqrt{2}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 0{,}172 & 0 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

- $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$Hess(K(\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 2{,}03 & 0 \\ 0 & 0{,}544 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son mínimos locales.

- $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$Hess(K(\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \theta_k)) = \begin{pmatrix} 0{,}146 & 0 \\ 0 & 0{,}544 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son mínimos locales.

- $r = 1$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto estos puntos son sillas.

En la figura 3.5 presentamos la gráfica de la curvatura de tal función.

Por último veamos que se cumple el teorema 3.1. Tenemos 8 puntos de curvatura mínima que no son de ramificación, por lo tanto $C_0 = 16$, tenemos 12 puntos sillas que no

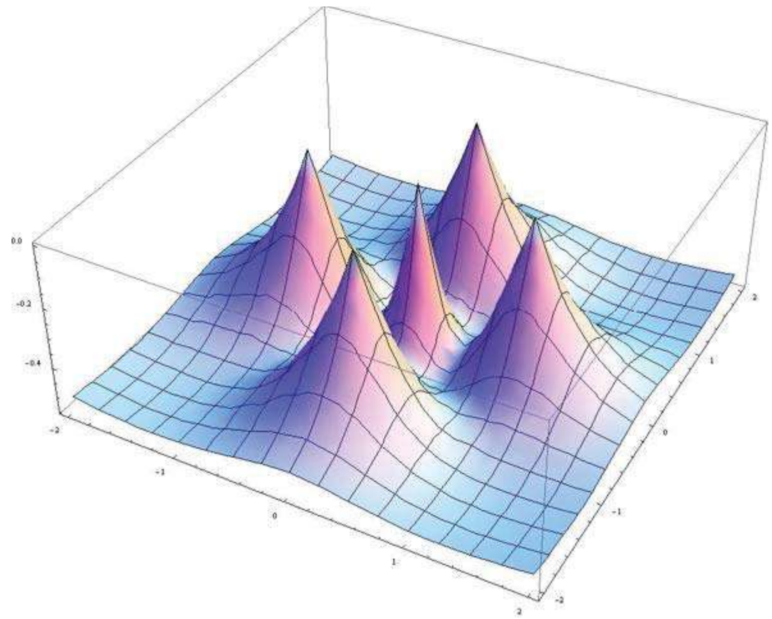

Figura 3.5: Gráfica de la función curvatura de la superficie dada por $w^2 = z^5 - z$

son de ramificación, por los tanto $C_1 = 24$ y 6 puntos de curvatura máxima que son los puntos de Weierstrass d X, de aquí que $C_2 = 6$, por lo tanto

$$e(X) = \sum_{\alpha=0}^{2} (-1)^{\alpha} C_{\alpha} = 16 - 24 + 6 = -2 = 2 - 2g.$$

Con esto terinamos el estudio la función curvatura de las superficies hiperelípticas de género 2.

3.3. Superficies hiperelípticas de género 3.

Por último daremos un ejemplo en género 3 de la superficie hiperlíptica dada por la ecuación:

$$w^2 = z^8 - 1.$$

Tenemos que es una superfice de Riemann de género 3, entoces su base del espacio de 1-formas holomorfas $H^0(X, \Omega)$, se encuentra dada por:

$$\{\frac{dz}{y}, \frac{zdz}{y}, \frac{z^2dz}{y}\}.$$

La curvatura Gaussiana K en la métrica de Bergman se encuentra dada por la ecuación:

$$K = \frac{-2}{< f, f >^3}[< f, f >< f', f' > - < f, f' >< f', f >]$$

en donde $f = (\frac{1}{y}, \frac{z}{y}, \frac{z^2}{y})$, de aquí que:

$$< f, f >= \frac{1}{| w |^2}(1+ | z |^2 + | z^2 |^2)$$

$$< f', f' >= \frac{1}{| w |^2}(1 + 4 | z |^2)$$

$$< f, f' >= \frac{1}{| w |^2}(z + 2z | z |^2)$$

$$< f', f >= \frac{1}{| w |^2}(\overline{z} + 2\overline{z} | z |^2)$$

Por lo tanto la curvatura K se encuentra dada por la ecuación:

$$K(z, \overline{z}) = \frac{-2 | w |^2 (1 + 4 | z |^2 + | z |^4)}{(1+ | z |^2 + | z^2 |^2)^3}$$

Cálculemos las derivadas parciales con respecto a r y θ de $K^2(r, \theta)$ para encontrar los puntos críticos de K

$$K^2 = \frac{4(1 + 4r^2 + r^4)^2(r^{16} - 2r^8 cos8\theta + 1)}{(1 + r^2 + r^4)^6}.$$

$$\frac{\partial K^2}{\partial \theta} = 4\frac{(1 + 4r^2 + r^4)^2(16r^8 sin8\theta)}{(1 + r^2 + r^4)^6}.$$

Los puntos es los que $\frac{\partial K^2}{\partial \theta} = 0$ son las rectas que pasan por el origen y el punto $e^{i\theta_k}$ donde $\theta_k = \frac{k\pi}{8}$, $k = 1, ..., 15$. Ahora bien por otro lado

$$\frac{\partial K^2}{\partial r} = 4\Big[\frac{2(1 + 4r^2 + r^4)(8r + 4r^3)(r^{16} - 2r^8 cos8\theta + 1) + (1 + 4r^2 + r^4)^2(16r^{15} - 16r^7 cos8\theta)}{(1 + r^2 + r^4)^6}$$

$$-6\frac{(1 + 4r^2 + r^4)^2(2r + 4r^3)(r^{16} - 2r^8 cos8\theta + 1)}{(1 + r^2 + r^4)^7}\Big].$$

Para encontrar los puntos críticos tenemos que se debe cumplir la ecuación $\frac{\partial K^2}{\partial r}(r_0, \theta_0) = 0 = \frac{\partial K^2}{\partial \theta}(r_0, \theta_0)$. Notemos que los puntos de la forma $e^{i\theta_k}$ con $\theta_k = \frac{2k\pi}{8}$, $k = 0, ..., 7$, son las raíces del polinomio $f(z)$ que como podemos ver desde un principio es donde la curvatura vale 0 y son los puntos de curvatura máxima, entonces los puntos de la forma $e^{i\theta_k}$ con $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{8}$, $k = 0, ..., 7$, donde tenemos que $cos8\theta_k = -1$, son los puntos críticos a considerar.

Evaluando el Hessiano en los puntos críticos $(1, \theta_k)$ tenemos:

$$Hess(K(1, \theta_k)) = \begin{pmatrix} -8{,}29 & 0 \\ 0 & 14{,}22 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto estos puntos son puntos sillas.

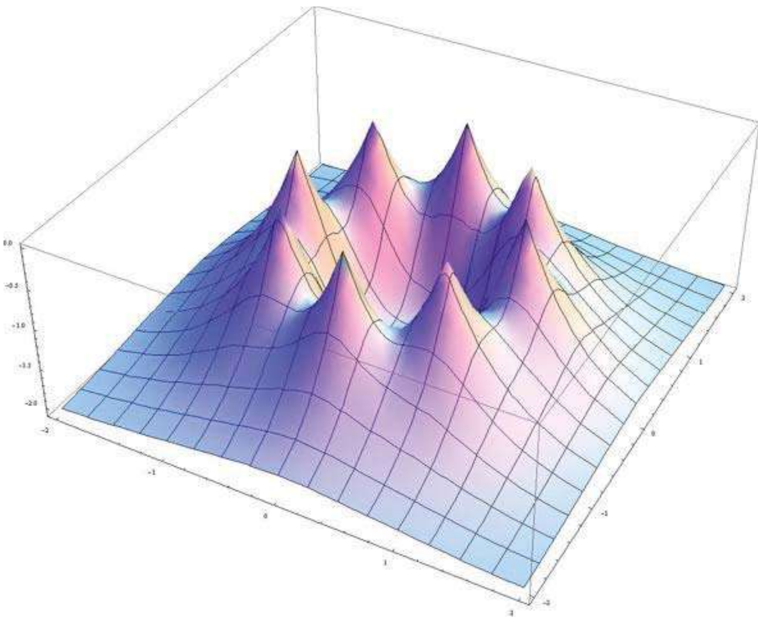

Figura 3.6: Gráfica de la función curvatura de la superficie dada por $w^2 = z^8 - 1$

En la figura 3.6 presentamos una imagen de la curvatura de tal función.

Conclusiones:

Este ejemplo de género 3 es analogo al de la curva dada por $w^2 = z^6 - 1$, es decir, en la curva $w^2 = z^8 - 1$ tenemos que el número total de puntos silla de la curvatura son 16, el número de puntos mínimos son 4 y el número de puntos máximos son 8 y notemos que aquí también se cumple el teorema de Morse. De hecho parece ser que para la curva hiperelítica dada por $w^2 = z^{2g+2} - 1$ la función curvatura Gaussiana tendrá 4 mínimos, $2g+2$ puntos máximos y $4g+4$ puntos sillas, pero quizas para estudiar este ejemplo tengamos que analizar primero puntos fijos de automorfismos, que estan relacionados con puntos críticos de la curvatura.

Bibliografía

[CCL99] S. S. Chern, W. H. Chen, and K. S. Lam. *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, 1999.

[Dar94] R.W.R Darling. *Differential forms and connections*. Cambridge University, 1994.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[For81] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlang, 1981.

[GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, 1978.

[God71] Claude Godbillon. *Elements de topologie algebrique*. Herman, Paris, 1971.

[Her98] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[Jos91] Jurgen Jost. *Compact Riemann Surfaces*. Springer-Verlang, 1991.

[Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian Groups*. University Chicago, 1992.

[Lew69] Joseph Lewittes. Diferentials and metrics on riemann surfaces. *American Matematical Society*, 139:311–318, 1969.

[MH96] Jerold E. Marsden and Michael J. Hoffmann. *Análisis Básico de Variable Compleja*. Ed. Trillas, 1996.

[Mil63] John Willard Milnor. *Morse Theory*. Princeton, n.j., 1963.

[Mir95] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society, 1995.

[Sha94] I.R. Shafarevich. *Algebraic Geometry I*. Springer-Verlang, 1994.

[Spi88] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Editorial Reverté, 1988.

[Zhe62] Fangyang Zheng. *Complex Differential Geometry*. American Matematical Society, 1962.