



---

---

# UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

---

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
*“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”*

“OSCILACIÓN SINCRONIZADA DE NEUTRINOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

MARCO ANTONIO ORTIZ VILICAÑA

ASESOR

DR. EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ



MORELIA, MICH., DICIEMBRE DE 2009.

## Agradecimientos.

Escribo en esta sección la parte más importante de la tesis. La razón es que gracias a las personas que a continuación menciono, fue posible llegar al final de mi carrera universitaria, y muestra de ello, es la publicación que tienes ahora en tus manos de mi tesis de licenciatura.

“Hay que dar gracias a Dios, siempre, en todo y por todo”, decía San Pablo, y he aquí mi agradecimiento al Creador por todos los bienes inmerecidamente recibidos a lo largo de todos estos años, en los que no me faltaron salud, entendimiento, apoyo, tiempo y sustento para continuar adelante y terminar mi carrera. Asimismo, no faltaron dudas, desilusiones, fatigas, desvelos, falta de dinero y ayunos para saber apreciar que lo que uno consigue es a base de esfuerzo y dedicación y para no olvidar que sólo Él es indispensable y necesario. ¡Gracias Espíritu Santo, luz de toda inteligencia!

A Leopoldo Ortiz Vázquez y Maricela Villicaña Villicaña, a quienes Dios propuso como mis padres y ellos tuvieron a bien darme el honor de ser su hijo. Gracias por el apoyo, consejos, correcciones y ejemplos recibidos todos los días. A mis hermanos que me alegran la vida y a toda mi familia que nunca dudaron que este día llegaría.

A Leticia González Monzón, por ser mi inspiración, mi imaginación, mi motor. Gracias por tu paciencia y apoyo incondicional, por hacerme ver todas las cosas con una óptica diferente. Me sigo preguntando por qué tienes el extraño gusto de pasar el tiempo a mi lado. ¡Qué bueno que te puedo llamar “mi esposa”!

Es muy bien sabido que una empresa no se lleva a cabo sólo con buenos deseos, la parte técnica no deja de ser muy importante y a veces complicada. Es por ésto que merece una mención especial el Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández, mi asesor de tesis y maestro de varios cursos. Tengo que agradecerle mucho por su paciencia y confianza, por sus conocimientos y su guía, y no menos importante, su amistad, que desde el primer momento percibí. Es usted de esas personas como las que uno quisiera llegar a ser. Orgullosamente diré siempre que usted es mi maestro.

No merecen menos agradecimiento los profesores de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana con quienes creció mi gusto y amor por la ciencia. Mi admiración, respeto y cariño para todos ellos. En las aulas me sorprendieron con cosas nuevas y extrañas, pero fascinantes en extremo. Ustedes son los forjadores de la patria en que vivimos.

Finalmente, tengo también que agradecer a mi país, México. Gracias a sus condiciones socio-económicas (a pesar de su enorme desigualdad en la distribución de la riqueza y ésto tenemos que mejorarlo) logré la terminación de mis estudios. No olvido que gocé del beneficio de becas durante buena parte de mi trayectoria de estudiante y que me gradúo en una escuela sostenida por el estado. Gracias a mi asesor y al CONACYT, mi tesis fue respaldada con una beca en el proyecto #52443 de esta misma institución. En la biblioteca pública de Puruándiro, Michoacán, también sostenida con recursos del estado, nació mi pasión por la física.

Con la esperanza de contribuir con un grano de arena al desarrollo científico en general, y al de mi país en particular, gracias a todos aquellos que tuvieron algo que ver con la realización de este proyecto.

Marco Antonio Ortiz Villicaña,  
Morelia, Mich. 9 de diciembre de 2009.



# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>5</b>
<b>2. Modelo electrodébil de las interacciones.</b>	<b>9</b>
2.1. Leptones y las interacciones electromagnética y débil. . . . .	10
2.1.1. Leptones. . . . .	10
2.1.2. La interacción electromagnética. . . . .	11
2.1.3. La interacción débil. . . . .	12
2.1.4. Inestabilidad de los leptones pesados: Decaimiento del muón. . . . .	15
2.1.5. Violación de la paridad en el decaimiento del muón. . . . .	15
2.2. Neutrinos. . . . .	17
2.3. Unidades naturales. . . . .	19
2.4. La ecuación de Dirac. . . . .	19
2.4.1. La ecuación de Dirac. . . . .	20
2.4.2. La forma covariante de la ecuación de Dirac. Las matrices $\gamma$ de Dirac. . .	21
2.4.3. Corriente conservada y la ecuación adjunta. . . . .	22
2.4.4. Espinores de la partícula libre. . . . .	23
2.4.5. Antipartículas. . . . .	25
2.4.6. Normalización de espinores y la relación de completez. . . . .	26
2.4.7. Fermiones de masa cero: las dos componentes del neutrino. . . . .	27
2.5. El modelo electrodébil y las reglas de Feynman. . . . .	28
2.5.1. Interacciones débiles. . . . .	28
2.5.2. Interacciones electrodébiles. . . . .	34
2.5.3. Las reglas de Feynman para las interacciones electrodébiles. . . . .	39
<b>3. El fenómeno de la oscilación de neutrinos.</b>	<b>43</b>
3.1. La evolución de un sistema en el tiempo. . . . .	43
3.1.1. ¿Cómo evolucionan los estados en el tiempo? . . . . .	43
3.1.2. La matriz hamiltoniana. . . . .	46
3.2. El problema de los dos estados. . . . .	46
3.3. Oscilaciones de neutrinos. . . . .	49
3.3.1. Un poco de historia. . . . .	50
3.3.2. Mezcla y oscilación de neutrinos. . . . .	51

<b>4. Oscilación sincronizada de neutrinos.</b>	<b>53</b>
4.1. Oscilación sincronizada de neutrinos. . . . .	53
4.1.1. Introducción. . . . .	53
4.1.2. Marco teórico. . . . .	55
4.2. Cálculo de algunas amplitudes invariantes. . . . .	60
4.2.1. Cálculo de $M(\nu_e \nu_\mu \rightarrow \nu_e \nu_\mu)$ . . . . .	60
4.2.2. Cálculo de $M(\nu_e \nu_e \rightarrow \nu_e \nu_e)$ . . . . .	62
4.3. El potencial efectivo de las interacciones neutrino-neutrino. . . . .	64
4.4. Cálculo de la frecuencia de oscilación sincronizada. . . . .	67
4.5. Resultados y graficación. . . . .	71
<b>5. Conclusiones y consideraciones finales.</b>	<b>73</b>
<b>A. El Hamiltoniano en la base de sabores.</b>	<b>75</b>
<b>B. Demostración de las ecuaciones de movimiento.</b>	<b>77</b>
<b>C. Teoremas de trazas y propiedades de las matrices <math>\gamma</math>.</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción.

Los fenómenos de mezcla entre estados cuánticos están entre las aplicaciones fundamentales de la mecánica cuántica. El estudio de estos fenómenos aún dista de su total comprensión y quedan todavía varios aspectos de estos fenómenos que necesitan ser desarrollados y complementados. Un ejemplo de mezcla de estados lo podemos dar mediante la molécula de amoníaco. Esta molécula tiene un átomo de nitrógeno y tres átomos de hidrógeno de tal manera que los cuatro átomos conforman la molécula con forma de pirámide triangular, con los tres átomos de hidrógeno en la base, uno en cada uno de los vértices, y el de nitrógeno en el cuarto vértice (ver por ejemplo el libro de Feynman de lecturas de Física vol. III [1]). Sin considerar los detalles de los estados de los diferentes electrones y del núcleo, etc., el problema de describir los estados de la molécula de amoníaco se puede simplificar a un sistema con sólo dos estados, uno en el cual el átomo del nitrógeno puede estar en un lado del plano formado por los tres átomos de hidrógeno, digamos  $|1\rangle$ , y otro, digamos  $|2\rangle$ , en el cual el átomo de nitrógeno está del otro lado del plano. Debemos tomar en cuenta que los estados cambian en el tiempo. En la Fig. 1.1 se muestran los dos estados de la molécula de amoníaco.

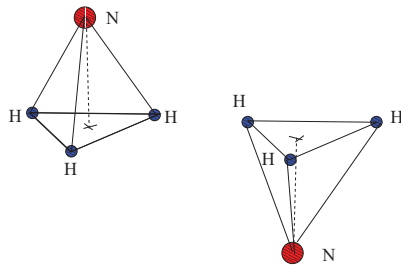


Figura 1.1: Los dos estados de la molécula de amoníaco.

Estos estados los podemos tomar como una base para analizar la evolución de la molécula de amoníaco, ésto es, cualquier otro estado  $|\psi\rangle$  del sistema se puede expresar como una combinación lineal de los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . Si el operador Hamiltoniano correspondiente es diagonal, entonces sus valores propios corresponden a las energías asociadas con uno y otro estado. Sin embargo, si el Hamiltoniano es no-diagonal, entonces la evolución de un estado inicialmente preparado será una combinación lineal de los estados base  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . Los términos que hacen que el

operador Hamiltoniano no sea diagonal pueden ser debido a diferentes razones, por ejemplo, a una interacción con un agente externo como es el caso de la molécula inmersa en un campo eléctrico, que puede estar variando en el tiempo. En particular, si la dependencia temporal en los términos no-diagonales es del tipo armónico, entonces el estado del sistema estará oscilando en el tiempo entre los estados base. Este tipo de fenómeno, justo como la molécula de amoníaco, será tratado con más detalle posteriormente. Éste es un ejemplo de un sistema en el que su estado es una mezcla (combinación lineal) de estados base. Otro ejemplo de sistema de dos niveles es la precesión de sistemas de espín  $1/2$  en campos magnéticos externos, o la oscilación del kaón neutro  $K^0 - \bar{K}^0$ .

La existencia del neutrino fue originalmente propuesta por Pauli en 1930 con el fin de resolver la controversia de la conservación de la energía en el decaimiento beta, donde predijo que su masa debería ser muy pequeña o igual a cero, y su existencia fue comprobada hasta 1956 con los experimentos de Cowan y Reines [2]. Hoy se sabe que existen tres tipos diferentes de neutrinos (a saber, neutrino del electrón, muón y del tau).

Los neutrinos junto con los electrones, muones, y los seis diferentes quarks forman la materia. Los neutrinos han sido hasta hoy una de las partículas más enigmáticas de la materia debido a que interactúan muy débilmente y por lo tanto son muy “escurridizos” y difíciles de detectar. Sin embargo, ésto no ha representado una traba insalvable para la pericia humana, ya que se han construido sendas máquinas para detectarlos.

La oscilación (sincronizada) de neutrinos, que es objeto de estudio de este trabajo, es otro ejemplo de mezcla de estados y ha sido ampliamente tratado en el contexto de los neutrinos solares [3]. La mezcla de neutrinos se debe a que al menos uno de los neutrinos es masivo, ésto ya ha quedado de manifiesto con los resultados del Superkamiokande. Cabe señalar que dentro del contexto del modelo estándar de la partículas fundamentales, los neutrinos son tomados como partículas sin masa, lo que indica que el modelo estándar en su forma actual necesita ser corregido para ser consistente con neutrinos masivos [4].

La mezcla de estados se lleva a cabo a través de la función de onda, de manera similar al tratamiento en mecánica cuántica no-relativista. No es claro cómo tratar los procesos de mezcla de decaimiento donde intervienen neutrinos que son generados en el proceso, ésto ha llevado a un tratamiento de mezcla de estados en términos de campos cuantizados, el cual ha sido recientemente desarrollado por Blasone y Vitiello [5], donde establecen la mezcla en términos de un operador unitario. En esta tesis se sigue el método menos formal y más intuitivo de recurrir a la función de onda y en esos términos establecer la oscilación de neutrinos.

La materia afecta a la propagación de neutrinos. Este hecho ha quedado de manifiesto en el efecto de resonancia llamado efecto MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein) [6]. Con este efecto la oscilación de neutrinos se puede alterar de una forma considerable; para ciertos valores de masas de neutrinos y ángulos de mezcla, los neutrinos del electrón generados en el núcleo del sol pueden tener una conversión resonante, emergiendo éstos del sol como neutrinos del muón y alterar la medición del flujo de neutrinos en la tierra. Los neutrinos en el universo temprano o los neutrinos que se producen en una estrella de neutrones llegan a constituir un gas muy denso de neutrinos, de tal forma que las interacciones entre ellos mismos debe ser tomada en cuenta; tarea que no es simple. La oscilación de un neutrino en particular, el cual llamamos “*neutrino prueba*”, se afecta por la presencia de los otros neutrinos del electrón y del muón que forman parte del medio, más aún, si se conoce la densidad del medio es directo conocer los efectos del medio sobre la oscilación. Sin embargo, todos los neutrinos están oscilando y no es simple asignar una cierta

densidad de neutrinos de un tipo. Las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del sistema son no lineales y complicadas de resolver aún de forma numérica [7].

Cuando la densidad de neutrinos es suficientemente grande puede ocurrir un fenómeno interesante, en el cual, una gran parte de los neutrinos en el gas puede oscilar de una forma como si fueran un todo (sincronizada). Este tipo de fenómeno puede ser explicado en términos similares al problema de la precesión del espín en un campo magnético [8]. Éste es el objetivo de esta tesis, dar una explicación simple de la oscilación sincronizada de neutrinos en un medio mediante el mecanismo de la precesión del espín.

La tesis está organizada como sigue:

- En el *capítulo 2* se revisa la teoría necesaria para la comprensión y la solución del fenómeno que estamos tratando. Se obtienen también algunos resultados que serán utilizados en capítulos posteriores. De este modo, daremos una breve descripción, a modo de introducción, de los leptones y sus interacciones; repasaremos brevemente la ecuación de Dirac y sus soluciones; así como el modelo electrodébil de las interacciones del modelo estándar y algunas de sus características que nos serán útiles.
- El *capítulo 3* abordará el problema de los dos estados o dos niveles y cómo lo utilizamos para el análisis de la oscilación de los neutrinos. Obtendremos, además, en este capítulo, la función de probabilidad de que un neutrino prueba permanezca siendo del sabor original que tenía al tiempo cero o que haya cambiado de sabor. Ésto último, en las condiciones del vacío.
- El fenómeno de la oscilación sincronizada de neutrinos será explicado en el *capítulo 4*. En este capítulo se llevan a cabo los cálculos más importantes y que nos llevan a los resultados o predicciones que contiene este modelo.
- El *capítulo 5* mostrará los resultados y conclusiones que obtuvimos después del desarrollo de nuestro modelo y del análisis de sus predicciones.
- Adicionalmente, se anexan algunos apéndices donde se realizan detalladamente algunos de los cálculos realizados en la tesis, ya que no se quiso molestar al lector con los detalles, dejando a la vista sólo el resultado que nos interesaba.





## Capítulo 2

# Modelo electrodébil de las interacciones.

Desde tiempos muy antiguos el hombre ha tratado de contestar a la pregunta: ¿de qué están hechas las cosas? Tal pregunta ha tenido diversas respuestas a lo largo de la historia, desde el modelo de Anaxímenes de Mileto que proponía que todo está compuesto de la mezcla de cuatro “*elementos*”: aire, fuego, tierra y agua; posteriormente Aristóteles añadiría una “*quintaesencia*”; hasta la llegada de la teoría atómica moderna iniciada por John Dalton en 1808 y que explicaba que las sustancias de la química estaban formadas por la combinación de *átomos* de elementos; éstos últimos fueron clasificados por Mendeleiev en la “*tabla periódica*”. A fines del siglo XIX se sabía que la materia estaba formada por átomos.

A principios del siglo XX surgen nuevas concepciones sobre lo que consideramos los constituyentes fundamentales de la materia. Los experimentos revelan la divisibilidad del átomo, y después de los experimentos de Rutherford en 1911, se sabe que el átomo está formado por un núcleo denso y una nube de electrones orbitando alrededor del núcleo. Posteriormente, se encontró que el núcleo atómico también contenía una estructura interna y en 1919 se descubre el protón y en 1932, el neutrón.

Wolfgang Pauli postula en 1930 la existencia de una cuarta partícula, *el neutrino*, con la intención de resolver la controversia de la conservación de la energía en el decaimiento beta. Entonces, a mediados de los años 30’s, estas cuatro partículas describían todos los fenómenos atómicos y nucleares conocidos y eran consideradas los constituyentes últimos de la materia.

Experimentos posteriores en los aceleradores de partículas mostraron que los protones y los neutrones sólo son dos de toda una gran familia de partículas llamadas *hadrones*, de las cuales en la actualidad se conocen más de 100. Los hadrones, al igual que los átomos, se pueden clasificar en grupos con características similares y esto dio lugar a pensar que entonces estas partículas no podían ser el constituyente último en la materia. A finales de los 60’s aparece el modelo de los *quarks* para dar cuenta de la cantidad de hadrones conocidos y de sus propiedades. Los hadrones se consideran entonces como combinaciones de dos o tres quarks.

De este modo, los dos bloques fundamentales de la materia son los *leptones*, que incluyen al electrón y al neutrino, y los quarks. Los experimentos de dispersión muestran que son más pequeños que  $10^{-18}$  m y se cree que realmente sean partículas puntuales. En comparación, un protón tiene un tamaño de  $\approx 10^{-15}$  m. Los leptones y los quarks tienen espín  $1/2$ , son fermiones y al contrario de los átomos, núcleos y hadrones, no se han observado estados excitados de quarks o

leptones. Aparentemente, los quarks y los leptones parecen ser los constituyentes fundamentales de la materia.

Esta tesis de licenciatura se centra en explorar e investigar acerca de una de las partículas fundamentales más interesantes (a opinión del autor) y escurridizas, los neutrinos, y acerca de un fenómeno importante y todavía poco entendido en la física de partículas, la oscilación de neutrinos. Iniciemos con una descripción más detallada de los leptones y las interacciones que experimentan.

Gran parte del material expuesto en este capítulo se encuentra en textos de mecánica cuántica, teoría de campos y física de partículas, que cubren los temas tratados aquí. En particular, en esta tesis utilizamos como referencia los textos [9] y [10] mostrados en la bibliografía al final de la tesis.

## 2.1. Leptones y las interacciones electromagnética y débil.

### 2.1.1. Leptones.

Los leptones son fermiones con espín 1/2 los cuales interactúan a través de las interacciones electromagnética y débil, pero no a través de la interacción fuerte. Los leptones conocidos aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. Leptones conocidos.

	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Vida media (s)	Carga
Electrón e <sup>-</sup>	0.5110	$\infty$	-e
Neutrino de electrón $\nu_e$	$< 15 \times 10^{-6}$	$\dot{\iota}\infty?$	0
Muón $\mu^-$	105.658	$2.197 \times 10^{-6}$	-e
Neutrino de muón $\nu_\mu$	$< 0.17$	$\dot{\iota}\infty?$	0
Tau $\tau^-$	1777	$290 \times 10^{-15}$	-e
Neutrino de tau $\nu_\tau$	$< 18.2$	$\dot{\iota}\infty?$	0

Los leptones eléctricamente cargados todos tienen momentos magnéticos de magnitud  $\approx e\hbar/2(\text{masa})$  antialineados con sus espines.

De estos leptones cargados, sólo el familiar electrón es estable. Los electrones son partículas sin estructura que son descritos por la ecuación de onda relativista de Dirac. Según veremos en la Secc. 2.4, esta ecuación explica el espín y el momento magnético del electrón y tiene la notable propiedad de que predice la existencia de las antipartículas: partículas con la misma masa y espín, pero carga eléctrica y momento magnético opuesto al de la partícula. La antipartícula del electrón es llamada *positrón*. Los positrones fueron identificados experimentalmente por Anderson en 1932 poco después de su predicción teórica.

Como los leptones no interactúan mediante la fuerza fuerte, los electrones y los positrones interactúan principalmente a través del campo electromagnético. Un positrón eventualmente se aniquilará con un electrón, produciendo generalmente dos o tres fotones, así que toda la energía de los leptones aparece como radiación electromagnética. Escribimos estos procesos como

$$\begin{aligned} e^- + e^+ &\rightarrow 2\gamma, \\ e^- + e^+ &\rightarrow 3\gamma. \end{aligned}$$

La aniquilación con la producción de un sólo fotón no está permitida por la conservación de la energía y el momento.

El proceso inverso de *producción de pares* por fotones, también es posible, y la producción de pares mediante un solo fotón es posible si se encuentra presente otra partícula (cargada) que se lleve el momento. La electrodinámica cuántica, basada en las ecuaciones de Dirac y Maxwell describe todos los procesos que involucran electrones, positrones y fotones con un alto grado de precisión. En este trabajo revisaremos la electrodinámica cuántica brevemente como una base para introducir las interacciones débiles.

Es un hecho curioso que la naturaleza nos provea también con el *muón*  $\mu^-$  y con el *tau*  $\tau^-$  eléctricamente cargados y con sus antipartículas  $\mu^+$  y  $\tau^+$ . Aparte de ser más masivos y tener un tiempo de vida finito, los muones y taus parecen ser simples copias del electrón, y como el electrón, son descritos adecuadamente por la ecuación de Dirac.

Los leptones restantes son los *neutrinos*  $\nu$  y sus correspondientes *antineutrinos* denotados como  $\bar{\nu}$ . Evidencia experimental (Tabla 1), sugiere que la masa del neutrino es muy pequeña comparada con la masa de su compañero leptón cargado. Si la masa del neutrino fuese cero, podría viajar, como el fotón, a la velocidad de la luz.

Es extremadamente difícil y caro llevar a cabo experimentos con neutrinos, pero existe evidencia experimental que nos fuerza a pensar que el electrón, el muón y el tau tienen diferentes neutrinos asociados a ellos:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ .

### 2.1.2. La interacción electromagnética.

El campo electromagnético es descrito convenientemente por un potencial vectorial  $\vec{A}$  y un potencial escalar  $\phi$ . Por simplicidad, consideremos solamente el potencial escalar  $\phi(\vec{r}, t)$ . Utilizando las ecuaciones de Maxwell, éste debería ser tal que satisfaga la ecuación de onda

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Aquí,  $\rho(\vec{r}, t)$  es la densidad de carga eléctrica debida a las partículas cargadas y  $c$  es la velocidad de la luz.

En las regiones donde  $\rho = 0$ , la ecuación (2.1) tiene soluciones en la forma de ondas que se propagan, por ejemplo la onda plana

$$\phi(\vec{r}, t) = (\text{constante}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.2)$$

Ésta última satisface

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

siendo

$$\omega^2 = c^2 k^2. \quad (2.4)$$

Por ende, la velocidad de la onda es  $c$ , como cabría esperarse. En la teoría cuántica, a diferencia de la teoría clásica, la energía total y el momento de la onda están cuantizados, y solamente pueden ser múltiplos enteros del cuanto básico de energía y del de momento dados por las relaciones de de Broglie:

$$E = \hbar \omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (2.5)$$

Tal cuanto de radiación es llamado *fotón*. Una onda macroscópica puede ser considerada como una agrupación de fotones, y podemos considerar los fotones como partículas cada una con energía  $E$  y momento  $\vec{p}$ .

Usando (2.4) y (2.5),  $E$  y  $\vec{p}$  están relacionadas por

$$E^2 = p^2 c^2. \quad (2.6)$$

Para una partícula de masa  $m$ , la ecuación de Einstein es

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.7)$$

Inferimos, por lo tanto que el fotón es una partícula de masa cero.

Un segundo tipo importante de solución de (2.1) existe cuando hay partículas cargadas presentes. Si éstas están moviéndose lentamente comparadas con la velocidad de la luz, tal que el término  $\partial^2 \phi / (c^2 \partial t^2)$  pueda despreciarse, la solución es aproximadamente el potencial de Coulomb de la distribución de carga. Para una partícula con densidad de carga  $\rho_1$  podemos tomar

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_1(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (2.8)$$

Otra partícula cargada con densidad de carga  $\rho_2$  tendrá una energía potencial dada por

$$U_{12} = \int \rho_2(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_1(\vec{r}', t) \rho_2(\vec{r}, t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}'. \quad (2.9)$$

La energía potencial eléctrica es la responsable de la reunión de electrones en átomos y moléculas. Si se incluyen los efectos magnéticos debido al movimiento de las cargas, la ecuación (2.9) se modifica como

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_1' \rho_2 + (1/c^2) \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}', \quad (2.10)$$

donde  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  es la corriente asociada con la distribución de carga, la cual tiene velocidad  $\vec{v}(\vec{r})$ . Así, la contribución magnética a la energía es de orden relativo  $v^2/c^2$ .

La interacción electromagnética también da lugar a la dispersión de las partículas cargadas. Por ejemplo, para dos electrones aproximándose uno a otro, la interacción genera una mutua repulsión la cual conduce a una transferencia de momento entre las partículas. El proceso puede ser representado por un diagrama tal como la Fig. 2.1. En la electrodinámica cuántica, estos diagramas, inventados por Feynman, tienen una precisa interpretación técnica en la teoría. La interpretación de los diagramas de Feynman será de vital importancia para la solución del problema planteado en esta tesis, por lo que describiremos con cierto detalle la obtención e interpretación matemática de estos diagramas en la Secc. 2.5. La dispersión de dos electrones puede ser pensada como causada por la emisión de un fotón “virtual” por un electrón y la absorción del mismo por el otro. En un proceso virtual el fotón realmente no aparece ante el observador, aunque aparece en el formalismo matemático que describe el proceso.

### 2.1.3. La interacción débil.

Existen tres campos de interacción débil, asociadas con las partículas  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ . Cada una, como el campo electromagnético, es descrito por un potencial vectorial y uno escalar. Sin

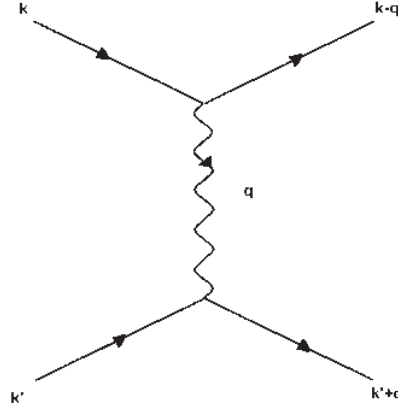


Figura 2.1: La dispersión de dos electrones con momentos  $\hbar\vec{k}$  y  $\hbar\vec{k}'$  mediante el intercambio de un fotón virtual con momento  $\hbar\vec{q}$ . El tiempo corre de izquierda a derecha en estos diagramas. (En principio, el intercambio de una partícula Z también contribuye a la dispersión electrón-electrón, pero el corto rango de alcance y la debilidad de la interacción débil hace esta contribución casi completamente despreciable: los electrones son, en todo caso, apartados por la repulsión de Coulomb inducida por el intercambio del fotón.)

embargo, los bosones asociados con los campos débiles, todos tienen masa, y los bosones  $W^+$  y  $W^-$  están eléctricamente cargados. El bosón Z es neutro y el más parecido al fotón pero tiene una masa

$$m_Z = (91.187 \pm 0.007) \text{ GeV}/c^2 \quad \sim \quad 100 \text{ veces la masa del protón},$$

la cual es muy grande para los estándares en física nuclear. Las interacciones entre leptones y los campos electromagnético y débil fueron unificados en la teoría “*electrodébil*” por Weinberg y Salam. La existencia de los bosones Z y  $W^\pm$  fue predicha por la teoría, y la teoría a la par con datos experimentales de dispersión neutrino-nuclear también sugirieron valores para las masas. Estas predicciones fueron confirmadas por experimentos llevados a cabo en el CERN en 1983.

La ecuación de onda satisfecha por el potencial escalar  $\phi_Z$  asociada con el bosón Z es una generalización de (2.1) e incluye un término que involucra a  $m_Z$ :

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \right] \phi_Z(\vec{r}, t) = -\frac{\rho_Z(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (2.11)$$

donde  $\rho_Z$  es la densidad de carga débil neutral. Existe una cercana analogía, pero no exacta, entre la densidad de carga débil y la densidad de carga eléctrica, y las partículas tienen carga débil de un modo similar a cuando tienen carga eléctrica.

En el espacio vacío donde  $\rho_Z = 0$  existen soluciones de ondas planas de (2.11):

$$\phi_Z(\vec{r}, t) = (\text{constante}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2.12)$$

pero ahora para satisfacer la ecuación se requiere

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 (m_Z c / \hbar)^2, \quad (2.13)$$

y con las relaciones de de Broglie (2.5) para los cuantos de campo, obtenemos la relación de Einstein de energía-momento para el bosón Z:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_Z^2 c^4.$$

La solución estática de (2.11), la cual corresponde a un punto de carga débil unitaria situada en el origen es

$$\phi_Z(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \text{siendo} \quad \kappa = \frac{m_Z c}{\hbar}. \quad (2.14)$$

En puntos alejados del origen donde  $\nabla^2 \phi_Z - \kappa^2 \phi_Z = 0$ , ésta satisface la ecuación (2.11), como se puede verificar fácilmente por sustitución utilizando la fórmula  $\nabla^2 \phi_Z = (1/r) d^2(r\phi_Z)/dr^2$ . Cerca del origen la solución (2.14) se comporta como el correspondiente potencial de Coulomb  $1/(4\pi\epsilon_0 r)$  de un punto unitario de carga eléctrica, y así tiene el comportamiento correcto de una fuente puntual. La generalización de (2.11) para una distribución de carga débil da la solución cuasiestática

$$\phi_Z(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Z(\vec{r}', t) e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (2.15)$$

El factor exponencial en la integral, efectivamente se desvanece para  $|\vec{r}-\vec{r}'|$  más grande que unas pocas veces  $\kappa^{-1} = \hbar/m_Z c$  y

$$\hbar/m_Z c \approx 2 \times 10^{-3} \text{ fm.}$$

Ésta es una distancia muy pequeña comparada con el tamaño del núcleo. Por lo tanto, en la integral de (2.15) el factor  $\rho_Z$  está variando lentamente en el rango de la exponencial y podría sacarse fuera de la integral (la cual entonces, se vuelve elemental):

$$\begin{aligned} \phi_Z(\vec{r}, t) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_Z(\vec{r}, t) \int \frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_Z(\vec{r}, t) \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa R}}{R} 4\pi R^2 dR \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\hbar}{m_Z c} \right)^2 \rho_Z(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

La energía potencial entre dos partículas con el campo escalar  $\phi_Z$  es, por analogía con (2.9),

$$U_{12}^Z = \int \rho_{Z2}(\vec{r}, t) \phi_{Z1}(\vec{r}, t) d^3\vec{r}' = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\hbar}{m_Z c} \right)^2 \int \rho_{Z1}(\vec{r}, t) \rho_{Z2}(\vec{r}, t) d^3\vec{r}.$$

También existe una contribución de la parte vectorial del campo, análogo a la contribución magnética en (2.10), de la forma

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left( \frac{\hbar}{m_Z c} \right)^2 \int \vec{j}_{Z1}(\vec{r}, t) \vec{j}_{Z2}(\vec{r}, t) d^3\vec{r},$$

donde  $\vec{j}_Z$  es la densidad de corriente débil.

Las consecuencias físicas de estas expresiones son bastante diferentes de las consecuencias físicas de la interacción electromagnética.  $U_{12}^Z$  es muy restringida por el gran factor de masa en

el denominador, y ésto es por lo cual se tiene la ‘debilidad’ de la interacción débil. También la interacción a bajas energías, aparece como una ‘interacción de contacto’, teniendo un rango efectivo cero. Ahondaremos en este punto en la Secc. 2.5.

Los bosones de campo eléctricamente cargados  $W^+$  y  $W^-$  dan lugar a las más importantes interacciones débiles, y en particular al decaimiento  $\beta$ . Éstos obedecen ecuaciones similares a aquellas del campo  $Z$ , pero las masas de las partículas son un poco menores;

$$m_{W^+} = m_{W^-} = (80.41 \pm 0.10) \text{ GeV}/c^2.$$

Trataremos con más detalle y profundidad, la forma y las ecuaciones que rigen las interacciones electromagnética y débil (electrodébil) en la Secc. 2.5, después de estudiar la ecuación de Dirac (Secc. 2.4) que necesitamos para incluirla en nuestras ecuaciones. Hemos querido aquí, sin embargo, dar una idea introductoria sobre las interacciones que experimentan los leptones.

#### 2.1.4. Inestabilidad de los leptones pesados: Decaimiento del muón.

Los bosones  $W^+$  y  $W^-$  conducen al proceso llamado decaimiento  $\beta$ , el cual ni los fotones, ni los bosones  $Z$  pueden inducir. En este apartado ilustraremos lo anterior con el ejemplo del decaimiento  $\beta$  del muón. El proceso de decaimiento  $\beta$  también se puede llevar a cabo en hadrones.

El muón decae a un neutrino de muón, junto con un electrón y un antineutrino de electrón:

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Las partículas  $W$  juegan el papel de mediadores en este decaimiento a través de dos procesos virtuales ilustrados en la Fig. 2.2. De nuevo, en un proceso virtual los bosones  $W$  realmente no aparecen ante el observador.

Los bosones  $W$  pueden, en principio, producir cualquier leptón cargado y su antineutrino o un antileptón y su neutrino, pero sobre todo, la energía debe ser conservada. Por consiguiente, en el caso del decaimiento del muón, el leptón cargado debe ser un electrón. Un decaimiento de tau puede producir un muón o un electrón (también es lo suficientemente masivo para decaer incluso a algunos hadrones).

Es de fundamental significado el hecho de que la carga eléctrica se conserva en cada etapa del decaimiento. También se cree ser cierto para todas las interacciones, que a un alto grado de aproximación, un simple leptón sólo puede cambiar en otro del mismo tipo; y un leptón y un antileptón del mismo tipo, sólo pueden ser creados o destruidos juntos. Existe, por lo tanto, una ley de conservación, la ‘*conservación del número leptónico*’ (los antileptones se cuentan como un número negativo) para cada tipo de leptón por separado. La evidencia experimental del rompimiento de esta ley será discutido en el capítulo 3 al estudiar la oscilación de los neutrinos.

#### 2.1.5. Violación de la paridad en el decaimiento del muón.

Se ha observado experimentalmente que en el decaimiento de un muón negativo, el momento del electrón  $\vec{p}_e$  es fuertemente desviado para estar en la dirección opuesta a la del espín del muón  $\vec{s}_\mu$ . Para explicar la implicación de este hecho en la violación de la paridad, debemos primero hacer notar que existen dos tipos de vectores.

Bajo la reflexión en el origen, el vector de posición  $\vec{r}$  de una partícula y su momento  $\vec{p}$  se transforman:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} \quad \text{y} \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{p}' = m \frac{-d\vec{r}}{dt} = -\vec{p}, \quad (2.17)$$



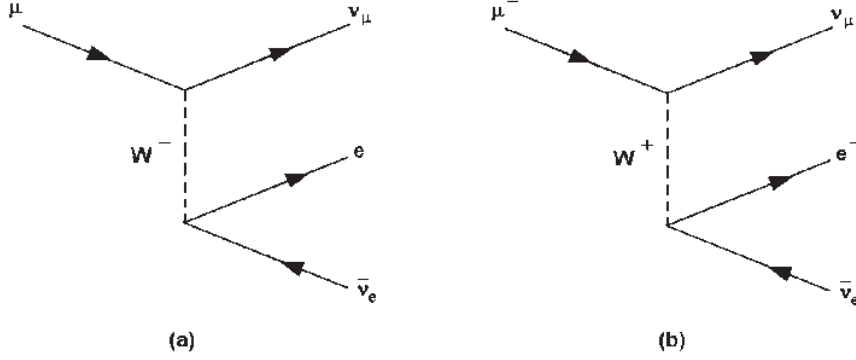


Figura 2.2: El decaimiento  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ . En (a) el muón se transforma en su neutrino y en un bosón ‘virtual’  $W^-$ , el cual a su vez decae en un electrón y en su antineutrino. En (b) un ‘virtual’  $W^+$  es creado del vacío con el electrón y el antineutrino del electrón. El  $W^+$  entonces transforma el muón en un neutrino del muón. En estos diagramas, la dirección de las flechas en las líneas de los fermiones siguen la dirección del número fermiónico. (Las flechas en las líneas de las antipartículas corren hacia atrás en el tiempo por esta razón.)

$\vec{r}$  y  $\vec{p}$  son ambos *vectores verdaderos*.

El momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  posee muchos de los atributos de un vector, pero bajo la reflexión

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = +\vec{L}.$$

Entonces  $\vec{L}$  no tiene la propiedad de reflexión (2.17) de los vectores verdaderos  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ . Se le llama *vector axial* o *pseudovector*. El momento angular intrínseco  $\vec{s}$  de una partícula se comporta como un vector axial.

Regresando al decaimiento del muón, en el sistema de coordenadas reflejado,  $\vec{p}_e \rightarrow -\vec{p}_e$ ,  $\vec{s}_\mu \rightarrow +\vec{s}_\mu$ , ¡y tendríamos que decir que el momento es desviado para quedar en la misma dirección que el espín del muón! Parece que las ecuaciones de la teoría sólo son válidas en el sistema dextrógiro (derecho) original, y tendrían que ser reescritas para ajustarse con el sistema levógiro (izquierdo) reflejado. Como se ve, las leyes no son invariantes bajo reflexión y por lo tanto, no se conserva la paridad en el decaimiento del muón. Más generalmente, la paridad no se conserva en ningún proceso que involucre los campos de interacción débil.

La inequivalencia entre la derecha y la izquierda es más extrema en el caso de los neutrinos. Los neutrinos producidos en un proceso de interacción débil siempre son “*neutrinos izquierdos*”, con sus espines antiparalelos a su dirección de movimiento, y los antineutrinos siempre son “*derechos*” (Fig. 2.3). En la Secc. 2.4 daremos una definición formal de lo que entendemos por neutrinos izquierdos o derechos. No tenemos evidencia de que neutrinos derechos (o antineutrinos izquierdos) existan.

La falla en la conservación de la paridad podría expresarse de manera ligeramente diferente. La reflexión en el origen  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$  es equivalente a una reflexión especular en el plano, seguido por una rotación en un ángulo  $\pi$  alrededor de un eje perpendicular al plano (ejemplo, el plano x-y

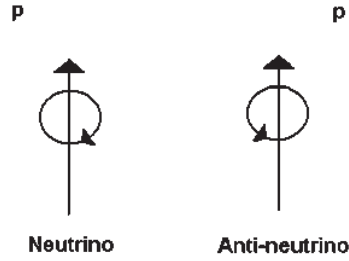


Figura 2.3: La relación entre el momento  $\vec{p}$  y el espín para un neutrino y un antineutrino.

y el eje  $z$ ). No hay evidencia de que las leyes de la física fallen bajo rotaciones, entonces el fallo está en la reflexión especular: la suposición de que la imagen en el espejo de un proceso físico es también un posible proceso físico está equivocada, mientras la interacción débil esté involucrada (ver Fig. 2.4).

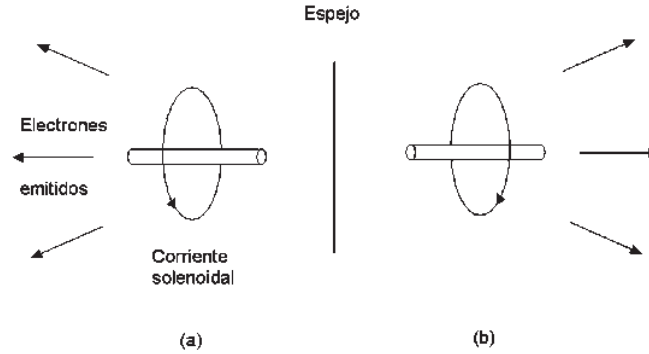


Figura 2.4: Representación esquemática de un experimento de decaimiento del  $^{60}\text{Co}$  en el espacio real (a), y la imagen especular del experimento (b). En ambos, (a) y (b), el espín del núcleo de cobalto apunta hacia la derecha; el espín es un pseudovector, el cual no cambia la dirección bajo esta reflexión. La muestra está polarizada por un campo magnético producido por una corriente fluyendo en la dirección indicada. La situación del inciso (b) no se observa en la naturaleza.

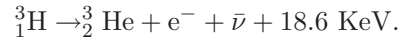
## 2.2. Neutrinos.

Los neutrinos son partículas elusivas; por muchos años su existencia fue solamente inferida por su participación en el decaimiento  $\beta$ . Sin embargo, los neutrinos son muy importantes en astrofísica, y en la formación de los núcleos pesados en las supernovas. Además del decaimiento

$\beta$ , se han estado acumulando otros resultados experimentales sobre los neutrinos.

En las teorías estándar unificadas, se asume que las masas de los neutrinos es cero. Claramente es importante probar experimentalmente este aserto. Una masa finita del neutrino, de incluso unos pocos  $\text{eV}/c^2$  tendrían consecuencias significativas, por ejemplo, en cosmología. El rastro de una masa finita del neutrino aparecería en el decaimiento  $\beta$  en la curva del espectro de energía del electrón cerca del máximo de energía. Esta curva depende sensiblemente de si  $m_\nu = 0$  o  $m_\nu \neq 0$ . La diferencia es más clara en una *gráfica de Kurie*, ver Fig. 2.5. Si  $m_\nu = 0$ , esta gráfica es de una línea recta  $(E_0 - E_e)$  que pasa a través de  $E_0$ ; si  $m_\nu \neq 0$ , la línea deja de ser lineal y la masa del neutrino puede ser inferida del comportamiento de  $N$ , número de electrones con energía  $E$ .

Un decaimiento muy estudiado en este contexto es el del tritio



Las bajas energías cinéticas del electrón en este decaimiento son experimentalmente ventajosas. La Fig. 2.5 muestra los datos experimentales y existe una notable coincidencia entre los datos y la curva teórica del espectro. Una gráfica de Kurie de los datos cerca de  $E_e = E_0$  también se muestra. La dificultad del experimento es evidente: la conclusión es que  $m_\nu < 60 \text{ eV}/c^2$ . Experimentos más recientes con tritio sugieren que, con mucha probabilidad

$$m_\nu < 4.35 \text{ eV}/c^2.$$

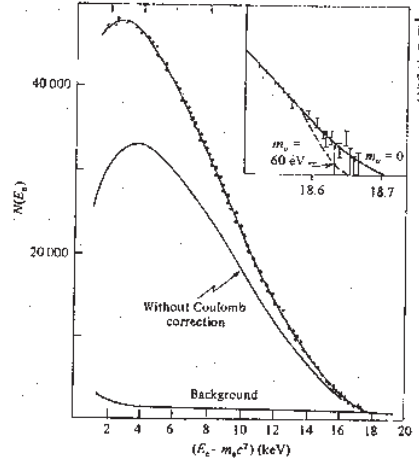


Figura 2.5: Espectro de energía del electrón proveniente del decaimiento del tritio. Los puntos experimentales dan el número de electrones  $N(E_e)$  observados en pequeñas ‘regiones’ de energía provenientes de un gran número de decaimientos. El espectro se ajusta bien a la curva teórica. También se muestra para comparación la curva teórica sin la corrección de Coulomb. El acercamiento muestra una gráfica de Kurie del espectro cerca de la máxima energía del electrón.

No existe evidencia directa contundente, mediante experimentos de decaimiento beta realizados en la tierra de que el neutrino del electrón tenga masa. Tampoco existe evidencia directa de

que los neutrinos del muón o tau la tengan. Sin embargo, con los resultados de las mediciones del flujo de neutrinos provenientes del sol sugieren que al menos uno de los diferentes tipos de neutrinos tiene masa y que da origen al fenómeno de oscilación de neutrinos.

### 2.3. Unidades naturales.

Introducimos ahora las unidades de medición utilizadas en este trabajo y en la física de partículas en general. Las dos constantes fundamentales de la mecánica cuántica relativista son la *constante de Plank*,  $h$ , y la velocidad de la luz en el vacío  $c$ :

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s},$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{m/s}.$$

Se vuelve conveniente utilizar un sistema de unidades en el cual  $\hbar$  es una unidad de acción y  $c$  una unidad de velocidad. Utilizando unidades con  $\hbar = c = 1$ , se vuelve innecesario escribir  $\hbar$  y  $c$  explícitamente en las fórmulas, ahorrándonos tiempo y esfuerzo. Siempre se puede emplear el análisis dimensional para regresar a las unidades de medición adecuadas. Según lo anterior, es común en la física de partículas, hablar de masa ( $m$ ), momento ( $mc$ ) y energía ( $mc^2$ ) todo en términos de GeV (unidades de energía), y expresar longitudes ( $\hbar/mc$ ) y tiempo en unidades de  $\text{GeV}^{-1}$ .

Por otro lado, las partículas elementales son muy pequeñas, así que para nuestros propósitos las unidades mecánicas normales (kilogramos, Joules, metros) son inconvenientemente grandes. En la física atómica se introduce el *electrón-Volt*, la energía adquirida por un electrón cuando es acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 Volt:  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{Joules}$ . Para la física de partículas esta unidad es demasiado pequeña; las energías típicas que se emplean son MeV ( $10^6 \text{ eV}$ ), GeV ( $10^9 \text{ eV}$ ) o incluso TeV ( $10^{12} \text{ eV}$ ). Los momentos son medidos en  $\text{MeV}/c$  y las masas en  $\text{MeV}/c^2$ . Así, el protón pesa  $938 \text{ MeV}/c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ .

La siguiente tabla muestra la conexión entre GeV y las unidades del SI.

Tabla 2. Unidades mecánicas del SI y la carga fundamental en términos de las unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ).

Factor de conversión	Unidades $c = \hbar = 1$	Dimensión real
$1 \text{ kg} = 5.61 \times 10^{26} \text{GeV}$	GeV	$\text{GeV}/c^2$
$1 \text{ m} = 5.07 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1}$	$\text{GeV}^{-1}$	$\frac{\hbar c}{\text{GeV}}$
$1 \text{ s} = 1.52 \times 10^{24} \text{GeV}^{-1}$	$\text{GeV}^{-1}$	$\frac{\hbar}{\text{GeV}}$
$e = \sqrt{4\pi\alpha}$	—	$(\hbar c)^{1/2}$

### 2.4. La ecuación de Dirac.

Pasamos a continuación a revisar la ecuación que describe las partículas objetivo de este trabajo. Ésta es una ecuación relativista con soluciones que tienen una estructura de dos componentes para describir partículas y antipartículas y que están descritas mediante la estadística de Fermi.

### 2.4.1. La ecuación de Dirac.

Por algún tiempo se pensó que la ecuación de Klein-Gordon era la única generalización relativista de la ecuación de Schrödinger, hasta que Dirac propuso una alternativa. Su objetivo era escribir una ecuación que, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon, fuera lineal en  $\partial/\partial t$ . Para que fuera covariante, también debería ser lineal en  $\vec{\nabla}$  y entonces tendría la forma general

$$H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m)\psi. \quad (2.18)$$

Los cuatro coeficientes  $\beta$  y  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) están determinados por el requisito de que una partícula libre debe satisfacer la relación relativista energía-momento

$$\frac{E^2}{c^2} - P^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad H^2\psi = (P^2 + m^2)\psi. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones (2.18) y (2.19) representan la ecuación de Dirac. Mostraremos que sus soluciones tienen una estructura suficientemente rica para describir a las partículas y antipartículas con espín 1/2. Veremos como (2.18) describe leptones (o quarks) con espín.

De (2.18), tenemos

$$H^2\psi = (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m)\psi = \underbrace{(\alpha_i^2 P_i^2)}_1 + \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) P_i P_j}_0 + \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) P_i m}_0 + \underbrace{\beta^2 m^2}_1 \psi,$$

donde sumamos sobre índices repetidos, con la condición  $i > j$  en el segundo término. Comparando con (2.19) vemos que

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  todos anticonmutan uno con otro,

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1. \quad (2.20)$$

Ya que los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta$  no conmutan, no pueden ser simples números y nos lleva a considerar matrices operando en una función de onda  $\psi$ , la cual es un vector columna multicomponente.

Las matrices de dimensionalidad más baja que satisfacen todos estos requisitos son de  $4 \times 4$ . La elección de las cuatro matrices  $(\vec{\alpha}, \beta)$  no es única. La representación Dirac-Pauli es la más frecuentemente utilizada:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

donde  $I$  denota la matriz identidad de  $2 \times 2$  y donde  $\vec{\sigma}$  son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Otra representación es la de Weyl:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

La mayoría de los resultados son independientes de la elección de la representación. Ciertamente, la física depende solamente de las propiedades (2.20). De hecho, sólo hasta que demos las soluciones explícitas de la ecuación de Dirac utilizaremos una representación particular. A menos que se diga otra cosa, escogeremos la representación de Dirac-Pauli (2.21).

Un vector columna  $\psi$  de cuatro componentes que satisface la ecuación de Dirac (2.18) se le llama un “*espinor de Dirac*”. Podríamos haber anticipado dos soluciones independientes (partículas y antipartículas), pero tenemos cuatro.

### 2.4.2. La forma covariante de la ecuación de Dirac. Las matrices $\gamma$ de Dirac.

Multiplicando la ecuación de Dirac (2.18) por  $\beta$  a la izquierda obtenemos

$$H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m)\psi \quad \Rightarrow \quad \beta H\psi = (\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta^2 m)\psi,$$

teniendo en cuenta que  $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\vec{P} \rightarrow -i\vec{\nabla}$  y  $\beta^2 = 1$ ,

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + m\psi,$$

la cual podría ser reescrita

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.24)$$

donde hemos introducido las cuatro matrices  $\gamma$  de Dirac,

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \vec{\alpha}). \quad (2.25)$$

La ecuación (2.24) se llama la “*forma covariante de la ecuación de Dirac*”. La ecuación de Dirac es en verdad cuatro ecuaciones diferenciales las cuales acoplan cuatro componentes de un simple vector columna  $\psi$ :

$$\sum_{k=1}^4 \left[ \sum_{\mu} i(\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m \delta_{jk} \right] \psi_k = 0.$$

Utilizando (2.20) y (2.25), es directo mostrar que las matrices  $\gamma$  de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Más aún, como  $\gamma^0 = \beta$ , tenemos

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = I, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{k\dagger} &= (\beta \alpha^k)^\dagger = \alpha^k \beta = -\gamma^k, \\ (\gamma^k)^2 &= \beta \alpha^k \beta \alpha^k = -I. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Note que los resultados de la conjugación hermítica pueden ser resumidos como  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ .

### 2.4.3. Corriente conservada y la ecuación adjunta.

Para obtener las corrientes, como tenemos ecuaciones donde intervienen matrices y no sólo funciones complejas, debemos considerar la ecuación hermitiana más que el complejo conjugado. La hermítica conjugada de la ecuación de Dirac,

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m\psi = 0 \quad (2.29)$$

donde  $k = 1, 2, 3$  es

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k) - m\psi^\dagger = 0. \quad (2.30)$$

Para regresar a la forma covariante, necesitamos eliminar el signo negativo de  $-\gamma^k$  mientras que el primer término queda sin cambio. Observemos que  $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$ , ésto se puede hacer multiplicando (2.30) por  $\gamma^0$  a la derecha,

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k) - m\psi^\dagger = 0 \quad \Rightarrow \quad -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k \gamma^0) - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0.$$

Introduciendo el espinor adjunto (fila)

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.31)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (\gamma^0 \gamma^k) + m\psi^\dagger \gamma^0 = 0 & \Rightarrow i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \gamma^0 + i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} (\gamma^k) + m\bar{\psi} = 0 \Rightarrow \\ i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. & \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ahora podemos derivar la ecuación de continuidad,  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , multiplicando (2.24) por la izquierda por  $\bar{\psi}$  y (2.32) por  $\psi$  a la derecha, finalmente sumamos los resultados

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 & \rightarrow i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 & \rightarrow i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + m\bar{\psi} \psi = 0 \\ i(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) = 0 & \Rightarrow \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = 0 \\ & \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \end{aligned}$$

De esta manera vemos que  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  satisface la ecuación de continuidad, lo cual sugiere que deberíamos identificar  $j^\mu$  con las densidades de probabilidad y de flujo,  $\rho$  y  $\vec{j}$ . La densidad de probabilidad

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \quad (2.33)$$

ahora es positiva definida. Sin embargo, debemos identificar el resultado anterior con la corriente de carga. Entonces insertamos la carga  $-e$  en  $j^\mu$ ,

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.34)$$

y desde ahora consideraremos  $j^\mu$  como la densidad de corriente electrónica (tetravector). La razón para introducir la carga negativa  $-e$  es que el electrón (más bien que el positrón) se considera como la partícula. Para la covarianza de la ecuación de continuidad  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , es necesario que  $j^\mu$  se transforme como un tetravector. Ésto último se puede probar, es decir, que usando las cuatro matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ , podemos formar un tetravector  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ .

#### 2.4.4. Espinores de la partícula libre.

Para una partícula libre podemos buscar eigensoluciones de la ecuación de Dirac, dependientes del tetramomento, que sean de la forma

$$\psi = u(\vec{p})e^{-ip \cdot x}, \quad (2.35)$$

donde  $u$  es un espinor de cuatro componentes independiente de  $\vec{x}$ . En la notación que estamos utilizando, al tener un vector como  $\vec{p}$  en la ecuación anterior, representa un vector tridimensional ordinario y cuando escribamos  $p \cdot x$  es el producto punto de dos tetravectores. Sustituyendo en (2.24) tenemos

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu [u(\vec{p})e^{-ip \cdot x}] - mu(\vec{p})e^{-ip \cdot x} &= 0, \\ i\gamma^\mu u(\vec{p})\partial_\mu e^{-ip \cdot x} - mu(\vec{p})e^{-ip \cdot x} &= 0. \end{aligned}$$

Sabiendo que  $p \cdot x = Et - p_x x - p_y y - p_z z$  y  $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ , tenemos

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu u(\vec{p})(-ip_\mu)e^{-ip \cdot x} - mu(\vec{p})e^{-ip \cdot x} &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

o, utilizando la notación abreviada  $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$  para un tetravector  $A_\mu$  cualquiera,

$$(\not{p} - m)u = 0. \quad (2.37)$$

Como estamos buscando eigenvectores de energía, es más fácil usar la forma original (2.18),

$$Hu = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u = Eu. \quad (2.38)$$

Existen cuatro soluciones independientes de esta ecuación, dos con  $E > 0$  y dos con  $E < 0$ . Lo anterior se verifica fácilmente en la representación de Pauli-Dirac de  $\vec{\alpha}$  y  $\beta$ . Primero, tomemos la partícula en reposo,  $\vec{p} = 0$ . Utilizando (2.21) tenemos

$$Hu = \beta mu = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u$$

con eigenvalores  $E = m, m, -m, -m$ , y eigenvectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Como se ha mencionado, el electrón, con carga  $-e$ , se considera como la partícula. Entonces las primeras dos soluciones describen un electrón con  $E > 0$ . Las soluciones para partículas con  $E < 0$  deben ser interpretadas como antipartículas (positrón) con  $E > 0$ .



Para  $\vec{p} \neq 0$ , (2.38) se convierte en, usando (2.21),

$$Hu = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} = Eu \quad \Rightarrow \quad Hu = \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mI \end{pmatrix} u = Eu$$

$$Hu = \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

donde  $u$  ha sido dividido en espinores de dos componentes,  $u_A$  y  $u_B$ . Ésto se reduce a

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B &= (E - m)u_A, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A &= (E + m)u_B. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para las dos soluciones  $E > 0$ , podríamos tomar  $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ , donde

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Las componentes correspondientes de  $u_B$  quedan especificadas entonces utilizando la segunda de las ecuaciones (2.41),

$$u_B^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)}, \quad (2.43)$$

de modo que las soluciones de la ecuación de Dirac con energía positiva son

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0 \quad (2.44)$$

con  $s = 1, 2$ , donde  $N$  es la constante de normalización. Para las soluciones  $E < 0$ , tomamos  $u_B^{(s)} = \chi^{(s)}$ , de manera que, de (2.41),

$$u_A^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m} u_B^{(s)} = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)}. \quad (2.45)$$

De esta manera, obtenemos

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0. \quad (2.46)$$

Para un electrón de momento  $\vec{p}$  dado tenemos cuatro soluciones:  $u^{(1,2)}$  que corresponden a valores de la energía positivos, y  $u^{(3,4)}$  correspondientes a valores de la energía negativos. Podemos verificar fácilmente que las cuatro soluciones son ortogonales:

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0 \quad r \neq s,$$

con  $r, s = 1, 2, 3, 4$ .

El punto extra obtenido en la ecuación de Dirac, por ejemplo (2.40), es la doble degeneración. Ésto significa que debe existir otra observable que conmute con  $H$  y  $\vec{P}$ , cuyos eigenvalores pueden servir para distinguir los estados. Por inspección vemos que el operador

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

conmuta con  $H$  y  $\vec{P}$ ;  $\hat{p}$  es el vector unitario que apunta en la dirección del momento,  $\vec{p}/|\vec{p}|$ . La “componente del espín” en la dirección del movimiento,  $\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ , es por ende, un “buen” número cuántico y se puede usar para etiquetar las soluciones. Llamamos a este número cuántico la *helicidad* del estado. Los posibles eigenvalores  $\lambda$  del operador de helicidad  $\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$  son

$$\lambda = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{helicidad positiva,} \\ -\frac{1}{2} & \text{helicidad negativa.} \end{cases}$$

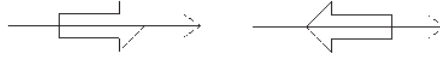


Figura 2.6: Ilustración de la helicidad para los valores  $\lambda = +1/2$  y  $\lambda = -1/2$  respectivamente.

Vemos que ninguna otra componente de  $\vec{\sigma}$  tiene eigenvalores que sean buenos números cuánticos. Con la elección anterior (2.42), de los espinores  $\chi^{(s)}$ , es apropiado escoger  $\vec{p}$  a lo largo del eje  $Z$ ,  $\vec{p} = (0, 0, p)$ . Entonces

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi^{(s)} = \frac{1}{2}\sigma_3\chi^{(s)} = \lambda\chi^{(s)}$$

con  $\lambda = \pm\frac{1}{2}$  correspondiendo a  $s = 1, 2$  respectivamente.

#### 2.4.5. Antipartículas.

Las primeras dos soluciones de la ecuación de Dirac,

$$u^{(1,2)}(\vec{p})e^{-ip \cdot x},$$

claramente describen un electrón libre de energía  $E$  y momento  $\vec{p}$ . Las dos soluciones del electrón con energía negativa  $u^{(3,4)}$  deben estar asociadas con la antipartícula, el positrón. De hecho, un positrón de energía  $E$  y momento  $\vec{p}$  está descrito por una de las soluciones del electrón con energía  $-E$  y momento  $-\vec{p}$ , a saber,

$$u^{(3,4)}(-\vec{p})e^{-i[-p] \cdot x} \equiv v^{(2,1)}(\vec{p})e^{ip \cdot x}, \quad (2.48)$$

donde  $p^0 \equiv E > 0$ . Los espinores del positrón  $v$  se introducen por conveniencia en la notación. Recordemos que la ecuación de Dirac para  $u(\vec{p})$  es

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0.$$

¿Qué implica esto para  $v(\vec{p})$ ? Para un electrón de energía  $-E$  y momento  $-\vec{p}$ , tenemos

$$(-\not{p} - m)u(-\vec{p}) = 0,$$

y así

$$(\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (2.49)$$

Enfatizamos aquí que  $p^0 \equiv E > 0$  y que los diagramas de Feynman se dibujarán y resolverán en términos solamente de los estados de las partículas (electrones y neutrinos). Por ejemplo, un

positrón que llega con energía  $E$  se dibuja como un electrón que sale y tiene energía  $-E$ . La cuestión nueva aquí en la correspondencia partícula-antipartícula es el espín. Nótese la correspondencia de las etiquetas de los espinores 1,2 con los estados de energía negativa 4,3. Una forma de anticipar este orden inverso es observando que, en un marco en reposo, la ausencia de espín hacia arriba a lo largo de un cierto eje es equivalente a la presencia de espín hacia abajo a lo largo del eje. Como ambos, espín y momento están invertidos, la helicidad  $\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  permanece inalterada.

#### 2.4.6. Normalización de espinores y la relación de completez.

Trataremos aquí brevemente algunos resultados a utilizar en secciones posteriores, particularmente, la relación de completez.

Para los fermiones escogemos la normalización covariante, en la cual tenemos  $2E$  partículas / unidad de volumen. Ésto es,

$$\int_{\text{unidad vol.}} \rho dV = \int \psi^\dagger \psi dV = u^\dagger u = 2E,$$

donde hemos utilizado (2.33) y (2.35). Entonces, tenemos las relaciones de ortogonalidad

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E \delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger} v^{(s)} = 2E \delta_{rs}, \quad (2.50)$$

con  $r, s = 1, 2$ . Ahora, usando (2.44) calculamos

$$u^{(s)\dagger} u^{(s)} = |N|^2 \left[ 1 + \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \right)^2 \right] = |N|^2 \frac{2E}{E + m},$$

y así tenemos que la constante de normalización es

$$N = \sqrt{E + m}, \quad (2.51)$$

y lo mismo para  $v^{(s)}$ .

Para obtener la ecuación de Dirac para  $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ , necesitamos la ecuación hermítica de (2.36):

$$u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} p_\mu - m u^\dagger = 0.$$

De los resultados anteriores se puede mostrar que

$$\bar{u}^{(s)} u^{(s)} = 2m, \quad \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = -2m$$

y se puede demostrar la relación de completez:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) &= \not{p} - m. \end{aligned} \quad (2.52)$$

### 2.4.7. Fermiones de masa cero: las dos componentes del neutrino.

Regresamos a la ecuación de Dirac (2.18),

$$H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m)\psi$$

y a la discusión que iniciamos en el presente capítulo. Derivábamos relaciones algebraicas que fueron exigidas a las  $\alpha_i$ 's y a  $\beta$  y encontramos que tales podían ser satisfechas por matrices de  $4 \times 4$ . Sin embargo, nótese que  $\beta$  no está involucrada en el caso de partículas de masa cero y que sólo necesitamos satisfacer

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i = \alpha_i^\dagger.$$

Estas relaciones pueden ser satisfechas por las matrices de Pauli de  $2 \times 2$ . Podemos tomar  $\alpha_i = -\vec{\sigma}_i$  y  $\alpha_i = \vec{\sigma}_i$ , y la ecuación de Dirac sin el término de masa se divide en dos ecuaciones desacopladas para los espinores de dos componentes  $\chi(\vec{p})$  y  $\phi(\vec{p})$ :

$$E\chi = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi, \quad (2.53)$$

$$E\phi = +\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi. \quad (2.54)$$

Cada ecuación está basada en la relación energía-momento relativista,  $E^2 = |\vec{p}|^2$  y tiene una solución de energía positiva y una negativa. Supongamos que (2.53) es la ecuación de onda de un fermión no masivo, un neutrino. La solución de energía positiva tiene  $E = |\vec{p}|$  y así satisface

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi = -\chi. \quad (2.55)$$

Ésto es,  $\chi$  describe un neutrino izquierdo (helicidad  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ) de energía  $E$  y momento  $\vec{p}$ . La solución restante tiene energía negativa. Para interpretar ésto, consideramos una solución de neutrino con energía  $-E$  y momento  $-\vec{p}$ . La ecuación satisface

$$\vec{\sigma} \cdot (-\hat{p})\chi = \chi \quad (2.56)$$

con helicidad positiva, de tal manera que describe un antineutrino derecho ( $\lambda = +\frac{1}{2}$ ) de energía  $E$  y momento  $\vec{p}$ . Simbólicamente, decimos que (2.53) describe a  $\nu_L$  y  $\bar{\nu}_R$ . Tal ecuación de onda fue propuesta por primera vez por Weyl en 1929 pero fue rechazada a causa de la no invariancia bajo la operación de paridad  $P$ , la cual toma  $\nu_L \rightarrow \nu_R$ . Para neutrinos no masivos, ésto no es una objeción, ya que las interacciones débiles no respetan la conservación de la paridad. La segunda ecuación (2.54) describe los estados de helicidad contraria,  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$ .

Escribiendo estos resultados en forma matricial

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

se puede ver que estamos trabajando en la representación de Weyl o quiral, ecuaciones (2.23). En esta representación tenemos

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

En este punto es adecuado que adelantamos cierta característica propia de las interacciones débiles, aunque ésto será discutido con más detalle en la Secc. 2.5. Un gran número de experimentos indican que los leptones forman las corrientes cargadas débiles en una combinación especial de vectores, reales y axiales. Por ejemplo, para el electrón y su neutrino,

$$J^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_\nu. \quad (2.59)$$

Diremos que la forma de las corrientes débiles  $J^\mu$  es de la forma  $V - A$ , en contraste con la forma  $V$  de la corriente electromagnética (2.34). El término  $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ , mezcla un vector ( $V$ ), que es el término que contiene  $\gamma^\mu$ , y un vector axial ( $A$ ), el término con  $\gamma^\mu \gamma^5$ , y da por resultado la violación de la paridad máximamente. De hecho, de (2.58), este término proyecta sólo los neutrinos izquierdos y los antineutrinos derechos,  $\nu_L$  y  $\bar{\nu}_R$ , y es llamado el *operador de proyección izquierda*; observemos

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u_\nu = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Es decir, sólo los neutrinos izquierdos y los antineutrinos derechos interactúan con los leptones cargados mediante la interacción débil. Hasta donde sabemos, los neutrinos sólo interactúan mediante la interacción débil y ésta es la única manera en que podemos observarlos. No existe evidencia empírica de la existencia de neutrinos derechos ni de antineutrinos izquierdos,  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$ , y bien podría ser que no existan. Estrictamente hablando, la inexistencia de  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$  sólo se puede asegurar si la masa del neutrino es cero.

## 2.5. El modelo electrodébil y las reglas de Feynman.

Analizamos en esta sección, lo más brevemente posible, la interpretación matemática de los diagramas de Feynman para la interacción electrodébil, ya que esta interpretación será utilizada en el capítulo 4 para la obtención de la amplitud invariante en las interacciones entre neutrinos. Menciono de paso que la introducción al formalismo que utilizo en este trabajo es basado en la fenomenología de la interacción y no en el uso del lagrangiano dado por el Modelo Estándar, justificando esta decisión en el hecho de llegar a los mismos resultados por un camino menos teórico.

### 2.5.1. Interacciones débiles.

Las vidas medias del pión y del muón son mucho más largas que las de las partículas que decaen a través de las interacciones fuertes o electromagnéticas. Encontramos que

$$\begin{aligned} \pi^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, & \text{con } \tau &= 2.6 \times 10^{-8} \text{s}, \\ \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu, & \text{con } \tau &= 2.2 \times 10^{-6} \text{s}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

cuando las partículas que decaen mediante la interacción fuerte lo hacen aproximadamente en  $10^{-23}$  s, y en  $10^{-16}$  s al decaer electromagnéticamente. Las vidas medias están inversamente relacionadas a la fuerza de acoplamiento de las interacciones. Los decaimientos del pión y del muón son evidencia de otro tipo de interacción con un acoplamiento aún más débil que el electromagnetismo.

Aunque todos los hadrones y leptones experimentan esta interacción débil, y así pueden seguir decaimientos débiles, éstos últimos son ocultados por los decaimientos fuertes y electromagnéticos mucho más rápidos. Sin embargo, algo sucede con las partículas  $\pi^\pm$  y  $\mu^-$ ; no pueden decaer mediante las interacciones fuerte o electromagnética. El  $\pi$  es el hadrón más ligero. Mientras que el  $\pi^0$  puede decaer en fotones, los piones cargados no pueden. Como resultado, el decaimiento débil (2.61) es el dominante. La razón por la que el  $\mu^-$  decae predominantemente según (2.61) es interesante. En principio, el  $\mu^-$  podría decaer electromagnéticamente  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ . El hecho de que el decaimiento  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$  no sea observado y que (2.61) sea el que ocurra, es evidencia de la existencia de *la conservación de los números leptónicos*:  $L_e$  y  $L_\mu$ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} L_e = +1 : & \quad e^- \text{ y } \nu_e, \\ L_e = -1 : & \quad e^+ \text{ y } \bar{\nu}_e, \\ L_e = 0 : & \quad \text{todas las demás partículas.} \end{aligned}$$

Asignaciones similares se hacen para  $L_\mu$  y  $L_\tau$ . Evidentemente,  $L_\mu = 1$  y  $L_e = 0$  para los estados inicial y final del proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ , de tal modo que se conservan los números cuánticos; mientras que en  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ , no lo hacen. De hecho, las reacciones conocidas conservan estos tres números leptónicos (cabe mencionar aquí, que en realidad estudiaremos un fenómeno donde no se cumple el aserto anterior, la oscilación de neutrinos; para los demás fenómenos observados, sí se cumple la regla de la conservación de los números leptónicos).

Los ejemplos de decaimientos débiles dados en (2.61) involucran neutrinos. Los neutrinos son únicos en el hecho de que sólo pueden interactuar a través de la fuerza débil; no tienen carga de color ni eléctrica y, dentro de los límites experimentales, son no masivos. Los neutrinos frecuentemente se encuentran como resultado de algún decaimiento débil, pero no siempre.

### Violación de la paridad y la forma $V-A$ de las corrientes débiles.

La explicación de Fermi del decaimiento  $\beta$  (1932) fue inspirada en la estructura de la interacción electromagnética. La amplitud invariante, que denotaremos con la letra  $M$ , para la dispersión electromagnética electrón-protón es

$$M = (e\bar{u}_P \gamma^\mu u_P) \left( \frac{-1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_e \gamma^\mu u_e), \quad (2.62)$$

donde hemos considerado al protón como una partícula sin estructura descrita por la ecuación de Dirac. El diagrama de Feynman de este proceso se muestra en la Fig. 2.7. El primer término dentro de paréntesis es la corriente eléctrica debida al protón P, asimismo el último paréntesis es la corriente eléctrica debida al electrón e. El término entre paréntesis que está en medio es el propagador del fotón, donde  $q$  es el momento que lleva el fotón virtual.  $u$  es un espinor de Dirac, de los que tratamos en la Secc. 2.4.  $M$  es el producto de las corrientes electromagnéticas del electrón y el protón, junto con el propagador del fotón que intercambian. En realidad, para definir la amplitud invariante como el producto de corrientes y el propagador, se emplea más bien el término  $-iM$ ; por el momento ignoraremos el número  $-i$  por simplicidad, pero dejaremos clara su aparición en la Secc. 2.5.3, cuando demos las reglas precisas para el cálculo de las amplitudes invariantes derivadas de los diagramas de Feynman. Para facilitar la comparación con las interacciones débiles, definimos las corrientes electromagnéticas, por ejemplo, la debida a un electrón como

$$ej_\mu^{\text{em}} \equiv j_\mu^{fi}(0) = -e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i,$$

(ver la Ec. 2.34). Por ende, la amplitud invariante (2.62) es

$$M = -\frac{e^2}{q^2} (j_\mu^{\text{em}})_P (j^{\text{em}\mu})_e.$$

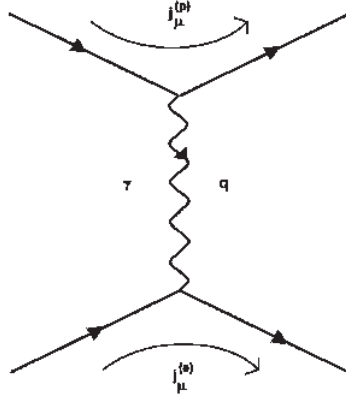


Figura 2.7: Interacción electromagnética electrón-protón.

El decaimiento  $\beta$ :  $P e^- \rightarrow n \nu_e$  se muestra en la Fig.2.8. Por analogía con la forma corriente-corriente de (2.62), Fermi propuso que la amplitud invariante para el proceso está dada por

$$M = G (\bar{u}_n \gamma^\mu u_P) (\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu u_e), \quad (2.63)$$

donde  $G$  es la constante de acoplamiento débil, la cual debe ser determinada mediante experimentación; es llamada *la constante de Fermi*. Los términos entre paréntesis en (2.63) son las “*corrientes débiles cargadas*”. Nótese la ausencia del propagador en (2.63). Regresaremos a este punto en breve, en la siguiente subsección. La forma vector-vector que Fermi le dió a la amplitud débil  $M$  fue una adivinanza por parte de Fermi. A priori, no existe razón alguna para utilizar sólo vectores. La amplitud (2.63) explica las propiedades de algunas características del decaimiento  $\beta$ , pero no otras. El descubrimiento de la violación de la paridad por parte de la interacción débil se da en 1956, y el único cambio esencial requerido en la proposición original de Fermi fue reemplazar  $\gamma^\mu$  por  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ . La mezcla de los términos  $\gamma^\mu$  y  $\gamma^\mu\gamma^5$  automáticamente violan la conservación de la paridad.

Experimentos posteriores mostraron que sólo los neutrinos izquierdos  $\nu_L$  y antineutrinos derechos  $\bar{\nu}_R$  participan en las interacciones débiles. La ausencia de “la imagen en el espejo”, es decir, de  $\bar{\nu}_L$  y  $\nu_R$  es una clara violación a la conservación de la paridad. También, la conjugación de la carga,  $C$ , no se conserva, ya que  $C$  transforma  $\nu_L$  en  $\bar{\nu}_L$ . Sin embargo, la forma  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$  deja la interacción débil invariante bajo la operación  $CP$  combinada. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) &\neq \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_R) = 0 && \text{Violacion de } P, \\ \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) &\neq \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_L) = 0 && \text{Violacion de } C, \\ \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) &= \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_R) && \text{Invarianza de } CP. \end{aligned}$$

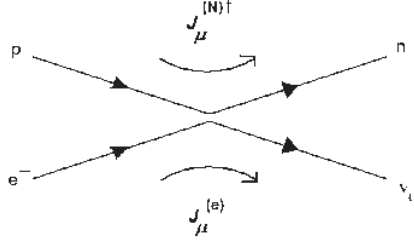


Figura 2.8: Diagrama de Feynman del decaimiento  $\beta$ ,  $P \rightarrow n e^+ \nu_e$ . Se muestran las corrientes débiles.

Aquí,  $\nu$  denota un neutrino de muón y  $\Gamma$  es la razón de decaimiento. El término  $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  en la ecuación para la corriente (ver (2.63))

$$\bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\nu \quad (2.64)$$

automáticamente selecciona un neutrino izquierdo o un antineutrino derecho. Que esto es así lo revisamos en la Secc. 2.4.7. Esta estructura  $V - A$  (vector-vector axial) de la corriente débil se probó experimentalmente mediante dispersión de neutrinos por electrones.

Es natural suponer que todos los fenómenos de interacción débil sean descritos por una interacción corriente-corriente  $V - A$  con una constante de acoplamiento  $G$  única. Por ejemplo, el decaimiento  $\beta$  de la Fig. 2.8 y el decaimiento del muón de la Fig. 2.9 pueden ser descritos por las amplitudes

$$M(P \rightarrow n e^+ \nu_e) = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_P] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_e], \quad (2.65)$$

$$M(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma^5) u_{\nu_e}]. \quad (2.66)$$

El  $1/\sqrt{2}$  se introduce por convención para mantener la definición original de  $G$ , la cual no incluía el término  $\gamma^5$ . Se procede de manera análoga a las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica (QED). Los cálculos sólo involucran partículas y los diagramas muestran sólo líneas pertenecientes a partículas. Las antipartículas no aparecen. Así, el  $\bar{\nu}_e$  saliente (de momento  $k$ ) se muestra en la Fig. 2.9 como un  $\nu_e$  entrante (de momento  $-k$ ).

Las amplitudes de las interacciones débiles son de la forma

$$M = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu^\dagger. \quad (2.67)$$

La conservación de la carga requiere que  $M$  sea el producto de corrientes con índices arriba y abajo, donde

$$J_\mu^\dagger = \bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\nu.$$

El factor cuatro aparece porque las corrientes (2.67) están definidas mediante el operador de proyección normalizado  $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  y no mediante el anterior  $(1 - \gamma^5)$ .



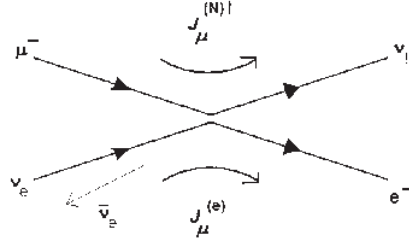


Figura 2.9: Diagrama de Feynman del decaimiento del  $\mu^-$  :  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ .

### Interpretación del acoplamiento $G$ .

Se pueden utilizar los datos en los decaimientos  $\beta$  y del muón para obtener un valor numérico para  $G$ . Es crucial asimismo, revisar la universalidad de la constante de acoplamiento débil  $G$ . ¡No es deseable tener que utilizar una nueva constante para cada proceso de interacción débil! También pondremos a  $G$  en una forma que se pueda comparar directamente con los acoplamientos de las interacciones fuerte y electromagnética.

Un examen a las amplitudes electromagnética y débil de (2.62) y (2.63) mostrarán que en el modelo de Fermi la analogía entre las dos interacciones no está completamente desarrollada. Observamos que  $G$  esencialmente reemplaza el término  $e^2/q^2$ . Así  $G$ , en contraste con el acoplamiento  $e$  que no tiene dimensiones, tiene dimensiones  $\text{GeV}^{-2}$ . Extenderemos la analogía postulando que las interacciones débiles son generadas por la emisión y la absorción de bosones cargados, llamados los bosones  $W^\pm$ . Los bosones  $W^\pm$  son los análogos del fotón para la fuerza electromagnética y de los gluones para la fuerza nuclear fuerte. Por ejemplo, el decaimiento del muón se realiza a través de un bosón  $W^-$  (ver Fig.2.2.a) y la amplitud es de la forma

$$M = \left( \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_\mu \right) \frac{1}{m_W^2 - q^2} \left( \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma_\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_{\nu_e} \right), \quad (2.68)$$

donde  $g/\sqrt{2}$  es un acoplamiento débil sin dimensiones y  $q$  es el momento del bosón débil (los factores  $1/\sqrt{2}$  y  $\frac{1}{2}$  se insertan para mantener la definición convencional de  $g$ ). En contraste con el fotón, el bosón débil debe ser masivo, de otro modo habría sido directamente producido en los decaimientos débiles. De hecho, se tiene que  $m_W \sim 80 \text{ GeV}$ .

Cuando estemos interesados en situaciones donde  $q^2 \ll m_W^2$ , comparando las ecuaciones (2.68) y (2.66) tenemos que

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (2.69)$$

y las corrientes débiles interactúan esencialmente en un punto. Es decir, en el límite (2.69), el propagador entre las corrientes desaparece. La ecuación (2.69) propone la idea de que las interacciones débiles son débiles no porque  $g \ll e$ , sino porque  $m_W^2$  es grande. Si de hecho  $g \approx e$ , entonces a energías  $O(m_W)$  y mayores, la interacción débil llegaría a ser tan fuerte como la interacción electromagnética.

Podemos pensar en  $g \approx e$  como una unificación de las interacciones débil y electromagnética del mismo modo que la unificación entre la fuerza eléctrica y magnética en la teoría de Maxwell

del electromagnetismo, donde

$$\vec{F} = e\vec{E} + e_M\vec{v} \times \vec{B}$$

con  $e_M = e$ . A bajas velocidades, las fuerzas magnéticas son muy débiles, mientras que a altas velocidades, las fuerzas eléctrica y magnética son comparables en magnitud. La velocidad de la luz  $c$  es la escala que gobierna la fuerza relativa. El análogo para la fuerza electrodébil es el valor  $m_W$  en la escala de energía. Finalmente, según mencionamos anteriormente, de los decaimientos  $\beta$  de las partículas se puede obtener el valor de la constante de Fermi  $G$ ; éste es

$$G \simeq 10^{-5}/m_n^2. \quad (2.70)$$

Recuérdese que  $G$  tiene dimensiones de (masa) $^{-2}$ .

### Corrientes débiles neutras.

La detección en 1973 de eventos como

$$\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^- \quad (2.71)$$

abrieron un nuevo capítulo en la física de partículas. Este evento evidencia la existencia de corrientes débiles neutras. Hasta entonces no había sido observado ningún efecto debido a corrientes débiles neutras. En realidad, se esperaban corrientes débiles neutras pero como la acción combinada de corrientes electromagnéticas (que son neutras) y corrientes débiles cargadas; por ejemplo,  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ , este proceso vendría de  $K^+ \rightarrow \pi^+ \gamma$  con  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ , pero estos efectos son muy poco observados. Sin embargo, en reacciones como la (2.71) se encuentra que la razón de decaimiento es muy similar a la de los procesos de la interacción débil.

Los datos de las interacciones débiles de la forma  $\nu N \rightarrow \nu X$  se pueden explicar en términos de corrientes neutras  $\nu q \rightarrow \nu q$ , con amplitudes de la forma

$$M = \frac{G_N}{\sqrt{2}} \left[ \bar{u}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\nu \right] \left[ \bar{u}_q \gamma_\mu (C_V^q - C_A^q \gamma^5) u_q \right], \quad (2.72)$$

donde  $q = u, d, \dots$  son los quarks blanco. A priori, no existe razón para que la interacción neutra débil deba tener la forma dada por la ecuación (2.72). Ésto se decide mediante el experimento.

Es apropiado ahora introducir la normalización convencional de las corrientes neutras de la interacción débil,  $J_\mu^{\text{NC}}$ . La amplitud invariante de un proceso de dispersión débil neutra se escribe como

$$M = \frac{4G}{\sqrt{2}} 2\rho J_\mu^{\text{NC}} J^{\text{NC}\mu}. \quad (2.73)$$

La amplitud del proceso  $\nu q \rightarrow \nu q$  dada por la ecuación (2.72) es de esta forma; la definición acostumbrada de las corrientes neutras es

$$J_\mu^{\text{NC}}(\nu) = \frac{1}{2} \left( \bar{u}_\nu \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_\nu \right), \quad (2.74)$$

$$J_\mu^{\text{NC}}(q) = \frac{1}{2} \left( \bar{u}_q \gamma_\mu \frac{1}{2} (C_V^q - C_A^q \gamma^5) u_q \right). \quad (2.75)$$

En general,  $J_\mu^{\text{NC}}$ , a diferencia de las corrientes cargadas  $J_\mu$ , no es una corriente  $V - A$  pura ( $C_V \neq C_A$ ); éstas tienen componentes derechas. Sin embargo, el neutrino es izquierdo y entonces

$C_V^\nu = C_A^\nu \equiv \frac{1}{2}$  en (2.74). El parámetro  $\rho$  en (2.73) determina la fuerza relativa entre las corrientes débiles neutras y las cargadas. En el modelo estándar todas las  $C_V^i, C_A^i$  (con  $i = \nu, e, u, \dots$ ) están dados en términos de un parámetro y  $\rho = 1$ . Los experimentos actuales dan el valor  $\rho = 1$  con un margen pequeño de error. Insertando las corrientes (2.74) y (2.75) en (2.73) obtenemos la amplitud del proceso  $\nu q \rightarrow \nu q$  con

$$G_N = \rho G (\simeq G). \quad (2.76)$$

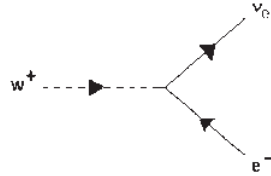
Resumiendo, el veredicto experimental es que la corriente débil neutra es predominantemente  $V - A$  (izquierda), pero no pura  $V - A$ . La corriente neutra y la cargada tienen una estructura similar, pero se cree que la cargada es puramente  $V - A$ .

### 2.5.2. Interacciones electrodébiles.

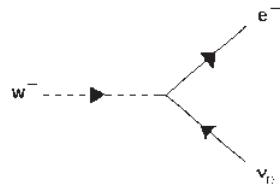
La forma de las interacciones débiles que hemos discutido hasta aquí, sólo es satisfactoria a un nivel superficial. Sólo hemos calculado procesos de baja energía donde el momento intercambiado entre las corrientes débiles satisface  $|q^2| \ll (100 \text{ GeV})^2$ . Los resultados no dependen de si existe un bosón intermediario de la interacción o no. La existencia de las partículas  $W^\pm$  solamente nos guían a una reinterpretación de la constante de Fermi de acoplamiento débil  $G$ , ver la ecuación (2.69). Cálculo de procesos que no sean de baja energía nos conllevaría a problemas. Para subsanar lo dicho anteriormente se requiere hacer algunos ajustes en la teoría, en especial, que las corrientes débiles formen un grupo de simetría.

#### Isospín débil e hipercarga.

¿Pueden las corrientes neutras  $J_\mu^{\text{NC}}$  junto con las corrientes cargadas,  $J_\mu$  y  $J_\mu^\dagger$ , formar un grupo de simetría de interacciones débiles? Primero, recordemos la forma de las corrientes cargadas



$$J_\mu \equiv J_\mu^+ = \bar{u}_\nu \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_e \equiv \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) e = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L, \quad (2.77)$$



$$J_\mu^\dagger \equiv J_\mu^- = \bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\nu \equiv \bar{e}_L \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \nu = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L, \quad (2.78)$$

donde el superíndice  $+$  y el  $-$  indican las corrientes con el índice arriba y abajo (vectores covariantes y contravariantes), respectivamente. El subíndice L denota los espinores izquierdos y nos recuerda la naturaleza  $V - A$  de las corrientes cargadas. A partir de aquí utilizaremos el nombre de las partículas para indicar los espinores de Dirac,  $\bar{u}_\nu \equiv \bar{\nu}$ ,  $u_e \equiv e$ , etc.

Escribiremos las corrientes cargadas en una forma que nos será útil. Introduciremos el doblete

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (2.79)$$

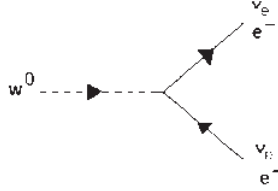
y los operadores de escalera  $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$ :

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

donde las  $\tau$ 's son las matrices de Pauli. Las corrientes cargadas (2.77) y (2.78) se pueden escribir entonces como (con dependencia en  $x$ )

$$\begin{aligned} J_\mu^+(x) &= \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_+ \chi_L, \\ J_\mu^-(x) &= \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_- \chi_L. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Anticipando la forma del grupo  $SU(2)$  para las corrientes débiles, introducimos la corriente débil neutra con la forma siguiente



$$J_\mu^3(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau_3 \chi_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L. \quad (2.82)$$

Tenemos entonces un triplete de isospín de corrientes débiles,

$$J_\mu^i(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau_i \chi_L, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad (2.83)$$

cuyas cargas correspondientes

$$T^i = \int J_0^i(x) d^3x \quad (2.84)$$

generan un álgebra de grupo  $SU(2)_L$

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon_{ijk} T^k. \quad (2.85)$$

Sin embargo, la corriente  $J_\mu^3(x)$  no es todavía la corriente neutra débil que indican los experimentos, la corriente débil neutra que se ha observado también contiene una componente derecha. La corriente electromagnética es una corriente neutra con componentes tanto derechas como izquierdas. Por ejemplo, para el electrón tiene la forma

$$j_\mu^{\text{em}}(x) = -\bar{e}\gamma_\mu e = -\bar{e}_R\gamma_\mu e_R - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L. \quad (2.86)$$

Nótese que se ha omitido el acoplamiento  $e$  en nuestra definición de corriente  $j_\mu^{\text{em}}$ . Esta definición simplificará nuestra discusión de las interacciones electrodébiles. De otro modo la corriente electromagnética se puede escribir (ecuación obtenida en la Secc. 2.4, ecuación 2.34)

$$j_\mu \equiv e j_\mu^{\text{em}} = e\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi, \quad (2.87)$$

donde  $Q$  es el operador de carga, con eigenvalor  $Q = -1$  para el electrón. Se puede decir que  $Q$  es el generador del grupo  $U(1)_{\text{em}}$  de las interacciones electromagnéticas.

Incluimos  $j_\mu^{\text{em}}$  en un intento de conservar el grupo  $SU(2)$ , aunque notamos que ninguna de las corrientes neutras  $J_\mu^{\text{NC}}$  o  $j_\mu^{\text{em}}$  está dentro del grupo  $SU(2)$ . La idea que nos sigue es formar dos combinaciones ortogonales que tengan ciertas propiedades de transformación bajo  $SU(2)$ ; una combinación,  $J_\mu^3$ , es para completar el triplete de isospín débil  $J_\mu^i$ , y la otra,  $j_\mu^Y$ , permanece sin cambio bajo transformaciones en  $SU(2)$ .  $j_\mu^Y$  se llama la corriente de hipercarga débil y está dada por

$$j_\mu^Y = \bar{\psi}\gamma_\mu Y\psi, \quad (2.88)$$

donde la hipercarga débil está definida mediante la relación

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.89)$$

Es decir,

$$j_\mu^{\text{em}} = J_\mu^3 + \frac{1}{2}j_\mu^Y. \quad (2.90)$$

Así como  $Q$  genera el grupo  $U(1)_{\text{em}}$ , así  $Y$  genera el grupo  $U(1)_Y$ . De este modo, hemos incorporado la interacción electromagnética y tenemos como resultado el grupo más grande  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . En cierto sentido, hemos unificado la interacción electromagnética con la débil. Sin embargo, más que un simple grupo, tenemos dos grupos cada uno con su propia fuerza de acoplamiento. Entonces, aparte de  $e$ , necesitamos otra constante de acoplamiento, para especificar completamente la interacción electrodébil.

Como llegamos a un producto de grupos, el generador  $Y$  debe conmutar con los generadores  $T^i$ . Como consecuencia todos los miembros de un multiplete de isospín deben tener el mismo valor de la hipercarga. Por ejemplo, los multipletes del electrón son

$$\begin{aligned} j_\mu^Y &= 2j_\mu^{\text{em}} - 2J_\mu^3 \\ &= -2(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L) - (\bar{\nu}_L\gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L) \\ &= -2(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R) - 1(\bar{\chi}_L\gamma_\mu \chi_L), \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde se han utilizado las ecuaciones (2.82) y (2.86). Por lo tanto, el doblete  $(\nu, e)_L$  tiene  $Y = -1$  y el singlete  $e_R$  tiene  $Y = -2$ . Estos números cuánticos aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 3. Isospín e hipercarga débil de leptones.

Leptón	$T$	$T^3$	$Q$	$Y$
$\nu_e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$e_L^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
$e_R^-$	0	0	-1	-2

**La interacción electrodébil.**

Para completar la unificación del electromagnetismo y la fuerza débil debemos modificar la forma corriente-corriente de las interacciones débiles dada en las ecuaciones (2.67) y (2.73). No olvidamos que la estructura de las corrientes debe ser tal que la interacción efectiva resulta del intercambio de un bosón masivo con sólo un pequeño momento transferido.

Teniendo en cuenta que la interacción electromagnética viene dada por

$$-ie(j^{\text{em}})^\mu A_\mu. \quad (2.92)$$

Así como la corriente electromagnética está acoplada al fotón, asumimos que las corrientes electrodébiles están acopladas a otros bosones. El modelo estándar consiste de un isotriplete de campos  $W_\mu^i$  acoplados con una fuerza  $g$  a las corrientes de isospín débiles  $J_\mu^i$ , junto con un campo  $B_\mu$  acoplado a la corriente de hipercarga débil  $j_\mu^Y$  con una fuerza  $g'/2$  (tomada así por convención). Entonces la interacción electrodébil viene dada como

$$-ig(J^i)^\mu W_\mu^i - i\frac{g'}{2}(j^Y)^\mu B_\mu. \quad (2.93)$$

Los campos

$$W_\mu^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (2.94)$$

describen los bosones cargados masivos  $W^\pm$ , mientras que  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  son campos neutros. Estas interacciones se muestran en los diagramas de la Fig. 2.10.

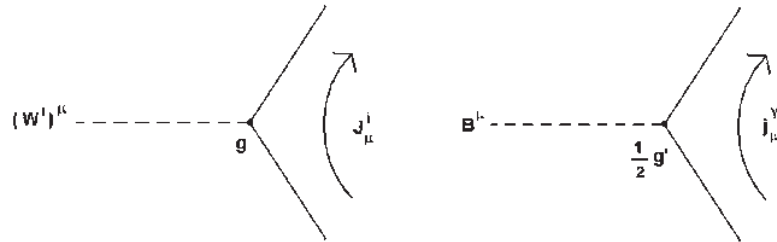


Figura 2.10: Acoplamiento de las corrientes débiles de isospín e hipercarga con sus respectivos bosones.

La interacción electromagnética (2.92) se encuentra incluida en (2.93). De hecho, el fotón  $A_\mu$  y el bosón  $Z_\mu$ , responsable éste último de la interacción débil neutra, se expresan como la

combinación lineal de los dos campos neutros  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  de la siguiente forma

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W \quad (\text{no masivo}), \quad (2.95)$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W \quad (\text{masivo}), \quad (2.96)$$

aquí  $\theta_W$  es llamado *el ángulo de Weinberg*. Por lo anteriormente dicho, la corriente electrodébil neutra se escribe como

$$\begin{aligned} -igJ_\mu^3(W^3)^\mu - i\frac{g'}{2}j_\mu^Y B_\mu &= \\ &= -i \left( g \sin \theta_W J_\mu^3 + g' \cos \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2} \right) A_\mu \\ &= -i \left( g \cos \theta_W J_\mu^3 - g' \sin \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2} \right) Z_\mu. \end{aligned} \quad (2.97)$$

El primer término es la fuerza electromagnética (2.92), así que la expresión entre paréntesis debe ser

$$ej_\mu^{\text{em}} \equiv e \left( J_\mu^3 + \frac{1}{2}j_\mu^Y \right), \quad (2.98)$$

ver (2.90). Por lo que tenemos

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e. \quad (2.99)$$

De esta manera se puede ver el ángulo de Weinberg dado por la razón de las dos constantes de acoplamiento,  $\tan \theta_W = g'/g$ . Utilizando (2.98) y (2.99) se puede expresar la interacción de la corriente neutra débil de la ecuación (2.97) como

$$-i\frac{g}{\cos \theta_W}(J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{\text{em}})Z^\mu \equiv -i\frac{g}{\cos \theta_W}J_\mu^{\text{NC}}Z^\mu. \quad (2.100)$$

Ésta es la definición que relaciona la corriente neutra  $J^{\text{NC}}$  con la corriente de isospín débil  $J$ ,

$$J_\mu^{\text{NC}} \equiv J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{\text{em}}. \quad (2.101)$$

Hemos visto así que la interacción débil no es una nueva interacción fundamental sino una manifestación de la interacción electromagnética, con sus distintos acoplamientos de la forma (2.99) y en donde  $\theta_W$  se tiene que obtener mediante experimentación.

Finalmente, antes de terminar este capítulo dando las reglas de Feynman para las interacciones electrodébiles en la siguiente sección, vamos a revisar con más detalles la forma de las interacciones electrodébiles que hemos obtenido con la forma básica de las amplitudes invariantes de la Secc. 2.5.1, ecuación (2.73).

Según la ecuación (2.73) de la Secc. 2.5.1, la amplitud invariante debido a corrientes débiles neutras es

$$M = \frac{4G}{\sqrt{2}} 2\rho J_\mu^{\text{NC}} J^{\text{NC}\mu},$$

también podríamos expresar la amplitud invariante para corrientes neutras en términos del intercambio de un bosón  $Z$ , ver Fig. 2.11. Utilizando (2.100) y con el supuesto  $|q^2| \ll m_Z^2$ ,

$$M^{\text{NC}} = \left( \frac{g}{\cos \theta_W} J_\mu^{\text{NC}} \right) \left( \frac{1}{m_Z^2} \right) \left( \frac{g}{\cos \theta_W} J^{\text{NC}\mu} \right). \quad (2.102)$$

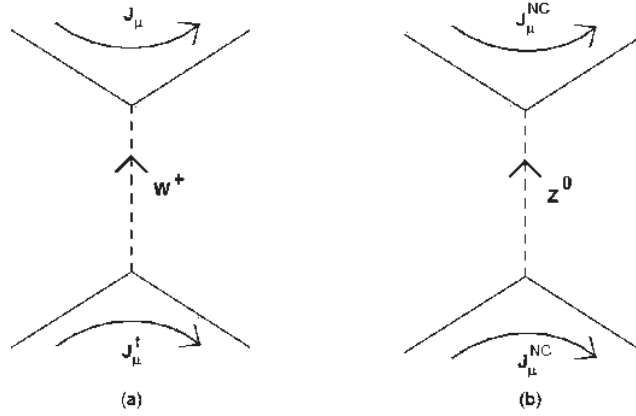


Figura 2.11: Corrientes cargada y neutra de la interacción débil.

De las dos ecuaciones anteriores podemos identificar

$$\rho \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_Z^2 \cos^2 \theta_W}, \quad (2.103)$$

y de (2.69) y (2.103), encontramos que el parámetro  $\rho$  está dado por

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W}. \quad (2.104)$$

Experimentalmente, se ha medido que  $\rho = 1$  dentro de un pequeño error.

### 2.5.3. Las reglas de Feynman para las interacciones electrodébiles.

Como mencionamos al inicio del capítulo, los diagramas de Feynman tienen una interpretación matemática para calcular amplitudes invariantes y secciones eficaces. Damos aquí las reglas que se siguen al interpretar cada uno de los elementos de un diagrama.

Para la interacción electromagnética ya hemos mostrado que la interacción es de la forma

$$-ie(j^{\text{em}})^\mu A_\mu = -ie(\bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi) A_\mu.$$

Observando el diagrama de la Fig. 2.12,  $A_\mu$  es el fotón  $\gamma$ ,  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  representan los fermiones involucrados,  $Q$  es la carga del fermión  $f$ ;  $Q = -1$  para el electrón. La línea saliente de  $\bar{f}$ , se debe dibujar como  $f$  entrante; es decir, las antipartículas en los diagramas de Feynman se escriben como partículas con momento y energía negativos. Así, los espinores de Dirac de las partículas se asocian con las líneas entrantes y salientes  $f$  y  $\bar{f}$ . Entonces, al encontrar un vértice como el anterior se debe escribir la expresión

$$-ieQ_f\gamma^\mu, \quad (2.105)$$

que es el vértice para la interacción electromagnética.

Hagamos lo mismo para la interacción débil. Como en el caso anterior, las líneas entrantes y salientes ( $e$  y  $\nu$  en los siguientes diagramas) son las partículas que participan en la interacción



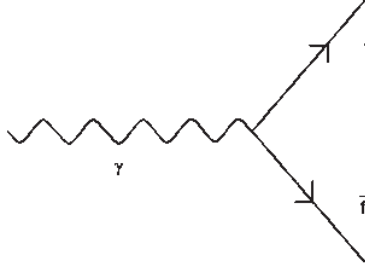
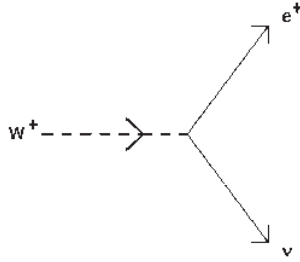


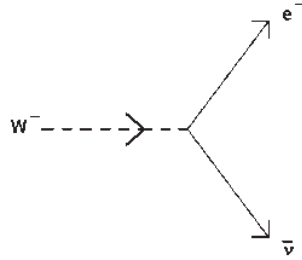
Figura 2.12: Vértice electromagnético.

y matemáticamente son los espinores de Dirac  $u$  y  $\bar{u}$  obtenidos en la Secc. 2.4.4. Las corrientes cargadas son:

$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_+ \chi_L) W_\mu^+ = -i \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^+$$



$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_- \chi_L) W_\mu^- = -i \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^-$$



Para  $\chi_L = (\nu_e, e^-)$ , estas interacciones de los diagramas anteriores nos conducen al factor debido al vértice

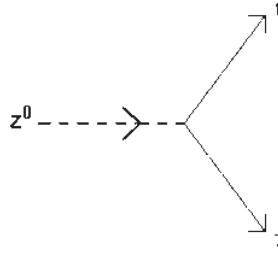
$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5). \quad (2.106)$$

La interacción débil por una corriente neutra está dada por

$$\begin{aligned} & -i \frac{g}{\cos \theta_W} \left( J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{\text{em}} \right) Z^\mu = \\ & = -i \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\psi}_f \gamma^\mu \left[ \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) T^3 - \sin^2 \theta_W Q \right] \psi_f Z_\mu \end{aligned} \quad (2.107)$$

para el acoplamiento  $Z \rightarrow f \bar{f}$ . Se acostumbra escribir el factor para el vértice como

$$-i \frac{g}{\cos \theta_W} \gamma^\mu \frac{1}{2} \left( C_V^f - C_A^f \gamma^5 \right). \quad (2.108)$$



Al comparar (2.107) y (2.108), nos damos cuenta que los acoplamientos de la parte vectorial y pseudovectorial,  $C_V$  y  $C_A$  están determinados en el modelo estándar dado el valor para  $\sin^2 \theta_W$ . Sus valores son

$$\begin{aligned} C_V^f &= T_f^3 - 2 \sin^2 \theta_W Q_f, \\ C_A^f &= T_f^3, \end{aligned} \quad (2.109)$$

donde  $T_f^3$  y  $Q_f$  son, respectivamente, la tercera componente del isospín débil y la carga del fermión  $f$ . Los valores de  $C_V$  y  $C_A$  se encuentran en la tabla 4.

Tabla 4. Factores para los vértices  $Z \rightarrow f \bar{f}$  en el modelo estándar con  $\sin^2 \theta_W = 0.234$ .

$f$	$Q_f$	$C_A^f$	$C_V^f$
$\nu_e, \nu_\mu, \dots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e^-, \mu^-, \dots$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \simeq -0.03$
$u, c, \dots$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \simeq 0.19$
$d, s, \dots$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \simeq -0.34$

En resumen, llegamos a la conclusión de que para calcular la amplitud invariante  $-iM$  en un proceso de partículas, el diagrama de Feynman de ese proceso nos da los factores para su cálculo. Se interpretan las líneas que entran y salen como las partículas y el factor es un espinor de Dirac  $u$  para la partícula inicial y  $\bar{u}$  para la final. Se tiene el factor debido al vértice que son las ecuaciones (2.105), (2.106) y (2.108) dependiendo de la interacción involucrada y finalmente, se introduce el factor debido al propagador de la interacción que es de la forma

$$\frac{1}{q^2 - m_B^2}, \quad (2.110)$$

donde  $m_B$  es la masa del bosón de intercambio y  $q$  es el momento que carga el bosón. Si las partículas iniciales llevan momentos  $k$  y  $p$ , el momento del bosón de intercambio se calcula con la conservación del momento, que se debe cumplir. Por ejemplo, podría ser  $q = p - k$ . Recalcamos que al utilizar las reglas que acabamos de mencionar, lo que estamos calculando es  $-iM$ . Posteriormente, despejando, nos quedamos con la amplitud invariante  $M$ . Utilizaremos las reglas anteriores en el capítulo 4.

## Capítulo 3

# El fenómeno de la oscilación de neutrinos.

Iniciamos en este capítulo el estudio de la oscilación de neutrinos. Primero analizaremos el problema de los dos estados o dos niveles y veremos cómo la matriz Hamiltoniana describe la evolución temporal de un sistema. El análisis siguiente nos llevará a ver que si el Hamiltoniano tiene cierta forma, tendremos un sistema que oscila entre los dos estados del mismo. Terminaremos el capítulo al obtener la función de probabilidad de que el sistema esté en alguno de los dos estados. Todo lo anterior lo relacionaremos con nuestro caso particular de la oscilación de sabores de los neutrinos.

Lo dicho en la introducción al capítulo 2, sobre el posible material para revisar o profundizar en estos temas, es válido también en el presente capítulo. Sólo añadimos que para la realización de este capítulo revisamos los textos [1] y [9].

### 3.1. La evolución de un sistema en el tiempo.

#### 3.1.1. ¿Cómo evolucionan los estados en el tiempo?

En mecánica cuántica, el tiempo juega el papel de un parámetro, no el de un operador. Buscamos el operador de evolución temporal, el cual, al actuar sobre un vector de estado a un determinado tiempo, lo lleva a otro tiempo posterior. La pregunta es: ¿cómo cambia el vector de estado de un sistema con el tiempo?

Supongamos que se tiene un sistema cuyo vector de estado al tiempo  $t_0$  es  $|\alpha, t_0\rangle$ . A un tiempo posterior  $t$  el sistema habrá evolucionado a otro estado  $|\alpha, t_0; t\rangle, t > t_0$ . Dado que el tiempo es un parámetro continuo, uno espera que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\alpha, t_0; t\rangle = |\alpha, t_0\rangle. \quad (3.1)$$

El problema fundamental es estudiar la evolución temporal del vector de estado  $|\alpha, t_0\rangle \rightarrow |\alpha, t_0; t\rangle$ . Los dos kets deben estar relacionados por un operador, el cual será llamado *operador de evolución temporal*:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (3.2)$$

¿Qué propiedades son deseables en  $U$ ?

El primer requisito es la unitariedad, directamente vinculado a la conservación de la probabilidad. Supongamos que al tiempo  $t_0$  el ket de estado es representado en una base  $\{|a'\rangle\}$  generada por la observable  $A$ :

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t_0) |a'\rangle.$$

De la misma manera, su representación un tiempo posterior  $t$  es:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t) |a'\rangle.$$

En general  $|C_{a'}(t)| \neq |C_{a'}(t_0)|$ , aunque se puede demostrar que si  $A$  conmuta con  $H$  (el Hamiltoniano), entonces la igualdad es verdadera. La igualdad que es válida en general es

$$\sum_{a'} |C_{a'}(t_0)|^2 = \sum_{a'} |C_{a'}(t)|^2 = 1. \quad (3.3)$$

Dicho de otra forma, si  $\langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle = 1 \Rightarrow \langle \alpha, t_0; t | \alpha, t_0; t \rangle = 1$ . Pero,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, t_0; t | \alpha, t_0; t \rangle &= \langle \alpha, t_0 | U^\dagger U | \alpha, t_0 \rangle = \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle \Rightarrow \\ U^\dagger U &= I. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Con lo que queda demostrada la unitariedad.

Se requiere además, que  $U$  cumpla con la propiedad de composición

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0), \quad t_2 > t_1 > t_0. \quad (3.5)$$

Queremos conocer la matriz  $U(t_2, t_1)$  para un intervalo infinitesimal de tiempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . Nos preguntamos lo siguiente: si tenemos un estado  $\phi$  ahora, ¿cómo es el estado un tiempo infinitesimal  $\Delta t$  más tarde? Llamamos  $\psi(t)$  al estado en el instante  $t$ . El estado después de transcurrido el pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  es

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.6)$$

Proyectemos las amplitudes en una representación determinada con base  $\{|i\rangle\}$ . Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.6) por  $\langle i|$ , obtenemos

$$\langle i | \psi(t + \Delta t) \rangle = \langle i | U(t + \Delta t, t) | \psi(t) \rangle. \quad (3.7)$$

También podemos descomponer  $|\psi(t)\rangle$  en estados base y escribir

$$\langle i | \psi(t + \Delta t) \rangle = \sum_j \langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle \langle j | \psi(t) \rangle. \quad (3.8)$$

Podemos entender la ecuación (3.8) de la siguiente manera. Si hacemos que  $C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle$  represente la amplitud de estar en el estado base  $i$  en el instante  $t$ , podemos considerar esta amplitud variando en el tiempo. Cada  $C_i$  se convierte en una función de  $t$ . Y también, tenemos información sobre cómo las amplitudes  $C_i$  varían en el tiempo. Al tiempo  $(t + \Delta t)$  cada amplitud es proporcional a todas las otras amplitudes al tiempo  $t$  multiplicadas por un conjunto de coeficientes. Llamemos  $U_{ij}$  a la matriz  $U$ , entendiendo por ello

$$U_{ij} = \langle i | U | j \rangle.$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (3.8) en la forma

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) C_j(t). \quad (3.9)$$

Todavía no sabemos mucho sobre los  $U_{ij}$ , excepto lo siguiente: sabemos que si  $\Delta t$  tiende a cero, nada puede ocurrir; obtendríamos simplemente el estado original. Luego,  $U_{ii} \rightarrow 1$  y  $U_{ij} \rightarrow 0$  si  $i \neq j$ . O sea que  $U_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$  para  $\Delta t \rightarrow 0$ . Además podemos suponer que para  $\Delta t$  pequeño, cada coeficiente  $U_{ij}$  tiene que diferir de  $\delta_{ij}$  en cantidades proporcionales a  $\Delta t$ ; podemos escribir entonces,

$$U_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} \Delta t. \quad (3.10)$$

No obstante, se acostumbra sacar el factor  $(-i/\hbar)$  fuera del coeficiente  $K_{ij}$  por razones históricas y de otra índole; preferimos escribir

$$U_{ij}(t + \Delta t, t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t. \quad (3.11)$$

Por supuesto, es lo mismo que la ecuación (3.10), simplemente definimos los coeficientes  $H_{ij}(t)$ . Los factores  $H_{ij}$  son las derivadas de los coeficientes  $U_{ij}(t_2, t_1)$  respecto a  $t_2$ , tomadas en  $t_2 = t_1 = t$ . Sustituyendo la ecuación (3.11) en la ecuación (3.9), tenemos

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j \left[ \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \right] C_j(t). \quad (3.12)$$

Realizando la suma en el término que contiene  $\delta_{ij}$  obtenemos simplemente  $C_i$ , que podemos pasar al otro miembro de la ecuación. Dividiendo luego por  $\Delta t$  tenemos la siguiente expresión, en la cual se puede reconocer una derivada:

$$\frac{C_i(t + \Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) C_j(t)$$

o

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) C_j(t). \quad (3.13)$$

Recordamos que  $C_i(t)$  es la amplitud  $\langle i|\psi \rangle$  de encontrar el estado  $\psi$  en uno de los estados base  $i$  al tiempo  $t$ . Luego, la ecuación (3.13) nos indica cómo cada uno de los coeficientes  $\langle i|\psi \rangle$  varía en el tiempo. Es, pues, lo mismo que decir que la ecuación (3.13) nos informa cómo el estado  $\psi$  varía en el tiempo, ya que estamos describiendo  $\psi$  por medio de las amplitudes  $\langle i|\psi \rangle$ . La variación de  $\psi$  en el tiempo se describe mediante la matriz  $H_{ij}$ , que tiene que incluir, naturalmente, lo que le estamos haciendo al sistema para que cambie. Si conocemos los  $H_{ij}$  (que contienen la física de la situación y que, en general, pueden depender del tiempo) tenemos una descripción completa del comportamiento temporal del sistema. La ecuación (3.13) es, entonces, la ley cuántica de la dinámica del sistema.

### 3.1.2. La matriz hamiltoniana.

Por consiguiente, para describir el mundo cuántico necesitamos escoger un conjunto de estados base  $\{|i\rangle\}$  y escribir las leyes físicas dando la matriz de los coeficientes  $H_{ij}$ . Y así, estamos en capacidad de responder sobre lo que le sucederá al sistema. Los coeficientes  $H_{ij}$  se denominan *matriz Hamiltoniana* o, para abreviar, simplemente *Hamiltoniano*.

El Hamiltoniano tiene una propiedad que se puede deducir directamente de la unitariedad de  $U$ :

$$H_{ij}^* = H_{ji}. \quad (3.14)$$

Ésto proviene de la condición de que la probabilidad total de que el sistema esté en algún estado no cambie. La probabilidad total de encontrarla en alguna parte es

$$\sum_i |C_i(t)|^2,$$

lo cual no debe variar en el tiempo. Si ésto es cierto para cualquier condición inicial  $\phi$ , la ecuación (3.14) también debe ser cierta.

Como primer ejemplo, tomemos una situación en la cual las condiciones físicas no varían en el tiempo de modo que  $H$  sea independiente del tiempo. Elegimos también un sistema para cuya descripción se necesita sólo un estado base; es una aproximación que podríamos hacer para un átomo de hidrógeno en reposo o algo similar. La ecuación (3.13) dice, entonces

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1, \quad (3.15)$$

y si  $H_{11}$  es constante, se puede resolver fácilmente esta ecuación diferencial obteniendo

$$C_1 = (\text{const})e^{-(i/\hbar)H_{11}t}. \quad (3.16)$$

Ésta es la dependencia temporal de un estado de energía  $E = H_{11}$  definida.

Ahora consideremos un sistema que tiene dos estados base. La ecuación (3.13) reza

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= H_{11}C_1 + H_{12}C_2, \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= H_{21}C_1 + H_{22}C_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si nuevamente los  $H$  son independientes del tiempo, se pueden resolver fácilmente estas ecuaciones.

## 3.2. El problema de los dos estados.

Vamos a considerar una situación que se puede describir por medio de dos estados. Intentaremos una aproximación en la que todos los otros posibles estados permanecen fijos, porque no intervienen en lo que nos interesa por el momento. Queremos decir que hay sólo dos estados de los que nos vamos a ocupar realmente, suponiendo que todo lo demás está dado. Diremos que el sistema está en el estado  $|1\rangle$  o en el estado  $|2\rangle$ . Tomaremos los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  como el conjunto

de estados base para el análisis del comportamiento del sistema. En cualquier instante, el estado real  $|\psi\rangle$  del sistema se puede representar dando  $C_1 = \langle 1|\psi\rangle$ , la amplitud de estar en el estado  $|1\rangle$ , y  $C_2 = \langle 2|\psi\rangle$ , la amplitud de estar en el estado  $|2\rangle$ . Podemos escribir el vector de estado en la forma

$$|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1|\psi\rangle + |2\rangle\langle 2|\psi\rangle$$

o

$$|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2. \quad (3.18)$$

Es interesante saber que si el sistema está en cierto estado en cierto instante, no estará en el mismo estado un poco más tarde. Los dos coeficientes  $C$  estarán variando en el tiempo conforme a la ecuación (3.17), que es válida para cualquier sistema de dos estados. Supongamos que se ha hecho una observación de modo que se sabe que el sistema está inicialmente en el estado  $|1\rangle$ . Un poco más tarde hay cierta probabilidad de que se encuentre en el estado  $|2\rangle$ . Para hallar esta probabilidad tenemos que resolver la ecuación diferencial que nos dice cómo las amplitudes varían en el tiempo.

Tenemos el problema de encontrar los coeficientes  $H_{ij}$  en la ecuación (3.17). No obstante, hay algunas cosas que podemos decir. Supongamos que una vez que el sistema está en el estado  $|1\rangle$  no hay posibilidad alguna de que pase al estado  $|2\rangle$  y viceversa. Luego,  $H_{12}$  y  $H_{21}$  serían nulos y la ecuación (3.17) rezaría

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{22}C_2.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos

$$C_1 = (\text{const})e^{-(i/\hbar)H_{11}t}, \quad C_2 = (\text{const})e^{-(i/\hbar)H_{22}t}. \quad (3.19)$$

Éstas son las amplitudes correspondientes a estados estacionarios de energías  $E_1 = H_{11}$  y  $E_2 = H_{22}$ . Observemos que si los dos estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  tienen simetría definida, los elementos de matriz  $H_{11}$  y  $H_{22}$  deben ser iguales. Llamaremos  $E_0$  a ambos, porque corresponden a la energía que tendrían los estados si  $H_{12}$  y  $H_{21}$  fueran nulos.

Si existiera una amplitud de que el sistema que está inicialmente en el estado  $|1\rangle$  pase al estado  $|2\rangle$ , los coeficientes  $H_{12}$  y  $H_{21}$  no podrían ser cero. Nuevamente por simetría tendrían que ser iguales (al menos en valor absoluto). En realidad ya sabemos que, en general,  $H_{ij}$  debe ser igual al complejo conjugado de  $H_{ji}$ , por lo que sólo pueden diferir en la fase. No se pierde generalidad si los consideramos iguales. Por conveniencia en lo que sigue, los igualamos a un número negativo; tomamos  $H_{12} = H_{21} = -A$ . Tenemos entonces el siguiente par de ecuaciones:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = E_0 C_1 - A C_2, \quad (3.20)$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = E_0 C_2 - A C_1. \quad (3.21)$$

Estas ecuaciones son bastante sencillas y se las puede resolver de varias maneras. Una manera conveniente es la siguiente. Sumándolas obtenemos

$$i\hbar \frac{d}{dt}(C_1 + C_2) = (E_0 - A)(C_1 + C_2),$$



cuya solución es

$$C_1 + C_2 = ae^{-(i/\hbar)(E_0-A)t}. \quad (3.22)$$

Restando luego (3.21) de (3.20), encontramos que

$$i\hbar \frac{d}{dt}(C_1 - C_2) = (E_0 + A)(C_1 - C_2),$$

lo cual da

$$C_1 - C_2 = be^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}. \quad (3.23)$$

Hemos llamado  $a$  y  $b$  a las dos constantes de integración; por supuesto, se las debe escoger de modo que den la condición inicial de un problema físico particular. Ahora bien, sumando y restando (3.22) y (3.23) obtenemos  $C_1$  y  $C_2$ :

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}, \quad (3.24)$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}. \quad (3.25)$$

Son iguales excepto por el signo del segundo término.

¿Qué significan las soluciones? Observemos que si  $b = 0$  ambos términos tienen la misma frecuencia  $\omega = (E_0 - A)/\hbar$ . El que todo cambie con la misma frecuencia significa que el sistema está en un sistema de energía definida; en este caso, la energía  $(E_0 - A)$ . Hay entonces un estado estacionario de esta energía en el cual las dos amplitudes  $C_1$  y  $C_2$  son iguales.

Hay otro estado estacionario posible si  $a = 0$ ; ambas amplitudes tienen entonces la frecuencia  $(E_0 + A)/\hbar$ . Hay, por lo tanto, otro estado de energía definida  $(E_0 + A)$  si las dos amplitudes son iguales pero de signo opuesto,  $C_2 = -C_1$ . Éstos son los dos únicos estados de energía definida.

Concluimos que debido a la existencia de ciertas probabilidades de que el sistema se cambie de un estado a otro, la energía no es simplemente  $E_0$  como era de esperar, sino que hay dos niveles de energía  $E_0 + A$  y  $E_0 - A$ .

Supongamos que para  $t = 0$  sabemos que el sistema está en el estado  $|1\rangle$ , o sea que  $C_1(0) = 1$  y  $C_2(0) = 0$ . ¿Cuál es la probabilidad de que al tiempo  $t$  se encuentre el sistema en el estado  $|2\rangle$  o se encuentre aún en el estado  $|1\rangle$ ? La condición inicial nos dice qué valores deben tener  $a$  y  $b$  en las ecuaciones (3.24) y (3.25). Haciendo  $t = 0$  tenemos que

$$C_1(0) = \frac{a+b}{2} = 1, \quad C_2(0) = \frac{a-b}{2} = 0.$$

Es evidente que  $a = b = 1$ . Introduciendo estos valores en la expresiones de  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  y reordenando algunos términos tenemos

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{-(i/\hbar)E_0t} \left( \frac{e^{(i/\hbar)At} + e^{-(i/\hbar)At}}{2} \right), \\ C_2(t) &= e^{-(i/\hbar)E_0t} \left( \frac{e^{(i/\hbar)At} - e^{-(i/\hbar)At}}{2} \right). \end{aligned}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones en la forma

$$C_1(t) = e^{-(i/\hbar)E_0t} \cos \frac{At}{\hbar}, \quad (3.26)$$

$$C_2(t) = ie^{-(i/\hbar)E_0t} \sin \frac{At}{\hbar}. \quad (3.27)$$

El módulo de las dos amplitudes varían armónicamente en el tiempo. La probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $|2\rangle$  al tiempo  $t$  es el cuadrado del valor absoluto de  $C_2(t)$ :

$$|C_2(t)|^2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}.$$

La probabilidad comienza en cero (según la condición que impusimos al inicio), aumenta a uno y luego oscila entre cero y uno, como muestra la curva señalada con  $P_2$  en la Fig. 3.1. Por supuesto, la probabilidad de estar en el estado  $|1\rangle$  no se queda en 1. Se vacía en el segundo estado hasta que la probabilidad de encontrar el sistema en el primer estado es cero, como muestra la curva  $P_1$  de la Fig. 3.1. La probabilidad va y viene de uno a otro.

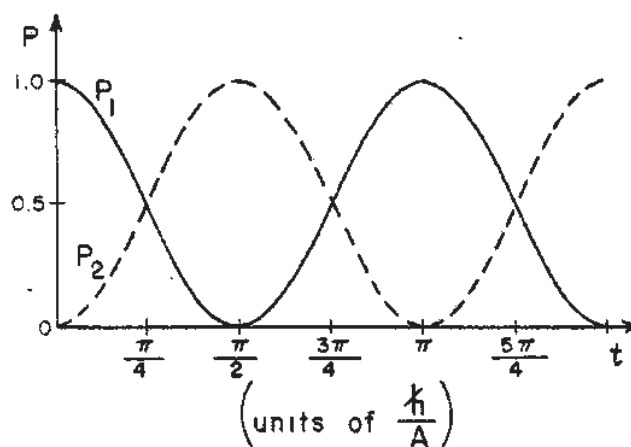


Figura 3.1: La probabilidad  $P_1$  de que un sistema que estaba en el estado  $|1\rangle$  al tiempo  $t = 0$  se encuentre en el estado  $|1\rangle$  al tiempo  $t$  (línea continua). La probabilidad de que se encuentre en el estado  $|2\rangle$  (línea segmentada).

### 3.3. Oscilaciones de neutrinos.

En esta sección, vamos a relacionar lo dicho para el problema de los dos estados con nuestro problema de la oscilación de los neutrinos. Nos daremos cuenta de que si los neutrinos son masivos, un nuevo fenómeno puede ocurrir, *que los neutrinos cambien de sabor*. Es importante mencionar aquí que aunque los sabores de los neutrinos son tres, analizaremos el problema considerando sólo dos sabores, para el mejor entendimiento del fenómeno. Ciertamente, nuestro análisis se puede extender para el caso de la oscilación de los tres sabores.

Antes de iniciar con el análisis de la oscilación de sabor de los neutrinos, revisaremos el problema del cual surgió y cómo es que se llegó a pensar que los neutrinos podían cambiar de sabor, violando así *la conservación de los números leptónicos*, ley de conservación que se creía válida en todas las situaciones.

### 3.3.1. Un poco de historia.

El Sol es un reactor de fusión nuclear natural que funciona a base de una cadena de reacción protón-protón que convierte cuatro núcleos de hidrógeno (protones) en helio, y genera en el proceso energía que se libera y neutrinos. La energía en exceso se libera en forma de rayos gama y como energía cinética de las partículas, incluyendo los neutrinos que viajan del núcleo del Sol a la Tierra. En este proceso casi no se disminuye el flujo de neutrinos, ya que interactúan muy poco con la materia.

Cuando fue posible medir el flujo de neutrinos provenientes del Sol mediante detectores, se puso en evidencia que el número de neutrinos detectados era menor que el predicho por los modelos del comportamiento solar. Los experimentos daban como resultado sólo entre la tercera parte y la mitad de los neutrinos predichos. Se le conoce como el *problema de los neutrinos solares* a la deficiencia en el flujo de neutrinos provenientes del Sol detectados en la Tierra.

Los primeros intentos para dar cuenta de la discrepancia entre las mediciones y la teoría proponían que los modelos solares eran incorrectos, es decir, la presión y la temperatura en el interior del sol eran sustancialmente diferentes de lo que se creía. Sin embargo, estos intentos no rindieron frutos y tuvieron que ser desechados debido a las mejoras en la medición de los neutrinos y a nuevos avances en heliosismología. La heliosismología, que estudia cómo las ondas se propagan a través del Sol, hizo posible medir las temperaturas en el interior del Sol, y éstas coincidían con los modelos estándar del Sol. Detalladas observaciones en el espectro de los neutrinos de observatorios más avanzados en la medición de neutrinos producían resultados que no podían ser asimilados por ajustes en los modelos solares estándar. Un exhaustivo análisis de diversas alternativas propuestas mostró que ninguna combinación de ajustes al modelo solar era capaz de producir el espectro de energía que se observaba en los neutrinos, y que todos los ajustes que se le pudieran hacer al modelo sólo empeoraba algunos otros aspectos del fenómeno [11].

Actualmente, se cree que el problema de los neutrinos solares residía en un entendimiento erróneo de las propiedades de los neutrinos. De acuerdo al modelo estándar de la física de partículas existen tres diferentes tipos o sabores de neutrinos: *neutrinos de electrón* (que son los que son producidos en el Sol y los que son detectados en los experimentos), *neutrinos de muón* (que en la actualidad también pueden ser detectados) y *neutrinos de tau*. En los 1970's, se creía que los neutrinos eran no masivos y sus tipos invariantes. Sin embargo, en 1968 Pontecorvo [12] propuso que si los neutrinos tuviesen masa, podrían cambiar de un tipo en otro. De este modo, los neutrinos solares faltantes podrían ser neutrinos de electrón que se hubiesen cambiado de sabor en el trayecto hasta la Tierra y escapado así a su detección.

La supernova 1987A dio algún viso de que los neutrinos podrían ser masivos, debido a la diferencia en el tiempo de llegada de los neutrinos detectados en el Kamiokande y en el IMB [13]. Sin embargo, debido a la pequeña cantidad de eventos detectados es difícil dar conclusiones con certeza.

La primer evidencia experimental de la oscilación de neutrinos data de 1998 y es debido al equipo del Super-Kamiokande en Japón. Se realizaron observaciones de neutrinos de muón, producidos por los rayos cósmicos en la alta atmósfera, que cambiaban en neutrinos de tau. Realmente, la único que se pudo probar fue que unos pocos menos neutrinos fueron detectados al nivel de la Tierra que los que pudieron ser detectados que venían directamente encima del detector. No se observaron neutrinos de tau en el Super-Kamiokande.

La primera evidencia directa de la oscilación de los neutrinos solares vino en 2001 del Sudbury Neutrino Observatory (SNO) en Canadá. Se detectaron todos los tipos de neutrinos provenientes

del Sol [14] y se pudo distinguir entre neutrinos de electrón y de los otros dos sabores. Después de un riguroso análisis estadístico, se encontró que aproximadamente el 35 % de los neutrinos solares que llegan a la Tierra son neutrinos de electrón, el resto son de los otros dos sabores [15]. El número de neutrinos detectados está de acuerdo con las predicciones de la física nuclear hechas con anterioridad.

Una vez establecida la existencia de la oscilación de los neutrinos, veámos cómo se puede explicar en términos del problema de los dos estados de la Secc. 3.2.

### 3.3.2. Mezcla y oscilación de neutrinos.

Supongamos que existen tres tipos básicos de neutrinos, los denotaremos  $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$ ,  $|\nu_3\rangle$ , con masas definidas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  respectivamente. Estos estados son eigenestados del operador de masa y pueden tomarse como ortogonales y normalizados. El operador de masa actúa en los grados de libertad internos del neutrino, y los eigenestados de masa podrían ser representados por matrices columna de  $3 \times 1$ . El formalismo es algo similar al del espín intrínseco del electrón, en el cual los estados de ‘espín hacia arriba’ y ‘espín hacia abajo’ son eigenestados del operador  $s_z$ .

**Mezcla** significa que el estado del neutrino del electrón  $|\nu_e\rangle$  no es un neutrino básico, sino una combinación lineal de los tres eigenestados de masa. Similarmente, el neutrino del muón y el neutrino del tau son combinaciones lineales de los eigenestados de masa, ortogonales uno a otro y al neutrino del electrón. Por simplicidad matemática tomaremos un modelo de dos componentes y supondremos que  $|\nu_e\rangle$  está bien representado por

$$|\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle. \quad (3.28)$$

Es ortogonal a  $|\nu_e\rangle$  el eigenestado

$$|\nu_x\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle, \quad (3.29)$$

como se puede verificar fácilmente.  $|\nu_x\rangle$  podría ser un neutrino de muón o de tau.  $\theta$  es conocido como el *ángulo de mezcla*.

Si el neutrino de electrón fue creado en  $t = 0$ , con momento  $\vec{p}$  en el estado de onda plana  $e^{ip \cdot z/\hbar}$ , entonces al tiempo  $t$  el estado habrá evolucionado a

$$|\nu_e\rangle_t = e^{-iE_1 t/\hbar} \cos \theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t/\hbar} \sin \theta |\nu_2\rangle, \quad (3.30)$$

donde  $E_1 = \sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4}$ ,  $E_2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4}$ . La ecuación (3.30) se obtiene directamente de considerar la mezcla de neutrinos como un sistema de dos estados,  $|\nu_1\rangle$  y  $|\nu_2\rangle$ , ecuaciones (3.24) y (3.25). Podemos solucionar las ecuaciones (3.28) y (3.29) para  $|\nu_1\rangle$  y  $|\nu_2\rangle$  en términos de  $|\nu_e\rangle$  y  $|\nu_x\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_x\rangle, \\ |\nu_2\rangle &= \sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_x\rangle, \end{aligned}$$

y entonces sustituimos en (3.30) para obtener

$$|\nu_e\rangle_t = e^{-iE_1 t} \left[ (\cos^2 \theta + e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \sin^2 \theta) |\nu_e\rangle - \sin \theta \cos \theta (1 - e^{i(E_1 - E_2)t}) |\nu_x\rangle \right]$$

Si después de un tiempo  $t$  el neutrino es detectado, la probabilidad de ser un neutrino de electrón es, por las reglas usuales de la mecánica cuántica,

$$P_e(t) = \left| (\cos^2 \theta + e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \sin^2 \theta) \right|^2 = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \{(E_1 - E_2)t/2\hbar\}, \quad (3.31)$$

y la probabilidad de ser un neutrino de la partícula  $x$  es

$$P_x(t) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left| (1 - e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar}) \right|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \{(E_2 - E_1)t/2\hbar\}. \quad (3.32)$$

A menos que  $m_1 = m_2$ , tal que  $E_1 = E_2$ , es evidente que  $P_e < 1$  si existe mezcla.

Un neutrino podría ser detectado e identificado por su conversión a su compañero leptónico cargado. En el caso de los neutrinos producidos por el decaimiento nuclear beta, o por reacciones termonucleares en el sol, las energías del neutrino son demasiado bajas para producir un leptón  $\mu$  o un  $\tau$ . De este modo, el neutrino  $x$  no será detectado. Si existe la mezcla de neutrinos, se podría observar como una reducción por un factor  $P_e$  en el flujo de neutrinos de electrón que se haya anticipado. Nótese que el número leptónico electrónico no se conserva (vea Secc. 2.5.1): estamos cruzando las fronteras del Modelo Estándar de la física de partículas.

Para analizar  $P_e$  con más detalle, suponemos que los neutrinos son altamente relativistas. Podemos entonces tomar el primer término en la expansión de Taylor y escribir

$$E_2 - E_1 = \sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} - \sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4} \approx \frac{(\Delta m^2) c^4}{2pc}, \quad (3.33)$$

donde  $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ . El resultado (3.33) también será conocido como la frecuencia de oscilación de los neutrinos. Cuando llegemos en el capítulo 4 a darnos cuenta que como resultado de tener neutrinos en un medio denso las oscilaciones son sincronizadas, será el objetivo de nuestros cálculos obtener precisamente, la **frecuencia de la oscilación sincronizada**.

Un paquete de ondas (el neutrino relativista) viajará con velocidad  $\approx c$  tal que, a una distancia  $z$  de la fuente,

$$P_e(z) = P_e(t = z/c) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \{(E_2 - E_1)z/2\hbar c\}. \quad (3.34)$$

Usando (3.33) podemos llegar a

$$P_e(z) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2(\pi z/\lambda), \quad (3.35)$$

donde la *longitud de oscilación*  $\lambda$  está dada por

$$\lambda = \frac{4\pi(pc)(\hbar c)}{(\Delta m^2)c^4}, \quad (3.36)$$

que puede ser escrita como

$$\lambda = 2,48 \left( \frac{pc}{1 \text{ MeV}} \right) \left( \frac{1 \text{ eV}^2}{(\Delta m^2)c^4} \right) m. \quad (3.37)$$

Es la naturaleza sinusoidal de  $P_e$  como función de  $z$  lo que da lugar al nombre **oscilaciones de neutrinos** para este fenómeno.

## Capítulo 4

# Oscilación sincronizada de neutrinos.

En el presente capítulo revisaremos la teoría que explica la oscilación sincronizada de neutrinos. Después calcularemos la frecuencia de oscilación resultante de neutrinos en situaciones que representan las condiciones en el universo temprano o en una explosión de supernova.

En la primer sección repasamos las herramientas matemáticas que explican la oscilación sincronizada de neutrinos y obtendremos, mediante la teoría, la forma de la frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{sinc}}$  de los mismos. Nos daremos cuenta que el fenómeno de oscilación sincronizada viene como consecuencia de la interacción de neutrinos con el medio denso compuesto de neutrinos. Igual que en el capítulo anterior, sólo analizaremos el caso de neutrinos de dos sabores: del electrón y del muón, aunque el análisis que emplearemos es similar para dos sabores cualesquiera de neutrinos.

La interacción de los neutrinos con el medio se estudia a través de un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$ . Así, en la segunda sección calcularemos las interacciones de neutrinos prueba con otros neutrinos del medio, del mismo y de diferente sabor que el neutrino prueba, a través de sus amplitudes invariantes, con la finalidad de calcular el potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$ .

En la sección final de este capítulo calculamos la frecuencia de oscilación sincronizada  $\omega_{\text{sinc}}$  utilizando el potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$  y graficaremos los resultados cambiando algunas condiciones del medio. Las conclusiones de los resultados obtenidos los dejaremos para el siguiente y último capítulo.

Los artículos [21]-[23] fueron revisados para la elaboración de los temas en este capítulo expuestos.

### 4.1. Oscilación sincronizada de neutrinos.

#### 4.1.1. Introducción.

Las propiedades de los neutrinos al atravesar la materia han atraído la atención de los investigadores en los últimos años. La razón para ésto es que la gran cantidad de electrones presentes en la materia conlleva a que la propagación de los neutrinos sea dependiente del sabor de los mismos y, a ciertas densidades, induce la oscilación de sabor de los neutrinos [6]. Se puede atribuir el efecto, principalmente, a la dispersión de los neutrinos con los electrones a través del intercambio de los bosones  $W^{\pm}$ . Entre las consecuencias se encuentra la solución al problema de los neutrinos solares. Algunas implicaciones de la oscilación de neutrinos inducida por el intercambio de partículas  $W^{\pm}$  en el universo temprano han sido consideradas en [16].

Sin embargo, en el universo temprano, las interacciones de neutrinos consigo mismos a través del intercambio de bosones Z no pueden ser despreciadas ya que la densidad de neutrinos es muy elevada. De hecho, simulaciones numéricas del universo temprano revelan que las propiedades de los neutrinos pueden ser modificadas significativamente por estos efectos [17]-[19].

Las autointeracciones de neutrinos son no lineales; en general, se estudian numéricamente. Más aún, en el universo temprano, el comportamiento de los neutrinos depende de la combinación de varios otros factores. Adicionalmente a la presencia de electrones y positrones y al mismo “gas” de neutrinos, se debe tomar en cuenta la razón de expansión del universo, entre otros. En esta tesis, no tomamos en cuenta estas complicaciones adicionales y consideramos una situación más simple que consiste en un gas de neutrinos que autointeractúan, dentro de un volumen fijo  $V$ , y no hay más leptones presentes. Queremos obtener, de este modo, ecuaciones analíticas que puedan describir el comportamiento no lineal de los neutrinos. Supondremos que los procesos de dispersión hacia atrás o fuertes (*hard-scattering*) son despreciables comparados con la dispersión hacia adelante (*forward-scattering*). El hecho es válido ya que la energía  $E$  del neutrino satisface la condición  $G_F E^2 / (\hbar c)^3 \ll 1$ . La dispersión elástica (*forward-scattering*) corresponde a efectos de interferencia de fase y da lugar a las oscilaciones de neutrinos. Bajo estas condiciones, los neutrinos no pueden ser creados ni destruidos, sólo oscilan de un sabor a otro.

Por simplicidad nos restringiremos a oscilaciones entre neutrinos de electrón y de muón. Para las oscilaciones en el vacío, los parámetros relevantes son el ángulo de mezcla en el vacío  $\theta$  y la diferencia de masas al cuadrado  $\Delta = (m_2^2 - m_1^2)c^4$ , véase la Secc. 3.3.2. El Hamiltoniano que describe la propagación de neutrinos libres es diagonal en la base de los eigenestados de masa. Los eigenestados de masa de los neutrinos  $\nu_1$  y  $\nu_2$  están relacionados con los eigenestados de sabor  $\nu_{eL}$  y  $\nu_{\mu L}$  mediante

$$\nu_1 = \nu_{eL} \cos \theta - \nu_{\mu L} \sin \theta, \quad \nu_2 = \nu_{eL} \sin \theta + \nu_{\mu L} \cos \theta, \quad (4.1)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , respectivamente.

El periodo de oscilación en el vacío  $T_\Delta$  está dado por

$$T_\Delta = \frac{4\pi E \hbar}{\Delta}. \quad (4.2)$$

Para un gas de  $N_\nu$  neutrinos con diferentes valores en el espectro de energía, los neutrinos oscilan con diversos periodos. En el límite de despreciar las interacciones, un gas de neutrinos (o de neutrinos y antineutrinos) con  $N_\nu$  grande muestra oscilación no coherente, es decir, la cantidad total de neutrinos de cierto sabor es independiente del tiempo para tiempos suficientemente grandes. Este comportamiento asintótico es independiente de las condiciones iniciales. Por ejemplo, supongamos que se inicia con un gas de neutrinos de electrón. Algunos se convertirán en neutrinos de muón y de este modo, al principio ocurrirá un comportamiento que depende del tiempo. El contenido de sabor de un neutrino individual al tiempo  $t$  es  $1 - \sin^2 2\theta [1 - \cos(2\pi t/T_\Delta)]$  para  $\nu_e$  y  $\sin^2 2\theta [1 - \cos(2\pi t/T_\Delta)]$  para  $\nu_\mu$ . La suma sobre las funciones coseno con distintos periodos  $T_\Delta$  las lleva a comportarse asintóticamente como una función constante de  $t$  si existen suficientes términos en la suma, o de otra manera, si  $N_\nu$  es suficientemente grande. La razón entre neutrinos de electrón y de muón en el límite  $t \rightarrow \infty$  es el factor constante  $(1 - \sin^2 2\theta) / \sin^2 2\theta$ .

El comportamiento como en el vacío domina si el gas de neutrinos es muy diluido, y así las interacciones debidas al intercambio de bosones Z son poco importantes. La importancia de las

interacciones neutrino-neutrino se determina mediante el parámetro adimensional  $\kappa$ , definido como

$$\kappa = \frac{\Delta}{2\sqrt{2}G_F E n_\nu}, \quad (4.3)$$

donde  $n_\nu = N_\nu/V$  es la densidad de neutrinos. Este parámetro se puede escribir como la razón  $T_\nu/T_\Delta$ , donde

$$T_\nu = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2}G_F n_\nu} \quad (4.4)$$

es la escala de tiempo asociada con las interacciones de neutrinos. Cuando la densidad de neutrinos es baja,  $\kappa$  es grande. Las interacciones neutrino-neutrino son poco frecuentes comparadas con un periodo de oscilación en el vacío, y el comportamiento es similar al de un gas sin interacciones internas. Esta región en el espacio del parámetro se caracteriza por la no coherencia.

En contraste, cuando la densidad de neutrinos es grande y por lo mismo  $\kappa \ll 1$ , las interacciones de neutrinos son importantes. Muchas interacciones neutrino-neutrino ocurren durante un periodo de oscilación en el vacío. Simulaciones numéricas hechas para un gas puro de neutrinos revelan la existencia, en esta región del parámetro, de un modo colectivo de la dinámica no lineal en la cual los comportamientos de neutrinos individuales están correlacionados. Un número significativo de neutrinos oscilan al unísono. Nos referimos a este comportamiento no intuitivo como ***oscilación sincronizada***. La oscilación sincronizada también se observa en las simulaciones numéricas para un gas de neutrinos y antineutrinos. Un sistema que conste inicialmente de neutrinos de electrón no sufre decoherencia. Por el contrario, un comportamiento oscilatorio se puede observar, aún a tiempos grandes. Una de las metas de esta tesis es obtener una descripción analítica de las oscilaciones sincronizadas para  $\kappa \ll 1$ .

#### 4.1.2. Marco teórico.

##### Las ecuaciones de movimiento en el vacío.

Un único neutrino relativista oscilando en el vacío obedece la ecuación (la ecuación tiene la forma del problema de dos estados)

$$i \frac{d\nu}{dt} = H\nu, \quad (4.5)$$

donde  $\nu(t)$  es la función de onda de dos componentes

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

con  $\nu_e^* \nu_e + \nu_\mu^* \nu_\mu = 1$ , y donde el Hamiltoniano efectivo está dado por

$$H = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

La probabilidad de que la partícula sea un neutrino de electrón es  $\nu_e^* \nu_e$  y de que sea un neutrino de muón es  $\nu_\mu^* \nu_\mu$ .

Recordemos que para expresar el Hamiltoniano en la base de sabores, pasamos del Hamiltoniano en la base de masas, que es diagonal, mediante la transformación de similitud

$$H = U H_D U^\dagger,$$



donde  $H_D$  es el Hamiltoniano diagonal en la base de masas y  $U$  es la matriz de rotación que expresa los sabores de los neutrinos en términos de la mezcla de los eigenestados de masa:

$$H_D = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$H = U H_D U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Y de aquí se sigue que  $H$  tiene la forma dada en la ecuación (4.7) mediante algunas identidades trigonométricas y un desarrollo en serie de Taylor del término  $E_2 - E_1$  que se muestran en el apéndice A.

Existe una reformulación conveniente y muy común para las ecuaciones anteriores. Es útil para la visualización del problema, así como también para la simulación numérica de las oscilaciones. Definimos el vector

$$\vec{v} \equiv (\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu, 2 \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu), 2 \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu)). \quad (4.8)$$

Entonces la ecuación para la oscilación de los neutrinos (4.5), (4.6) y (4.7) es equivalente a la que describe una partícula de masa y carga unitarias moviéndose en un campo magnético dado por

$$\vec{B} = \frac{\vec{\Delta}}{2E}, \quad (4.9)$$

donde

$$\vec{\Delta} \equiv \Delta(\cos 2\theta, -\sin 2\theta, 0). \quad (4.10)$$

Podemos pensar en el vector  $\vec{v}$  como un vector de polarización del espín de una partícula que precesa alrededor del vector de campo magnético  $\vec{B}$ .

Para un antineutrino las ecuaciones (4.7-4.10) son válidas si las funciones de onda del neutrino son reemplazadas por las funciones de onda de los antineutrinos, es decir,  $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ . Denotaremos el vector correspondiente para un antineutrino como  $\vec{w}$ .

Para un gas, hay un vector  $\vec{v}^j$  para el  $j$ -ésimo neutrino y un vector  $\vec{w}^k$  para el  $k$ -ésimo antineutrino. Las ecuaciones que gobiernan las autointeracciones del gas son entonces

$$\frac{d\vec{v}^j}{dt} = \vec{v}^j \times \vec{B}_v^j \quad (4.11)$$

para los vectores asociados con neutrinos, y

$$\frac{d\vec{w}^k}{dt} = \vec{w}^k \times \vec{B}_w^k \quad (4.12)$$

para los antineutrinos. Las ecuaciones (4.11) y (4.12) describen el movimiento de precesión de un fermión alrededor de un campo magnético. La equivalencia entre las ecuaciones (4.7-4.10) y (4.11) se muestra en el apéndice B. Aquí los campos magnéticos  $\vec{B}_v^j$  y  $\vec{B}_w^k$  están dados por

$$\vec{B}_v^j = \frac{\vec{\Delta}}{2E^j} - \vec{V}_{\nu\nu}, \quad \vec{B}_w^k = \frac{\vec{\Delta}}{2E^k} + \vec{V}_{\nu\nu}^*, \quad (4.13)$$

donde la energía del  $k$ -ésimo antineutrino es denotada por  $\bar{E}^k$ . Utilizamos la convención de que el asterisco en un vector indica un cambio en el signo de la tercera componente. Las contribuciones del vacío a los campos magnéticos son los términos en la ecuación (4.9) dependientes de  $\vec{\Delta}$ , dada en la ecuación (4.10). El potencial  $\vec{V}_{\nu\nu}$  es generado por el intercambio de bosones Z y está dado por

$$\vec{V}_{\nu\nu} = \frac{\sqrt{2}G_F}{V}(\langle\vec{v}\rangle - \langle\vec{w}^*\rangle), \quad (4.14)$$

donde  $G_F \simeq 1.17 \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2}$  es la constante de acoplamiento de Fermi, y

$$\langle\vec{v}\rangle = \sum_j \vec{v}^j, \quad \langle\vec{w}\rangle = \sum_k \vec{w}^k. \quad (4.15)$$

En la ausencia de  $\vec{V}_{\nu\nu}$ , las ecuaciones diferenciales de primer orden (4.11) y (4.12) se desacoplan y son lineales. Entonces el sistema es soluble y su solución corresponde a un gas que no interactúa, y en el cual cada neutrino muestra un comportamiento de oscilación como en el vacío. Cuando el término  $\vec{V}_{\nu\nu}$  está presente, las ecuaciones (4.11) y (4.12) están acopladas y son no lineales. Por esta razón, nos referimos a  $\vec{V}_{\nu\nu}$  como el término no lineal. La no linealidad conduce a efectos interesantes.

El número total de neutrinos  $N_\nu$  y antineutrinos  $N_{\bar{\nu}}$  está dado por

$$N_\nu = \sum_j |\vec{v}^j|, \quad N_{\bar{\nu}} = \sum_k |\vec{w}^k|. \quad (4.16)$$

Las densidades de neutrinos  $n_\nu$  y antineutrinos  $n_{\bar{\nu}}$  se pueden obtener dividiendo por  $V$ , es decir,  $n_\nu = N_\nu/V$  y  $n_{\bar{\nu}} = N_{\bar{\nu}}/V$ .

#### Las ecuaciones de movimiento en un gas puro de neutrinos.

En esta sección analizamos la oscilación sincronizada de un gas puro de neutrinos. Para este sistema  $N_{\bar{\nu}} = 0$  y la contribución al potencial efectivo para los neutrinos es

$$\vec{V}_{\nu\nu} = \frac{\sqrt{2}G_F}{V}\langle\vec{v}\rangle. \quad (4.17)$$

Consideremos una situación en la cual  $N_\nu$  neutrinos de electrón son colocados en una caja al tiempo  $t = 0$  de tal manera que las condiciones iniciales se pueden escribir como

$$\vec{v}(0) = (1, 0, 0). \quad (4.18)$$

En otras palabras, la condición (4.18) quiere decir que al tiempo  $t = 0$  todos los neutrinos son neutrinos de electrón. A  $t = 0$  la razón  $\kappa^j$  entre el término al vacío y el término de la interacción neutrino-neutrino para el  $j$ -ésimo neutrino es

$$\kappa^j = \frac{\Delta}{2\sqrt{2}G_F E^j n_\nu}. \quad (4.19)$$

Cuando  $\kappa^j \ll 1$ , el término del vacío es dominado por el término de la interacción de los neutrinos y la oscilación sincronizada aparece en las simulaciones numéricas. Despreciando el término no lineal, los neutrinos con más grandes energías oscilan más lentamente y los neutrinos con energías

más pequeñas oscilan más rápido. Sin embargo, un valor grande para el término  $\vec{V}_{\nu\nu}$  acelera los neutrinos lentos y retrasa los rápidos.

Para obtener una solución analítica podemos tomar ventaja de una propiedad del movimiento llamada alineamiento: las simulaciones numéricas muestran que los vectores en el sistema no lineal apuntan en una dirección común cuando el valor del parámetro  $\kappa^j$  es pequeño. El alineamiento del  $j$ -ésimo neutrino implica que la aproximación

$$\vec{v}^j(t) \approx \frac{\langle \vec{v} \rangle}{N_\nu} \equiv \vec{r}_v(t) \quad (4.20)$$

es buena. Aquí  $\vec{r}_v(t)$  es el vector promedio del neutrino. Esta propiedad nos sugiere que busquemos una solución para  $\vec{r}_v(t)$ .

Una ecuación para  $\vec{r}_v(t)$  puede obtenerse sumando sobre  $j$  en la ecuación (4.11) y utilizando las ecuaciones (4.13), (4.15) y (4.17):

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{r}_v \times \frac{\vec{\Delta}}{2E_0}, \quad (4.21)$$

donde el promedio inverso de la energía  $1/E_0$  se define como

$$\frac{1}{E_0} \equiv \frac{1}{N_\nu} \sum_j \frac{1}{E^j}. \quad (4.22)$$

La ecuación (4.21) muestra que la oscilación sincronizada en el gas puro de neutrinos es equivalente a la oscilación de un sólo neutrino en el vacío. Así, el vector promedio del neutrino realiza oscilaciones como en el vacío con una energía efectiva  $E_0$ .

Es nuestra meta mostrar la solución de la ecuación (4.21) cuando se considera un gas de neutrinos. Las condiciones iniciales para  $\vec{r}_v$  son

$$\vec{r}_v(0) = (1, 0, 0). \quad (4.23)$$

La ecuación (4.21), escrita por componentes es

$$\begin{aligned} \frac{dr_{v1}}{dt} &= \left( \frac{\Delta}{2E_0} \sin 2\theta \right) r_{v3}, \\ \frac{dr_{v2}}{dt} &= \left( \frac{\Delta}{2E_0} \cos 2\theta \right) r_{v3}, \\ \frac{dr_{v3}}{dt} &= -\frac{\Delta}{2E_0} (r_{v1} \sin 2\theta + r_{v2} \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Estas ecuaciones se simplifican en la base de eigenestados de masa en el vacío denotadas por  $\vec{R}(t)$  y dadas por

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv r_1 \cos 2\theta - r_2 \sin 2\theta, \\ R_2 &\equiv r_1 \sin 2\theta + r_2 \cos 2\theta, \\ R_3 &\equiv r_3. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En esta base, las ecuaciones nos llevan a las (4.24) cuando  $\theta = 0$ . De este modo,  $R_1(t)$  es una constante. Las ecuaciones para  $R_2$  y  $R_3$  se combinan para dar un sistema oscilatorio armónico. Incorporando las condiciones iniciales (4.23) encontramos que

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \cos 2\theta \\ R_2(t) &= \sin 2\theta \cos\left(\frac{\Delta}{2E_0}t\right), \\ R_3(t) &= -\sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta}{2E_0}t\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Regresando a la base de sabor, obtenemos las soluciones deseadas:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos\left(\frac{\Delta}{2E_0}t\right), \\ r_2(t) &= -\sin 2\theta \cos 2\theta \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta}{2E_0}t\right)\right], \\ r_3(t) &= -\sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta}{2E_0}t\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Resumiendo, la solución en la región del parámetro que indica una alta densidad de neutrinos está dada por las ecuaciones (4.20) y (4.27). Estas ecuaciones describen la oscilación sincronizada. Todos los neutrinos oscilan al unísono. Nótese que un perfecto alineamiento se obtiene en el límite  $\kappa^j \rightarrow 0$ .

Cuando algunos  $\kappa^j$  son grandes, los neutrinos correspondientes no participan en el modo colectivo. Si la mayoría de los neutrinos tiene  $\kappa^j$  con valores pequeños, de cualquier manera la oscilación sincronizada ocurre pero con una amplitud menor. El criterio para la sincronización en un gas puro de neutrinos es  $\kappa_0 < 1$ , donde

$$\kappa_0 \equiv \frac{\Delta}{2\sqrt{2}G_F E_0 n_\nu}. \quad (4.28)$$

Se puede tener un entendimiento intuitivo del alineamiento y la sincronización como sigue. Supongamos que la mayoría de los neutrinos están alineados. Estos vectores apuntan a lo largo del vector promedio  $\vec{r}(t)$  y colectivamente rotan alrededor de  $\vec{\Delta}$ . Consideremos un neutrino particular con una energía más alta que el promedio. Sea  $\vec{v}$  su vector. En ausencia del término no lineal,  $\vec{v}$  rota alrededor de  $\vec{\Delta}$  con una rapidez relativamente lenta. Supongamos que  $\vec{v}$  comienza a quedarse a la zaga respecto a  $\vec{r}$ . Entonces, ya que el término no lineal es mucho más grande que el del término del vacío, el neutrino experimenta un gran campo magnético en la dirección de  $\vec{r}(t)$ . Debido a esto,  $\vec{v}$  rota alrededor de  $\vec{r}$ . Después de medio periodo,  $\vec{v}$  habrá rotado a la posición que sigue el grupo. Así que  $\vec{v}$  no puede retrasarse, es decir, separarse del grupo.

Existe un argumento similar para los neutrinos con una energía menor que el promedio. Si  $\vec{v}$  empieza a adelantarse a  $\vec{r}$ , experimenta un gran campo magnético en la dirección de  $\vec{r}(t)$ , entonces termina rotando alrededor de  $\vec{r}$  más que alrededor de  $\vec{\Delta}$ . Entonces los neutrinos con energías diferentes al promedio no rotan alrededor de  $\vec{\Delta}$  a distintas velocidades, sino que permanecen juntos en grupo. Éste es el alineamiento. Ya que el grupo sigue a  $\vec{r}$ , el cual rota alrededor de  $\vec{\Delta}$ , aparece el comportamiento oscilatorio. Éste es el fenómeno de la oscilación sincronizada.

Observemos la forma del denominador de la ecuación (4.28), nos daremos cuenta en la Secc. 4.3 que aparece el potencial efectivo para la interacción neutrino-neutrino como parte del mismo.

Lo que nos queda por delante es encontrar el potencial efectivo para la interacción neutrino-neutrino  $V_{\text{ef}}$  mediante la teoría cuántica, a través del cálculo de las amplitudes invariantes para las interacciones. Haremos una analogía con el teorema óptico para obtener el potencial efectivo. Este potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$  lo compararemos con el dado por la ecuación (4.17) para obtener un valor numérico que nos permita encontrar un valor para la oscilación de sincronización  $\omega_{\text{sinc}}$  bajo las condiciones, por ejemplo, de una supernova. (Secc. 4.4).

## 4.2. Cálculo de algunas amplitudes invariantes.

En la presente sección, nos dedicaremos al cálculo de las amplitudes invariantes de los procesos de dispersión entre neutrinos. Estas amplitudes serán necesarias para obtener la forma del potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$  que, como ya hemos hecho alguna indicación previamente, nos ayudará a dar valores estimados, bajo ciertas condiciones, de la oscilación sincronizada de los neutrinos.

Calcularemos la amplitud invariante del proceso de dispersión de distintos sabores de neutrinos, primero de neutrinos de distinto sabor, después de neutrinos del mismo sabor. La amplitud invariante será representada mediante la letra  $M$ .

### 4.2.1. Cálculo de $M(\nu_e \nu_\mu \rightarrow \nu_e \nu_\mu)$ .

El diagrama de Feynman para este proceso se muestra en la Fig. (4.1). De este diagrama

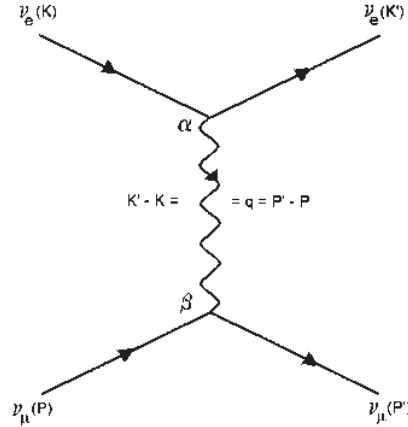


Figura 4.1: La dispersión de dos neutrinos con momentos  $\vec{P}$  y  $\vec{K}$  mediante el intercambio de una partícula Z virtual con momento  $\vec{q}$ .

podemos calcular la amplitud invariante haciendo referencia al capítulo 2, en lo relativo a las normas que se siguen para interpretar matemáticamente las partes que integran el diagrama. Los vértices se escriben como

$$\frac{-ig}{4 \cos \theta_W} \gamma_\mu (1 - \gamma_5).$$

Ésto debido a que en la interacción de neutrinos con neutrinos, cuyo diagrama de Feynman a nivel de árbol se muestra en la Fig. 4.1, sólo participan los bosones Z como mediadores de la interacción y al tomar los valores dados por la tabla 4 para los neutrinos. En la norma de Feynman el propagador del bosón mediador es

$$\frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 - m_Z^2}. \quad (4.29)$$

La amplitud invariante  $-iM$  se calcula entonces como el producto de los factores debidos a las distintas partes del diagrama; así obtenemos

$$\begin{aligned} -iM &= \bar{u}_{\nu_e}(K') \left( \frac{-ig}{4 \cos \theta_W} \right) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(K) \left( \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 - m_Z^2} \right) \\ &\quad \times \bar{u}_{\nu_\mu}(P') \left( \frac{-ig}{4 \cos \theta_W} \right) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(P), \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde  $\cos \theta_W = \frac{m_W}{m_Z} \cong 0.23$  (ecuación (2.104), Secc. 2.5.2),  $\theta_W$  es el ángulo de Weinberg,  $m_W$  y  $m_Z$  son la masa de las partículas W y Z, respectivamente, partículas mediadoras de la interacción débil. Continuando el cálculo tenemos:

$$M = \frac{-1}{q^2 - m_Z^2} \frac{g^2}{(4 \cos \theta_W)^2} \bar{u}_{\nu_e}(K') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(K) \bar{u}_{\nu_\mu}(P') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(P).$$

No tomaremos en cuenta los estados de los espines iniciales y finales por lo que estaremos determinando la amplitud invariante promediada sobre espines iniciales y sumada sobre espines finales

$$M(K, K', P, P', s) \longrightarrow \bar{M} = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} M(K, K', P, P'), \quad (4.31)$$

explícitamente tenemos

$$\bar{M} = \frac{1}{4} \frac{-g^2}{(16 \cos^2 \theta_W)(q^2 - m_Z^2)} \sum_{\text{espin}} \left[ \bar{u}_{\nu_e}^{sf}(K') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}^{si}(K) \bar{u}_{\nu_\mu}^{sf}(P') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}^{si}(P) \right].$$

Suponemos la dispersión hacia delante, es decir,  $q = K' - K = P' - P = 0$ , y suponemos también la conservación del espín,  $s_{\nu_e}^f = s_{\nu_e}^i$  y  $s_{\nu_\mu}^f = s_{\nu_\mu}^i$ . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{1}{4} \frac{g^2}{16 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \sum_{\text{espin}} \sum_{a,b,c,d} \left[ \bar{u}_{a\nu_e}^{sf}(K) [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]_{ab} u_{b\nu_e}^{sf}(K) \right] \left[ \bar{u}_{c\nu_\mu}^{sf}(P) [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]_{cd} u_{d\nu_\mu}^{sf}(P) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{g^2}{16 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \sum_{\text{espin}} \sum_{a,b,c,d} [u_{\nu_e}^{sf}(K) \bar{u}_{\nu_e}^{sf}(K)]_{ba} [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]_{ab} [u_{\nu_\mu}^{sf}(P) \bar{u}_{\nu_\mu}^{sf}(P)]_{dc} [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]_{cd}. \end{aligned}$$

Hacemos uso de la relación de completez

$$\sum_{\text{espin}} u^s(P) \bar{u}^s(P) = \not{P} + m \quad (4.32)$$

y suponemos, además, que  $m_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\text{espin}} u^s(P) \bar{u}^s(P) = \not{P}$ . Observamos además que los índices y la sumatoria sobre ellos de la última ecuación de  $\bar{M}$ , reducen la ecuación al cálculo de la traza de la matriz, entonces tenemos

$$\bar{M} = \frac{1}{4} \frac{g^2}{16 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \text{Tr}\{\not{K} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5)\} \text{Tr}\{\not{P} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)\}. \quad (4.33)$$

Para reducir la ecuación (4.33) hacemos uso de los teoremas sobre trazas; éstos aparecen en el apéndice C. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{K\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\}\text{Tr}\{P\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\} &= [\text{Tr}\{K\gamma_\alpha\} - \text{Tr}\{K\gamma_\alpha\gamma_5\}][\text{Tr}\{P\gamma^\alpha\} - \text{Tr}\{P\gamma^\alpha\gamma_5\}] = \\ &= [\text{Tr}\{\gamma^\alpha K_\alpha\gamma_\alpha\} - \text{Tr}\{\gamma^\alpha K_\alpha\gamma_\alpha\gamma_5\}][\text{Tr}\{\gamma_\alpha P^\alpha\gamma^\alpha\} - \text{Tr}\{\gamma_\alpha P^\alpha\gamma^\alpha\gamma_5\}] = (4K_\alpha)(4P^\alpha) = 16P \cdot K \end{aligned}$$

Así, finalmente llegamos a la expresión

$$\overline{M} = \frac{1}{4} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} K \cdot P. \quad (4.34)$$

Recordemos del capítulo 2 que  $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$  y que  $\cos \theta_W = m_W/m_Z$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{1}{4} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} K \cdot P = \frac{1}{4} \frac{g^2}{\frac{m_W^2}{m_Z^2} m_Z^2} K \cdot P = \frac{1}{4} \frac{g^2}{m_W^2} K \cdot P = \frac{8}{4} \frac{G_F}{\sqrt{2}} K \cdot P \\ \overline{M}(\nu_e \nu_\mu \rightarrow \nu_e \nu_\mu) &= \sqrt{2} G_F K \cdot P. \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4.2.2. Cálculo de $M(\nu_e \nu_e \rightarrow \nu_e \nu_e)$ .

El cálculo de esta amplitud invariante se basa en los diagramas de Feynman de las figuras 4.1 y 4.2. Al ser partículas idénticas las que interactúan, no podemos estar seguros de los estados finales de las dos partículas y los dos procesos deben ser tenidos en cuenta. Se calcula la amplitud invariante del primer diagrama de Feynman (Fig. 4.1) y se le suma (con una inversión de signo) la amplitud del segundo diagrama (Fig. 4.2). La inversión de signo es porque las partículas son fermiones y la función de onda del estado final debe ser antisimétrica.

El cálculo de la amplitud invariante debido al primer diagrama (Fig. 4.1) es análogo al de la sección anterior, entonces  $\overline{M}_1 = \sqrt{2} G_F K \cdot P$ . El subíndice 1 indica la amplitud invariante debida al diagrama de la Fig. 4.1. Procedamos a calcular la amplitud invariante para el diagrama 2, Fig. 4.2,

$$\begin{aligned} -iM_2 &= \bar{u}_{\nu_e}(P') \left( \frac{-ig}{4 \cos \theta_W} \right) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(K) \left( \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 - m_Z^2} \right) \\ &\quad \times \bar{u}_{\nu_e}(K') \left( \frac{-ig}{4 \cos \theta_W} \right) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(P). \end{aligned}$$

Continuando el cálculo tenemos:

$$M_2 = \frac{-1}{q^2 - m_Z^2} \frac{g^2}{(4 \cos \theta_W)^2} \bar{u}_{\nu_e}(P') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(K) \bar{u}_{\nu_e}(K') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(P).$$

No tomaremos en cuenta los espines, por lo que haremos el cambio

$$M(K, K', P, P', s) \longrightarrow \overline{M} = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} M(K, K', P, P'),$$

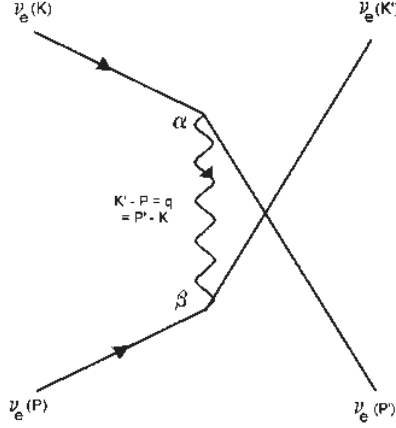


Figura 4.2: La otra posible dispersión de dos neutrinos con momentos  $\vec{P}$  y  $\vec{K}$  mediante el intercambio de un bosón Z virtual con momento  $\vec{q}$ .

$$\overline{M}_2 = \frac{1}{4} \frac{-g^2}{(16 \cos^2 \theta_W m_Z^2)(q^2 - m_Z^2)} \sum_{\text{espin}} \left[ \bar{u}_{a\nu_e}^{s_{\nu_e}^f}(P') [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]_{ab} u_{b\nu_e}^{s_{\nu_e}^i}(K) \right] \times \left[ \bar{u}_{c\nu_e}^{s_{\nu_e}^f}(K') [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]_{cd} u_{d\nu_e}^{s_{\nu_e}^i}(P) \right].$$

Suponemos la dispersión hacia delante, es decir,  $K' = K$ ,  $P' = P$ , y suponemos también la conservación del espín,  $s_{\nu_e}^f = s_{\nu_e}^i$ . Entonces

$$\begin{aligned} \overline{M}_2 &= \frac{1}{4} \frac{-g^2}{(16 \cos^2 \theta_W m_Z^2)(q^2 - m_Z^2)} \sum_{\text{espin}} \sum_{a,b,c,d} \left[ \bar{u}_{a\nu_e}^{s_{\nu_e}}(P) [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]_{ab} u_{b\nu_e}^{s_{\nu_e}}(K) \right] \\ &\quad \times \left[ \bar{u}_{c\nu_e}^{s_{\nu_e}}(K) [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]_{cd} u_{d\nu_e}^{s_{\nu_e}}(P) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \frac{-g^2}{(16 \cos^2 \theta_W m_Z^2)(q^2 - m_Z^2)} \sum_{\text{espin}} \sum_{a,b,c,d} [u_{\nu_e}^{s_{\nu_e}}(P) \bar{u}_{\nu_e}^{s_{\nu_e}}(P)]_{da} [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]_{ab} \\ &\quad \times [u_{\nu_e}^{s_{\nu_e}}(K) \bar{u}_{\nu_e}^{s_{\nu_e}}(K)]_{bc} [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]_{cd}. \end{aligned}$$

Hacemos uso de la relación de completez

$$\sum_{\text{espin}} u^s(P) \bar{u}^s(P) = \not{P} + m$$

y suponemos, además, que  $m_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\text{espin}} u^s(P) \bar{u}^s(P) = \not{P}$ . Tenemos la condición adicional  $m_Z^2 \gg q^2$ . Observamos además que los índices y la sumatoria sobre ellos de la última ecuación de  $\overline{M}_2$  reducen la ecuación al cálculo de la traza de una matriz, entonces tenemos

$$\overline{M}_2 = \frac{1}{4} \frac{g^2}{16 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \text{Tr} \{ \not{P} [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)] \not{K} [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)] \} \quad (4.36)$$



Para reducir la ecuación (4.36) hacemos uso de los teoremas sobre trazas (ver apéndice C), en este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\not{P}[\gamma_\alpha(1-\gamma_5)]\not{K}[\gamma^\alpha(1-\gamma_5)]\} &= \text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\not{K}\gamma^\alpha\} - \text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\not{K}\gamma^\alpha\gamma_5\} \\
&\quad - \text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\gamma_5\not{K}\gamma^\alpha\} + \text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\gamma_5\not{K}\gamma^\alpha\gamma_5\} \\
\text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\not{K}\gamma^\alpha\} &= -2\text{Tr}\{\not{P}\not{K}\} = -2(4)P \cdot K \\
\text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\not{K}\gamma^\alpha\gamma_5\} &= -2\text{Tr}\{\not{P}\not{K}\gamma_5\} = -2\text{Tr}\{\gamma_5\not{P}\not{K}\} = 0 \\
\text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\gamma_5\not{K}\gamma^\alpha\} &= \text{Tr}\{\not{K}\gamma^\alpha\not{P}\gamma_\alpha\gamma_5\} = 0 \\
\text{Tr}\{\not{P}\gamma_\alpha\gamma_5\not{K}\gamma^\alpha\gamma_5\} &= \text{Tr}\{\gamma_5\not{P}\gamma_\alpha\not{K}\gamma^\alpha\gamma_5\} = -2\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_5\not{P}\not{K}\} = -2\text{Tr}\{\not{P}\not{K}\} = -2(4)P \cdot K
\end{aligned}$$

Así, finalmente llegamos a la expresión

$$\overline{M}_2 = -\frac{1}{4} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} K \cdot P. \quad (4.37)$$

Recordemos que  $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$  y que  $\cos \theta_W = m_W/m_Z$ , entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}_2 &= -\frac{1}{4} \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W m_Z^2} K \cdot P = -\frac{1}{4} \frac{g^2}{\frac{m_W^2}{m_Z^2} m_Z^2} K \cdot P = -\frac{1}{4} \frac{g^2}{m_W^2} K \cdot P = -\frac{8}{4} \frac{G_F}{\sqrt{2}} K \cdot P \\
\overline{M}_2 &= -\sqrt{2} G_F K \cdot P.
\end{aligned}$$

Hagamos la suma de las amplitudes invariantes debidas a los diagramas de Feynman de las figuras 4.1 y 4.2. A la segunda amplitud le hacemos cambio de signo. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}(\nu_e \nu_e \rightarrow \nu_e \nu_e) &= \overline{M}_1 - \overline{M}_2 \\
&= \sqrt{2} G_F K \cdot P + \sqrt{2} G_F K \cdot P \\
&= 2\sqrt{2} G_F K \cdot P.
\end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente, sumamos las amplitudes invariantes debidas a las dispersiones  $\nu_e \nu_\mu \rightarrow \nu_e \nu_\mu$  y  $\nu_e \nu_e \rightarrow \nu_e \nu_e$ :

$$\begin{aligned}
\overline{M}(\nu_e \nu_{\mu,e} \rightarrow \nu_e \nu_{\mu,e}) &= \overline{M}(\nu_e \nu_\mu \rightarrow \nu_e \nu_\mu) + \overline{M}(\nu_e \nu_e \rightarrow \nu_e \nu_e) \\
&= \sqrt{2} G_F K \cdot P + 2\sqrt{2} G_F K \cdot P \\
&= 3\sqrt{2} G_F K \cdot P
\end{aligned} \quad (4.39)$$

### 4.3. El potencial efectivo de las interacciones neutrino-neutrino.

Según indicamos en la Secc. 4.1, para calcular la frecuencia de oscilación sincronizada necesitamos conocer cómo interactúan los neutrinos cuando éstos se propagan en un medio denso de materia. En nuestro caso será un medio muy denso de neutrinos, condiciones encontradas en el universo temprano o en una explosión de supernova. Esta interacción de los neutrinos con el medio la haremos mediante un potencial efectivo que depende, entre otras cosas, de la amplitud

invariante de los procesos de dispersión (figuras 4.1 y 4.2). El cálculo directo mediante la teoría es complicado e incierto dada nuestra imposibilidad de conocer los estados de sabor en el tiempo, es decir, cuántos neutrinos son de un sabor o de otro en un instante dado. Recordemos que están oscilando, y la energía de cada neutrino particular también nos es desconocida.

A continuación explicaremos cómo podemos hacer una estimación de la oscilación de sincronización de los neutrinos  $\omega_{\text{sinc}}$ . Tenemos un medio denso de neutrinos de los varios sabores. De este medio tomamos un neutrino que observaremos y lo llamamos “*neutrino prueba*”,  $\nu_{\text{prueba}}$ . Este neutrino interactúa con el medio y su interacción con el medio la expresaremos a través de un potencial debido a la materia, que llamaremos “*potencial efectivo*”,  $V_{\text{ef}}$ . Para calcular el potencial efectivo necesitamos conocer las amplitudes invariantes  $M$  del neutrino prueba al interactuar con neutrinos del mismo y de diferente sabor. Tomamos un “*neutrino del medio*”,  $\nu_{\text{medio}}$ , calculamos la amplitud invariante y finalmente para tomar en cuenta la interacción de todos los neutrinos del medio con nuestro neutrino prueba hacemos un promedio como se verá un poco más adelante. Esquemáticamente se ve en la Fig. 4.3.

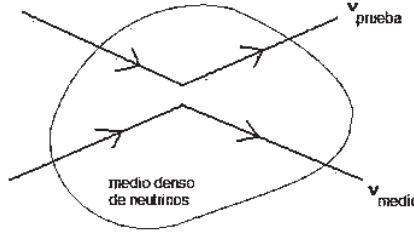


Figura 4.3: Interacción del neutrino prueba con un medio denso de neutrinos.

Hacemos una analogía con lo que se conoce como teorema óptico, que explica que un rayo de luz al pasar a través de un medio puede sufrir un proceso de dispersión como resultado de su interacción con el medio. Matemáticamente, el teorema óptico es

$$n_{\text{ref}} = \frac{kc}{\omega} = 1 + \frac{2\pi c^2}{\omega^2} n_{\text{medio}} f(\omega, 0), \quad (4.40)$$

donde  $n_{\text{ref}}$  es el índice de refracción,  $\omega$  es la frecuencia,  $k$  es el número de onda,  $n_{\text{medio}}$  es la densidad de dispersores del medio y  $f(\omega, 0)$  es la amplitud de dispersión de una onda por un medio dispersivo a ángulo cero [20]. Multiplicamos la ecuación anterior por  $\omega$  y tenemos

$$\begin{aligned} kc &= \omega + \frac{2\pi c^2}{\omega} n_{\text{medio}} f(\omega, 0), \\ \omega &= kc - \frac{2\pi c^2}{\omega} n_{\text{medio}} f(\omega, 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

El segundo término de la suma nos indica cómo interactúa una onda luminosa con un medio material, por lo tanto, así expresaremos nuestro potencial efectivo

$$\omega = kc - V_{\text{ef}}^{\text{luz}}; \quad (4.42)$$

y comparando las ecuaciones (4.41) y (4.42), se puede observar que

$$V_{\text{ef}}^{\text{luz}} = \frac{2\pi c^2}{\omega} n_{\text{medio}} f(\omega, 0).$$

Para lograr la analogía con el potencial efectivo de la interacción neutrino-neutrino, primero pasamos a unidades naturales y  $c = \hbar = 1$ .  $\omega$  es la energía  $E$  del neutrino que estamos observando, según las relaciones de de Broglie, ecuaciones (2.5). La amplitud de dispersión  $f$  tiene unidades de longitud, es decir de  $[E]^{-1}$  en unidades naturales, mientras que la amplitud invariante es adimensional. Para que las dimensiones en nuestras ecuaciones sean consistentes, el lado derecho de nuestra ecuación anterior lo multiplicamos por  $\omega/\omega$  y haremos la correspondencia de  $\bar{M}$  con  $\omega f(\omega, 0)$ . Así,

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}^{\text{luz}} &= \frac{2\pi}{\omega^2} n_{\text{medio}} \omega f(\omega, 0) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad V_{\text{ef}} &= \frac{2\pi}{E^2} n_{\nu} \bar{M}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Veámos que el potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$  de la ecuación (4.43) es el potencial dado en (4.17) (salvo un factor que será determinado más adelante), o sea, tienen la misma forma que el denominador de la ecuación (4.19) multiplicado por  $E^j$ .

El módulo del potencial efectivo  $\vec{V}_{\nu\nu}$  se escribe como (revisar ecuaciones (4.16) y (4.17)).

$$\begin{aligned} |\vec{V}_{\nu\nu}| &= \left| \frac{\sqrt{2}G_F}{V} \langle \vec{v} \rangle \right| = \frac{\sqrt{2}G_F}{V} |\langle \vec{v} \rangle| = \frac{\sqrt{2}G_F}{V} \sum_j |\vec{v}^j| = \\ &= \frac{\sqrt{2}G_F}{V} N_{\nu} = \sqrt{2}G_F n_{\nu}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}$  calculado según la teoría cuántica es

$$V_{\text{ef}} = \frac{2\pi}{E^2} n_{\nu} \bar{M}.$$

Sustituimos en (4.43) el valor obtenido para  $\bar{M}$ , ecuación (4.39),

$$V_{\text{ef}} = \frac{2\pi}{E^2} n_{\nu} (3\sqrt{2}G_F K \cdot P) = 6\pi\sqrt{2}G_F n_{\nu} \frac{K \cdot P}{E^2}.$$

Hay que tener en cuenta que  $K$  y  $E$  son el momento y la energía del neutrino prueba y  $P$  es el momento del neutrino del medio. Existe una consideración respecto al marco de referencia donde medimos los momentos y energías de los neutrinos del gas que no hemos tomado en cuenta y que simplificará la forma de la última ecuación que hemos obtenido para  $V_{\text{ef}}$ . Los momentos y energías los medimos en un marco de referencia en el que el gas de neutrinos, como un todo, está en reposo. Así que el tetramomento de este marco está dado por el vector  $u^{\mu} = (1, \vec{0})$ ; este vector es tal que cumple  $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ . Si lo que queremos que signifique  $V_{\text{ef}}$  es el potencial sobre la partícula de prueba  $\nu_{\text{prueba}}$  debido al medio como un todo, entonces  $P$ , el tetramomento debido a  $\nu_{\text{medio}}$ , debe ser promediado sobre todos los posibles valores que tome en el gas. Así,  $\langle P \rangle$ , el valor promedio de  $P$ , debe seguir la dirección del vector unitario  $u^{\mu}$  que tiene el marco de referencia y recordando que  $m_{\nu} \approx 0$ , se sigue

$$\langle P \rangle = \langle P^{\mu} \rangle u_{\mu} = \langle (E_{\nu_{\text{medio}}}, \vec{P}) \rangle \cdot (1, \vec{0}) = \langle E_{\nu_{\text{medio}}} \rangle = E_0,$$

donde  $E_0$  es la energía promedio de los neutrinos del medio y tiene la forma que ya habíamos dado en la ecuación (4.22) de la Secc. 4.1. Asimismo, como el neutrino prueba será un neutrino

cualquiera de los que están en el medio, tenemos que un  $\nu_{\text{prueba}}$  tendrá una energía promedio  $E_0$  que es la que tiene un neutrino cualquiera de los que estén en el ensemble de neutrinos. Con las consideraciones anteriores, la ecuación para  $V_{\text{ef}}$  se simplifica:

$$V_{\text{ef}} = 6\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}n_{\nu}\frac{K \cdot P}{E^2} = 6\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}n_{\nu}\frac{K_{\mu}E_0u^{\mu}}{E_0^2} = 6\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}n_{\nu}\frac{E_0^2}{E_0^2} = 6\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}n_{\nu}. \quad (4.45)$$

Hemos llegado a mostrar que  $V_{\text{ef}}$  tiene la forma de (4.44) con un factor  $6\pi$  adicional. De este modo justificamos la forma del potencial de interacción neutrino-neutrino propuesta.

#### 4.4. Cálculo de la frecuencia de oscilación sincronizada.

Es nuestra intención en esta sección obtener algunos valores de la frecuencia de oscilación y de la densidad de neutrinos presentes en un medio según las condiciones encontradas en una supernova o en el universo temprano. Para hacer posible el cálculo analíticamente, será necesario hacer uso de algunas hipótesis para simplificar el problema, ya que de otro modo, se torna imposible el cálculo analítico. Recordemos que las ecuaciones que describen este fenómeno son no lineales, que no es posible conocer la densidad de neutrinos de uno o de otro sabor presentes en un instante dado, que la presencia de otras partículas afecta la oscilación, que las partículas pueden tener energías y momentos muy variados dependiendo de las condiciones en las que se encuentren, etc.

Algunas simplificaciones que haremos ya han sido mencionadas anteriormente, tales como que no tomaremos en cuenta la expansión del gas de neutrinos, ni la presencia de otras partículas aparte de los neutrinos mismos. Algunas simplificaciones adicionales las mencionaremos al necesitarlas conforme avancemos en los cálculos.

Recordemos la ecuación (4.28), que nos da la condición de la sincronización:

$$\kappa_0 \equiv \frac{\Delta}{2\sqrt{2}G_{\text{F}}E_0n_{\nu}} = \frac{\Delta}{2E_0|\vec{V}_{\nu\nu}|}.$$

Utilizaremos  $V_{\text{ef}}$  en lugar de  $|\vec{V}_{\nu\nu}|$  en la definición de  $\kappa_0$  porque fue un valor obtenido según nuestras consideraciones y cálculos realizados en esta tesis. Haciendo el cambio ya indicado,

$$\kappa_0 = \frac{\Delta}{2E_0V_{\text{ef}}} = \frac{\Delta}{12\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}E_0n_{\nu}},$$

procedamos a reescribir la ecuación anterior como

$$E_0n_{\nu} = \frac{\Delta}{12\pi\sqrt{2}G_{\text{F}}\kappa_0}. \quad (4.46)$$

En la parte derecha de la ecuación aparecen solo constantes y el valor de  $\kappa_0$ , éste último será una de las variables que modificaremos a nuestro arbitrio para tratar de entender este fenómeno. De este modo, el lado derecho de la ecuación anterior nos da el valor del lado izquierdo. Una vez que conozcamos el lado derecho, calcularemos los valores que toman  $E_0$  y  $n_{\nu}$ , lo que será posible con las consideraciones siguientes.

El valor de  $E_0$  es el dado en la ecuación (4.22), es decir, es un promedio estadístico. Tenemos que promediar sobre las energías  $E$  de las partículas del medio. El promedio que utilizamos es como el promedio térmico con la distribución de Fermi-Dirac, ya que las partículas involucradas son fermiones y estamos dentro del terreno de la mecánica cuántica. Justificamos el cálculo del valor promedio para  $E_0$ , porque estamos considerando aquí que las partículas se encuentran en equilibrio térmico, lo cual podría no ser cierto en una situación general.

Entonces, la ecuación (4.22) se convierte en

$$E_0 = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3} E n(E) dE}{\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3} n(E) dE}, \quad (4.47)$$

donde según la distribución de Fermi-Dirac

$$n(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_\nu)} + 1},$$

con  $\beta = 1/K_B T$ ;  $K_B$ , la constante de Boltzmann;  $T$  es la temperatura y  $\mu_\nu$  es el potencial electroquímico, en este caso del neutrino. Haremos las siguientes simplificaciones en nuestro análisis,  $\mu_\nu = 0$  y  $K_B = 1$  porque estamos trabajando en unidades naturales. Así

$$n(E) = \frac{1}{e^{E/T} + 1}.$$

Procedamos ahora a resolver la primera integral, numerador ecuación (4.47)

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{E dE}{(e^{E/T} + 1)}. \quad (4.48)$$

Haremos un cambio de variable

$$u = \frac{E}{T} \Rightarrow E = uT \Rightarrow dE = T du,$$

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{u T^2 du}{e^u + 1} = \frac{T^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{u du}{e^u + 1}.$$

La integral es de la forma

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1} = \frac{(2^n - 1) n! \zeta(n+1)}{2^n}.$$

En la ecuación anterior  $\zeta$  es la función ‘zeta de Riemann’. Entonces llegamos a la expresión

$$I_1 = \frac{T^2}{(2\pi)^3} \frac{(2^1 - 1) 1! \zeta(1+1)}{2^1} = \frac{T^2}{(2\pi)^3} \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{T^2}{(2\pi)^3} \frac{\pi^2}{12}$$

$$I_1 = \frac{T^2}{(2\pi)^3} \frac{\pi^2}{12}. \quad (4.49)$$

Resolvemos la segunda integral, la que se encuentra en el denominador de la ecuación (4.47):

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dE}{e^{E/T} + 1}.$$

Volvemos a hacer el mismo cambio de variable que en la integral anterior y tenemos

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{T du}{e^u + 1}.$$

La integral es de la forma

$$\int \frac{du}{e^u + 1} = u - \ln(1 + e^u),$$

y llegamos a la expresión

$$\int_0^\infty \frac{du}{e^u + 1} = u - \ln(1 + e^u) \Big|_0^\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} u - \ln(1 + e^u) + \ln 2 = \ln 2.$$

De este modo,

$$I_2 = \frac{T}{(2\pi)^3} \ln 2. \quad (4.50)$$

Tenemos los elementos para dar la forma de la energía promedio  $E_0$ , definida según (4.47)

$$E_0 = \frac{\frac{\pi^2 T^2}{12(2\pi)^3}}{\frac{T \ln 2}{(2\pi)^3}} = \frac{\pi^2 T}{12 \ln 2}. \quad (4.51)$$

Podemos apreciar que la energía promedio depende de la temperatura  $T$ .

Con la forma para  $E_0$  recién obtenida y dando un valor para  $\kappa_0$  podemos encontrar un valor para la densidad de neutrinos  $n_\nu$  en el medio y tendríamos todos los elementos necesarios para seguir modificando los parámetros y observar las consecuencias. Calculemos entonces el valor  $n_\nu$  bajo algunas condiciones dadas. La condición señalada para la sincronización era (ecuación 4.28)

$$\kappa_0 \equiv \frac{\Delta}{2\sqrt{2}G_F E_0 n_\nu} < 1.$$

Para tomar el caso límite y simplificar nuestros cálculos, supongamos  $\kappa_0 = 1$ , entonces la ecuación (4.46) queda como

$$E_0 n_\nu = \frac{\Delta}{12\pi\sqrt{2}G_F}.$$

Tomaremos los valores  $\Delta = 0.1 \text{ eV}^2$  y  $G_F = 1.17 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$ , obtenidos experimentalmente; entonces

$$E_0 n_\nu = \frac{1 \times 10^{-13} \text{ MeV}^2}{12\pi\sqrt{2}(1.17 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2})},$$

$$E_0 n_\nu = \frac{8.55 \times 10^{-3} \text{ MeV}^4}{12\pi\sqrt{2}}.$$

Calculamos ahora el valor de  $E_0$  según (4.51). Para el valor de la temperatura  $T$ , tomamos el valor de la temperatura en una explosión de supernova o la temperatura en el universo temprano. En unidades naturales,  $T \sim 1 - 10 \text{ MeV's}$ ; para nuestro cálculo tomamos el valor de  $5 \text{ MeV}$ ,

$$E_0 = \frac{\pi^2 (5 \text{ MeV})}{12 \ln 2}.$$

Entonces el valor de  $n_\nu$  es

$$n_\nu = \frac{\Delta}{12\pi\sqrt{2}G_F E_0} = \frac{\frac{8.55 \times 10^{-3} \text{MeV}^4}{12\pi\sqrt{2}}}{\frac{\pi^2(5 \text{MeV})}{12 \ln 2}} = \frac{(8.55 \times 10^{-3} \text{MeV}^4) \ln 2}{\pi^3 \sqrt{2}(5 \text{MeV})},$$

$$n_\nu = 2.70 \times 10^{-5} \text{MeV}^3. \quad (4.52)$$

Para darnos una idea de la cantidad de neutrinos que representa el valor anterior, recordemos que  $n_\nu = N_\nu/V$ . Entonces  $n_\nu V$  nos da la cantidad de neutrinos presentes en el volumen  $V$ . Veámos cuántos neutrinos hay en  $1 \text{ m}^3$  a esta densidad. Con los valores de la tabla 2,

$$1 \text{ m} = 5.07 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ m}^3 = 1.30 \times 10^{47} \text{GeV}^{-3}.$$

$$N_\nu = (2.70 \times 10^{-14} \text{GeV}^3)(1.30 \times 10^{47} \text{GeV}^{-3}) = 3.51 \times 10^{33} \text{neutrinos}.$$

Analicemos ahora nuestro resultado. Al calcular el valor de  $E_0$  según un promedio estadístico y utilizando la temperatura de una supernova, nos es posible dar el valor de la frecuencia de oscilación sincronizada  $\omega_{\text{sinc}}$ ,

$$\omega_{\text{sinc}} = \frac{\Delta}{2E_0} = \frac{1 \times 10^{-13} \text{MeV}^2}{2(5.93 \text{MeV})} = 8.43 \times 10^{-15} \text{MeV},$$

$$\omega_{\text{sinc}} = 12.8 \times 10^6 \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\text{sinc}} = 2.04 \times 10^6 \text{Hz}.$$

Para la obtención de los resultados anteriores utilizamos los valores de la tabla 2. Es interesante expresar también la longitud de oscilación sincronizada. La longitud viene dada como

$$\lambda_{\text{sinc}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{sinc}}}, \quad \lambda_{\text{sinc}} = \frac{2\pi(3 \times 10^8 \text{m/s})}{12.8 \times 10^6 \text{rad/s}} = 147 \text{m}.$$

También pudimos calcular un valor para la densidad de neutrinos presentes en el medio suponiendo  $\kappa_0 = 1$ . Pero según el criterio de sincronización  $\kappa_0 < 1$  para que pueda ser observado este fenómeno, de tal manera que en realidad debemos tener

$$n_\nu > 2.70 \times 10^{-5} \text{MeV}^3 = 3.51 \times 10^{33} \text{neutrinos/m}^3.$$

para la situación que estamos tratando.

Hemos dicho antes también que cuando  $\kappa_0 \rightarrow 0$ , es decir, mientras es más denso el medio, incrementa la amplitud de la oscilación, de otro modo, más neutrinos participan en el modo de oscilación sincronizada. Para la situación de equilibrio térmico que estamos suponiendo, cuando  $n_\nu$  se hace más grande, la frecuencia de oscilación sincronizada es la misma pero más neutrinos participan en este modo de oscilación. En una situación más general  $E_0$  también podría depender de la densidad de neutrinos y la relación entre  $n_\nu$  y  $E_0$  sería no lineal.

Para terminar esta exposición mostraremos gráficamente los resultados de nuestros cálculos y ecuaciones.

## 4.5. Resultados y graficación.

A continuación escribo los resultados obtenidos. Queríamos obtener la frecuencia de oscilación  $\omega_{\text{sinc}}$  de los neutrinos y ésta viene dada por

$$\omega_{\text{sinc}} = \frac{\Delta}{2E_0}. \quad (4.53)$$

Parametrizamos la intensidad del potencial efectivo contra el término que describe las oscilaciones de los neutrinos cuando no interactúan, mediante el parámetro  $\kappa_0$ , y entonces encontramos que

$$\omega_{\text{sinc}} = \frac{\Delta}{2E_0} = \kappa_0 V_{\text{ef}}. \quad (4.54)$$

La ecuación anterior tiene sentido sólo si  $\kappa_0 < 1$ , ya que vimos que ésta es la condición para la oscilación sincronizada.

Con los valores calculados en la sección anterior, graficaremos la función  $r_1(t)$  dada por la primera de las ecuaciones (4.27) de la Secc. 4.1, ya que la función indica el valor de la diferencia de las probabilidades de ser neutrinos de electrón o de muón,  $\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu$ ;

$$r_1(t) = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \left( \frac{\Delta}{2E_0} t \right).$$

La gráfica se muestra en la Fig. 4.4.

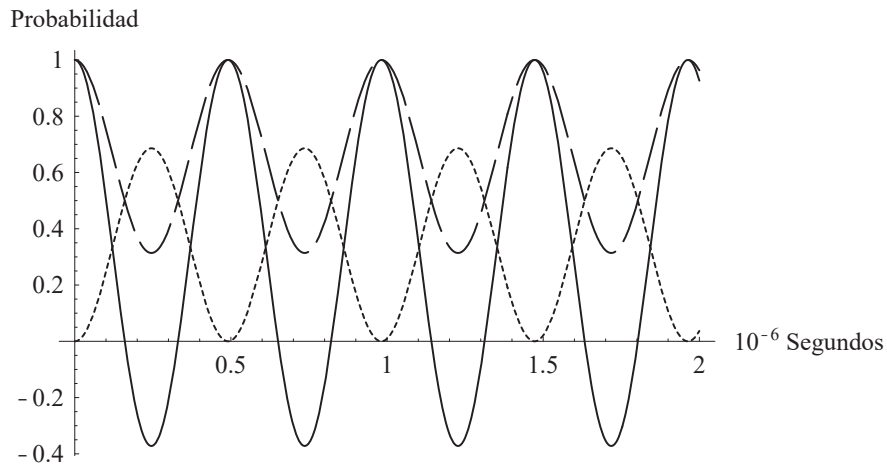


Figura 4.4: Gráfica del valor de  $\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu$  vs  $t$  y densidades de neutrinos en un gas oscilando sincronizadamente. La línea continua es la gráfica de  $r_1(t)$ , la línea cortada es la densidad de  $\nu_e$  y la línea de puntos es la densidad  $\nu_\mu$ .



La función de probabilidad de que los neutrinos de electrón sigan siendo neutrinos de electrón o de muón al tiempo  $t$ , se obtiene fácilmente de (4.27) y recordando que  $\nu_e^* \nu_e + \nu_\mu^* \nu_\mu = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \frac{1 + r_1(t)}{2}, \\ P_\mu(t) &= \frac{1 - r_1(t)}{2}. \end{aligned}$$

La gráfica de la Fig. 4.4 muestra asimismo, las probabilidades, o densidades normalizadas a 1, de que haya neutrinos de cualquiera de los dos sabores en el tiempo  $t$ .

En las graficaciones anteriores, tomamos el valor  $\sin^2 \theta \approx 0.22$  obtenido (experimentalmente o teóricamente); la tabla siguiente muestra los valores experimentales empleados para los cálculos y los valores calculados más relevantes.

Cantidad	Valor	Tipo
$\sin^2 \theta$	0.22	Experimental
$\Delta$	0.1 eV <sup>2</sup>	"
$T$	5 MeV	"
$E_0$	5.93 MeV	Calculado
$n_\nu$	$3.51 \times 10^{33}$ neutrinos/m <sup>3</sup>	"
$\omega_{\text{sinc}}$	$12.8 \times 10^6$ rad/s	"
$\lambda_{\text{sinc}}$	147 m	"

Tabla 5: Valores de algunas cantidades utilizadas en cálculos o como resultados.

## Capítulo 5

# Conclusiones y consideraciones finales.

En esta tesis hemos estudiado el fenómeno colectivo de oscilación sincronizada de neutrinos. Hemos visto que para que se lleve a cabo este fenómeno se requiere tener densidades grandes de neutrinos de al menos  $\sim 10^{33}$  neutrinos/ $m^3$ , las cuales pueden ocurrir en escenarios físicos tales como el del universo temprano o el núcleo de una estrella supernova. Aunque el presente estudio se llevó a cabo solo para el caso muy simplificado de oscilación entre dos familias y no se tomaron en cuenta antineutrinos en el medio, obtuvimos una estimación de la densidad de neutrinos necesaria para que se lleve a cabo el fenómeno mencionado. La manera de abordar el problema fue mediante el potencial efectivo, que obtuvimos para un neutrino que se propaga en un medio compuesto de otros neutrinos, éste a su vez está basado en la dispersión de neutrinos a ángulo cero y su relación con el índice de refracción.

Se ha comparado nuestra solución analítica con las simulaciones numéricas [21]. Se ha obtenido una excelente concordancia cuando todos los  $\kappa^j \ll 1$ . Incluso para un caso en el cual el 10 % de los neutrinos tenían  $\kappa^j > 1$ , la concordancia entre la solución analítica y las simulaciones numéricas es de cerca del 5 % para el periodo de oscilación y la amplitud.

El fenómeno de la oscilación sincronizada de neutrinos puede resultar importante en la nucleosíntesis en el universo temprano y en las supernovas, esto es un tema de investigación actual. Se debe tener en cuenta que en los procesos para la formación de elementos más pesados que el hierro es fundamental la cantidad de neutrones presentes en el medio, ya que estos elementos se forman mediante la captura de neutrones. En la supernova existe un estado transitorio de equilibrio térmico que contiene no sólo neutrones, protones y electrones, sino también pares electrón-positrón, fotones, neutrinos y antineutrinos acoplados mediante reacciones como

$$e^+ + n \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \quad e^- + p \longleftrightarrow n + \nu_e. \quad (5.1)$$

Neutrinos de muón y de tau también están presentes, inducidos mediante reacciones como

$$e^+ + e^- \longleftrightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \quad e^+ + e^- \longleftrightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_\tau. \quad (5.2)$$

Éstas últimas proceden a través de un bosón Z intermediario. Si existen neutrones libres disponibles, pueden ser capturados por los núcleos ya existentes (ceranos a la región del Fe) y dan lugar a isótopos ricos en neutrones. Al aumentar el número de neutrones en el núcleo, éste se vuelve

cada vez más inestable al decaimiento  $\beta$  y llega a formar un nuevo elemento de número atómico mayor al del elemento previo. Posteriores capturas de neutrones mezcladas con decaimientos  $\beta$ , siguen dando lugar a muchos de los elementos nuevos. Existen dos escalas de tiempo básicas en este escenario de la síntesis de elementos pesados por captura de neutrones: la vida media del decaimiento  $\beta$  y los intervalos de tiempo entre capturas sucesivas de neutrones, las cuales son inversamente proporcionales al flujo de neutrones. Si la razón de captura de neutrones es lenta comparada con la razón de decaimientos  $\beta$ , los núcleos que se construyen no son muy pesados. Si la razón de captura de neutrones es rápida, isótopos altamente inestables, ricos en neutrones, se formarán y después, mediante decaimiento en cascada, llegarán a ser núcleos pesados de isótopos estables; se cree que el Torio y el Uranio se debieron formar de este modo. Las abundancias nucleares observadas, sugieren que ambos procesos, rápido y lento, dieron lugar a la síntesis de núcleos encontrados en el sistema solar, y en particular, los elementos pesados encontrados en la Tierra.

Como puede verse en las reacciones (5.1) que involucran neutrones y neutrinos (o antineutrinos), si los neutrinos de electrón oscilan en el tiempo, se altera la cantidad de neutrones presentes en el medio, llegando a inhibir o inducir la síntesis de nuevos elementos en las supernovas. Tengamos en cuenta que la oscilación de los neutrinos mismos depende de las demás partículas presentes en el medio, y en especial de la presencia de los demás tipos de neutrinos que se presentan según vemos en (5.2). Mediante la observación de las abundancias de elementos presentes en los residuos dejados por la supernova podríamos tratar de comprobar nuestros resultados sobre la oscilación sincronizada de neutrinos. Un estudio más detallado de los datos acumulados de la SN1987 (que es la que se ha estudiado con más detalle) podría arrojar evidencia sobre este fenómeno de oscilación sincronizada.

Nuestros datos obtenidos (Tabla 5) se ajustan bien a las observaciones astronómicas que se poseen. El valor promedio de los neutrinos en una supernova se han medido y se encuentra que  $\langle E_{\nu_e} \rangle \approx 10$  MeV. La cantidad de neutrinos creados por la supernova se estima en  $2 \times 10^{58}$ , estimación comprobada con la medición del flujo de neutrinos que llegaron a la Tierra provenientes de la supernova SN1987. Según nuestros cálculos, la cantidad de neutrinos mínima para la oscilación sincronizada en una estrella de neutrones típica de 10 km de radio sería de  $1.47 \times 10^{46}$  neutrinos, valor muy inferior al medido. De este modo  $\kappa \ll 1$ , cumpliendo la condición muy bien. Se ve también que el fenómeno de la oscilación sincronizada debe llevarse a cabo en este entorno, pues la longitud de la oscilación se estimó en  $\lambda_{\text{sinc}} = 143$  m y el radio promedio de una estrella de neutrones es de 10 km.

Finalmente mencionamos que el análisis hecho en este trabajo se puede generalizar al caso de las tres familias de neutrinos. Al tomar la matriz de mezcla  $U$ , podemos darle una forma análoga a las matrices de rotación de Euler con tres ángulos de mezcla, más otro factor adicional de fase que nos da la violación de CP. También se pueden incluir antineutrinos en un análisis posterior, la idea fue introducida en la Secc. 4.1.

## Apéndice A

# El Hamiltoniano en la base de sabores.

Sabiendo que el Hamiltoniano en la base de masas tiene la forma

$$H_D = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

vamos a demostrar que el Hamiltoniano efectivo en la base de sabores es de la forma

$$H = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Ya en la sección 4.1.2 indicábamos el camino a seguir. Hacemos la transformación de similitud

$$H = U H_D U^\dagger,$$

donde  $H_D$  es el Hamiltoniano diagonal en la base de masas y  $U$  es la matriz de rotación que expresa los sabores de los neutrinos en términos de la mezcla de los eigenestados de masa:

$$H_D = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H = U H_D U^\dagger &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & -E_1 \cos \theta \sin \theta + E_2 \cos \theta \sin \theta \\ -E_1 \cos \theta \sin \theta + E_2 \cos \theta \sin \theta & E_1 \sin^2 \theta + E_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Haciendo uso de las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1/2 - 1/2 \cos 2A, \\ \cos^2 A &= 1/2 + 1/2 \cos 2A, \\ \sin A \cos B &= 1/2 [\sin(A - B) + \sin(A + B)], \end{aligned}$$

la última matriz se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1/2[(E_1 + E_2) - (E_2 - E_1) \cos 2\theta] & 1/2(E_2 - E_1) \sin 2\theta \\ 1/2(E_2 - E_1) \sin 2\theta & 1/2[(E_1 + E_2) + (E_2 - E_1) \cos 2\theta] \end{pmatrix} \\
&= \frac{E_2 + E_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{E_2 - E_1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

Para alcanzar el resultado deseado vamos a desarrollar los términos  $E_1 + E_2$  y  $E_2 - E_1$ . De la ecuación de Einstein tendremos  $E_1 = \sqrt{E^2 + m_1^2}$  y  $E_2 = \sqrt{E^2 + m_2^2}$ , donde  $E$  es la energía cinética del neutrino y  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los neutrinos en la base de masas:

$$\begin{aligned}
\frac{E_2 + E_1}{2} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{E^2 + m_2^2} + \sqrt{E^2 + m_1^2} \right) = \frac{E}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{m_2^2}{E^2}} + \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{E^2}} \right) \approx \\
&\approx \frac{E}{2} \left( 1 + \frac{m_2^2}{2E^2} + 1 + \frac{m_1^2}{2E^2} \right) = \frac{E}{2} \left( 2 + \frac{m_2^2 + m_1^2}{2E^2} \right) = E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E_2 - E_1}{2} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{E^2 + m_2^2} - \sqrt{E^2 + m_1^2} \right) = \frac{E}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{m_2^2}{E^2}} - \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{E^2}} \right) \approx \\
&\approx \frac{E}{2} \left( 1 + \frac{m_2^2}{2E^2} - 1 - \frac{m_1^2}{2E^2} \right) = \frac{E}{2} \left( \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E^2} \right) = \frac{m_2^2 - m_1^2}{4E}. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Donde (A.2) y (A.3) se obtienen al desarrollar en serie de Taylor y hasta el segundo término una serie de la forma

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.1), obtenemos el resultado esperado:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{E_2 + E_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{E_2 - E_1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \\
&= \left( E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\
H &= \underbrace{E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Energía cinética}} + \underbrace{\frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}}_{\text{Potencial de interacción}}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

El primer término en el resultado final es solamente la energía cinética o la energía cuando no hay ninguna perturbación externa. Los términos segundo y tercero corresponden a la interacción con algún elemento externo y por lo tanto son los términos que representan el Hamiltoniano efectivo, que fué con el que trabajamos en nuestro análisis. En dicho Hamiltoniano se ha omitido el término de energía cinética, ya que se está tomando el esquema de interacción para el análisis.

## Apéndice B

# Demostración de las ecuaciones de movimiento de la oscilación de neutrinos.

El objetivo de este apéndice es mostrar que las ecuaciones (4.5) y (4.11) de la Secc. 4.1 son equivalentes,

$$\underbrace{i \frac{d\nu}{dt} = H\nu}_{\text{Ec. (4.5)}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{\nu} \times \vec{B}}_{\text{Ec. (4.11)}}$$

por lo que al resolver (4.11), estamos encontrando las soluciones de (4.5), que nos dice cómo evoluciona el sabor del neutrino en el tiempo.

La demostración se basará en mostrar que si (4.5) se cumple, entonces se cumple (4.11); con ésto quedaría demostrado lo que nos proponemos. Primero recordemos las definiciones de los elementos que aparecen en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \nu &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \\ H &= \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \\ \vec{\nu} &= (\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu, 2 \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu), 2 \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu)), \\ \vec{B} &= \frac{\Delta}{2E} (\cos 2\theta, -\sin 2\theta, 0), \end{aligned}$$

y observemos también que

$$\begin{aligned} v_y &= 2 \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu) = \nu_e^* \nu_\mu + \nu_e \nu_\mu^*, \\ v_z &= 2 \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) = \frac{\nu_e^* \nu_\mu - \nu_e \nu_\mu^*}{i}. \end{aligned}$$

Con las definiciones anteriores, la ecuación (4.5) es

$$i \frac{d\nu}{dt} = H\nu \Rightarrow \begin{cases} i \frac{d\nu_e}{dt} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e + \sin 2\theta \nu_\mu), \\ i \frac{d\nu_\mu}{dt} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e + \cos 2\theta \nu_\mu). \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Primero resolvamos la ecuación (4.11) y veámos el resultado final de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu & 2 \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu) & 2 \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) \\ \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta & -\frac{\Delta}{2E} \sin 2\theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left[ \frac{\Delta \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) \sin 2\theta}{E} \right] \hat{i} + \left[ \frac{\Delta \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) \cos 2\theta}{E} \right] \hat{j} + \left[ -\frac{\Delta(\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu) \sin 2\theta}{E} - \frac{\Delta \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu) \cos 2\theta}{E} \right] \hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Conociendo las componentes de  $\vec{v}$ , derivémoslas explícitamente e introduzcamos las ecuaciones dadas por el Hamiltoniano (B.1). Llegaremos entonces a una identidad con las ecuaciones obtenidas mediante el rotacional (B.2).

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu) = \frac{d\nu_e^*}{dt} \nu_e + \nu_e^* \frac{d\nu_e}{dt} - \frac{d\nu_\mu^*}{dt} \nu_\mu - \nu_\mu^* \frac{d\nu_\mu}{dt} \\ &= i \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e^* + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e^* + \sin 2\theta \nu_\mu^*) \right] \nu_e \\ &\quad + \nu_e^* (-i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e + \sin 2\theta \nu_\mu) \right] \\ &\quad - i \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu^* + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e^* + \cos 2\theta \nu_\mu^*) \right] \nu_\mu \\ &\quad - \nu_\mu^* (-i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e + \cos 2\theta \nu_\mu) \right] \\ &= -\frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_e + \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu^* \nu_e + \frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_e \\ &\quad - \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e^* \nu_\mu - \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e^* \nu_\mu - \frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_\mu^* \nu_\mu \\ &\quad + \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu^* \nu_e + \frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_\mu^* \nu_\mu \\ &= \frac{i\Delta}{2E} \sin 2\theta \nu_\mu^* \nu_e - \frac{i\Delta}{2E} \sin 2\theta \nu_e^* \nu_\mu = \frac{i\Delta}{2E} \sin 2\theta (\nu_\mu^* \nu_e - \nu_e^* \nu_\mu) \\ &= -\frac{i\Delta}{2E} \sin 2\theta (\nu_e^* \nu_\mu - \nu_\mu^* \nu_e) = \frac{\Delta \operatorname{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) \sin 2\theta}{E}. \end{aligned}$$

Podemos ver que es la componente  $dv_x/dt$  dada por el rotacional. Análogamente para las componentes  $dv_y/dt$  y  $dv_z/dt$ .

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt}(2 \operatorname{Re}(\nu_e^* \nu_\mu)) = \frac{d}{dt}(\nu_e^* \nu_\mu + \nu_e \nu_\mu^*) = \frac{d\nu_e^*}{dt} \nu_\mu + \nu_e^* \frac{d\nu_\mu}{dt} + \frac{d\nu_e}{dt} \nu_\mu^* + \nu_e \frac{d\nu_\mu^*}{dt} \\ &= i \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e^* + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e^* + \sin 2\theta \nu_\mu^*) \right] \nu_\mu \\ &\quad + \nu_e^* (-i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e + \cos 2\theta \nu_\mu) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e + \sin 2\theta \nu_\mu) \right] \nu_\mu^* \\
& + \nu_e(i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu^* + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e^* + \cos 2\theta \nu_\mu^*) \right] \\
= & -\frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu + \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu^* \nu_\mu - \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e^* \nu_e \\
& -\frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu + \frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* - \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu \nu_\mu^* \\
& + \frac{i\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e \nu_e^* + \frac{i\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* \\
= & -\frac{i\Delta}{2E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu + \frac{i\Delta}{2E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* = \frac{i\Delta}{2E} \cos 2\theta (\nu_e \nu_\mu^* - \nu_e^* \nu_\mu) \\
= & -\frac{i\Delta}{2E} \cos 2\theta (\nu_e^* \nu_\mu - \nu_e \nu_\mu^*) = \frac{\Delta \text{Im}(\nu_e^* \nu_\mu) \cos 2\theta}{E}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{d}{dt} (2 \text{Im}(\nu_e^* \nu_\mu)) = \frac{d}{dt} (-i \nu_e^* \nu_\mu + i \nu_e \nu_\mu^*) = i \frac{d}{dt} (\nu_e \nu_\mu^* - \nu_e^* \nu_\mu) \\
&= i \left[ \frac{d\nu_e}{dt} \nu_\mu^* + \nu_e \frac{d\nu_\mu^*}{dt} - \frac{d\nu_e^*}{dt} \nu_\mu - \nu_e^* \frac{d\nu_\mu}{dt} \right] \\
&= i(-i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e + \sin 2\theta \nu_\mu) \right] \nu_\mu^* \\
&\quad + i \nu_e(i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu^* + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e^* + \cos 2\theta \nu_\mu^*) \right] \\
&\quad - i(i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_e^* + \frac{\Delta}{4E} (-\cos 2\theta \nu_e^* + \sin 2\theta \nu_\mu^*) \right] \nu_\mu \\
&\quad - i \nu_e^*(-i) \left[ \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \nu_\mu + \frac{\Delta}{4E} (\sin 2\theta \nu_e + \cos 2\theta \nu_\mu) \right] \\
&= -\frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* + \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu \nu_\mu^* - \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e \nu_e^* \\
&\quad -\frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* - \frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu + \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_\mu^* \nu_\mu \\
&\quad -\frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \nu_e^* \nu_e - \frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu \\
&= -\frac{\Delta}{2E} \sin 2\theta (\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu) - \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta \nu_e \nu_\mu^* - \frac{\Delta}{2E} \cos 2\theta \nu_e^* \nu_\mu \\
&= -\frac{\Delta}{2E} \sin 2\theta (\nu_e^* \nu_e - \nu_\mu^* \nu_\mu) - \frac{\Delta \text{Re}(\nu_e^* \nu_\mu) \cos 2\theta}{E}.
\end{aligned}$$





## Apéndice C

# Teoremas de trazas y propiedades de las matrices $\gamma$ .

Las matrices  $\gamma$  de Dirac satisfacen el álgebra, ecuación (2.26) sección 2.4.2,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Como consecuencia, es directo mostrar que la traza del producto de matrices  $\gamma$  puede ser obtenido sin realizar el cálculo explícito del producto matricial. Los teoremas de trazas son (con la notación  $\not{a} = \gamma_\mu A^\mu$ ):

$$\begin{aligned} \text{Tr} 1 &= 4, \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}) &= 4a \cdot b, \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)], \\ \text{Tr} \gamma^5 &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma, \end{aligned}$$

La traza de un número impar de  $\gamma$ 's es cero,

donde  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1$  ( $-1$ ) para  $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ , una permutación par (impar) de 1,2,3,4; y 0 si dos índices son iguales.

Otros resultados útiles para simplificar los cálculos de trazas son:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4, \\ \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a}, \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b, \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{b} \not{c}. \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] R. P. Feynman *Física* Vol. III, Fondo Cultura Económico, México, 1971.
- [2] F. Reines and C. L. Cowan, Jr., *Nature* **178**, 446 (1956).
- [3] J. N. Bahcall *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, 1989. C. Giunti y C.W. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*, Oxford University Press, 2007.
- [4] R. N. Mohapatra, G. Senjanović, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 912 (1980).
- [5] M. Blasone and G. Vitiello, *Ann. Phys.* **244**, 285 (1995), *ibid* *Phys. Rev. D* **60**, 111302 (1999).
- [6] L. Wolfenstein, *Phy. Rev.D* **17**, 2369 (1978): *ibid* **20**, 2634; E. S. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985).
- [7] S. Samuel, *Phys. Rev. D* **48**, 1462 (1993).
- [8] S. Pastor, G. Raffelt, and D. V. Semikoz, *Phys. Rev. D* **65**, 053011 (2002).
- [9] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An introduction to nuclear physics*, Cambridge University Press (2001).
- [10] F. Halzen and A. D. Martin *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*. John Wiley and sons, 1984.
- [11] Haxton, W.C. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, vol 33, pp. 459 a 504, (1995).
- [12] B. Pontecorvo y V. Gribov. *Neutrino astronomy and lepton charge*. Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, USSR, 1968.
- [13] W. D. Arnett and J. L. Rosner, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987).
- [14] Q.R. Ahmad, et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001).
- [15] A. B. McDonald, J. B. Klein and D. L. Wark, *Scientific American*, vol. 288, no. 4 (April 2003), pp. 40 a 49.
- [16] P. Langacker, S. T. Petcov, G. Steigman and S. Toshev, *Nucl. Phys.* **B282**, 589 (1987).
- [17] V. A. Kostelecký, J. Pantaleone and S. Samuel, *Phys. Lett. B* **315**, 46 (1993).
- [18] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Phys. Lett. B* **318**, 127 (1993).

- [19] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Lett. D **49**, 1740 (1994).
- [20] Walter Greiner, *Classical electrodynamics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [21] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel, Phys. Rev. D **52**, 621 (1992).
- [22] Yvonne Y. Y. Wong, *Synchronised neutrino oscillations from self interaction and associated applications*, University of Delaware. Preprint: ArXiv: hep-ph/0211045
- [23] Eduardo Tututi, Manuel Torres and Juan Carlos D'Olivo, Phys. Rev. D **66**, 043001 (2002).