



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ”

**“ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA TOPOGRAFÍA DE
OBJETOS POR PROYECCION DE LUZ ESTRUCTURADA**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

EUGENIA TORRES VIDALES

ASESOR:

Dr. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ

**Profesor Investigador de la Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.**

COASESOR:

**M. en C. ANGEL ALFONSO VALDEZ DE ANDA
Profesor Investigador Preparatoria José María Morelos
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.**

Enero de 2010, Morelia Michoacán.

A las personas que más amo:

Mis hijos: Juan Salvador, Alejandra, Angélica, Jorge Luis y Sandra Eugenia.

A mi esposo, Alejandro Ferreyra Herrejón

Mis hermanos: Chelito, Rosita, Jorgito, Calito, Mandito, Lolita, Lilita y Emita.

A la memoria de mis padres y muy especialmente a mi madre que en paz descansa.

Agradecimientos:

A Dios.

A mi asesor de tesis el Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez, una de las personas más maravillosas y trabajadora que he conocido. Gracias por haber aceptado ser mi asesor de tesis. Gracias por la paciencia que me tuvo, por todos los conocimientos nuevamente transmitidos. Gracias sobre todo por su confianza y su amistad.

Al Maestro en Ciencias Ángel Alfonso Valdez de Anda, por su interés mostrado en esta tesis, por haber hecho el espacio en su tiempo para dedicarlo a éste trabajo y por el apoyo brindado.

A la Lic. Patricia Manríquez Zavala, Maestro Humberto Ruiz Vega, Dr. Salvador Jara Guerrero y Dra. Mary Carmen y Monserrat Peña Gomar, por ser mis sinodales y por sus valiosas aportaciones a este trabajo.

Al Maestro Humberto Ruiz Vega de la Facultad de Físico Matemáticas, y al Ingeniero Juan Jesús Villalón López, M.C. Miguel Ángel Vega González y J. Arturo Rodríguez Ceballos de Ingeniería Mecánica, cuatro grandes personas por quienes tengo una gran admiración por sus amplios conocimientos y su amor y compromiso hacia su profesión y hacia la sociedad.

A mi gran amiga Sandra Bribiesca Vásquez, Investigadora del Instituto de Investigaciones Metalúrgicas de la U.M.S.N.H. por ser como es y siempre apoyar a seguir adelante a todas las que hemos tenido la fortuna de ser sus amigas.

Quiero agradecer, a cada una de mis profesores, que contribuyeron en mi formación. Gracias por compartir sus amplios conocimientos, experiencia y compromiso hacia su profesión

A todos los profesores y compañeros y amigos de la Facultad de Ingeniería Mecánica donde ha sido súper, convivir y trabajar con todos ellos, directivos, académicos y empleados.

A Benito Ruiz Carbajal, Ricardo Landín Martínez, Cesar Rangel Corona, Daniel Ruiz Velázquez, Rosa Elena Orozco Muñoz, Ma. Cristina Salto Alegre, Gabriel Mellado Villaseñor, Mariciano Hernández Gutiérrez compañeros del grupo de Óptica de Físico-Matemáticas.

A todos los demás compañero y amistades que me falta por nombrar y que en algún tiempo contribuyeron tanto en mi formación académica como personal y que han formado parte de mi vida. Gracias.



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ"

**"ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA TOPOGRAFÍA DE OBJETOS
POR PROYECCION DE LUZ ESTRUCTURADA**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

EUGENIA TORRES VIDALES

ASESOR:

Dr. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ

**Profesor Investigador de la Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.**

COASESOR:

**M. en C. ANGEL ALFONSO VALDEZ DE ANDA
Profesor Investigador Preparatoria José María Morelos
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.**

Enero de 2010, Morelia Michoacán.

ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA TOPOGRAFÍA DE OBJETOS POR PROYECCIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA

por

Eugenia Torres Vidales

RESUMEN

La utilización de la luz ha ganado gran importancia a nivel mundial por sus propiedades cuando interacciona con la materia, teniendo como consecuencia novedosas aplicaciones en las actividades cotidianas del ser humano. En esta tesis se proponen dos métodos para obtener información sobre la topografía a nivel milimétrico de superficies de materiales: Perfilometría y Corrimiento de fase por pasos. Estos métodos se basan en una aplicación de la Transformada de Fourier y consisten en proyectar una rejilla binaria periódica sobre los materiales a analizar. La imagen que se forma es posteriormente capturada en una computadora por medio de una cámara CCD y procesada mediante dos programas de MathCad en los que se implementaron los métodos de perfilometría y fase por pasos, permitiéndole así obtener una imagen tridimensional que proporciona la topografía de los objetos que se analizan.

ÍNDICE

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1	Antecedentes	1
1.2	Objetivo general.....	5
1.2.1.	Objetivos específicos.....	5
1.3	Organización de la tesis.....	5

CAPÍTULO II. INTERFERENCIA

II.1	Antecedentes de la interferencia.....	7
II.2	Condiciones para la interferencia.....	8
II.3	Fundamentos matemáticos.....	9
II.4	Interferómetro de división de frente de onda.....	20
II.5	Interferómetro de división de amplitud de onda.....	25
II.6	Interferómetro de Mach-Zehnder.....	28

CAPÍTULO III. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE DIFERENCIA FASE

III.1	Perfilometría por transformada de Fourier.....	30
III.2	Método de la transformada de Fourier.....	35
III.3	Conversión fase-altura.....	39
III.4	Desenvolvimiento de fase.....	40
III.5	Algoritmos de detección de fase.....	41
III.6	Interferencia de haces con corrimiento de fase.....	45
III.7	Medición de la fase.....	47
III.8	Interferometría por corrimiento de fase.....	48
III.9	Forma general de arco tangente para 3 corrimientos.....	51
III.10	Algoritmo de tres pasos por Wyant.....	52
III.11	Método de cuatro corrimientos	54
III.12	Método de cinco corrimientos.....	55

CAPÍTULO IV. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

IV.1	Arreglo experimental.....	56
IV.2	Adquisición de imágenes.....	57
IV.3	Procesamiento de imágenes.....	58
IV.4	Perfilometría por transformada rápida de Fourier.....	60
IV.4.1	Obtención de la transformada rápida de Fourier.....	60
IV.5	Desenvolvimiento de fase.....	64
IV.5.1	Desenvolvimiento de fase por el método sencillo de suma y resta.....	64
IV.5.2	Desenvolvimiento de fase por el método de regularización.....	65
IV.6	Conversión fase-altura.....	66
IV.7	Método de corrimiento de fase por pasos.....	68

IV.7.1	Captura de imágenes.....	68
	CAPÍTULO V CONCLUSIONES.....	73
	APÉNDICE A. TRANSFORMADA DE FOURIER.....	74
	A. 1. Definición y condiciones de existencia.....	76
	A.2 Teoremas de la Transformada de Fourier.....	77
	REREFENCIAS.....	80

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1. ANTECEDENTES

A nivel mundial, el crecimiento de la óptica ha tenido como consecuencia novedosas aplicaciones en las actividades cotidianas del ser humano, estas se pueden separar en cuatro grandes áreas en las cuales inciden las investigaciones que en la actualidad se realizan: instrumentación óptica, comunicaciones ópticas, metrología óptica y fotónica.

En el área de la Instrumentación Óptica se incluye el estudio y diseño de elementos y sistemas ópticos que se utilizan principalmente para formar o registrar imágenes. Como por ejemplo: lentes, prismas, espejos, microscopios, telescopios, etc.

Para las Comunicaciones Ópticas se utiliza la luz como portadora de información y se usan sistemas ópticos para la transmisión y recepción de señales. Los temas relacionados con esta área de aplicaciones son fibras ópticas, detectores, fuentes de luz (láseres), procesamiento de señales, holografía, óptica no lineal, entre otros.

La Metrología Óptica es una herramienta valiosa con la cual se pueden tomar medidas pequeñísimas inimaginables por otros medios. Este grupo de aplicación permite analizar propiedades físicas con alta precisión, la cual tiene que ver con la medición y monitoreo de parámetros físicos, usando sistemas y métodos de no contacto mediante la luz, lo cual lleva a realizar pruebas no destructivas. Los temas relacionados con este polo de aplicaciones son sistemas ópticos, polarización, interferencia, emisión de la luz, detectores de luz, procesamiento de imágenes, etc. La metrología óptica ha tenido un gran impacto en la solución de problemas industriales y de ingeniería, igualmente se han implementado técnicas de monitoreo en el área médica.

En la fotónica se investigan fenómenos relacionados con radiación y detección luminosa de alta potencia, la rápida detección y transmisión de información generada con luz, nuevos materiales ópticos, fuentes de radiación, sirve como soporte de la instrumentación, comunicación y metrología óptica. Los temas relacionados con esta área son coherencia, óptica cuántica, fibras fotónicas, óptica no lineal, etc. Las aplicaciones derivadas de estos estudios se reflejan en la aparición de nuevos tipos de láseres o bien en el perfeccionamiento de los ya existentes. Estas investigaciones también permiten el empleo de nuevos materiales para aplicaciones diversas como en las comunicaciones y sensores ópticos. La comprensión de nuevos fenómenos en este campo son empleados para mejorar la solución de algunos problemas ya existentes y para resolver algunos otros que habían sido considerados con anterioridad.

Estos cuatro grupos de aplicaciones no están aislados entre si, al contrario, hay una estrecha relación entre ellos. Por ejemplo, las comunicaciones ópticas tienen estrecha relación con la fotónica ya que en el movimiento de información por internet, televisión digital, etc., es necesario un sistema de alta capacidad de transmisión. Dado que en la fotónica la luz se interpreta como fotones, esto da la ventaja de que a través de fibras ópticas se pueda enviar la información en forma de pulsos de luz. Además, permite enviar varias comunicaciones a la vez por la misma fibra, usando luces de distintos colores o frecuencias. Cada color lleva una información y no se mezclan en la fibra. En la Figura 1.1 se muestra una fotografía de las fibras ópticas sobre las cuales se envía información en forma de pulsos luminosos.

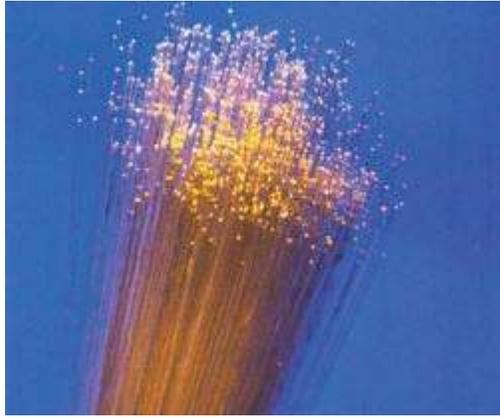


Figura 1.1. Conductor de fibra óptica.

Como se puede apreciar, existe una gran relación entre estos cuatro grupos de aplicaciones, y en muchas ocasiones no está clara la frontera entre estos campos. Cada vez las aplicaciones de la óptica están más presentes a nuestro alrededor. Así por ejemplo tenemos los lectores de códigos de barra, los punteros láser, etc.; casi todos estos aparatos combinan una parte de óptica con otra de electrónica.

En general, las aplicaciones más sobresalientes de estas cuatro áreas se manifiestan en la industria, la medicina, la biología, las comunicaciones, monitoreo ambiental, entre muchas otras. La metrología óptica, por ejemplo, ha tenido gran impacto en la solución de problemas en la industria y la ingeniería, tales como la detección de defectos internos en piezas industriales (ver figura 1.2), detección de puntos calientes en materiales, análisis de corrosión superficial, técnicas de medida de tamaño de partículas, etc., igualmente se han implementado técnicas de monitoreo en el área médica tales como el estudio de deformación de huesos como se muestra en la figura 1.3, etc., estas mediciones y monitoreo de parámetros físicos se lleva a cabo utilizando sistemas y métodos de no contacto, mediante luz, por lo que reciben el nombre de pruebas no destructivas.

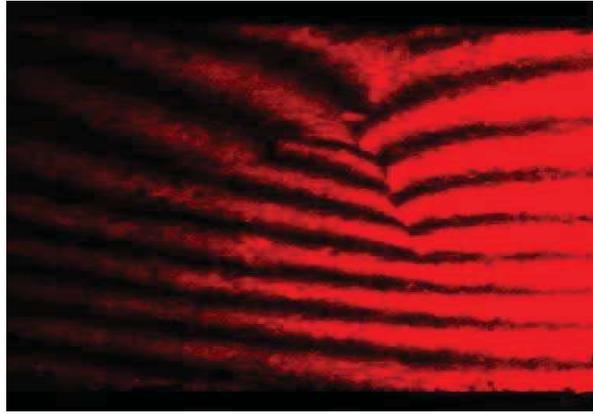


Figura 1.2. Interferometría holográfica: Detección de defectos internos en piezas industriales.



Figura 1. 3. Interferometría holográfica: Estudio de deformación de huesos

Este estudio se basa en la metrología óptica que tiene que ver con la medición y que está relacionada con el monitoreo de parámetros físicos tales como: esfuerzo, desplazamiento, distancia, presión, temperatura, velocidad, forma, dimensiones, etc., de objetos y/o regiones de observación. También incluye el reconocimiento de patrones con respecto al cálculo de forma, textura, color, dimensiones, etc., de objetos, usando sistemas y métodos no destructivos mediante la utilización de la luz. En este estudio desarrollaremos una aplicación para el procesamiento de imágenes de superficies de materiales a nivel milimétrico utilizando dos métodos: perfilometría y fase por pasos, en ambos métodos se usa transformada de Fourier. Estos métodos nos permitirán establecer la aplicación de una técnica cualitativa de procesamiento de imágenes para analizar topografía, forma y textura que en este caso aplicaremos a

materiales milimétricos, utilizando el equipo que se encuentra en el laboratorio de Óptica de la Facultad Ciencias Físico Matemáticas de la U.MS.N.H. Se experimenta con un sistema de proyección de franjas para detectar la topografía o cambios superficiales que presentan los materiales en cuestión, lo cual se registra a través de una cámara CCD conectada a una computadora. Después mediante una aplicación de procesamiento de imágenes, a través de los dos métodos mencionados en el párrafo anterior, en un programa en computadora se implementará la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de éstas superficies y proporcione información de los cambios superficiales que presentan. Para ello se establecen los siguientes objetivos.

I.2. OBJETIVO GENERAL

Analizar cualitativamente la topografía, forma y textura de materiales milimétricos mediante una aplicación de procesamiento de imágenes, a través de los métodos de perfilometría por transformada de Fourier y el método de fase por pasos.

I.2.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Comprender el método de perfilometría por transformada de Fourier.
- ✓ Comprender el método de fase por pasos.
- ✓ Realizar el arreglo experimental para procesamiento de imágenes.
- ✓ Comprender los cambios de fase en un patrón de franjas proyectado sobre una superficie.
- ✓ Analizar superficies milimétricas de materiales mediante proyección de franjas aplicando los dos métodos anteriores.

1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La organización de este estudio es la siguiente. En el capítulo 2 se hace un resumen sobre los fundamentos de la interferencia. En el capítulo 3 se analiza el

marco teórico de los métodos de perfilometría por transformada de Fourier y fase por 3 pasos que se aplicarán en este estudio para el análisis cualitativo de materiales. En el capítulo 4 se presenta el desarrollo experimental, se describe la metodología empleada para el procesamiento de imágenes, y se muestran los resultados obtenidos, así mismo se presentan conclusiones. Al final se presenta en el apéndice la teoría de la transformada de Fourier.

CAPÍTULO II INTERFERENCIA

II.1. ANTECEDENTES DE LA INTERFERENCIA

La interferencia ocurre cuando dos o más ondas mutuamente coherentes se superponen en un mismo lugar del espacio. Este fenómeno es muy cotidiano, pues se manifiesta de muchas maneras. Por ejemplo, cuando se hacen pompas de jabón los caprichosos colores que se observan son producidos por interferencia.

La luz blanca está compuesta por ondas de luz de distintas longitudes de onda. Las ondas de luz de cierta longitud de onda (por ejemplo las de color amarillo cuya longitud de onda es de $598nm$) son reflejadas en la superficie interior de la burbuja e interfieren con las ondas de esa misma longitud de onda reflejadas en la superficie exterior. Esta interferencia ocasiona que la luz pueda desaparecer completamente ó que aparezca dándole una coloración a la burbuja. Ese mismo proceso ocurre con las demás longitudes de onda que componen la luz blanca. Otro ejemplo se presenta cuando se arrojan dos piedras en un estanque, las ondas que generan cada una de ellas al golpear la superficie del agua se superponen. Después que dos ondas se cruzan o superponen, es decir cuando dos ondas coinciden en una región del espacio, interfieren dando como resultado características bien definidas que son producto de la combinación de ambas ondas. Donde coincide una cresta con otra cresta, la amplitud (tamaño de la onda) se suma, produciendo una ola más grande o un máximo. Si coincide un valle con una cresta la onda se desvanece creando así un mínimo de interferencia. Después de separarse la una de la otra prosiguen sin modificarse transportando cada una su energía y sus características propias como si nunca se hubiesen encontrado.

En el caso de la luz sucede algo similar al ejemplo del estanque de agua citado en el párrafo anterior. Cuando dos ondas de luz se superponen en una misma región del espacio producen un patrón de interferencia.

La interferometría se basa en el estudio del fenómeno de la interferencia que podemos producir cuando dos ondas luminosas de exactamente la misma frecuencia se superponen en la misma región del espacio. Esto es prácticamente posible sólo si la luz de ambas ondas que se interfieren proviene de la misma fuente luminosa. Pero si es solamente una fuente luminosa la que produce la luz, los dos haces luminosos que interfieren deben generarse de alguna manera del mismo haz. Existen dos clases de instrumentos que permiten lograr esto: denominamos la primera clase como interferómetro de división de frente de onda y la segunda como interferómetro de división de amplitud. En el caso del interferómetro de división del frente de onda, se utiliza un haz primario que se hace incidir en dos ranuras paralelas angostas para obtener dos haces secundarios. El más famoso de los interferómetros de éste tipo es el arreglo de dos rendijas de Young. En los interferómetros de división de amplitud se divide el frente de onda primario en dos haces de luz secundarios por medio de un semiespejo o divisor de haz y recorren dos trayectorias ópticas distintas determinadas por un sistema de espejos para que finalmente se unan e interfieran para formar franjas de interferencia. En este caso se encuentra el interferómetro de Michelson, el cual tiene un diseño simple y es de importancia histórica.

II.2. CONDICIONES PARA LA INTERFERENCIA

Las condiciones con las cuales se puede presentar la interferencia de luz son conocidas como las leyes de Fresnel-Arago y son las siguientes.

- ✓ Las ondas que producen interferencia tienen que ser coherentes. Esto sucede solo cuando tienen su origen en la misma fuente y se consigue de manera mucho más sencilla utilizando un láser.

- ✓ Los haces deben estar linealmente polarizados. Es decir los haces deben vibrar en un mismo plano.

✓ Los haces deben ser monocromáticos, lo que significa tienen que ser de un mismo color, esto se consigue colocando un filtro de color o usando un láser.

II.3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Una onda es una perturbación autónoma de un medio que se mueve en el espacio transportando energía e impulso; existen dos tipos de ondas: las longitudinales y transversales, este último tipo de ondas son de interés particular porque su perfil es sinusoidal, se le llama *onda armónica* y corresponde a las curvas que se pueden sintetizar matemáticamente como suma de funciones armónicas, es decir como una superposición de ondas diferentes.

La función más simple que describe el perfil de una onda estacionaria, $\Psi(x,t)$, donde el tiempo $t = 0$ se presenta en la ecuación 2.1

$$\Psi(x,t)|_{t=0} = \Psi(x) = E \operatorname{sen}(kx) \quad , \quad (2.1)$$

donde k es una constante positiva conocida como el *número de onda*, y su existencia se debe a que el argumento de una función sinusoidal tiene que ser adimensional. El valor máximo de la perturbación, E , se conoce como *amplitud* de onda.

Con el fin de transformar la onda estacionaria representada por la ecuación 2.1 en una *onda progresiva* que viaja con una velocidad v en la dirección positiva de x , se reemplaza la variable x por $(x-vt)$, y la ecuación 2.1 se transforma en

$$\Psi(x,t) = E \operatorname{sen} k(x - vt) \quad . \quad (2.2)$$

Si se mantiene fija ya sea x o t , se obtiene una perturbación sinusoidal de tal forma que la onda es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El *período espacial* se conoce como *longitud de onda* y se denota por λ , esto es

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t) \quad . \quad (2.3)$$

Para que éste sea el caso el *número de onda* k debe ser dado por $k = 2\pi/\lambda$. La figura 2.1 muestra el perfil de una onda estacionaria en términos de λ .

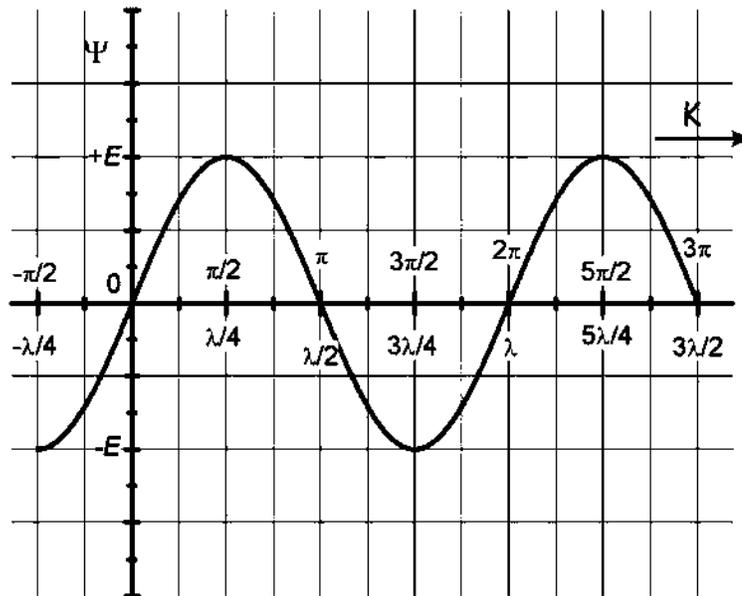


Figura 2.1. Esquema del perfil de una onda estacionaria suponiendo $t = 0$.

Obsérvese que $\psi(x) = 0$ cuando el argumento de la función $\psi(x, t)$ dada en la ecuación 2.2 denotado como φ llamada fase de la onda, es $\varphi = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$, y así sucesivamente.

Análogamente, la onda se puede repetir a sí misma después de un **periodo temporal** τ , que es la cantidad de tiempo que una onda completa tarda en superar a un observador estacionario, por lo tanto, la onda se describe como

$$\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau), \quad (2.4)$$

y entonces se puede expresar como

$$\psi(x, t) = \psi\left(x, t \pm \frac{1}{\nu}\right), \quad (2.5)$$

donde se define $\tau = \frac{1}{\nu}$, y ν es llamada frecuencia temporal, es decir, es el número de veces que se repite la onda en el tiempo, entonces ν está dada en unidades de ciclos por segundo o Hertzios.

Existen otras dos cantidades que se usan a menudo en la literatura del movimiento ondulatorio; una es la **frecuencia temporal angular** definida por $\omega \equiv \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu$ y sus unidades son radianes por segundos, y la segunda es el **numero de onda o frecuencia espacial** definida por $\kappa \equiv \frac{1}{\lambda}$.

Se puede definir a una clase especial de ondas que tienen una sola frecuencia y son llamadas ondas **monocromática o monoenergética**. Sin embargo físicamente no existen, pero si existen algunas ondas con una pequeña variación en sus frecuencias y son llamadas **cuasimonocromáticas** [1].

Utilizando lo anterior, la fase de la onda se expresa mediante:

$$\varphi = kx \mp \omega t \quad . \quad (2.6)$$

Un caso especial se presenta cuando $t = 0$ y $x = 0$, entonces $\psi(0,0) = 0$ y significa que la onda no tiene un valor en este punto y no hay razón para que la magnitud de la onda no pueda tener cualquier valor que se quiera para $t = 0$, $x = 0$. Para que esto no sea así se traslada la función sinusoidal, mediante la introducción de una *fase inicial* ε tal que

$$\psi(x, t) = E \sin(kx - \omega t + \varepsilon) \quad . \quad (2.7)$$

La gráfica de la ecuación 2.7 se muestra en la figura 2.2.

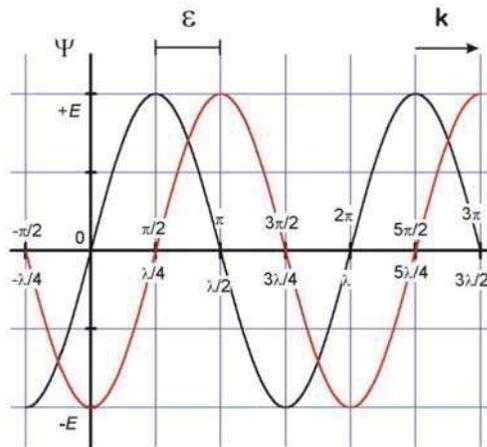


Figura 2.2. Perfil de una onda estacionaria (línea negra) suponiendo que $t = 0$, perfil de una onda estacionaria con una fase inicial $\varepsilon = \pi/2$ (línea roja).

Supóngase que dos ondas $\Psi_1(x_1, t_1)$ y $\Psi_2(x_2, t_2)$ se encuentren en una región del espacio. En esta región se creará una nueva onda $\Psi_3(x_3, t_3)$ que es la suma de las ondas constitutivas, es decir $\Psi_3(x_3, t_3) = \Psi_1(x_1, t_1) + \Psi_2(x_2, t_2)$. Este principio de suma de las ondas se le conoce como *Principio de Superposición* y esto es lo que origina diversos fenómenos, como el de interferencia. Después que las ondas se separan continúan su viaje sin alterarse.

Debido a la naturaleza electromagnética de la luz, esta se compone de dos campos, uno eléctrico representado por $E(x,t)$, y uno magnético dado por $B(x,t)$, por lo que para representar físicamente a un haz de luz se pueden emplear estos campos, los campos eléctricos y magnéticos son campos vectoriales, así la luz es un fenómeno vectorial y se puede representar una onda electromagnética mediante el campo $E(x, t)$ en lugar de $\Psi(x, t)$. El campo magnético es de magnitud pequeña comparada con $E(x,t)$ (recordando que $E(x,t) = cB(x,t)$) y su comportamiento es perpendicular en todo momento y lugar a $E(x,t)$ por lo que solo es necesario analizar el comportamiento del campo eléctrico.

De acuerdo con el principio de superposición, la intensidad del campo eléctrico E , en un punto en el espacio procedente de los campos separados E_1, E_2, \dots de varias fuentes contributivas, viene dada por

$$E = E_1 + E_2 + \dots \quad (2.8)$$

Cuando dos ondas coinciden en una región del espacio, interfieren dando como resultado características bien definidas que son producto de la combinación de ambas ondas. Gran parte del análisis que sigue puede llevarse a cabo sin especificar la forma particular de los frentes de onda, siendo por lo tanto los resultados bastante generales. Sin embargo, con el propósito de simplificar este análisis, consideremos dos fuentes puntuales S_1 y S_2 , separadas una distancia a que emiten ondas monocromáticas de longitud de onda en un medio homogéneo. Sea su separación a mucho mayor que λ . Además, supongamos un punto de observación P sobre una pantalla paralela a la línea que une a las fuentes lo suficientemente lejos de las fuentes para que los frentes de ondas sean planos como se muestra en la figura 2.3.

Supóngase también que las ondas que emiten las fuentes son dos ondas linealmente polarizadas cuyas expresiones $E_1(r,t)$ y $E_2(r,t)$ están dadas por

$$E_1(r,t) = E_{01} \cos(k_1 r - \omega t + \varepsilon_1), \quad (2.9)$$

y

$$E_2(r,t) = E_{02} \cos(k_2 r - \omega t + \varepsilon_2), \quad (2.10)$$

donde k_1 y k_2 son los vectores de onda, r es el vector de posición (x,y,z) y ε_1 y ε_2 son las fases iniciales.

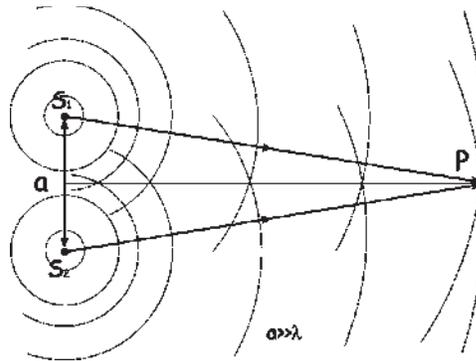


Figura 2.3. Ondas de dos fuentes puntuales superponiéndose espacialmente.

En el punto **P** mostrado en la figura 2.3 se presenta la superposición de las ondas $E_1(r,t)$ y $E_2(r,t)$ expresada por $E_3(r,t) = E_1(r,t) + E_2(r,t)$. El campo **E** varía tan rápido que es imposible observarlo a simple vista, por lo que es conveniente introducir el concepto de irradiancia.

La irradiancia está dada por

$$I = \varepsilon v \langle E^2 \rangle_T, \quad (2.11)$$

Omitiendo las constantes de la ecuación 2.11 se obtiene la irradiancia como

$$I \propto \langle E^2 \rangle_T, \quad (2.12)$$

donde $\langle E^2 \rangle_T$ es el promedio temporal de la magnitud del campo eléctrico al cuadrado y además

$$E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, entonces por consiguiente

$$E^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), \quad (2.14)$$

y, por lo tanto

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2, \quad (2.15)$$

sustituyendo la ecuación 2.15 en la ecuación 2.12 se obtiene

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}. \quad (2.16)$$

donde

$$I_1 = \langle E_1^2 \rangle_T. \quad (2.17)$$

$$I_2 = \langle E_2^2 \rangle_T. \quad (2.18)$$

y

$$I_{12} = 2 \langle E_1 E_2 \rangle_T. \quad (2.19)$$

A la ecuación 2.19 se le denomina *término de interferencia*. Para calcularlo se sustituye las ecuaciones 2.9 y 2.10, de donde se obtiene:

$$E_1 \cdot E_2 = E_{01} \cdot E_{02} \cos(k_1 r - \omega t + \varepsilon_1) \cos(k_2 r - \omega t + \varepsilon_2), \quad (2.20)$$

haciendo las operaciones adecuadas queda de una forma equivalente mente dada por

$$E_1 \cdot E_2 = E_{01} \cdot E_{02} [\cos(k_1 r + \varepsilon_1) \cos \omega t + \text{sen}(k_1 r + \varepsilon_1) \text{sen} \omega t] [\cos(k_2 r + \varepsilon_2) \cos \omega t + \text{sen}(k_2 r + \varepsilon_2) \text{sen} \omega t], \quad (2.21)$$

después de hacer los cálculos adecuados y obtener el promedio temporal de la ecuación 2.19 se obtiene

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle_T = \frac{1}{2} [E_{01} \cdot E_{02} \cos(k_1 r + \varepsilon_1 - k_2 r - \varepsilon_2)], \quad (2.22)$$

donde se recurrió al hecho de que $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = 1/2$, $\langle \text{sen}^2 \omega t \rangle_T = 1/2$, $\langle \cos \omega t \text{sen} \omega t \rangle_T = 0$. Por lo tanto el término de interferencia queda como

$$I_{12} = E_{01} \cdot E_{02} \cos \delta, \quad (2.23)$$

donde $\delta = (k_1 \cdot r - k_2 \cdot r + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ es la diferencia de fase entre las ondas $E_1(r, t)$ y $E_2(r, t)$.

Esta última ecuación puede ser escrita de una forma más sencilla dándose cuenta de que

$$I_1 = \langle E_1^2 \rangle_T = \frac{E_{01}^2}{2}. \quad (2.24)$$

y además

$$I_2 = \langle E_2^2 \rangle_T = \frac{E_{02}^2}{2} . \quad (2.25)$$

por lo que el término de interferencia queda de la siguiente manera

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta . \quad (2.26)$$

haciendo la sustitución de las ecuaciones 2.24, 2.25 y 2.26, en la ecuación 2.16 se obtiene

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta . \quad (2.27)$$

En varios puntos del espacio, la irradiancia final puede ser mayor, menor o igual a $I_1 + I_2$, y depende del valor de I_{12} y este depende de δ . Un máximo de irradiancia se obtiene cuando $\cos \delta = 1$, de modo que

$$I_{\text{máx}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} . \quad (2.28)$$

y esto sucede cuando $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. En este caso se dice que ocurre ***interferencia totalmente constructiva***, es decir el desfase entre las dos ondas es un múltiplo entero de 2π y las perturbaciones están en fase. Cuando $0 < \cos \delta < 1$ las ondas están fuera de fase, y $I_1 + I_2 < I < I_{\text{máx}}$ el resultado se denomina ***interferencia constructiva***.

Si $\delta = \pi/2$, entonces $\cos \delta = 0$, y se dice que las ondas están desfasadas 90° y en este caso $I = I_1 + I_2$. En el caso en que $0 > \cos \delta > -1$, y se tienen las condiciones de ***interferencia destructiva***, es decir $I_1 + I_2 > I > I_{\text{min}}$. La irradiancia mínima se produce cuando las ondas están desfasadas por $\delta = 180^\circ$, en este caso $\cos \delta = -1$ por los valles se que se obtiene

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} . \quad (2.29)$$

Esto se produce cuando $\delta = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi$, y se denomina *interferencia totalmente destructiva*.

Uno de los casos muy importantes es cuando las amplitudes de ambas ondas que alcanzan el punto P de la figura 2.3 son iguales, es decir $E_{01} = E_{02}$, y por lo tanto $I_1 = I_2 = I_0$. La ecuación 2.27 queda de la siguiente forma

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} , \quad (2.30)$$

de lo que se deduce que $I_{\min} = 0$ e $I_{\max} = 4I_0$.

La ecuación 2.27 también se aplica en ondas esféricas emitidas por S_1 y S_2 . Dichas ondas pueden expresarse como

$$E_1(r_1, t) = E_{01}(r_1) \exp[i(k r_1 - \omega t + \varepsilon_1)] , \quad (2.31)$$

y

$$E_2(r_2, t) = E_{02}(r_2) \exp[i(k r_2 - \omega t + \varepsilon_2)] . \quad (2.32)$$

Los términos de r_1 y r_2 son los radios de los frentes de ondas esféricos que se superponen en P, es decir, especifican las distancias de las fuentes. En este caso

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) . \quad (2.33)$$

Si las fuentes emisoras son de igual intensidad, $\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{02}$, $I_1 = I_2 = I_0$ y tenemos de acuerdo a la ecuación 2.30

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} [k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]. \quad (2.34)$$

Los máximos de irradiancia ocurren cuando $\delta = 2\pi m$ siempre que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. De la misma forma, los mínimos para los cuales $I = 0$, se presentan cuando $\delta = \pi m'$ de tal modo que $m' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, siendo que $m' = 2(m + 1)$. De esta forma la ecuación 2.33 puede reescribirse, para ambos casos como

$$(r_1 - r_2) = \frac{[2\pi m + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]}{k}, \quad (2.35)$$

$$(r_1 - r_2) = \frac{[\pi m' + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]}{k}, \quad (2.36)$$

y si las ondas están en fase al emitirse, esto quiere decir que, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ las ecuaciones quedan de la siguiente forma

$$[\text{Máximos}] \quad (r_1 - r_2) = 2\pi m / k = m\lambda \quad (2.37)$$

$$[\text{Mínimos}] \quad (r_1 - r_2) = \pi m' / k = \frac{1}{2} m' \lambda \quad (2.38)$$

para irradiancia máxima y mínima, respectivamente [1].

II.4. INTERFEROMETRO DE DIVISIÓN DEL FRENTE DE ONDA

Uno de los problemas más comunes para la realización del fenómeno de interferencia es la existencia de fuentes que sean *coherentes*. Este problema fue solucionado por Thomas Young en 1801 en su experimento clásico de doble haz.

Thomas Young empezó sus esfuerzos encaminados para establecer la naturaleza ondulatoria de la luz. Young hizo pasar la luz solar a través de una rendija pequeña para que de esta forma se convirtiera en una fuente principal coherente, la cual ilumina de manera idéntica dos ranuras como se muestra en la figura 2.4.

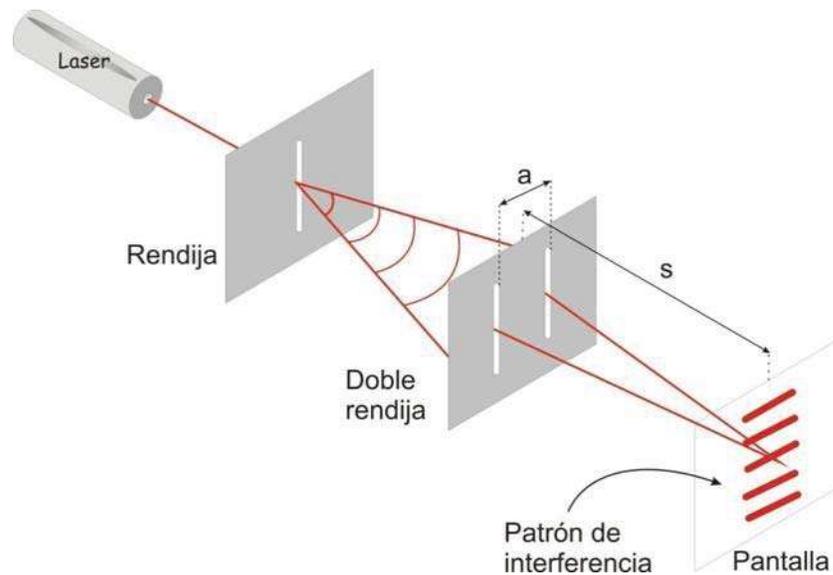


Figura 2.4. Esquema del interferómetro de Young. El tamaño de la rendija es grande para efectos demostrativos

De esta forma Young logró producir un sistema de franjas alternas brillantes y oscuras “*llamadas franjas de interferencia*”. Considérese una onda plana monocromática hipotética que ilumina una rendija larga y estrecha, de la cual, la luz se difracta con todos los ángulos hacia el frente y genera una onda cilíndrica como se muestra en la figura 2.5a. Esta onda, a su vez, incide sobre dos rendijas S_1 y S_2 que están muy juntas, estrechas y paralelas. En la figura 2.5b se muestra la geometría del interferómetro de Young.

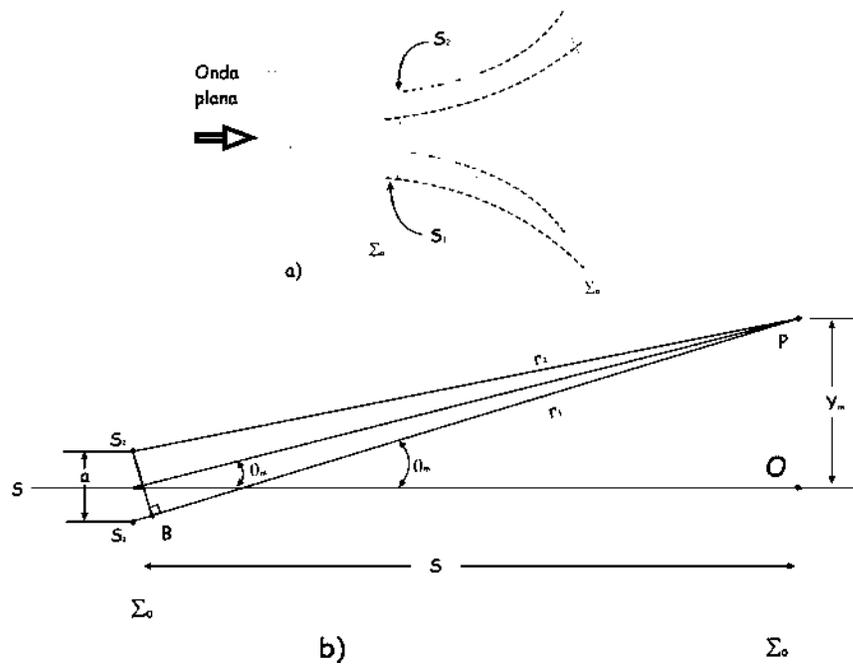


Figura 2.5. Experimento de Young a) Ondas planas incidiendo por una rendija convirtiéndose en ondas cilíndricas que inciden por las dos rendijas superpuestas en la zona detrás de la pantalla. b) Geometría del experimento de Young.

Cuando existe simetría, los segmentos de onda primario que llegan a las dos rendijas estarán en fase y las rendijas construirán dos fuentes secundarias coherentes, y en donde quiera que las dos ondas procedentes de S_1 y S_2 se superpongan, se producirá interferencia (tomando en cuenta que la diferencia de camino óptico sea menor que la longitud de coherencia, $c\Delta t_c$).

La distancia entre cada una de las pantallas (Σ_a y Σ_o) en la figura 2.5b es mayor comparada con la distancia a entre las rendijas. La diferencia de camino óptico entre los rayos $\overline{S_1P}$ y $\overline{S_2P}$ se puede calcular, con una buena aproximación, bajando una perpendicular desde S_2 hasta $\overline{S_1P}$. Esta diferencia viene dada por

$$(\overline{S_1B}) = (\overline{S_1P}) - (\overline{S_2P}), \quad (2.39)$$

o

$$(\overline{S_1B}) = r_1 - r_2 . \quad (2.40)$$

Continuando con esta aproximación $(r_1 - r_2) = a \text{ sen } \theta$ y por lo tanto

$$r_1 - r_2 \approx a\theta \quad , \quad (2.41)$$

puesto que $\theta \approx \text{sen}\theta$. Obsérvese que

$$\theta \approx \frac{y}{s} , \quad (2.42)$$

por lo tanto

$$r_1 - r_2 \approx \frac{a}{s} y , \quad (2.43)$$

de acuerdo a lo analizado en la sección anterior, *la interferencia constructiva* (ecuación 2.36) ocurrirá cuando

$$r_1 - r_2 = m\lambda , \quad (2.44)$$

entonces, de las dos últimas relaciones se obtiene

$$y_m \approx \frac{s}{a} m\lambda . \quad (2.45)$$

Esto produce la m-ésima franja brillante en la pantalla si consideramos el máximo con $m= 0$ como la franja cero. La posición angular de la franja se obtiene sustituyendo la última expresión en la ecuación 2.42; queda de la siguiente forma

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a}, \quad (2.46)$$

Otra alternativa para deducir la ecuación 2.46 es con la ayuda de la figura 2.5b, donde puede verse que para encontrar el máximo de interferencia de orden m -ésimo, entonces m longitudes de ondas enteras deberían de estar dentro de la distancia $r_1 - r_2$. Entonces, del triángulo S_1S_2B ,

$$a \operatorname{sen} \theta_m = m\lambda, \quad (2.47)$$

o

$$\theta_m \approx \frac{m\lambda}{a}. \quad (2.48)$$

La distancia de separación entre franjas adyacentes se puede encontrar fácilmente en la ecuación 2.45. Para franjas de orden m y $m+1$ se tiene que

$$y_{m+1} - y_m \approx \frac{s}{a}(m+1)\lambda - \frac{s}{a}m\lambda, \quad (2.49)$$

o

$$\Delta y = \frac{s}{a}\lambda. \quad (2.50)$$

Ya que el patrón es equivalente al de dos ondas esféricas superpuestas (en la región $r_1 \approx r_2$), y aplicando la ecuación 2.30, el patrón de interferencia se puede expresar como:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}, \quad (2.51)$$

siempre y cuando los dos haces sean coherentes y tengan iguales irradiancias I_0 . Con

$r_1 - r_2 \approx \frac{ya}{s}$ la irradiancia resultante en;

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda}, \quad (2.52)$$

por lo tanto obtenemos máximos consecutivos que están separados por el Δy proporcionado en la ecuación 2.50. También, de la ecuación anterior se obtiene el periodo que está definido por:

$$P = \frac{a}{\lambda s}, \quad (2.53)$$

por lo tanto sustituyendo la ecuación 2.53 en la ecuación 2.52 se puede expresar el patrón de interferencia como:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{y\pi}{P}. \quad (2.54)$$

En la figura 2.6 se muestra una fotografía del patrón de interferencia que se obtiene en un interferómetro de Young.

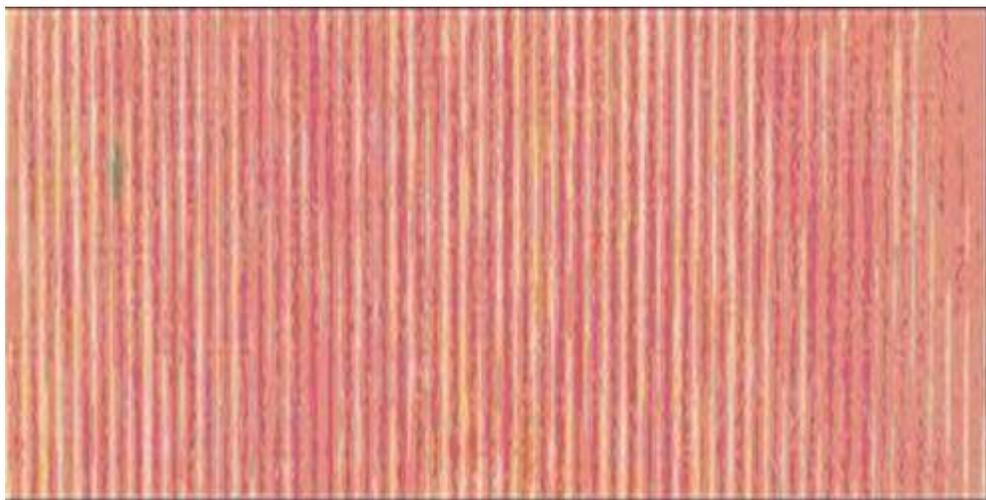


Figura 2.6. Distribución de franjas obtenidas por el experimento de Young.

II.5. INTERFEROMETRO DE DIVISIÓN DE AMPLITUD DE ONDA

En el caso del interferómetro de división de amplitud ésta se divide para generar dos ondas que viajan por diferentes caminos y se reencuentran para darse así la interferencia, un ejemplo de este tipo de interferómetros es el de Michelson.

En la época en que el físico Albert Michelson desarrolló el interferómetro, el metro, que es el patrón de longitud, se definía como la distancia entre dos marcas finas en una barra particular de platino-iridio que permanecía en Sévres, Francia. Con su interferómetro, Michelson era capaz de medir la longitud de onda correspondiente a una línea de emisión de una fuente de luz de cadmio con una certeza de 10^8 . Esta capacidad produjo una definición del metro en términos de la longitud de onda de una línea espectral determinada del elemento kriptón. Posteriormente Michelson y el químico estadounidense Edward Morley con el propósito de medir la velocidad relativa a la que se mueve la Tierra con respecto al éter razonaron que, si el éter era real, la Tierra se movería por él produciendo un "viento del éter" detectable. Michelson utilizó el principio del efecto de una corriente de un río sobre dos nadadores en su primer interferómetro. La situación es como tener dos nadadores, nadando la misma distancia pero en diferentes direcciones o caminos. El primer nadador nada con la corriente a favor 50 metros, y el segundo nadador nada contra corriente también 50 metros a lo largo de la orilla del río. Si ambos nadan a la misma velocidad relativa respecto del agua, el nadador que tiene que nadar contra corriente tardará más en llegar (en algunos momentos el nadador que nada contra corriente sería frenado cuando nadara en contra de la corriente) que el nadador que nada a favor de la corriente del río. El efecto del viento del éter sobre las ondas de luz sería como el de una corriente de un río en un nadador que se mueve constantemente a favor o en contra de la corriente. Por lo que Michelson dividió un rayo de luz en dos haciéndolo incidir sobre un espejo divisor de haz el cual formaba un ángulo de 45° con la dirección del haz. El espejo tenía un recubrimiento de plata de un espesor tal, que reflejaba la mitad del haz incidente y transmitía la otra mitad, después los envió a

través de dos caminos separados de longitudes L_1 y L_2 que forman un ángulo recto entre ellos y posteriormente reunió los dos rayos en uno. Esto es lo que se creía que pasaría con la luz al llegar a la Tierra con diferentes posiciones con respecto al éter, llegaría con diferentes velocidades. El resultado negativo del experimento está considerado como la primera prueba contra la teoría del éter y posteriormente constituyó la base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

En la figura 2.7 se representa el interferómetro de Michelson y en la figura 2.8 el patrón de interferencia que se obtiene. Para obtener analíticamente la diferencia de fase de los haces de luz que interfieren se presenta la figura 2.9.

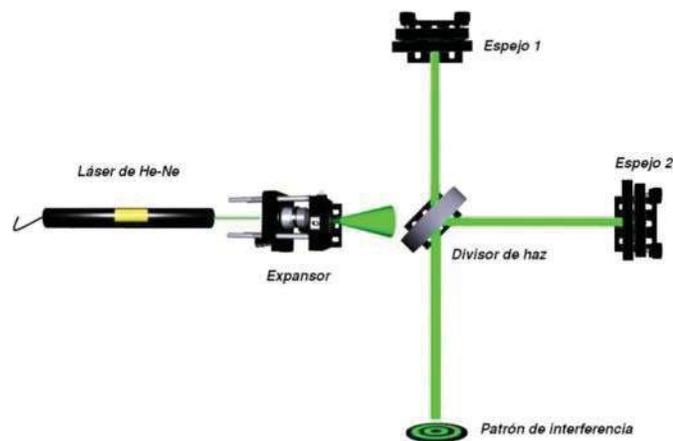


Figura 2.7. Esquema de la vista superior del interferómetro de Michelson.

Este interferómetro se basa en el principio de división de un haz de luz por un divisor de haz o espejo semitransparente (DH). En el DH, una parte del haz incidente es transmitida al espejo 1 y otra parte es enviada al espejo 2. En estos espejos, ambos haces son reflejados. Luego de transmitirse y reflejarse nuevamente en el DH, dichos haces se recombinan en la pantalla P creando un patrón de interferencia. Cuando los espejos E_1 y E_2 son perpendiculares, en la pantalla P se observan anillos concéntricos brillantes y oscuros tal como se muestra en la figura 2.8.

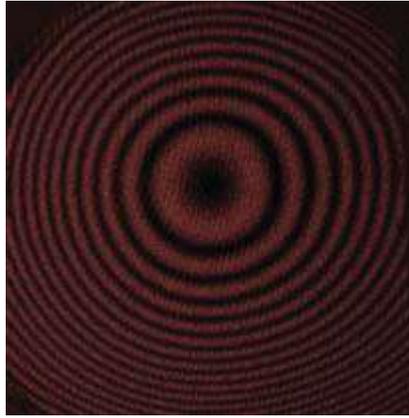


Figura 2.8. Fotografía del patrón de interferencia del interferómetro de Michelson.

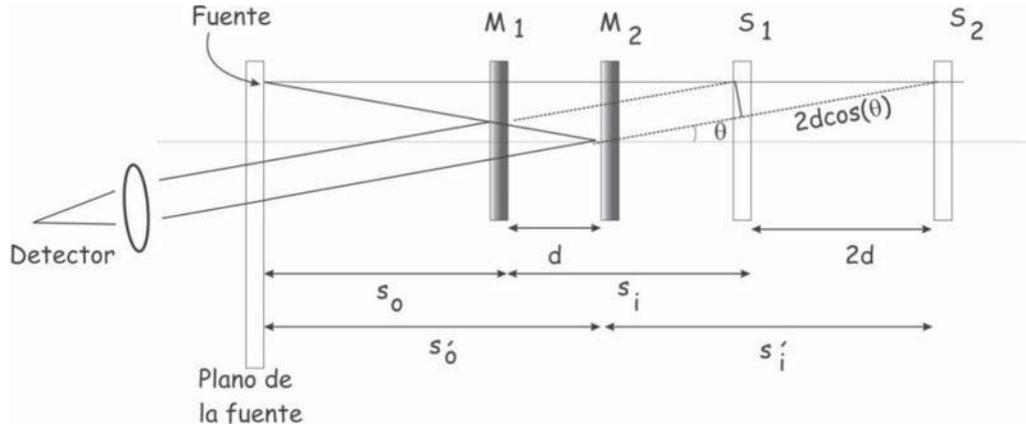


Figura 2.9. Geometría del interferómetro de Michelson.

Puede observarse de la figura 2.9 que la diferencia de camino óptico Λ está dada por

$$\Lambda = 2d \cos \theta \quad , \quad (2.55)$$

donde d es la distancia de separación de los espejos. El cambio de fase entre las dos ondas que se superponen es

$$\delta = k\Lambda = k2d \cos(\theta) \pm \pi \quad . \quad (2.56)$$

El patrón de interferencia es mínimo (patrón de interferencia destructiva) cuando

$$2d \cos(\theta_m) = m\lambda \quad , \quad (2.57)$$

donde m es un número entero y λ es la longitud de onda empleada. El anillo o franja central oscura para la cual $\theta=0$, se representa por

$$2d = m_0\lambda \quad , \quad (2.58)$$

y el anillo m -ésimo esta dado por la ec.

$$2d_1 \cos(\theta_m) = m\lambda \quad . \quad (2.59)$$

El tipo de franjas de interferencia que se forman en este interferómetro son llamadas franjas de igual inclinación.

II.6. INTERFEROMETRO DE MACH-ZEHNDER

En este estudio, para la adquisición de formas en 3-D de materiales, se ensayó inicialmente con el montaje de un *interferómetro de Mach-Zehnder* el cual pertenece, al igual que el de Michelson, a la familia de interferómetros de doble haz por división de amplitud. Existen otros interferómetros de doble haz pero cabe destacar el *interferómetro de Mach-Zehnder* por su amplia utilización en metrología óptica. Su ventaja principal es que permite interponer elementos en uno de los haces sin que el otro sea afectado, y de esta manera se altera la diferencia de camino óptico. Por ejemplo una cuña óptica, situada en uno de los haces del interferómetro, desvía la dirección de propagación de la onda, desplazando así el patrón de interferencia observado. En la figura 2.10 se muestra un esquema de este interferómetro.

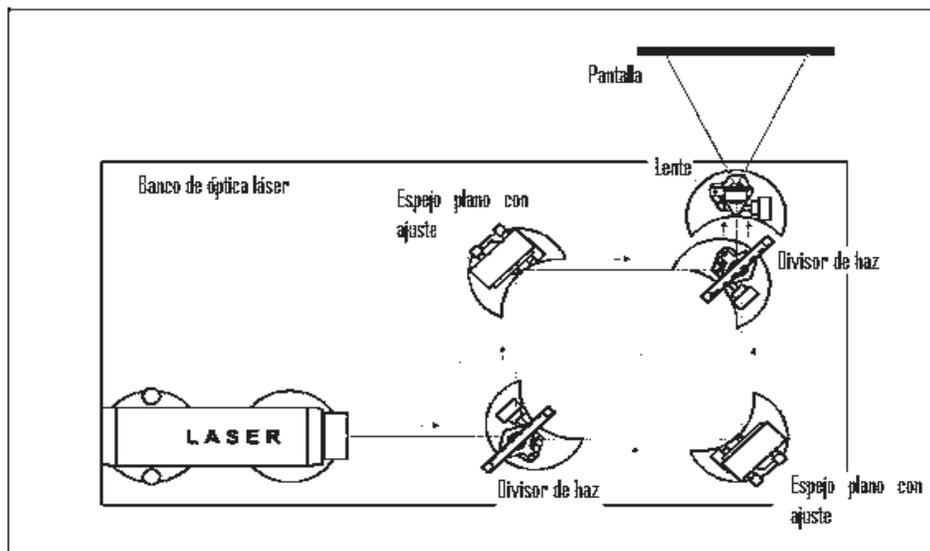


Figura.2.10. Esquema de un interferómetro de Mach-Zehnder.

En el interferómetro *Mach-Zehnder* un haz de luz coherente que proviene de un láser es dividido en dos partes por un semiespejo o divisor de haz. Estos haces divididos siguen dos caminos diferentes. Mediante espejos se consigue que la luz siga una trayectoria como la que se muestra en la figura 2.10, y mediante un segundo semiespejo o divisor de haz se vuelven a combinar sumándose así las dos contribuciones de luz e interfiriendo entre sí. Debido a esta interferencia de las ondas de luz se produce una figura de interferencia como la que se muestra en la siguiente figura 2.11.

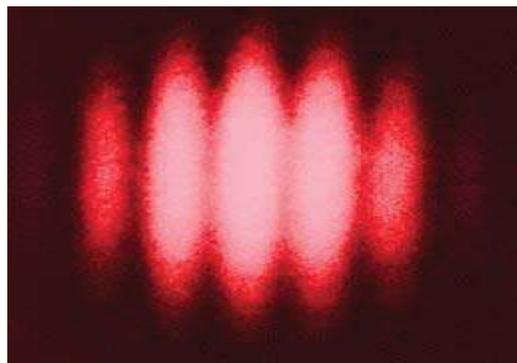


Figura 2.11. Patrón de interferencia que se forma sobre una pantalla con un interferómetro Mach-Zehnder.

CAPÍTULO III. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE DIFERENCIA FASE

III. 1. PERFILOMETRÍA POR TRANSFORMADA DE FOURIER

La perfilometría por transformada de Fourier es un método basado en medición de fase, desarrollado por Mitsuo Takeda y Kazuhiro Mutoh en los años 80's. Este método ha sido utilizado extensamente en varios proyectos de investigación y es base para muchos sistemas industriales.

La descripción del sistema de Takeda, et. al., se basa en el arreglo físico de los elementos que forman parte del mismo. Principalmente los elementos a los que se hace mención son los siguientes: proyector, cámara, cuerpo, plano de referencia (que puede ser omitido en algunos casos). El arreglo físico es similar al usado en la topografía por proyección moiré

En la topografía por proyección moiré se utilizan generalmente dos tipos de arreglos físicos, ambos tienen sus ventajas y desventajas, y proporcionan flexibilidad al momento de implementarlos: ejes ópticos cruzados, ejes ópticos paralelos.

En el caso del arreglo de ejes ópticos cruzados, el eje óptico del proyector y el de la cámara incide en el mismo plano e interseca algún punto cerca del centro del objeto. Este arreglo es fácil de construir, ya que tanto el patrón de rejilla como el sensor óptico pueden ser colocados sobre el eje de la cámara y del proyector respectivamente pero solo da contornos planos cuando se utiliza óptica tele-céntrica.

En el arreglo de ejes ópticos paralelos, los ejes ópticos del proyector y de la cámara inciden en el mismo plano y son paralelos entre sí, en este caso igual que en el anterior el eje de la cámara tiene que ser completamente perpendicular al plano de referencia. La geometría de ejes ópticos paralelos tiene la ventaja de que ofrece contornos planos, pero el patrón de deformación tiene que ser colocado sobre el eje de proyección, lo suficientemente alejado del plano de referencia para asegurar que dicho patrón sea proyectado dentro del área de visión de la cámara.

Estos dos arreglos físicos son usados comúnmente en la topografía por proyección moiré, y también son válidos para la perfilometría por transformada de Fourier. Sin embargo, el problema de los contornos no planos en el arreglo de ejes ópticos

cruzados puede ser en alguna medida resuelto mediante el algoritmo de perfilometría por transformada de Fourier.

El concepto de contornos no planos se refiere a la distorsión que sufre la imagen al ser capturada. Los errores de perspectiva o paralaje (solapamiento) son parte de la experiencia humana cotidiana y permiten que el cerebro pueda interpretar el mundo tridimensional. Se espera que los objetos cercanos parezcan relativamente más grandes que aquellos que se encuentran lejos. Este fenómeno afecta a los sistemas de imágenes convencionales de manera que el objeto cambia su forma en relación con la distancia que este tiene con respecto a los lentes. Una solución a este problema es el uso de lentes tele-céntricos, porque los objetos continúan siendo percibidos del mismo tamaño independientemente de su ubicación en el espacio.

La tele-centricidad se define como la propiedad de ciertos diseños de lentes multielementos en los cuales los rayos principales para todos los puntos sobre el objeto o imagen se encuentran colimados. Se puede ver a la tele-centricidad como una manera en la que los lentes se encuentran posicionados en el infinito.

En la figura 3.1 se muestra la geometría de ejes ópticos cruzados, los ejes ópticos $E'_p E_p$ de los lentes del proyector cruzan el otro eje óptico $E'_c E_c$ de los lentes de la cámara en el punto O en el plano de referencia R, el cual es un plano ficticio normal a $E'_c E_c$ y sirve como referencia de donde la altura del objeto $h(x,y)$ es medida.

La rejilla G tiene sus líneas normales al plano de la figura, y su imagen conjugada (con periodo P) es formada por los lentes del proyector en el plano I cruzando por el punto O. E'_p y E_p denotan, respectivamente, los centros de entradas y salidas de las pupilas de los lentes del proyector.

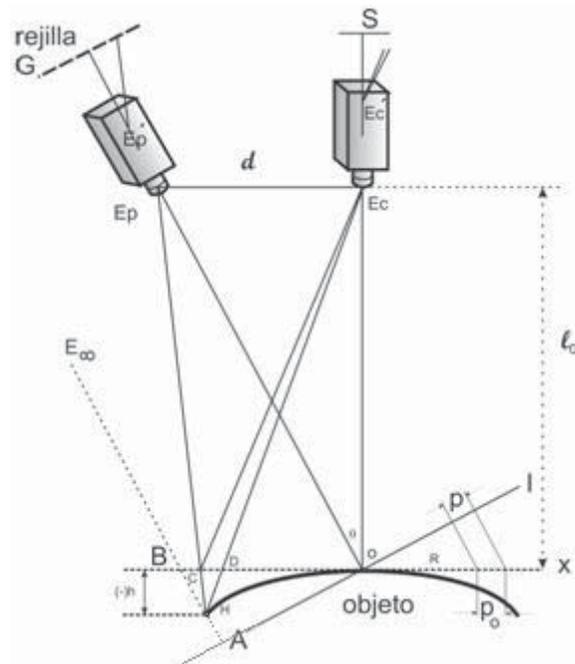


Figura 3.1 Diagrama del arreglo experimental de ejes ópticos cruzados.

Los lentes de la cámara, con centros de pupila de entrada y de salida E'_c y E_c , concentran la imagen del plano de referencia R en el plano sensor S . E_p y E_c se encuentran ubicadas a la misma distancia del plano R . Cuando el objeto es un plano liso y uniforme sobre R , por ejemplo $h(x,y) = 0$ y si E_p se encuentra ubicada en infinito (como se muestra en la figura donde E_∞ denota un proyector telecéntrico), la imagen de rejilla proyectada en la superficie del objeto y observada por E_c es un patrón de líneas constantes que puede ser expresado matemáticamente por la siguiente expansión de series de Fourier:

$$g_0(x,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n e^{i2\pi n f_0 x}) \quad , \quad (3.2)$$

en donde

$$f_0 = \frac{1}{p_0} = \frac{\cos \theta}{p} \quad , \quad (3.3)$$

es la frecuencia fundamental observada en la imagen de la rejilla. El eje X escogido como en la figura y el eje Y es normal al plano de la figura. Si E_p se encuentra a una distancia finita, se puede observar en el plano del sensor una imagen de rejilla deformada incluso si $h(x,y) = 0$. Se puede apreciar que un rayo principal que incide el plano conjugado en el punto A, cruza el plano R en el punto B en el caso tele céntrico y el punto C en el caso no tele céntrico. Tomando en cuenta lo anterior, se puede escribir la ecuación de la imagen de rejilla deformada para $h(x,y) = 0$ como:

$$g_0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n e^{i2\pi n f_0 [x + S_0(x)]} \right) , \quad (3.4)$$

en donde $S_0(x) = \overline{BC}$ se encuentra en función de X y tiene signo positivo cuando C se encuentra a la derecha de B como en la figura. Takeda describe que por facilidad es conveniente expresar la ecuación (3.4) como una señal modulada espacialmente por fase de la siguiente forma.

$$g_0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n e^{i[2\pi n f_0 x + n\phi_0(x)]} \right) , \quad (3.5)$$

en donde

$$\phi_0 = 2\pi f_0 S_0(x) = 2\pi f_0 \overline{BC} , \quad (3.6)$$

y la imagen de rejilla para un objeto cualquiera es dada por:

$$g(x, y) = r(x, y) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n e^{i[2\pi n f_0 x + n\phi_0(x,y)]} \right) , \quad (3.7)$$

en donde

$$\phi = 2\pi f_0 S(x, y) = 2\pi f_0 \overline{BD} . \quad (3.8)$$

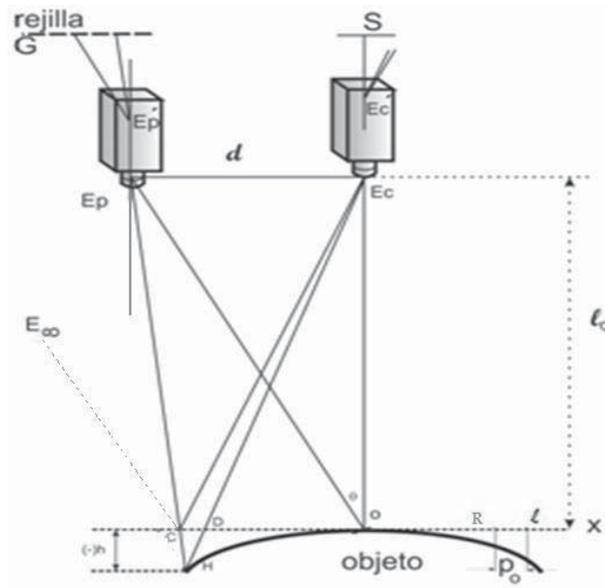


Figura 3.2 Diagrama del arreglo experimental de ejes ópticos paralelos

En el caso de la figura 3.2, el arreglo de ejes ópticos paralelos muestra que el eje óptico $E'_p E_p$ de los lentes del proyector y el eje $E'_c E_c$ de la cámara son paralelos y normales al plano de referencia R . El conjugado de la imagen de rejilla G se encuentra sobre el plano R y los puntos A , B y C en la figura 3.2 se convierten en este arreglo en simplemente el punto C , así que las ecuaciones (3.6) y (3.8) se convierten en dos ecuaciones semejantes:

$$\phi_0 = 2\pi f_0 S_0(x) = 2\pi f_0 \overline{BC} = 0 \quad (3.9)$$

$$\phi = 2\pi f_0 S(x,y) = 2\pi f_0 \overline{BD} = 0 \quad (3.10)$$

Aunque la imagen de rejilla proyectada sobre el plano $h(x,y) = 0$ sigue siendo un patrón de líneas regular sin importar la posición de la pupila del proyector, esto le da la ventaja al arreglo físico de ejes ópticos paralelos de generar contornos planos en la topografía de moiré.

III.2. MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La imagen de rejilla formada, y dada por la ecuación (3.4) puede ser interpretada como múltiples señales moduladas en fase $\phi(x,y)$, en amplitud $r(x,y)$ y con frecuencia espacial portadora nf_0 . Basados en que la fase posee información acerca de la forma tridimensional a medir, el problema es separar $\phi(x,y)$ del resto de la información.

Para lo anterior reescribimos la ecuación (3.7) como:

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_0 + \phi(x, y)], \quad (3.11)$$

en donde $a(x,y)$ es la distribución no uniforme de la reflectividad sobre la superficie del objeto y $b(x,y)$, $\phi(x,y)$ y f_0 , la intensidad, la fase y la frecuencia espacial de la malla (patrón de líneas ya deformadas) respectivamente.

Ahora expresando (3.11) en su forma exponencial se tiene:

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) e^{2\pi f_0 x} + c^* e^{-2\pi f_0 x}, \quad (3.12)$$

en donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) e^{i\phi(x, y)} \quad (3.13)$$

Usando el algoritmo de FFT se calcula la Transformada Unidimensional de Fourier de la ecuación (3.12) para cada variable de X únicamente, con Y manteniéndose fija:

$$G(f, y) = A(f, y) + C(f + f_0, y) + C^*(f - f_0, y), \quad (3.14)$$

en donde las letras mayúsculas representan el espectro de Fourier, f representa la frecuencia espacial en la dirección de x y y es considerada como una variable fija. Si asumimos que $a(x, y)$ y $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ tienen frecuencias mucho menores que f_0 , entonces la ecuación (3.14) tomará la forma de la Figura 3.3

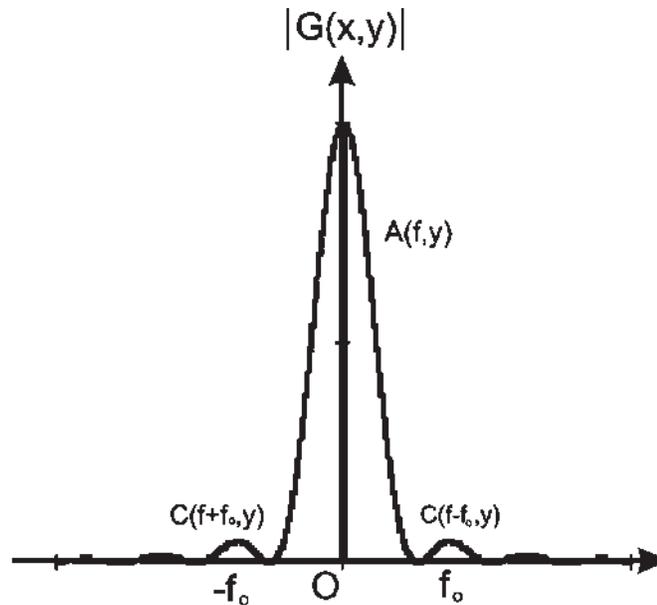


Figura 3.3 Espectro espacial de Fourier de la imagen para un valor de Y fijo

Para poder separar el índice de reflectividad $a(x, y)$ se necesita pasar la señal por un filtro pasa bajas el cual debe estar centrado en f_0 . Para realizar lo anterior es posible utilizar un filtro espacial o un filtro ideal (máscara) ya que la información no se está procesando en tiempo real.

La componente que se va a obtener filtrándola de las demás es la primera componente armónica como se muestra en la figura 3.4.

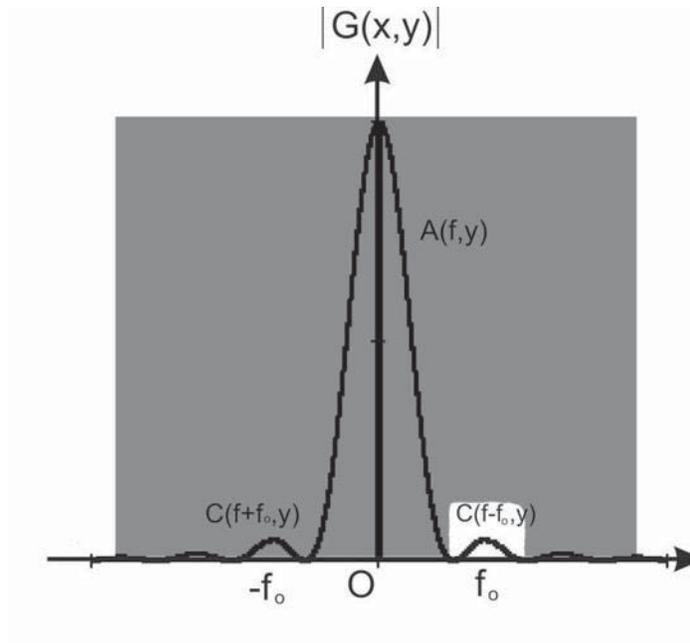


Figura 3.4 Espectro espacial de Fourier de la imagen para un valor de Y fijo en el cual se muestra la primera componente armónica la cual contiene la información de fase.

Se recomienda que después de filtrar la señal, esta sea trasladada al origen para que $C(f + f_0, y)$ se convierta en $C(f, y)$, esto se logra a partir de una operación basada en un teorema de la Transformada de Fourier discreta

$$e^{i\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{i(\omega - \omega_0)}) \quad , \quad (3.15)$$

para poder realizar dicho corrimiento se tiene que obtener primero la FFT inversa de la señal, esta transformada se realiza en una dimensión es decir, se avanza en x mientras que y se mantiene como un parámetro constante. Después se hace la multiplicación por el exponencial para poder enviar la señal al origen en el espectro espacial de Fourier

$$\hat{g}(x, y) = \hat{g}'(x, y) e^{i\omega_0 n} = \frac{1}{2} b(x, y) e^{i\phi(x, y)} \quad , \quad (3.16)$$

en donde $\hat{g}'(x, y)$ es la transformada inversa de Fourier de la información ya filtrada.

En el caso de ejes ópticos cruzados, se realizan los mismos pasos para la imagen que solo contiene el fondo (plano de referencia)¹ y así se obtiene:

$$\hat{g}_0(x, y) = \hat{g}'_0(x, y)e^{i\omega_0 n} = \frac{1}{2} b(x, y)e^{i\phi_0(x, y)} \quad , \quad (3.17)$$

y se genera de las ecuaciones (3.16) y (3.17), tomando en cuenta que se toma el complejo conjugado de la ecuación (3.17) una nueva señal:

$$\hat{g}(x, y) \cdot \hat{g}_0^*(x, y) = \left| \frac{1}{2} b(x, y) \right|^2 e^{i\Delta\phi(x, y)} \quad , \quad (3.18)$$

en donde

$$\Delta\phi(x, y) = \phi(x, y) - \phi_0(x, y) \quad . \quad (3.19)$$

$\Delta\phi(x, y)$ en las ecuaciones (3.18) y (3.19) dan la modulación de fase debido a la distribución de la altura del objeto. Se considera que esta operación no es necesaria en el arreglo físico de ejes ópticos paralelos, pero es recomendable aplicarla, ya que se pueden cancelar errores causados por errores en la alineación y /o distorsión por causa de los lentes.

En este paso ya se tiene solo la información concerniente a las franjas, pero la que nos interesa es la de fase $\Delta\phi(x, y)$ ya que contiene los datos de profundidad del objeto. Para la separación de esta fase se proponen dos métodos que en realidad son equivalentes: uno el método por algoritmos complejos y el otro por arco tangente de cuatro cuadrantes. Ambos proveen resultados muy parecidos y además son sencillos de implementar.

En el caso de logaritmos complejos para obtener la distribución de fase $\Delta\phi(x, y)$ consideramos únicamente la parte compleja sin tomar en cuenta la parte real.

$$\log[\hat{g}(x,y) \cdot \hat{g}_0^*(x,y)] = \log\left(\left|\frac{1}{2}b(x,y)\right|^2\right) + i\Delta\phi(x,y) \quad (3.20)$$

En el caso del arco tangente de cuatro cuadrantes para obtener la distribución de fase $\Delta\phi(x,y)$ se aplica

$$\Delta\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{\text{Imag}(\hat{g}(x,y) \cdot \hat{g}_0^*(x,y))}{\text{Re}(\hat{g}(x,y) \cdot \hat{g}_0^*(x,y))}\right) \quad (3.21)$$

En el caso de logaritmos complejos y arco tangente, los valores solo se encuentran definidos en $\pm\pi$, por lo que la distribución de la fase se dice que se encuentra envuelta en este rango y consecutivamente tiene discontinuidades con saltos de fase de 2π . La corrección de este problema, se denomina desenvolvimiento de fase.

III. 3. CONVERSIÓN FASE-ALTURA

Para obtener la altura en unidades métricas analicemos las figuras 3.1 y 3.2. Se puede observar que $\triangle E_p H E_c \wedge \triangle C H D$, entonces:

$$\overline{CD} = -\frac{d h(x,y)}{l_0 - h(x,y)} \quad (3.22)$$

En donde la altura del objeto $h(x,y)$ se define como positiva cuando se mide hacia adelante del plano de referencia R. Substituyendo la ecuación (1.19) en

$$\Delta\phi(x,y) = 2\pi f_0 (\overline{BD} - \overline{BC}) = 2\pi f_0 \overline{CD} \quad (3.23)$$

se obtiene

$$h(x,y) = \frac{l_0 \Delta\phi(x,y)}{\Delta\phi(x,y) - 2\pi f_0 d} \quad (3.24)$$

La fórmula anterior se puede expresar de forma tal que puede ser comparada directamente con la fórmula de la topografía de moiré, así que sustituyendo (3.3) en (3.24) tenemos que:

$$h(x,y) = \frac{l_0 p_0 \frac{\Delta\phi(x,y)}{2\pi}}{[\frac{p_0\Delta\phi(x,y)}{2\pi}] - d} \quad (3.25)$$

donde $\frac{\Delta\phi(x,y)}{2\pi}$ da el número N de franjas en orden en la topografía de moiré, la ecuación (3.25) es la misma fórmula que se usa en el método de Takeda et. Al. La diferencia entre la técnica del método de moiré y el método de perfilometría por transformada de Fourier se debe a que la distribución de alturas en la técnica de moiré es dada a lo largo de un grupo discreto de líneas de contorno y el método de perfilometría por transformada de Fourier ofrece todos los elementos de la imagen.

III.4. DESENVOLVIMIENTO DE FASE

El desenvolvimiento de fase es un proceso computacional en donde una superficie ϕ es reconstruida en su llamada forma envuelta ψ . En la ausencia de ruido $\psi(x)$ es igual a $\phi(x)+2\pi k(x)$, en donde $k(x)$ es una función entera tal que $-\pi < \psi \leq \pi$. El problema del desenvolvimiento de fase ha ganado considerable atención en los últimos años. Es una parte esencial de muchas aplicaciones de procesamiento de señales coherentes como por ejemplo Radar Interferométrico de Apertura Sintética, en interferometría óptica, etc, Sin embargo, los valores reales de fase no pueden ser extraídos directamente de la señal física debido a que dichos algoritmos modifican la señal de forma en que sus valores se encuentran en un rango de $\pm\pi$ radianes. Lo único que se puede obtener de los métodos mencionados es la fase envuelta, la cual se encuentra limitada a valores entre π y $-\pi$, pero cuando excede el valor de dichos valores, la fase brinca a $-\pi$ y viceversa. Por cada salto negativo de 2π se necesitaría añadir π , mientras que por cada salto positivo se necesitarían restar otros 2π .

El proceso de desentwolvimiento intenta proveer una estimación de la función de fase real ϕ dada la función ψ . Uno de los problemas que se presenta en el proceso de desentwolvimiento es poder distinguir entre envolturas de fase genuinas producidas por la función arco-tangente y saltos en la fase causados por discontinuidad del objeto.

De manera general el algoritmo básico de desentwolvimiento de fase en 1-D es como sigue: Se inicia con el primer punto, y se compara con el segundo, si la diferencia entre el primero es igual o mayor a 2π entonces se le suma o se le resta dependiendo del signo de la primera diferencia 2π a todos los puntos a partir del segundo, y se repite dicha operación hasta terminar con la línea de información. Si no existe salto se continúa hasta encontrar un salto y se realiza el desentwolvimiento.

En el caso de estar trabajando con mapas de fase, el desentwolvimiento en 1-D no es suficiente, sin embargo dado el desarrollo actual, las aplicaciones que trabajan con mapas de fase tales como lo son algunos microscopios electrónicos y los sistemas de apertura sintética de radar entre otros, han originado la creación de varios algoritmos bidimensionales de desentwolvimientos de fase tanto complejos como simples, entre ellos se encuentra el algoritmo de desentwolvimiento por confiabilidad siguiendo una ruta o camino discontinuo.

III. 5. ALGORITMOS DE DETECCION DE FASE

La interferometría óptica, considerada como una técnica de medición de diferencias de caminos ópticos, se funda en la superposición de dos o más haces luminosos que satisfacen las condiciones necesarias para permitir la detección de un patrón de interferencia. Este patrón se percibe como una serie de regiones brillantes y oscuras distribuidas sobre un plano de observación. De acuerdo al valor de la fase que mantengan los haces en una región determinada, es que ésta aparece brillante (diferencia de fase igual a 2π radianes, o un múltiplo) u oscura (diferencia de fase

igual a π radianes, o un múltiplo impar). La irradiancia de una región es intermedia cuando dicha relación de fase conserva un valor entre los extremos mencionados. Dado que dichas regiones adoptan frecuentemente la forma de bandas o franjas, son conocidas justamente como "franjas" o "patrones de franjas".

Uno de los problemas esenciales de la interferometría consiste en determinar la distribución de fase entre los haces sobre la base de un patrón de interferencia, esto es, fundándose en las variaciones de la irradiancia a lo largo y ancho del campo de observación. La manera en que se modifica un patrón de interferencia dando paso a otro diferente, permite conocer también cómo evoluciona la distribución de fase. Aunque mediante la interferometría se busca, por lo general, determinar las propiedades ópticas del medio transmisor de los haces que interfieren (como el índice de refracción, directamente relacionado con la velocidad de la luz), el conocimiento relativo a la distribución de la fase no se limita a esto y proporciona, generalmente, información diversa que depende del área de aplicación y de las circunstancias particulares en las que se realicen las mediciones.

Dentro del campo de mediciones interferométricas ópticas de gran precisión, resulta de fundamental importancia la determinación del frente de onda, es decir, la determinación de la superficie que contiene únicamente puntos con un mismo valor de fase.

La determinación interferométrica de diferencias de fase entre dos ondas luminosas, puede conducir al conocimiento de la distribución de fase de uno de los frentes de onda cuando se conoce la del segundo. La razón de ello estriba, por un lado, en que la información de la fase debe extraerse partiendo de una distribución espacial de irradiancias que no sólo es afectado por la fase misma, sino también por los cambios de amplitud que cada uno de los frentes de onda posean en el espacio.

Desde finales de los años 70 se ha venido desarrollando una técnica que consiste en introducir una fase adicional f en alguna de las ondas que interfieren, de manera que module el patrón de interferencia en forma conveniente para su procesamiento posterior.

La modulación del patrón puede ser temporal o espacial. Es esencialmente temporal si la fase introducida únicamente varía en el tiempo ($f = f(t)$). El patrón puede resultar modulado sólo espacialmente, cuando f surja al inclinar uno de los frentes de onda (p.e., formando un ángulo respecto de la dirección x). Así, $f = f(x)$, donde f resulta directamente proporcional a x [8]. Este segundo tipo de modulación da lugar a los métodos de procesamiento asociados con el análisis de Fourier y fundamentados en el filtraje (llevado a cabo en el plano de las frecuencias espaciales) alrededor de uno de los primeros órdenes del espectro del patrón modulado. Así, la fase introducida actúa como una frecuencia portadora espacial [8].

La modulación del patrón de interferencia puede conseguirse introduciendo un pequeño corrimiento en la frecuencia de uno de los dos haces, resultando así una modulación sinusoidal en cualquier punto del patrón y que se comporta con una frecuencia igual a la diferencia de frecuencias introducida entre los haces. Así la irradiancia sobre un punto fijo del patrón varía temporalmente con una fase determinada por la diferencia de fase entre los haces sobre ese mismo punto. Este procedimiento permite medir la fase en cualquier posición dentro del patrón de franjas.

El corrimiento del patrón de franjas puede realizarse en forma discreta con algunas ventajas, tales como un tiempo reducido de procesamiento y el uso de un microprocesador [4]. Puesto que los cambios de irradiancia del patrón de franjas son causados por tres cantidades desconocidas (la fase, y los cambios espaciales de amplitud de cada haz), se establece un sistema de ecuaciones con tres incógnitas y, en consecuencia, el número mínimo necesario de corrimientos discretos de fase es tres

[2]. También se pueden efectuar cuatro, cinco o $N + 1$ corrimientos, en lugar de tres. En este estudio el método se aplicará para conocer características cualitativas de superficies de materiales milimétricos, y en base a esto, se toma la alternativa de efectuar tres corrimientos.

Consideraciones que se deben tener en cuenta en la aplicación de estos métodos:

i) los datos que se pueden medir con cierta confiabilidad están equidistantes en fase. Resultaría conveniente tenerlos equidistantes en el campo de observación, especialmente si se busca determinar un frente de onda.

ii) el intervalo de incertidumbre en la posición de la fase medida, depende tanto de la manera con que varíe la distribución de fase a lo largo de la dirección de medición, como de la sensibilidad de detección de intensidad.

iii) la interpolación no es confiable puesto que la intensidad del patrón depende de tres cantidades desconocidas: la fase a determinar y las variaciones de amplitud de cada onda que interfiere.

Como se menciona en párrafos anteriores, la precisión correspondiente a la determinación de las diferencias de fase entre dos frentes de onda, puede mejorarse incorporando una fase f adicional apropiada en una de las ondas que interfieren realizando algunos corrimientos, los cuales determinarán la manera en que las franjas del patrón de interferencia se desplacen sobre el plano de observación. Suponiendo un desplazamiento lineal, la irradiancia sobre un punto del plano de observación varía sinusoidalmente. Esta modulación particular, junto con la correspondiente detección de los cambios de irradiancia, recibe el nombre de técnica de “amarre de fase” (*phase-lock*), principalmente por compartir una detección y un procesamiento típico de señales continuas.

Si el desplazamiento aplicado se incrementa por intervalos, las franjas del patrón se desplazan también por etapas. Al tener un cierto número n de intervalos, se produce un número igual de patrones de interferencia. Sobre un punto fijo del plano de observación, y mediante los n valores distintos de irradiancia, correspondientes a cada patrón, puede definirse un sistema lineal de ecuaciones, con auxilio del valor del corrimiento inducido de fase respectivo $f = fn$. En este sistema de ecuaciones, las incógnitas son, además de la fase, los cambios espaciales de las amplitudes de cada onda que interfiere (o, equivalentemente, la irradiancia promedio del patrón y la modulación de las franjas). Este método se conoce como de corrimiento de fase. Y consiste en un procesamiento esencialmente numérico.

III.6. INTERFERENCIA DE HACES CON CORRIMIENTO DE FASE

Considérense dos ondas luminosas monocromáticas de frecuencia angular ω y distribución espacial de fase $\varphi_i(x)$ donde x denota el vector de posición y el índice i acepta los valores 1 o 2. La amplitud de cada onda la describe la función $a_1(x)$ que por lo general no es constante. Si $V_i(x)$ es la representación compleja de cada perturbación y se introduce un corrimiento de frecuencia dado por $f(t)$, cada una de ellas se describe como sigue:

$$V_1 = a_1(x) \exp\{-i(\omega t + \varphi_1(x))\} , \quad (3.26a)$$

$$V_2 = a_2(x) \exp\{-i(\omega t + \varphi_2(x) + f(t))\} , \quad (3.26b)$$

y la intensidad del patrón de interferencia resultante se describe como:

$$I(x,t) = \{a(x) + b(x) \cos(f(t) + \Delta\phi(x))\} , \quad (3.27)$$

donde

$$a(x) = a_1^2(x) + a_2^2(x) \quad , \quad (3.28a)$$

$$b(x) = 2a_1(x)a_2(x)/a(x) \quad , \quad (3.28b)$$

$$\Delta\phi(x) = \phi_2(x) - \phi_1(x) \quad , \quad (3.28c)$$

obsérvese que en la ec. (3.27) se desconocen tanto $a(x)$ como $b(x)$ y la distribución de fase buscada $\Delta\phi(x)$. Por tanto, conociendo únicamente la intensidad $I(x,t)$ se podrá determinar la distribución de fase sólo en caso de que la intensidad promedio (a) y la modulación (b) no dependan de x . Esto ocurre cuando los frentes de onda de cada perturbación son uniformes.

Según se realice la modulación $f(t)$ de la ec. (3.27), en forma continua o por intervalos (discretamente) se tiene una modulación sinusoidal de pequeña amplitud que ofrece buenos resultados. Además se supone que el error aditivo (proveniente principalmente de los aparatos utilizados) es Gaussiano.

En tal caso, la modulación puede representarse por

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{f'(t)}{\Delta T_n} \right) \text{rec} \left(\frac{t-t_n}{\Delta T_n} \right), \quad (3.29)$$

donde N puede tomar los valores 3,4,5, ...,N. Cuando Δt_n es despreciable de modo que la función rectángulo (*rect*) en la en la Ec. (3.29) puede sustituirse por una δ de Dirac, las intensidades correspondientes al n -ésimo corrimiento sobre un punto fijo y realizadas en tiempos cualesquiera se expresan como sigue:

$$I_n = a + b \cos(\Delta\phi + f_n) \quad , \quad (3.30)$$

donde f_n son los valores $f'(t)$ muestreados por $\delta(t - t_n)$. Observemos que para determinar $\Delta\phi$, se requieren, al menos, tres mediciones de la intensidad con el fin de formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ($N = 3$). En general, el muestreo de fase se realiza entre 0 y 2π a intervalos iguales, lo que significa $f_n = 2\pi(n - 1)/N$. Este es el caso de corrimiento de fase.

III.7. MEDICIÓN DE LA FASE

La fase entre la referencia y la de muestreo puede variarse en una cantidad conocida, éstas se ajustan hasta tener un máximo o un mínimo. La fase relativa entonces, se identifica con el corrimiento necesario que proporcione un máximo, mientras que un mínimo ocurre con la diferencia $\pm \pi$.

De acuerdo a este procedimiento, para medir todos los puntos del patrón de interferencia o bien la distribución de la fase, resulta necesario mantener una fase de referencia sobre un punto del interferograma, rastreando el resto del patrón con corrimientos de fase. El conjunto de mediciones, proporciona una muestra de la función diferencia de fase entre los frentes de onda (digamos $\phi(x)$).

Respecto a los métodos de detección para conseguir una buena precisión en las mediciones de fase resulta conveniente obtener una recolección de datos de fase espacial por medio de un procesamiento digital.

De hecho, en la actualidad existen en el mercado una amplia variedad de sistemas de detección, y en este caso para nuestro estudio se utilizará un sensor de matriz (CCD) por considerarlo el más adecuado por su facilidad de direccionamiento y también porque a través de un CCD es posible la detección de variaciones de intensidades y su almacenamiento en computadora.

III.8. INTERFEROMETRÍA POR CORRIMIENTO DE FASE

Considerando que en la intensidad del patrón existen tres cantidades desconocidas a , b y la distribución de fase $\Delta\phi$, idealmente se requiere de tres intensidades para formar un sistema de ecuaciones por punto que permitan calcular la fase. Mediante la introducción de tres corrimientos perfectamente conocidos en la fase de uno de los haces, se obtienen tres interferogramas independientes, lo que significa tener tres ecuaciones con tres incógnitas y tres parámetros conocidos (las fases) por punto.

Considérese la Ec. (3.30) con $n = 1,2,3$. Si los valores de f_n son 0° , 120° y -120° se tendrá para este caso en particular

$$I_1 = a + b\cos(\Delta\phi + f_1) = a + b\cos f_1 \cos\Delta\phi - b\sin f_1 \sin\Delta\phi \quad , \quad (3.31a)$$

$$I_2 = a + b\cos(\Delta\phi + f_2) = a + b\cos f_2 \cos\Delta\phi - b\sin f_2 \sin\Delta\phi \quad , \quad (3.31b)$$

$$I_3 = a + b\cos(\Delta\phi + f_3) = a + b\cos f_3 \cos\Delta\phi - b\sin f_3 \sin\Delta\phi \quad , \quad (3.31c)$$

si se consideran los valores para f_n

$$I_1 = a + b\cos 0^\circ \cos\Delta\phi - b\sin 0^\circ \sin\Delta\phi \quad , \quad (3.32a)$$

$$I_1 = a + b[(1)(\cos\Delta\phi)] - b[(0)(\sin\Delta\phi)] \quad , \quad (3.32b)$$

$$I_2 = a + b\cos 120^\circ \cos\Delta\phi - b\sin 120^\circ \sin\Delta\phi \quad , \quad (3.32c)$$

$$I_2 = a + b\left[\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos\Delta\phi)\right] - b\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sin\Delta\phi)\right] \quad , \quad (3.32d)$$

$$I_3 = a + b\cos(-120^\circ)\cos\Delta\phi - b\sin(-120^\circ)\sin\Delta\phi \quad , \quad (3.32e)$$

$$I_3 = a + b\left[\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos\Delta\phi)\right] - b\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sin\Delta\phi)\right] \quad . \quad (3.32f)$$

Las cuales se pueden reducir a

$$I_1 = a + b\cos\Delta\phi \quad (3.33.a)$$

$$I_2 = a - b\left[\left(\frac{1}{2}\right)(\cos\Delta\phi)\right] - b\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\text{sen}\Delta\phi)\right] \quad (3.33.b)$$

$$I_3 = a - b\left[\left(\frac{1}{2}\right)(\cos\Delta\phi)\right] + b\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\text{sen}\Delta\phi)\right] \quad (3.33.c)$$

Considerando que tanto a como b permanecen constantes en un mismo punto durante las tres mediciones y resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$\tan \Delta\phi = \frac{\sqrt{3}(I_3 - I_2)}{2I_1 - I_2 - I_3} \quad , \quad (3.34)$$

basta emplear la función tangente inversa para determinar $\Delta\phi$ módulo π . Las fórmulas que proporcionan $\Delta\phi$ basadas en estas soluciones se conocen como de *arco tangente*.

Otro caso particular del método de tres pasos es tomar los valores de f_n con 60° , 180° y 300° , los tres corrimientos están igualmente espaciados y distribuidos. Análogamente como en el caso anterior, consideremos la ecuación 3.30 con $n = 1, 2, 3$, y se tendrá para este caso en particular el siguiente resultado para la fase

$$\tan \phi = -\sqrt{3} \frac{(I_1 - I_3)}{I_1 - 2I_2 + I_3} \quad . \quad (3.35)$$

Consideremos la ecuación 3.29, la cual nos da la función de modulación. El muestreo de fase se toma en un intervalo constante entre 0 y 2π mostrado en la figura 3.5 debido a que es equivalente al análisis de Transformada Discreta de Fourier. Así las funciones muestra de referencia para este caso en particular tomando los valores de f_n con 60° , 180° , 300° y $x_r = 2\pi$, se obtienen al sustituir estos valores en la ecuación (3.29) y están dados en las ecuaciones (3.36) y (3.37) y se pueden representar en un diagrama como se ilustra en la figura 3.5.

$$g_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta\left(x - \frac{x_r}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta\left(x - \frac{5x_r}{6}\right) , \quad (3.36)$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} \delta\left(x - \frac{x_r}{6}\right) - \delta\left(x - \frac{3x_r}{6}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(x - \frac{5x_r}{6}\right) . \quad (3.37)$$

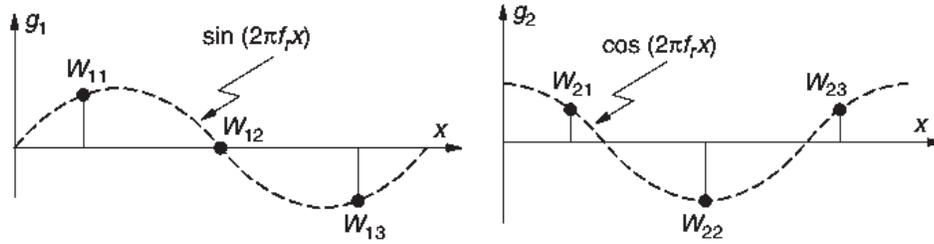


Figura 3.5. División de la función en tres pasos a 120° (60° , 180° , 300°) para medir la fase.

Los tres puntos de muestra están igualmente espaciados y distribuidos uniformemente a lo largo de la función periódica $\text{seno}(2\pi f_r x_n)$ para $g_1(x)$ y la función $\text{cos}(2\pi f_r x_n)$ para $g_2(x)$.

Así las expresiones de la transformada de Fourier $G_1(f)$ y $G_2(f)$ están dada por

$$G_1(f) = \sqrt{3} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \frac{f}{f_r}\right) \exp\left[-i\pi\left(\frac{f}{f_r} - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.38)$$

y

$$G_2(f) = [1 - \text{cos}\left(\frac{2\pi}{3} \frac{f}{f_r}\right)] \exp\left[-i\pi\left(\frac{f}{f_r} - 1\right)\right] \quad (3.39)$$

Es importante señalar que se añade un periodo de π , en caso necesario, a todas las expresiones de la transformada de Fourier $G_1(f)$ y $G_2(f)$, a fin de que su amplitud quede expresada en valores positivos, con respecto a la frecuencia de referencia f_r .

Si la frecuencia de referencia y las frecuencias muestra son conocidas se puede obtener el valor de la fase determinando el valor de $r(f)$ dado por

$$r(f) = -\frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi f}{3f_r}\right) \tan\left(\pi \frac{f}{f_r} + \phi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi f}{3f_r}\right)} \quad (3.40)$$

III.8. FORMA GENERAL DE ARCO TANGENTE PARA 3 CORRIMIENTOS

Al recorrer la fase en la ecuación 3.30 por tres valores f_n con $n = 1, 2, 3$, se puede mostrar que la fase $\Delta\phi$ módulo π está dada en su forma general por

$$\tan \Delta\phi = \frac{(I_3 - I_2) \cos f_1 + (I_1 - I_3) \cos f_2 + (I_2 - I_1) \cos f_3}{(I_3 - I_2) \operatorname{sen} f_1 + (I_1 - I_3) \operatorname{sen} f_2 + (I_2 - I_1) \operatorname{sen} f_3} \quad (3.41)$$

donde se verifican los dos casos anteriores (dados por la ecuación 3.35) como casos particulares. Sustituyendo $\Delta\phi$ en la ecuación 3.30, la fase puede determinarse módulo 2π . La fase total se evalúa mediante la continuidad de la función de fase bajo la suposición de que varía en menos de π entre los valores adyacentes. Este procedimiento se extiende a más de tres corrimientos, con $f_n = 2\pi(n - 1)/N$.

Como se menciona en párrafos anteriores el muestreo de fase requiere de un intervalo constante entre 0 y 2π debido a que es equivalente al análisis de Transformada Discreta de Fourier. Existen otros métodos que no necesariamente se hacen entre 0 y 2π aunque los intervalos deben ser idénticos, y también existen métodos que no requieren de intervalos igualmente espaciados, sin embargo en este estudio esos métodos no los aplicaremos.

Ahora análogamente como en los casos anteriores, consideremos la Ec. (3.30) con $n=1, 2, 3$, tomando los valores de f_n con 0° , 90° y 180° , se tendrá para este caso en particular el siguiente resultado

$$\tan\phi = -\frac{-S_1 + 2S_2 - S_3}{S_1 - S_3} \quad (3.42)$$

Estos tres puntos se encuentran espaciados de manera no uniforme a lo largo del período de referencia y sus funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ se encuentran dadas por

$$g_1(x) = -\delta(x) + 2\delta\left(x - \frac{x_r}{4}\right) - \delta\left(x - \frac{2x_r}{4}\right) , \quad (3.43)$$

y

$$g_2(x) = \delta(x) - \delta\left(x - \frac{x_r}{2}\right) , \quad (3.44)$$

y sus transformadas de Fourier por

$$G_1(f) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right) \exp\left(-i\frac{\pi f}{2 f_r}\right) , \quad (3.45)$$

y

$$G_2(f) = 4\left[\text{sen}\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right) \cos\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{f_r} - 1\right)\right] . \quad (3.46)$$

El valor de $r(f)$ es

$$r(f) = -\tan\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right) \tan\left(\phi + \frac{\pi f}{2 f_r} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.47)$$

III.9 ALGORITMO DE TRES PASOS POR WYANT

Una interesante versión de un algoritmo de tres pasos fue propuesto por Wyant et al. (1984) y más tarde por Bhushan et al. (1985). En este caso, la expresión de la fase es muy sencilla. Los tres puntos de muestreo están separados por 90° , como en el algoritmo anterior, pero con una compensación de 45° (es decir, la primera toma de muestras se toma en el punto -45° con respecto al origen).

Estos autores toman los valores de f_n con -45° , 45° y 135° , como se muestra en la Figura 3.6. De este modo, obtenemos el siguiente resultado:

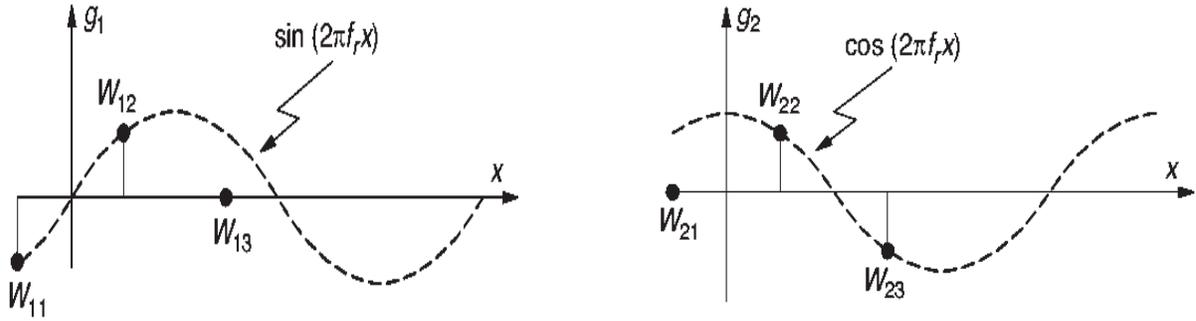


Figura 3.6 División de la función en tres pasos por el método de wyant's para medir la fase

$$\tan\phi = -\frac{-S_1 + S_2}{S_2 - S_3} . \quad (3.48)$$

Las funciones de referencia son las siguientes:

$$g_1(x) = -\delta\left(x + \frac{x_r}{8}\right) + \delta\left(x - \frac{x_r}{8}\right) , \quad (3.49)$$

$$g_2(x) = \delta\left(x - \frac{x_r}{8}\right) - \delta\left(x - \frac{3x_r}{8}\right) , \quad (3.50)$$

En tanto que $G_1(f)$ y $G_2(f)$ estan dadas por

$$G_1(f) = \sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right) \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right) , \quad (3.51)$$

y

$$G_2(f) = \sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\pi f}{4 f_r}\right) \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{f}{f_r} - 1\right)\right] . \quad (3.52)$$

Estas funciones tienen la misma amplitud en todas las frecuencias de manera que sus gráficos se superponen uno sobre el otro. El valor de $r(f)$ está dado por:

$$r(f) = -\frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}(\phi + \frac{\pi f}{2fr})} . \quad (3.53)$$

Esta expresión se usa para encontrar la fase en la presencia de desfase, si la magnitud de este desfase se conoce.

En principio, los algoritmos de tres pasos son suficientes para determinar las constantes desconocidas. En este estudio se analizan diferentes materiales en forma cualitativa, sin embargo, en aplicaciones que se requieren análisis en forma cuantitativa algunos autores advierten que los algoritmos de tres pasos presentan pequeños errores de medición que pueden tener un gran efecto en los resultados, por lo cual señalan que los algoritmos de cuatro y más pasos pueden ofrecer mejores resultados en análisis cuantitativos. En este estudio mencionaremos el método de cuatro y el de cinco corrimientos, sin embargo no realizaremos un análisis detallado sobre estos algoritmos, ya que en nuestra aplicación por sus características se trabajó con los algoritmos de tres pasos.

III.10. MÉTODO DE CUATRO CORRIMIENTOS

Este algoritmo evalúa implícitamente los corrimientos reales en cada punto y los utiliza para calcular los valores de la diferencia de fase original entre los haces. La forma más simple de tal algoritmo, requiere de cuatro mediciones de intensidad en cada punto correspondiente a $N = 4$. Si los corrimientos se realizan a intervalos iguales de modo que se alcancen los valores de $-3\alpha, -\alpha, \alpha, 3\alpha$ se obtienen las fórmulas conocidas como de Carré. En este caso no se necesita un muestreo de 0 a 2π , aunque el intervalo debe ser constante.

$$\tan^2 \alpha = \frac{3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4}{I_1 - I_2 - I_3 + I_4} , \quad (3.54)$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} . \quad (3.55)$$

III.11. MÉTODO DE CINCO CORRIMIENTOS

Para superficies planas y esféricas con alta precisión, resulta deseable el empleo de ondas luminosas con amplitudes casi uniformes. Esto origina que cuando la diferencia de fase entre los haces sea cercana a $m\pi$, con m entero, los numeradores y denominadores de las ecuaciones (3.54) y (3.55) tiendan a cero, incrementando las incertidumbres en $\Delta\phi$ y en α . El inconveniente se evita con un algoritmo que use cinco mediciones de intensidad correspondientes a cinco corrimientos de -2α , $-\alpha$, 0 , α , 2α . Las intensidades dan lugar a la siguiente igualdad

$$\frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} = \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } \Delta\phi}{(1 - \cos 2\alpha) \cos \Delta\phi} \quad (3.56)$$

Cuando $\alpha = 90^\circ$ la variación del segundo miembro de la ec. (3.56) es cero y entonces

$$\tan \Delta\phi = \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1} \quad (3.57)$$

que puede usarse sin restricción.

CAPÍTULO IV DESARROLLO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

En este capítulo se describe el arreglo experimental utilizado y los pasos que se realizaron durante el proceso para la adquisición de formas en tercera dimensión, a través de los métodos de detección espacial de objetos: Perfilometría por transformada de Fourier y el método de Corrimiento de fase por pasos así como los resultados obtenidos

IV.1 ARREGLO EXPERIMENTAL

Uno de los elementos físicos planteados en el artículo de Takeda [8] para la obtención de la transformada rápida de Fourier del objeto en estudio es el elemento que proyectará el patrón de franjas. Este elemento podría ser cualquier sistema que proyecte un plano de luz modificado sobre la superficie a analizar. En este caso se tenía acceso al equipo que se encuentra en el laboratorio de óptica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Para decidir cuál equipo proveía un mejor resultado, fueron desarrolladas distintas pruebas para poder encontrar el elemento de proyección que diera mejor resolución sobre los cuerpos y que fuera fácil de usar y además que fuese un sistema con buena estabilidad mecánica. Dichas pruebas fueron cualitativas, tomando en cuenta el color reflejado por los cuerpos y la calidad de las líneas vistas por el dispositivo CCD (Cámara). En este caso se seleccionaron los equipos mostrados en la figura 4.1.

La ventaja obtenida de los equipos seleccionados para el arreglo experimental se debió a su facilidad de uso, a la mejor resolución sobre los cuerpos y a que simplemente era un arreglo robusto y mantenía buena estabilidad mecánica en comparación con otras técnicas como por ejemplo interferometría de Mach-Zehnder.

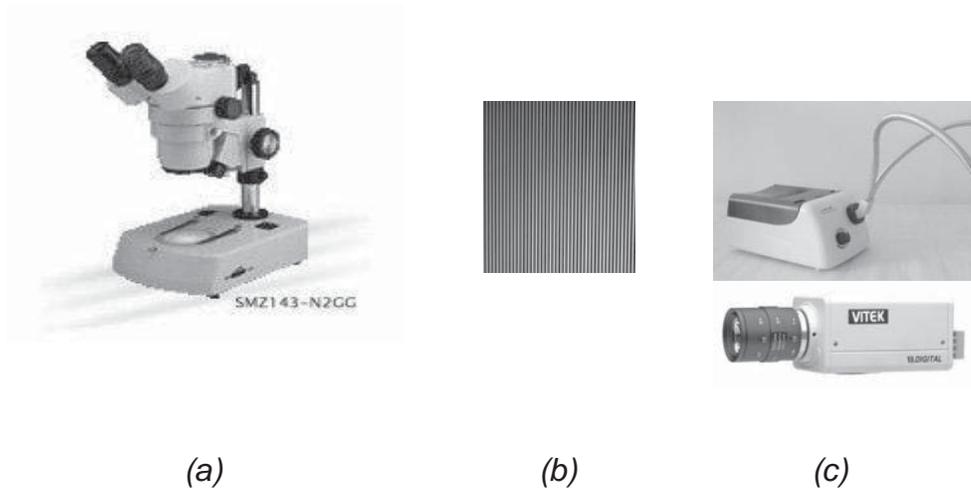


Figura 4.1. (a) Microscopio (b) rejillas de 150 y 500 lin/mm y (c) cámara CCD y fuente de luz blanca.

IV.2 ADQUISICIÓN DE IMÁGENES

Para implementar el arreglo y obtener las imágenes de los materiales a analizar, se utilizó una cámara CCD conectada a una computadora y colocada sobre el arreglo que se muestra en la figura 4.2 de tal forma que estas imágenes fueran obtenidas con la mayor nitidez posible para que fuesen fáciles de procesar por los algoritmos FFT y corrimiento de fase. En la figura 4.3 se muestran las imágenes obtenidas de diferentes objetos sobre los que se proyectaron franjas de la rejilla.



Figura 4.2. Arreglo experimental para adquirir la imagen del material a analizar.

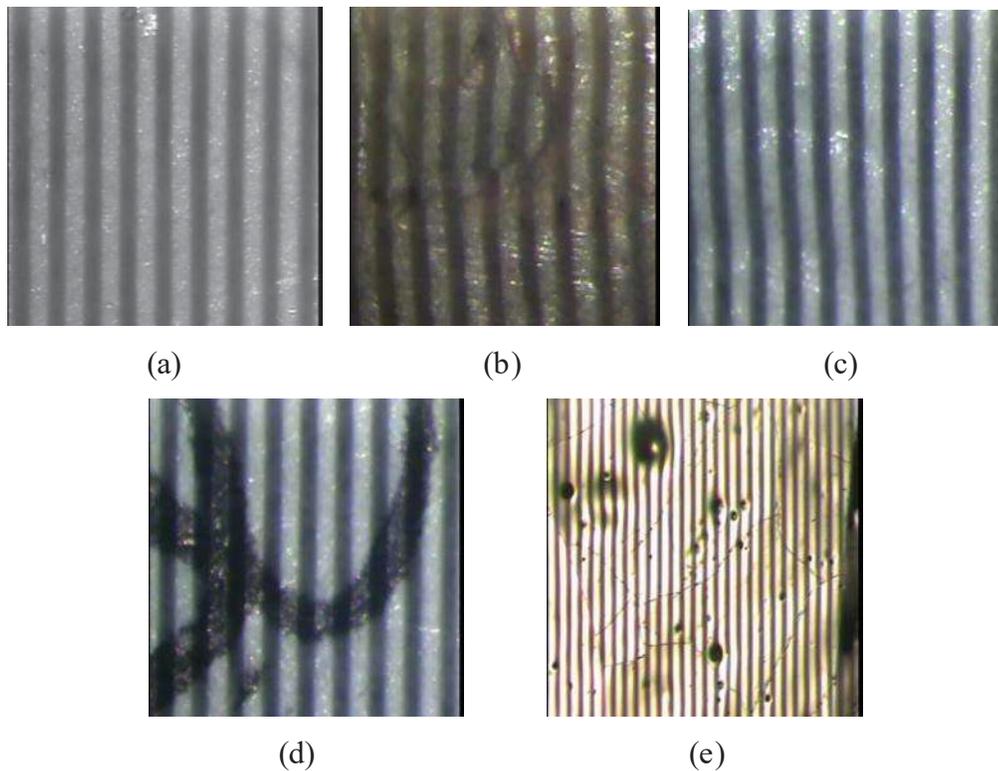


Figura 4.3. Imágenes de los materiales antes de ser procesados a) reverso de un cheque, b) trozo de un taquete de madera, c) papel troquelado con una llave allen, d) cartulina blanca sobre la que se practicó una línea con tinta negra, e) cerámica de color café.

IV.3 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

El formato en el que las imágenes son enviadas desde el dispositivo de adquisición CCD a la computadora es el de JPG de 8 bits de color y el tamaño seleccionado en la cámara es de 640 x 480 píxeles.

En este caso para el procesamiento de las imágenes se utilizó el software Mathcad que es un ambiente de programación enfocado a las matemáticas. En sí, su manera de realizar cálculos se basa en el manejo de matrices de datos. Para ello se requiere que el formato de las imágenes digitales se encontrara en BMP y transferirla en escala de grises de 8 bits, ya que el uso de escala de grises en las imágenes asegura que la imagen contenga en cada uno de sus registros solo el valor de intensidad que le corresponde. Puesto que Mathcad utiliza una sola matriz para almacenar sus datos y

además el uso de escala de grises de 8 bits aseguraba que la matriz antes mencionada contuviera en cada uno de sus registros solo el valor de intensidad de luz que le correspondiera, este proceso realizado nos proporcionaba el formato más indicado para poder importar y manipular la imagen.

Para convertir la imagen del formato de captura de la CCD al formato requerido por Mathcad se puede utilizar un editor de imágenes cualquiera. Para fines de este trabajo, el editor de imágenes que se utilizó fue Photoshop el cual fue escogido por su facilidad de uso, por contener una herramienta de corte que permite definir los puntos cortados y repetirlos en una segunda imagen y principalmente por contener un sistema para convertir de color a escala de grises de varias profundidades.

Dentro del editor de imágenes Photoshop en caso de necesitar recortar la imagen, se hará uso de la herramienta de corte contenida en el paquete. Después de esto cada imagen será exportada en formato BMP lineal de escala de grises de 8 bits. La imagen obtenida en este proceso se muestra en la figura 4.4.

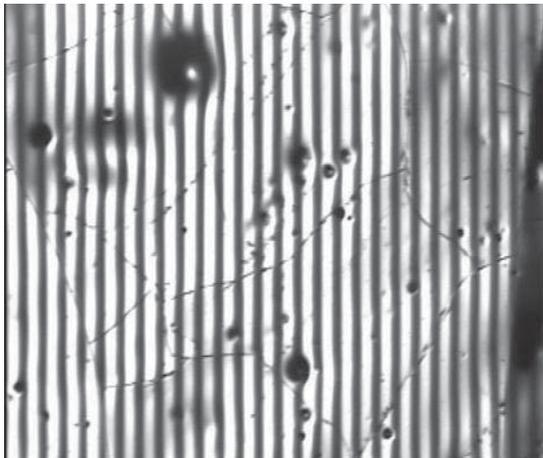


Figura 4.4. Imagen del material que se analiza en este caso cerámica, en escala de grises y convertidas a bmp.

IV.4. PERFILOMETRÍA POR TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

En esta sección se detallan los pasos necesarios para obtener la imagen de la superficie analizada usando la transformada rápida de Fourier.

IV.4.1. OBTENCIÓN DE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Hasta ahora solo se ha trabajado en el proceso de obtención de la imagen y procesado para que Mathcad pueda interpretar los datos, a partir de este punto, todo el proceso se llevara a cabo en el ambiente de Mathcad. Como primer paso para la obtención del modelo de un cuerpo en la computadora, la imagen tiene que ser importada con la instrucción:

$$\text{Patron} := \text{READBMP}(\text{"nombre_imagen.bmp"})$$

de esta manera ya se pueden realizar operaciones con los datos contenidos en la variable "nombre_imagen" y MathCad la asocia a la variable: *Patron*

El siguiente paso comprende la obtención de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) de cada línea de la imagen. En la figura 4.5 se muestra la fotografía de la transformada. En este proceso el resultado es una matriz que contiene por cada línea la transformada de Fourier de la línea que le corresponde en la imagen. El siguiente procedimiento es la determinación de la frecuencia de la primera componente armónica en la imagen.

Aquí es importante observar que al reducir la frecuencia de las líneas, la frecuencia en radianes de la primera componente armónica también va reduciéndose. La relación entre estas dos frecuencias no es lineal, pero en este caso se encuentra que sí están directamente relacionadas. En el caso de la experimentación con una frecuencia muy baja de líneas, tenemos que se observa el fenómeno de *aliasing* (*translapamiento*) a la primera armónica. Así que se puede sacar una primera conclusión, la frecuencia de las líneas tiene que ser relativamente alta para que no exista *aliasing* (*translapamiento*) en la información.

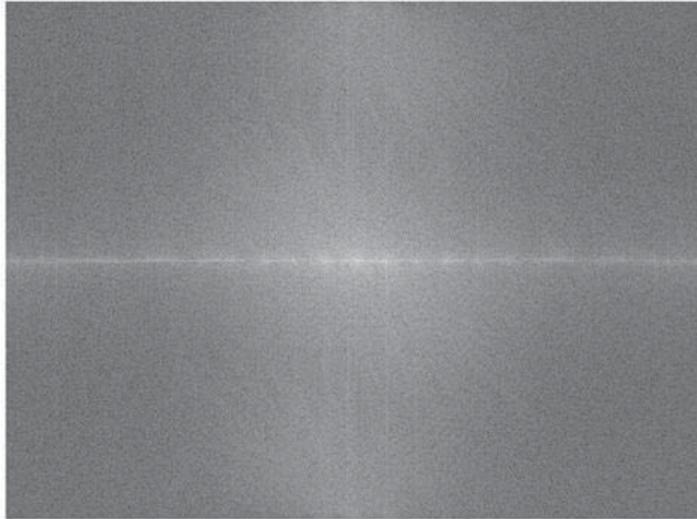


Figura 4.5. Imagen de la FFT del patrón de franjas.

Debido a que la función procesa la frecuencia por línea, el patrón de líneas tiene que ser vertical, ya que si no es vertical, la FFT no encuentra cambio de frecuencia, esto se puede demostrar fácilmente al utilizar el patrón de una manera horizontal, o sea, en el mismo sentido del barrido de la FFT y el resultado que se obtiene es que no existe la componente armónica, solo un poco de ruido, eso se debe a que las líneas no están exactamente alineadas a la horizontal de la cámara. Así que si se desea procesar una imagen con un patrón de líneas horizontales, se necesita realizar el programa o función que las procese de forma horizontal.

Si la primera armónica no es detectada a primera vista, un método para poder definir la frecuencia a la que se encuentra dicha componente es la de obtener su posición en la imagen de la transformada del plano de referencia. En este caso se utilizó este método.

Una vez que se encontró la posición de la primera componente armónica, se procedió a pasar la señal por un filtro pasa bajas con frecuencia central ubicada en dicha posición. El filtrado pasa bajas realizado sirve para eliminar la información de intensidad del fondo y solo tener la información de amplitud del fondo y la fase del

patrón de líneas. En este caso se utilizó un filtro ideal ya que era el más sencillo y el que mejor respuesta daba, para ello se multiplica la FFT del patrón por la máscara creada para el orden -1 de difracción. Dicho filtro no sería práctico en caso de procesar información en tiempo real, pero en este caso no existe ningún problema ya que la información fue almacenada y procesada tiempo después. En la figura 4.6a se muestra el filtro o mascarilla usada y en la figura 4.6b el producto de la transformada de Fourier y el filtro pasa bajas.



Figura 4.6. a) Máscara para filtrar la imagen y b) imagen filtrada

Una vez que se ha filtrado la imagen solo se tiene información acerca de la fase y de la amplitud del patrón de franjas y es recomendable recorrer la componente filtrada hacia el origen. Este paso no es obligatorio pero es recomendable recorrerla y en nuestro caso si se procedió a recorrerla, ya que los resultados eran más estables y con menor ruido. Para recorrer esa información al origen existen varias formas, como se realizó en este caso, se recorta una submatriz del lado izquierdo para hacer el ajuste del lado derecho y colocar el orden -1 en el centro de la imagen (Figura 4.7)

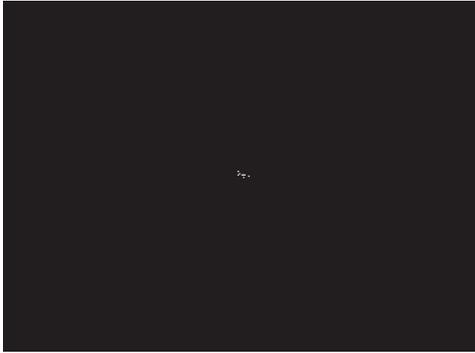


Figura 4.7. Representación de la imagen filtrada y recorrida al origen

Se logra apreciar en la figura 4.7 la primera componente filtrada y recorrida al origen, pero aún se necesita separar la fase de la amplitud de las franjas. Para hacer dicha separación se aplica a la imagen la función arco tangente (atan2) y al resultado se le da un nombre. En este caso, el resultado fue nombrado como: *fase_envuelta* y se realiza con la instrucción:

$$\textit{fase_envuelta} := \text{atan2}(\overline{\text{Re}(t_i_desentradada)}, \overline{\text{Im}(t_i_desentradada)})$$

Después de aplicar la función arco tangente a la imagen, se obtiene la fase envuelta tal como se muestra en la figura 4.8.

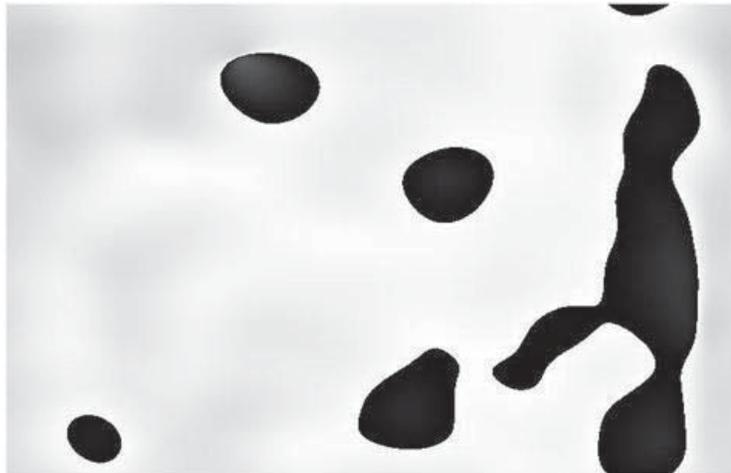


Figura 4.8. Mapa de fase envuelta del patrón proyectado obtenido por medio del arco tangente (atan2).

Como se puede observar en la figura 4.8 se puede determinar que el método de arco-tangente (atan2) puede ser usado para separar la información de fase.

IV.5 DESENVOLVIMIENTO DE FASE

El resultado obtenido hasta este punto aún no ofrece información de profundidad, debido a que la información se encuentra contenida entre los valores de $\pm\pi$. Esto se puede explicar fácilmente porque la función de arco tangente se encuentra definida solo entre los valores de $\pm\pi$. Por lo cual la información tiene que ser expandida, a esto se le denomina desenvolvimiento de fase.

El desenvolvimiento de la fase es algo sencillo pero se complica cuando la información y la calidad de la misma son deficientes y pueden hacer que esta labor sea más ardua. Así que en estas condiciones, el resultado del desenvolvimiento no es siempre bueno, pero si debe de ser aceptable. Existen muchos métodos de desenvolvimiento de fase pero solo se intentarán dos: El método sencillo de suma y resta de módulos de 2π y el método de regularización.

IV.5.1 DESENVOLVIMIENTO DE FASE POR EL MÉTODO SENCILLO DE SUMA Y RESTA

En la figura 4.8 se muestra el mapa de fase envuelto del material que se analiza en este caso una cerámica; dicho plano se encuentra envuelto entre los valores de $\pm\pi$ y por tanto se necesita desenvolver.

Para aplicar la técnica de desenvolvimiento, se utiliza la función de Mathcad, `Unwrapp(env,m,it)` que viene implementada dentro del mismo paquete, dicha función realiza los pasos referentes al desenvolvimiento. Como primer paso para desenvolver un mapa de fase por el algoritmo de suma y resta es necesario desenvolverlo en una dimensión, esto quiere decir que se haga primero ya sea en dirección de las columnas y luego en dirección de los renglones o bien primero en dirección de los renglones y luego dirección de las columnas respectivamente. La imagen obtenida se muestra en la figura 4.9.



Figura 4.9. Imagen de la fase desenvuelta por el método de suma y resta.

IV.5.2 DESENVOLVIMIENTO DE FASE POR EL MÉTODO DE REGULARIZACIÓN

Este método es en su totalidad un método en dos dimensiones. Al igual que en el método de desenvolvimiento de suma y resta, se utilizará el mismo material envuelto en la fase para poder desarrollar las pruebas a este algoritmo (Figura 4.8). En la figura 4.10 se muestra el resultado obtenido con el método de regularización.



Figura 4.10. Imagen de la fase desenvuelta con el método de regularización.

Aunque existan diferencias entre ambos métodos, al final en el momento del desenvolvimiento de fase se tienen resultados parecidos, así que se pueden probar con ambos métodos y seleccionar el más óptimo cuando se realiza la conversión fase-altura.

Como podemos observar si existe diferencia en las imágenes mostradas en las figuras 4.9 y 4.10 y en este caso el método de suma y resta resultó ser más óptimo que el método de regularización.

IV.6 CONVERSIÓN FASE-ALTURA

En esta parte se obtienen las dimensiones físicas reales del cuerpo, convirtiendo el valor de fase en valores de alturas reales mediante la ecuación:

$$h(x, y) = \frac{l_0 p_0 \frac{\Delta\varphi(x, y)}{2\pi}}{\left[\frac{p_0 \Delta\varphi(x, y)}{2\pi} \right] - d} , \quad (6)$$

se puede ver que $\frac{\Delta\varphi(x, y)}{2\pi}$ da el número N de franjas en orden en la topografía de moiré.

En la figura 4.11a-c se muestra la topografía obtenida con diferentes rotaciones o perspectivas utilizando el método de suma y resta y el método de regularización.

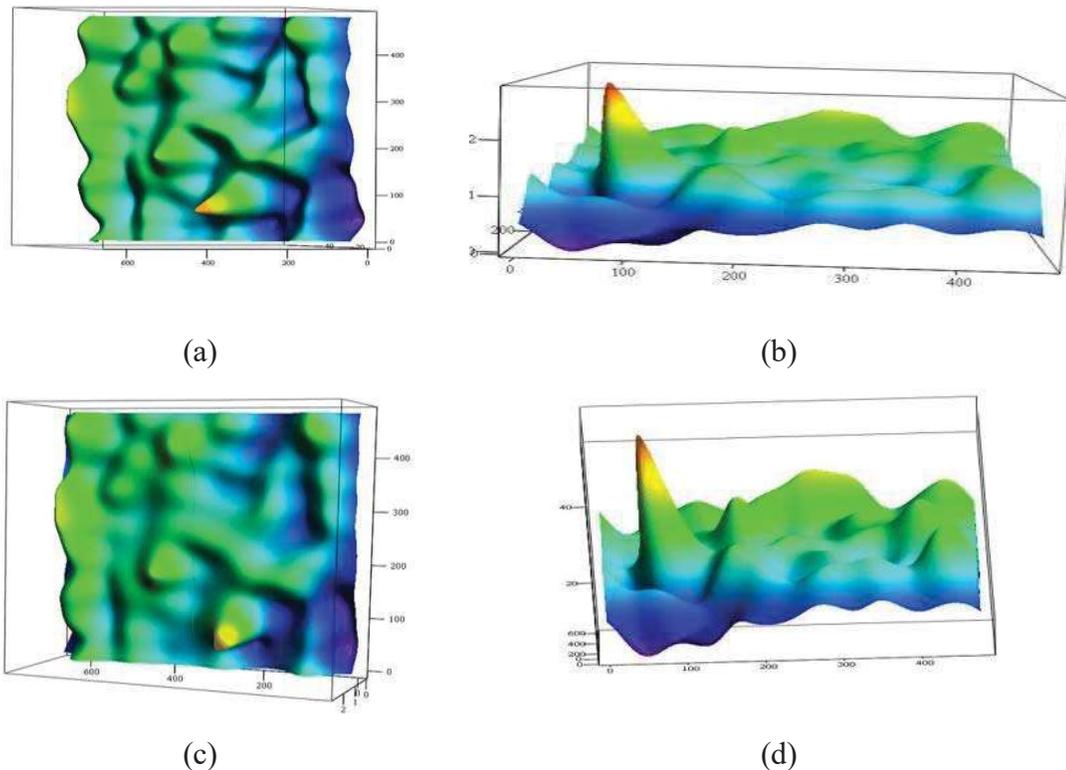
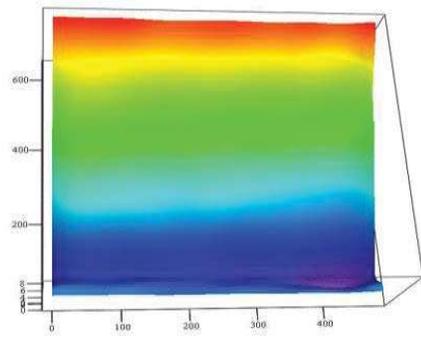
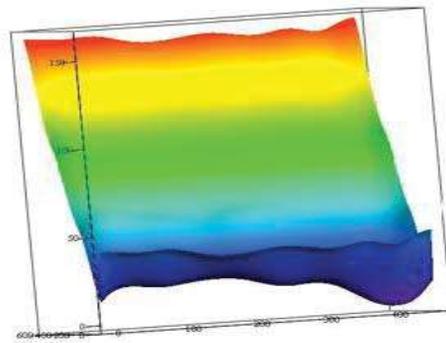


Figura 4.11. a) y b) Mapa de fase real por el método de suma y resta con diferente rotación; c) y d) Mapa de fase real por el método de regularización con diferente rotación. Estas imágenes fueron obtenidas para la cerámica.

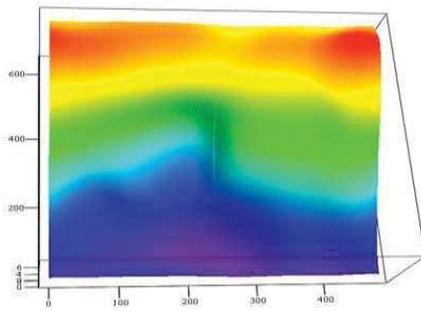


a)

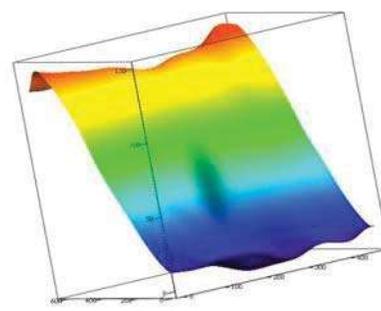


b)

Figura 4.12. a) y b) Mapa de fase real del cheque por el método de suma y resta con dos rotaciones.

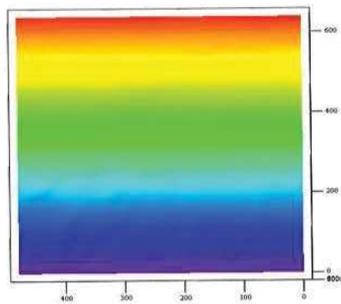


a)

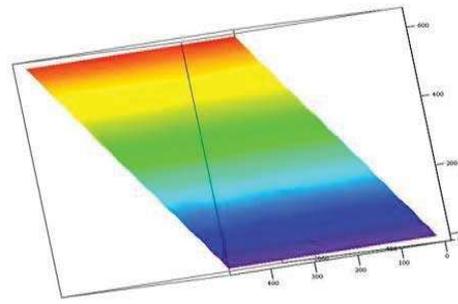


b)

Figura 4.13. a) y b) Mapa de fase real de madera por el método de suma y resta con dos rotaciones.



a)



b)

Figura 4.14. a) y b) Mapa de fase real de una raya sobre un papel por el método de suma y resta con dos rotaciones.

IV.7 MÉTODO DE CORRIMIENTO DE FASE POR PASOS

La interferometría de medición de fase es una técnica de procesamiento de interferogramas de baja densidad de puntos y que evita errores de interpolación en la ubicación de los centros de franjas, en aquellas que usan sistemas de video. Esta técnica se basa en la captura y procesamiento de n medida de intensidad, tomada mientras se introducen corrimientos constantes en la fase del haz de referencia.

Generalmente el desfase introducido debe ajustarse a un valor preciso de corrimientos controlados de fase. Como se mencionó en el capítulo anterior se requieren tres tomas como mínimo para la reconstrucción de la fase mediante un algoritmo adecuado, aunque también se pueden implementar algoritmos de cuatro pasos o en general $N+1$ pasos para la reconstrucción de la fase, como por ejemplo el algoritmo de Carré de cuatro pasos.

Para poder utilizar estos algoritmos debe ajustarse la orientación y frecuencia espacial del sistema de franjas de tal modo que se logre conseguir una diferencia de fase constante y la modulación de amplitud apropiada.

En este caso para la adquisición de formas en tercera dimensión de materiales a nivel milimétrico a través de métodos de detección espacial de objetos, se basa en la captura y procesamiento de 3 medidas de intensidad tomadas mientras se introducen corrimientos constantes en la fase del haz de referencia.

IV.7.1 CAPTURA DE IMÁGENES

Para obtener las imágenes de los materiales a analizar se utilizó el arreglo que se mostró en la figura 4.2; el número de tomas de muestras fueron tres con corrimientos de fase de $\frac{\pi}{2}$.

La irradiancia registrada por el detector CCD estará determinada por la función de distribución de intensidades registrada por la cámara y almacenada en la

computadora. Enseguida se realizan los corrimientos e igualmente estas nuevas imágenes son almacenadas.

Una vez que se ha trabajado en el proceso de la obtención de las imágenes y procesado para que Mathcad pueda interpretar los datos, a partir de este punto todo el proceso se llevará a cabo en el ambiente de Mathcad. Como primer paso para la obtención del modelo de un cuerpo en la computadora, las tres imágenes de muestra son importadas mediante la siguiente instrucción

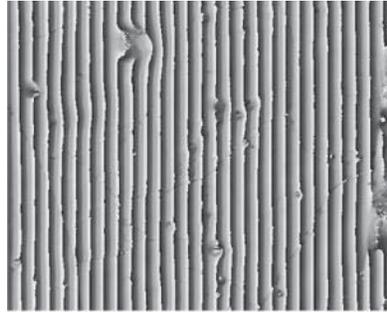
```
P1:=READ_IMAGE("500cerp1.bmp"),p2:=READBMP(("500cerp2.bmp"),  
p3:=READBMP("500cerp3.bmp"))
```

En este caso 500cerp1.bmp, 500cerp2.bmp y 500cerp3.bmp son los nombres de los archivos que contienen las imágenes. De esta manera se importan las tres imágenes p1, p2 y p3.

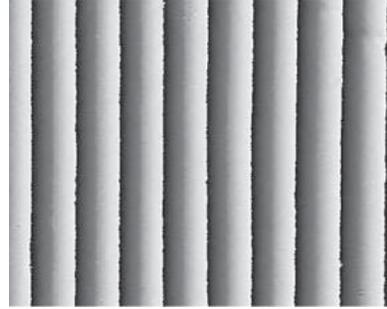
Los objetos utilizados en este caso son la pieza de cerámica, el trozo de taquete y el reverso del cheque, ya mostrados en la figura 4.3. En la figura 4.11 se muestra la proyección de franjas en cada uno de los objetos con sus corrimientos de fase; con estas imágenes se puede obtener la fase envuelta por medio del arco tangente.

El siguiente paso consiste en generar un vector con las filas del patrón y un vector con las columnas del patrón. Enseguida se puede optar por leer una posible máscara de geometría irregular que ayude a desenvolver la fase, dicha máscara es una imagen que debe ser binaria (blanco y negro; 0 y 255). Se puede crear en el paint o en photoshop. Si la fase envuelta es de campo completo (hay información en todo el campo observado) se utiliza la sentencia para campo completo. Como la fase que queremos desenvolver tiene zonas sin información en las orillas inferior y derecha, recortaremos toda la orilla utilizando la función submatrix (nativa de mathcad). Esta operación la podemos omitir si creáramos una imagen (máscara de desenvolvimiento) en paint coloreando de negro la zona sin información y de blanco el resto y la leyéramos en la primera sentencia "máscara_des".

(a) Cerámica 1,2 y 3



(b) Cheque 1, 2 y 3



(c) Madera 1, 2 y 3

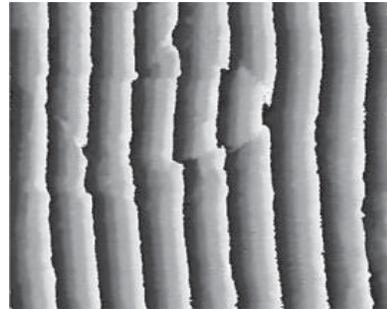


Figura 4.11. Imagen modulada de la fase envuelta de 3 materiales que se analizan con tres patrones de interferencia con un corrimiento de fase de $\pi/2$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el método de perfilometría arriba mencionado, se puede obtener la imagen de la topografía para cada uno de los objetos. En las figuras 4.12-4.14 se muestran las imágenes obtenidas para cada caso en diferentes rotaciones.

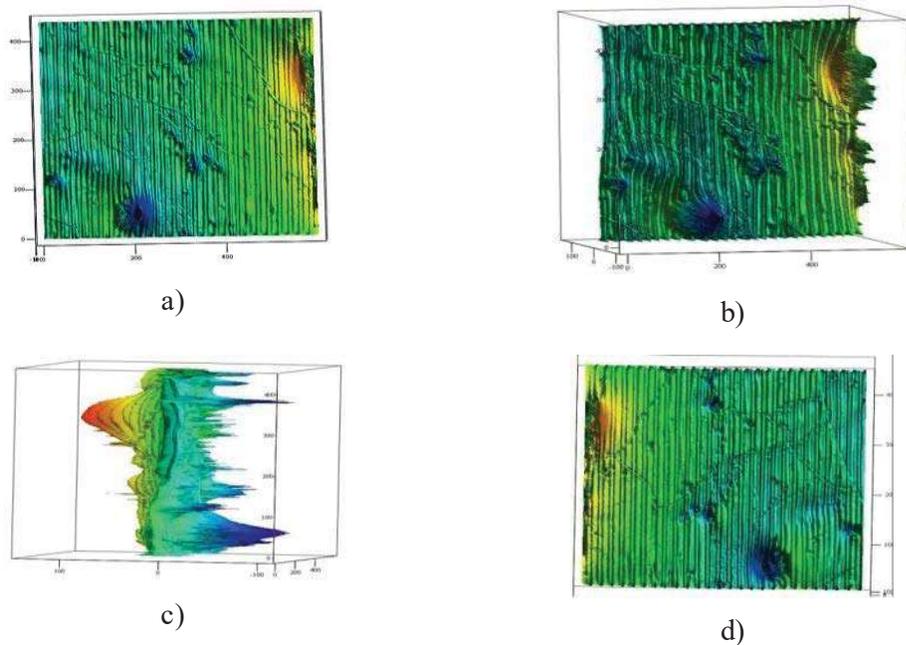


Figura 4.12. Imágenes de la topografía de la cerámica vista en diferentes perspectivas.

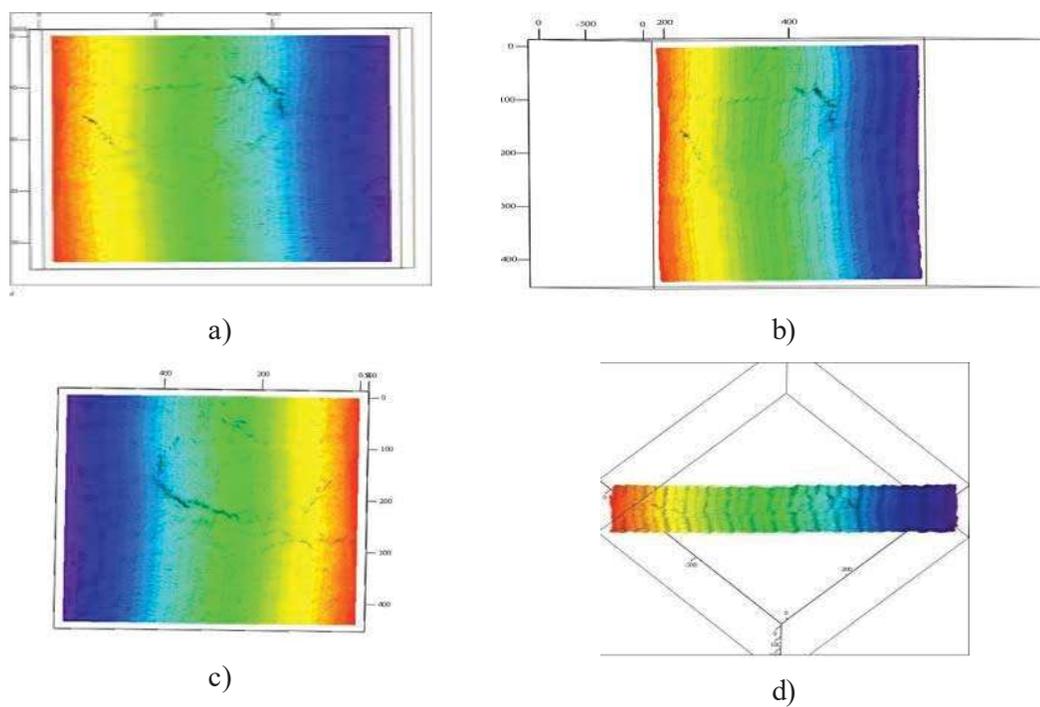


Figura 4.13. Imágenes de la topografía del cheque vista en diferentes perspectivas.

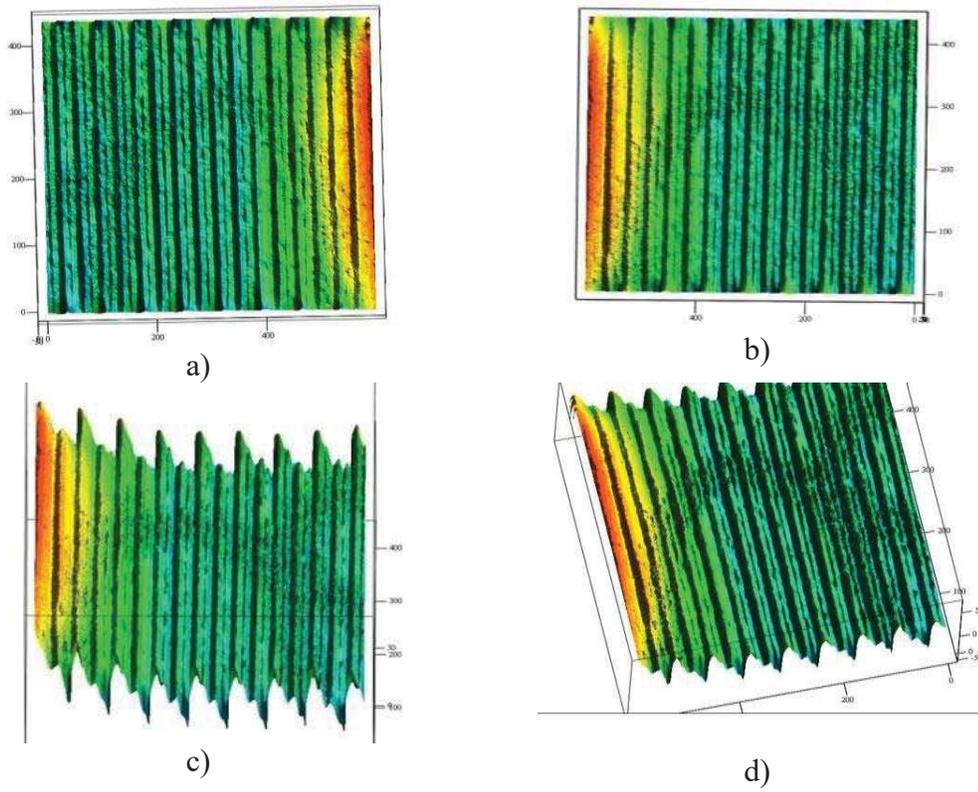


Figura 4.14. Imágenes de la topografía de una raya sobre un papel vista en diferentes perspectivas.

CAPITULO V. CONCLUSIONES

En esta tesis se han presentado los resultados experimentales obtenidos a partir de la utilización de interferferometría digital con los métodos de “perfilometría de Fourier” y “Corrimiento de fase por pasos”, con el objeto de obtener mapas de deformaciones topográficas de materiales a nivel milimétrico a partir de proyección de franjas, el cual nos ha permitido realizar análisis cualitativos. Es importante observar que la interferometría digital nos permite hacer registros interferométricos de una forma más simple y en condiciones más adversas, con respecto a la interferometría holográfica, su desarrollo ha abierto nuevas perspectivas de aplicaciones logrando que se constituya en una técnica complementaria de la interferometría holográfica.

Los experimentos efectuados en los materiales que se analizaron en este trabajo nos permitieron verificar que:

1. Los métodos propuestos son adecuados, válidos y viables para el análisis de materiales a nivel milimétrico, y proveen información cualitativa de fácil comprensión e ilustración.
2. El arreglo experimental es un arreglo fácil de realizar y de utilizar, presenta una buena resolución sobre los cuerpos y además es un arreglo robusto que mantiene buena estabilidad física en comparación con otros equipos. El montaje utilizado hace posible documentar el análisis cualitativo de la topografía de materiales
3. Estos métodos de análisis son no destructivos
4. Con esta propuesta se pueden analizar y comparar diferentes materiales con aplicaciones al muestreo para control de calidad, ingeniería inversa, etc., porque además de reproducir fielmente contornos de los objetos analizados, puede proveer valores numéricos de las alturas y profundidades

Queda pendiente en esta tesis para un trabajo posterior realizar la interpretación cuantitativa por los métodos de perfilometría y corrimiento de fase la cual nos permitirá realizar mediciones de deformaciones de manera bastante precisa

APENDICE A. TRANSFORMADA DE FOURIER

El análisis de Fourier es una herramienta universal que ha encontrado aplicación en diversos ámbitos de la física y la ingeniería. En este apéndice nos ocuparemos de sus aplicaciones en óptica y, en particular, con aplicaciones al procesamiento de imágenes. En una primera aproximación, podemos decir que todos los dominios transformados que se utilizan dentro del tratamiento digital de imágenes tienen la misma forma básica que puede expresarse mediante una aplicación de la Transformada de Fourier.

Hasta cierto punto, la transformada de Fourier es como un segundo lenguaje para describir funciones. En el caso del tratamiento digital de imágenes debe uno familiarizarse con el dominio espacial y el dominio frecuencial al momento de resolver un problema.

Por ello en este apéndice se hace una revisión sencilla de las propiedades matemáticas básicas de la transformada de Fourier. El material presentado en este apéndice se refiere a la matemática espacial en dos dimensiones (como es necesario para la mayoría de los problemas en la óptica).

Muchos fenómenos físicos se encuentran experimentalmente y para poder entenderlos y manipularlos se repite en idénticas condiciones el comportamiento de respuesta a diversos estímulos idénticos que actúan en un mismo tiempo, de tal forma se experimenta por ejemplo con cada uno de los estímulos componentes y se analiza si el comportamiento de la suma de las respuestas de estos estímulos es idéntica a la suma de las respuestas que produce individualmente cada uno de los componentes del estímulo. De esta forma se van estableciendo las propiedades básicas de estos fenómenos, en este caso cuando la suma de las respuestas de cada uno de los componentes de estímulo individual es idéntica a la producción de estímulos

componentes totales que actúan al mismo tiempo, estos fenómenos se llaman lineales y comparten la propiedad que se llama linealidad.

El hecho de observar la propiedad de linealidad conduce a una gran simplificación en la matemática y la descripción de tales fenómenos y representa la base de una estructura matemática a la que nos referiremos aquí como teoría de sistemas lineales.

La gran ventaja que ofrece la linealidad es la habilidad para expresar la respuesta (ya sea el voltaje, corriente, amplitud de la luz, o la intensidad de la luz) a un estímulo complicado en términos de respuestas a ciertos estímulos "elementales".

Redes eléctricas, compuestos de resistencias, capacitores e inductores son lineales por lo general en una amplia gama de compuestos. Además, la ecuación de onda, que describe la propagación de la luz natural a través de los medios de comunicación nos lleva a considerar que las distribuciones de las imágenes ópticas de "objeto" son de comportamiento lineal, así mismo la distribución de luz en "imagen" sus distribuciones de luz son lineales.

Si la iluminación utilizada en un sistema óptico presenta una propiedad denominada coherencia espacial, entonces veremos que es adecuado describir la luz como una distribución espacial de amplitud de campo de valores complejos.

Cuando la iluminación es totalmente carente de coherencia espacial, es apropiado describir la luz como una distribución espacial de intensidad de valor real.

La atención se centrará en el análisis de sistemas lineales con valores complejos de entrada, los resultados para valores reales de entrada están entonces incluidos como casos especiales de la teoría.

Una herramienta matemática de gran utilidad en el análisis de los fenómenos lineales y no lineales es el análisis de Fourier. Esta herramienta es ampliamente utilizada en el estudio de las redes eléctricas y los sistemas de comunicación y también en sistemas ópticos.

A. 1. Definición y condiciones de existencia

La transformada de Fourier (o el espectro de Fourier, o espectro de frecuencias), de una función compleja g (en general de valores complejos) de dos variables independientes x e y se representa aquí por $F(g)$ y se define por la siguiente ecuación:

$$F(g) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad . \quad (A.1)$$

La *transformada* se define como una función de valores complejos y es en sí misma una función de dos variables independientes f_x y f_y , que se refieren en general a las frecuencias. Del mismo modo, la Transformada Inversa de Fourier de una función $G(f_x, f_y)$ estará representada por $F^{-1}\{G\}$ y se define como

$$F^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad . \quad (A.2)$$

Las operaciones matemáticas de la transformada y la transformada inversa son muy similares, y sólo se diferencian en el signo del exponente que figura en el integrando.

Existe un conjunto de condiciones suficientes y necesarias para que se cumpla la existencia de la transformada, este conjunto de condiciones son las siguientes:

Condiciones de Existencia

1. g debe ser totalmente integrable en el plano infinito (x, y)
2. g debe tener sólo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
3. g no debe tener discontinuidades infinitas.

En general, cualquiera de estas condiciones puede ser atenuada a costa del fortalecimiento de una o ambas de las otras condiciones, pero estas consideraciones nos llevan bastante lejos de nuestro propósito aquí.

A.2 Teoremas de la Transformada de Fourier

La definición básica de la transformada de Fourier conduce a una amplia estructura matemática asociada con la operación de transformación. Vamos a considerar algunas de las propiedades básicas matemáticas de la transformada, propiedades que se utilizan ampliamente en esta tesis. Estas propiedades se presentan como teoremas matemáticos, seguido por breves declaraciones de su significado físico.

1. Teorema de linealidad.

$$F\{\alpha g + \beta h\} = \alpha F\{g\} + \beta F\{h\}, \quad (\text{A.3})$$

Esto es, la transformada de una suma de dos funciones es simplemente la suma de sus transformadas individuales.

2. Teorema de similaridad. Si $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ entonces

$$F\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right), \quad (\text{A.4})$$

Esta ecuación implica que un estrechamiento de las coordenadas en el dominio espacial (x, y) resulta en una contracción de las coordenadas en el dominio de frecuencias (f_x, f_y) además de un cambio en la amplitud del espectro.

3. Teorema del desplazamiento. Si $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, entonces

$$F\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y) \exp[-j2\pi(f_x a + f_y b)], \quad (\text{A.5})$$

esto es, una translación de una función en el dominio espacial introduce un cambio lineal de fase en el espacio de frecuencias.

4. Teorema de Parseval. Si $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, entonces

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y, \quad (\text{A.6})$$

este teorema generalmente se interpreta como el enunciado de la conservación de la energía.

5. Teorema de convolución. Si $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ y $F\{h(x, y)\} = H(f_x, f_y)$, entonces

$$F\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y), \quad (\text{A.7})$$

la convolución de dos funciones en el dominio espacial es totalmente equivalente a la multiplicación de sus transformadas individuales.

6. Teorema de autocorrelación. Si $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, entonces

$$F\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_x, f_y)|^2, \quad (\text{A.8})$$

en forma análoga

$$F\{|g(x, y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) G^*(\xi - f_x, \eta - f_y) d\xi d\eta, \quad (\text{A.9})$$

Este teorema puede tratarse como un caso especial del teorema de convolución.

7. Teorema integral de Fourier

$$FF^{-1}\{g(x, y)\} = F^{-1}F\{g(x, y)\} = g(x, y), \quad (\text{A.10})$$

la transformada de la transformada inversa de Fourier de una función resulta en la función misma.

REFERENCIAS

- [1] HECHT, Eugene. OPTICA. Fondo Educativo Internacional, 1977.
- [2] MALACARA, Daniel. Interferogram Analysis for Optical Testing. Taylor & Francis Group. 2005.
- [3] GOODMAN, J.W. Introduction of Fourier Optics. Mc. Graw-Hill, Singapore 1996.
- [4] HARIHARAN, P. Basic of Interferometry. New York. Academic Press, 1992.
- [5] WILLIAMS D.C. Optical Methods in Engineering Metrology. New York. Chapman & Hall, 1993
- [6] CREATH, Katerine. Phase Measurement Interferometry Techniques. Elsevier Science Publishing, 1988.
- [7] G. RODRIGUEZ ZURITA. Interferometrias heterodina y cuasi heterodina, Revista Mexicana de Física 37 No. 3 (1991).
- [8] MITSUO TAKEDA, HIDAKI INA* AND SEIJI KOBAYASHI, J. Opt. Soc. Am./Vol. 72, No. 1/January 1982.
- [9] NICOLAS GOUEMAND, Application of Dynamic Phase Shifting with Wavelet Analysis to Electronic Speckle Contouring, Optical Society of America, Applied optics, vol.45, No. 16, Junio 2006.
- [10] CARLOS GALVAN AND MARIANO RIVERA, Second-order Robust Regularization cost Function for Detecting and Reconstructing Phase Discontinuities, Optical Society of America, 2006, Applied Optics , 10 January 2006 _ Vol. 45, No. 2.
- [11] A. MARTINEZ, J.A. RAYAS, J.M. FLORES M., R. RODRIGUEZ-VERA y D. DONATO AGUAYO, Técnicas Ópticas Para el Contorneo de Superficies Tridimensionales, Revista mexicana de Física, 17 de mayo de 2005.
- [12] CLAUDE RODDIER AND FRANCOIS RODDIER, Interferogram Analysis using Fourier Transform Techniques, Vol. 26, No. 9, 1 Mayo 1987, Applied Optics.
- [13] DONALD J. BONE, H.-A. BACHOR, AND R. JOHN SANDEMAN, Fringe-Pattern Analysis Using a 2-D Fourier transform, Optical Society of America. 1986, 15 May 1986 / Vol. 25, No. 10 /Applied Optics.
- [14] DANIEL VELÁSQUEZ PRIETO AND JORGE GARCIA-SUCERQUIA, Three-dimensional Surface Contouring of Dacrosopic Objects by Means of Phase-Difference Images, Optical Society of America 2006, 1 September 2006 /Vol. 45, No. 25 / Applied Optics.
- [15] YINGSONG HU, JIANGTAO XI, ENBANG LI, JOE CHICHARO, AND ZONGKAI YANG, Optical Society of America 2006, Vol. 45, No. 4 /1 February 2006/ Applied Optics.
- [16] DALIP SINGH MEHTA PRITI SINGH MOHAMMAD S. FARIDI SABA MIRZA, Distance Measurement With Extended Range Using Lateral Shearing Interferometry and Fourier Transform Fringe Analysis, Optical Engineering 44(6), 063602 (June 2005).

- [17] Xian-Yu Su Lu-Rong Guo, Improved Fourier Transform Profilometry for the Automatic Measurement of Three-dimensional Object Shapes, *Optical Engineering* 29(12), 1439-1444 (December 1990).
- [18] SERGIO LOPERA, JORGE GARCIA-SUCERQUIA, Utilización de Detectores de Cuadratura en Técnicas Interferométricas de Corrimiento de Fase, *Revista Colombiana de Física*, vol. 36, no. 1. 2004.
- [19] FRANCIS LILLEY MICHAEL J. LALOR DAVID R. BURTON, Robust Fringe Analysis System For Human Body Shape Measurement, *Optical Engineering*, Vol. 39 No. 1, January 2000.