



**UNIVERSIDAD MICHUACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAT. "Luís Manuel Rivera Gutiérrez"**

**"TEORÍA MATEMÁTICA DEL VUELO AEROESPACIAL Y
SIMULACIÓN DE LA MECÁNICA ORBITAL
EMPLEANDO SOFTWARE DE ALTA PRECISIÓN"**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PRESENTA:
FERNANDO SÁNCHEZ HERREJÓN**

**ASESOR DE TESIS:
DR. MARIO CESAR SÚAREZ ARRIÁGA**

MORELIA, MICH

Febrero 2010

Índice

Resumen	VI
Nomenclatura	IX
Introducción	XI
Capítulo 1, Generalidades Planetarias	1
1.1. Aerodinámica	1
1.1.1. Ecuación de Continuidad	2
1.1.2. Ecuación del momento de Euler	2
1.1.3. Termodinámica	3
1.1.4. Flujo Isentrópico	4
1.1.5. Ecuación de Energía	6
1.1.6. Ecuación Hidrostática	6
1.1.7. Velocidad del Sonido	7
1.1.8. Presión Dinámica	8
1.1.9. Flujo Compresible Isentrópico	9
1.1.10. Ondas de Mach	10
1.1.11. Viscosidad	11
1.1.12. Ondas de Choque	12
1.1.13. Número de Knudsen	14
1.1.14. Número de Reynolds	15
1.1.15. Vector de fuerza aerodinámica	16
1.1.16. Coeficientes de Sustentación, Fricción y Momento	17
1.1.17. Esfuerzo Cortante	19
1.1.18. Calor Aerodinámico	20
1.2. Modelo Atmosférico Estándar	21
1.3. Problema de los N-cuerpos	26
1.3.1. Energía y Momento de los N-cuerpos	28
1.3.2. Problema de los 2 cuerpos	30
1.4. Topografía y Gravitación	31
1.4.1. Radio Planetario	32
1.4.2. Modelo Gravitacional Axisimétrico	34
1.4.3. Anomalías Gravitacionales	40

Capítulo 2, Mecánica Orbital	42
2.1 El Plano orbital	43
2.1.1 Ecuación de Lagrange	43
2.1.2 Trayectorias Cónicas	44
2.1.3 Ecuación de Energía	47
2.1.4 Tiempo de vuelo orbital	49
2.1.5 Expansiones en Serie para Órbitas Elípticas	53
2.2 Elementos orbitales	56
2.2.1 Ángulos de Euler	57
2.2.2 Determinación Orbital de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ a partir de los EO	60
2.2.3 Determinación Orbital de los EO a partir de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$	63
2.2.4 Recursividad predictiva orbital	65
2.2.5 Razones de Cambio en los EO	66
2.2.5.1 Razones $\dot{a}$ y $\dot{e}$	67
2.2.5.2 Razones $\dot{i}$ y $\dot{\Omega}$	68
2.2.5.3 Razones $\dot{\omega}$ y $\dot{\tau}$	69
2.2.6 Perturbaciones Seculares de Primer Orden	72
2.3 Maniobras Orbitales	75
2.3.1 Maniobra Impulsiva simple (ajustes a y e)	76
2.3.2 Maniobra Bi-impulsiva generalizada (ajustes a y e)	78
2.3.3 Impulsos Tangenciales (ajustes a y e)	79
2.3.4 Giro Relativo del Plano Orbital (ajuste simultáneo de i y Ω)	81
2.3.5 Giro nodal del Plano Orbital (ajuste Ω)	85
2.3.6 Giro de Apsidales (ajuste ω)	86
2.3.7 Sincronía Orbital (ajuste simultáneo ω y τ)	88
2.4 Vuelo Extraplanetario Orbital	90
2.4.1 Cónicas de Escape	91
2.4.1.1 Perturbación del Tercer Cuerpo	92
2.4.1.2 Esfera de Influencia y Enlace Cónico	94
2.4.1.3 Trayectorias de Escape Parabólico	96
2.4.1.4 Posición y velocidad en una Trayectoria Hiperbólica	96
2.4.2 Aproximación de Enlazado Cónico	98
2.4.2.1 Transferencia Tierra-Luna	98
2.4.2.2 Transferencias Interplanetarias	104
Capítulo 3, Postura y Control Aeroespacial	111
3.1. El Referencial Móvil	111
3.1.1. Eje de Euler y Ángulo Principal	112
3.1.2. Representación con Cuaternios	114
3.1.2.1. Secuencias Eulerianas con Cuaternios	117
3.1.2.2. Parámetros de Rodríguez	119

3.1.3. Cinemática de Postura	120
3.1.3.1. Evoluciones Eulerianas	123
3.1.3.1.1. Método de Integración: Rungge-Kutta	124
3.1.3.2. Evoluciones Cuaternarias	128
3.1.4. Movimiento general de un Sistema Móvil	131
3.1.4.1. Derivada vectorial general	131
3.1.4.2. Cinemática del referencial móvil	132
3.2. Propiedades del Cuerpo General	133
3.2.1. Movimiento Rotacional y Traslacional	134
3.2.2. Cuerpo de Masa Variante	136
3.2.3. Energía y Momento Partícula-Cuerpo	137
3.3. Dinámica de Postura	139
3.3.1. Ecuaciones de Euler para el Movimiento Rotacional	140
3.3.2. Energía Cinética Rotacional	143
3.3.3. Rotación Rígida Ausente de Torcas Externas	145
3.3.3.1. Cuerpo axisimétrico	149
3.4. Control de Postura	152
3.4.1. Sistema de Control de Reacción (SCR)	153
3.4.1.1. Rotación de Impulso Axial	154
3.4.1.2. Maniobras de postura en Vehículo Asimétricos	156
3.4.2. Dispositivos de Intercambio de Momento (DIM)	157
3.4.2.1. Giroscopio de Control de Momento de Rapidez Variable	159
3.4.2.2. Vehículo con Torca de Gradiente de Gravedad	161
3.4.3. Control de Postura Aerodinámica	165
3.4.3.1. Movimiento rotacional de un Vehículo de Lanzamiento	166
3.4.4. Sistema Básico de Control Lineal	168
3.4.4.1. Sistemas Lineales	171
3.4.4.2. Sistemas Lineales de Tiempo Invariante	172
3.4.4.3. Sistemas Lineales de Postura	174
 Capítulo 4, Requerimientos y Secuencias de Misión	 176
4.1. Requerimientos de Misión	177
4.1.1. Propulsión	178
4.1.2. Faseado	184
4.1.3. Cápsulas de Reingreso	187
4.1.3.1. Reingreso Balístico	189
4.1.3.2. Calor Aerodinámico de reingreso	192
4.2. Secuencia de Misión Tierra-Luna	194
4.2.1. Movimiento Atmosférico y Trans-atmosférico	195
4.2.1.1. Movimiento Relativo a Tierra	195
4.2.1.2. Cinemática y Dinámica Atmosférica y Transatmosférica	199
4.2.1.3. Simulación Controlada de Lanzamiento	209

4.2.2. Maniobras Orbitales Interceptoras CEV-EDS	215
4.2.2.1. Ajustes de Inclinación y Sincronía	216
4.2.2.1.1. Perturbaciones atmosféricas	218
4.2.2.2. Movimiento Orbital Relativo	220
4.2.2.3. Esquema de direccionamiento Terminal	224
4.2.2.3.1. Curso de Colisión Predispuesta	226
4.2.2.4. Simulación controlada de intercepción y acoplamiento	229
4.2.2.5. Problema de Lambert	233
4.2.3. Transición Cónica, Descenso y Ascenso Lunar	238
4.2.3.1. Impulso Translunar	239
4.2.3.2. Problema de los Tres Cuerpos	241
4.2.3.2.1. Solución particular de Lagrange	241
4.2.3.2.2. Problema Restringido de los Tres Cuerpos (PRTC)	245
4.2.3.2.3. Puntos de Lagrange y su estabilidad	248
4.2.3.2.4. Solución Numérica del PRTC	254
4.2.3.2.5. Integral de Energía y Constante de Jacobi	255
4.2.3.3. Simulación Controlada del Impulso Translunar	258
4.2.3.4. Arribo, Inserción Orbital y Descenso Lunar	259
4.2.3.4.1. Diagramas de velocidades	260
4.2.3.4.2. Impulso de Inserción Orbital	261
4.2.3.5. Simulación Controlada de la Inserción orbital y descenso	262
4.2.4. Retorno a Tierra y Reingreso	266
4.2.4.1. Ascenso Lunar	266
4.2.4.2. Simulación Controlada del ascenso interceptor lunar	267
4.2.4.3. Impulso Transtierra	269
4.2.4.4. Simulación Controlada del impulso transtierra	272
4.2.4.5. Ingreso a Tierra	273
4.2.4.5.1. Corredor de Reingreso	274
4.2.4.5.1.1. Funciones de Sanción Piloto y de Altura	276
4.2.4.5.1.2. Reingreso Balístico de Allen	277
4.2.4.5.2. Calor de Reingreso	280
4.2.4.6. Simulación Controlada del reingreso a Tierra	282
4.3. Generalización Interplanetaria	285
4.3.1. Descripción del proyecto MFL	285
4.3.2. Transferencia orbital Tierra-Marte	286
4.3.2.1. Hipérbolas de escape Terrestre y arribo a Marte	288
4.3.2.2. Optimización de Trayectorias Interplanetarias	291
4.3.2.2.1. Perturbación del Tercer Cuerpo	292
4.3.2.3. Simulación Controlada de una transferencia Tierra-Marte	295
4.3.3. Casos Interplanetarios Restantes	303

Apéndice	
A1. Trigonometría Esférica	305
A1.1. Leyes de Cosenos	305
A1.2. Leyes de Senos	306
A1.3. Formulas de Bessel	306
A1.4. Formulas de Cotangentes	307
A2. Algebra de Cuaternios	308
A3. Teorema de Lambert	309
A4. Software de Simulación Virtual “Orbiter”	310
A4.1. Configuración Inicial	311
A4.2. Modelos Adicionales	313
A5. Linealización del PCRTC en los puntos de libración	316
A6. Principales datos del Sistema Solar	320
Resultados y Discusión	321
Conclusiones	332
Referencias	333
Agradecimientos	337

Resumen

La comprensión del vuelo aeroespacial debe comprender el estudio y descripción del “universo” dentro del cual se lleva a cabo. Esto es, la Aerodinámica del planeta (atmósfera) mediante un modelo atmosférico estándar crucial en el diseño de vehículos aeroespaciales el cual, obtenido por mediciones de temperatura en dirección vertical de la atmósfera, que a su vez mediante la ley del gas ideal, permite tener observaciones precisas de la densidad y presión atmosférica en función de la altura. Después, el siguiente caso es la Gravitación terrestre (gravedad). La forma abultada del planeta, nos conduce a un modelo gravitacional que emplea una expansión en serie de los polinomios de Legendre. Sin embargo, es posible también cartografiar la superficie terrestre mediante satélites adecuados para la obtención de mapas detallados de la gravedad. La formulación de este modelo, permite deducir una de las ecuaciones más importantes en la mecánica orbital, la llamada: Ecuación de los dos Cuerpos. Esta nos permite describir la trayectoria que sigue una partícula alrededor de uno más grande teniendo esta siempre, la forma de alguna cónica (órbitas).

Después, se introduce el concepto de partícula en este medio la cual tendrá: velocidad, aceleración, posición y masa. De estas, la velocidad y posición son determinadas en forma vectorial dentro de un espacio tridimensional obtenidas en base a seis números llamados Elementos Orbitales que definen cualquier cónica orbital tridimensional. La partícula representa así como primera aproximación, a cualquier vehículo aeroespacial que una vez situado en una órbita arbitraria, será el agente que modifique la órbita en función de dos parámetros importantes: El cambio de la velocidad y el ángulo direccional. Como consecuencia, se tienen dos maniobras orbitales fundamentales: cambio de la inclinación del plano orbital y sincronía del periodo orbital. Estas permiten la intercepción de un vehículo con algún objetivo que ya está orbitando al planeta. Otro punto importante es la

aproximación de enlace cónico y su aplicación en vuelos interplanetarios. Dada una partícula sobre una órbita circular o elíptica, al incrementar su velocidad, dicha forma generará una órbita de escape hiperbólica, la cual habrá de tomar esa forma dentro de un límite esférico que rodea al planeta (Tierra). Dicho límite se determina tratando un problema de tres cuerpos y se llama: Esfera de Influencia Gravitacional. Una vez que el vehículo-partícula abandona la esfera de influencia, la trayectoria hiperbólica es enlazada con el movimiento relativo del vehículo con respecto al cuerpo central principal exterior (Sol). Así se tendrá ahora, una cónica elíptica del vehículo con respecto al Sol.

Al tratar ahora al vehículo como cuerpo y siendo las matrices de Euler útiles en la descripción de sistemas referenciales móviles, habrá ciertas singularidades indeseables en los ángulos de Euler. Para ello se usan Cuaternios que, al ser tratados en la cinemática de postura, formarán sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en términos de la velocidad angular del sistema resolubles numéricamente mediante métodos de integración numérica (Runge-Kutta). Asignando así, una distribución de masa a un sistema móvil, es necesario el tensor de inercia del cuerpo pues, éste juega un papel importante en la variación de la velocidad angular. Con eso, se describe la dinámica de postura de cualquier vehículo espacial que se optimiza mediante mecanismos como el Sistema de Control de Reacción (pequeños propulsores situados en partes clave del vehículo), o bien, por Dispositivos de Intercambio de Momento (Soportes de Cardán dentro del vehículo).

Los requerimientos principales para llevar a cabo cualquier misión tripulada son: Propulsión, Faseado y Encapsulado de Reingreso. En la primera, se usan propulsores constituidos por mezclas de combustible y oxidante dentro de las cámaras de combustión de las máquinas cohete, permitiendo su operabilidad fuera de la atmósfera. El faseado más óptimo se logra mediante 3 fases de cohete y la condición principal para un reingreso balístico es la forma abultada del vehículo pues así, hay mayor disipación de calor y por lo tanto de energía cinética.

Las torcas incluidas en las ecuaciones de Euler pueden estar dadas a su vez en función del tiempo llevándonos a tratar con Torcas de Control el cual puede ser manual o automático. Para dar una aproximación al Control Manual, se recurre a la simulación numérica (Matlab) y virtual tridimensional (Orbiter), que nos permitan apreciar claramente, cada uno de los pasos a seguir durante las misiones espaciales así como los datos y ecuaciones adicionales que son necesarios en un momento dado. Para ello, opté la descripción de la misión Tierra-Luna, utilizando modelos virtuales similares a los propuestos para el proyecto Constelación de la NASA, así como un bosquejo de una misión Tierra-Marte, utilizando modelos del proyecto Mars For Less, para realizar una posible misión tripulada a Marte. Estas dos descripciones, nos generalizan cualquier otro caso en el Sistema Solar.

La primera descripción incluye las ecuaciones de vuelo atmosférico y transatmosférico que son aplicadas durante el lanzamiento (y reingreso) de los vehículos en su fase atmosférica. Después, fuera de la atmósfera sólo se hacen presentes las ecuaciones de la mecánica orbital que incluyen: el problema de los dos cuerpos, maniobras orbitales, transferencias interplanetarias (o a la Luna) y la determinación del potencial gravitacional interplanetario que constituye a su vez, ciertos puntos de estabilidad llamados, puntos de Lagrange. Este potencial ilustra mediante Contornos de Hill, las regiones en que el movimiento de un cuerpo es influenciado por los efectos de otros dos de masas mucho mayores. Esto constituye el llamado: problema restringido de los tres cuerpos.

Finalmente, el bosquejo interplanetario de la Tierra a Marte sigue un razonamiento análogo al de la Luna en el cual, hay un simple cambio referencial así como la introducción de herramientas útiles en viajes de larga duración (alrededor de 6 meses) como son: impulsos secuenciales de escape, correcciones del periapsis e inclinación ecuatorial, y el más importante que es: el método de rectificación (de Encke) de una órbita idealizada con respecto a la órbita real.

Nomenclatura

Acrónimos

AAEN	Almanaque Americano de Efemérides Náuticas
ATV	Ángulo de Trayectoria de Vuelo
CaLV	“Cargo Launch Vehicle”, Vehículo de Lanzamiento de Carga
CC	Curso de Colisión
CCP	Curso de Colisión Predispuesta
CEV	“Crew Exploration Vehicle”, Vehículo de Exploración de Tripulación
CLV	“Crew Launch Vehicle”, Vehículo de Lanzamiento de Tripulación
COM/NAV	Comunicación y Navegación
CVEL	“Closing Velocity”, Velocidad de Aproximación
DIM	Dispositivo de Intercambio de Momento
EDS	“Earth Departure Stage”, Fase de Apertura (o impulso) Translunar
EIP	Esfera de Influencia P-Planetaria (L-Lunar, T-Terrestre, etc.)
EO	Elementos Orbitales
ERV	“Earth Return Vehicle”, Vehículo de Retorno a Tierra
GCMRV	Giroscopio de Control de Momento de Rapidez Variable
G-LOC	“Loss of Conscience Induced by G effects”, Pérdida de Consistencia inducida por efectos G.
HUD	“Head Up Display”, Visualizador frontal direccional
IDS	“Instrument Docking System”, Sistema Instrumental de Acoplamiento
ISEE	“International Sun-Earth Explorer”, Explorador Internacional Sol-Tierra
ISS	“International Space Station”, Estación Espacial Internacional, EEI.
LAM	“Lunar Ascending Module”, Módulo de Ascenso Lunar.
LM	“Lunar Module”, Módulo Lunar
LOX	“Liquid Oxygen”, Oxígeno Líquido

LSM	“Lunar Service Module”, Módulo de Servicio Lunar
MAP	“Microwave Anisotropy Probe”, Prueba de () de Microondas
MFD	“Multi-Functional Display”, Visualizador Multifuncional.
MFL	“Mars For Less”, Marte por Menos (proyecto)
MTSV	“Mars Transfer and Surface Vehicle”, Vehículo tripulado de transferencia y ascenso marciano.
NA,ND	Nodo de Ascenso, Nodo de Descenso
NASA	National Agency of Space and Aeronautics
OD, OR	Órbita Directa, Órbita Retrógrada (o Indirécta)
PD, PR	Posición Directa o Retrógrada
PE, AP	Periapsis, Apoapsis
PRM	Parámetro Rodríguez Modificado
RK ⁿ	Runge Kutta (Método de integración numérica de orden n)
RCS	“Reaction Control System”, Sistema de Control de Reacción, RCS
STS	“Space Transport System”, Sistema de Transporte Espacial
TGG	Torca de Gradiente de Gravedad
TPS	“Termal Protection System”, Sistema de Protección Térmica, SPT
TraT	Trazo a Tierra

Simbología latina

A, a	Área o azimut, Velocidad del sonido, semilado mayor o aceleración
B, b	Función Lagrangiana, Parámetro de Impacto
C_l, C_d, C_m	Coefficiente de sustentación, fricción y momento.
C_D	Coefficiente Balístico
C_H	Coefficiente de Stanton
$\mathbf{C}$	Matriz de transformación de coordenadas
$C(z), S(z)$	Funciones de Stumpff
c	Distancia Focal
c_p	Calor Específico a presión constante

c_v	Calor específico a volumen constante
$c_{n,m}, s_{n,m}$	Coeficientes armónicos
$\bar{c}_{n,m}, \bar{s}_{n,m}$	Coeficientes armónicos normalizados
D, D_s, D_p	Deflexión terrestre o Fricción Total, superficial y de presión
E	Energía total o Anomalía excéntrica
$\mathcal{E}$	Energía Específica
e, e_m	Energía cinética Molecular o excentricidad, emisividad térmica
$\mathbf{e}$	Eje de Euler o vector de excentricidad
$\mathbf{F}, \mathbf{f}$	Fuerza neta, fuerza
$f, \dot{f}, g, \dot{g}$	Coeficientes de Lagrange
H, h, h_g	Anomalía hiperbólica, altura de escala, Hamiltoniano o momento angular, Entalpía o altura geométrica, Altura Geopotencial
I, I_{aux}, I_{sp}	Momento de Inercia, Integral Auxiliar, Impulso Específico
i	Inclinación
J_n	Constante de Jeffery o elemento del tensor principal de inercia
K	Energía Cinética
Kn	Número de Knudsen
k_T	Coeficiente de conductividad térmica
L	Sustentación
L_n	n -ésimo Punto de Lagrange
l_c	Longitud característica
M	Anomalía Principal o Torca
$\mathcal{M}$	Momento angular del perfil de ala
M_a, m	Número Mach, Masa
n	Movimiento principal
$\mathbf{n}$	Vector Nodal
σ	Órbita Tridimensional
P, P_r	Función piloto de sanción G , Número de Prandtl

P_n	Polinomio de Legendre de orden n
$\bar{P}_n$	Función normalizada de Legendre de orden n
$\mathcal{P}$	Potencia de Radiación
p	presión o semilado recto
p	Parámetro Rodríguez Modificado
Q, q, q_∞	Calor o coordenada generalizada, Presión dinámica
q	Cuaternio
Re_x	Número de Reynolds (a una distancia x)
R_e, R_p	Radio Terrestre Ecuatorial y Polar
$\mathcal{R}$	Radiación
r	Radio de posición
S	Sección de Area transversal
S	Matriz simétrica oblícua
T, t	Temperatura, Periodo o Propulsión
U	Energía Potencial
$\bar{U}$	Potencial Efectivo
u	Argumento instantáneo de Latitud
V, v	Volumen o Velocidad
V_e	Velocidad Efectiva
w	Trabajo
W	Peso
y_b	Parámetro Interceptor

Simbología Griega

α, a_x	Ángulo de Ataque, Carga Axial
β	Latitud reducida o ángulo acimutal
γ	Ángulo de transferencia o de trayectoria de ingreso
δ	Latitud o función delta de dirac

ε	Elipsidad o Tolerancia
θ	Anomalía verdadera o nutación
λ	Trayecto principal libre, longitud o razón de carga
μ, μ_M	Coeficiente de viscosidad absoluta o Constante Gravitacional , Ángulo del cono de Mach
Ξ	Potencial secular
ρ	Densidad
$\mathbf{p}$	Parámetro modificado o vector de línea de visión
σ	Razón de Carga
τ, τ_w, τ_p	Tiempo del paso por el periapsis, Tensión local o periodo sinódico, duración de resistencia piloto
ν_∞	Viscosidad Cinemática
Φ	Potencial Axisimétrico, ángulo principal de Euler o Flujo de calor
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transición
ϕ	Ángulo de Trayectoria de Vuelo o de dirección
φ	Ángulo de Giro
ψ	Ángulo de Barrido o precesión
Ω	Longitud del nodo de asenso o frecuencia angular
ω	Velocidad Angular o argumento del periapsis

Subíndices

D_C	Fricción del medio continuo
D_{fm}	Fricción en el límite molecular libre
GR	Geocéntrico inercial – Geocéntrico Giratorio
k	Instantáneo
L	Geocéntrico inercial – Topocéntrico relativo
L, M, S	Luna, Marte, Sol
LT, MT	Lunar transtierra, Marte transtierra
m, f	Final

$\mathcal{N}, \mathcal{B}$	Inercial, Relativo
p, a	Periapsis, Apoapsis
pG	Perifocal orbital – Geocéntrico inercial
T	Total o Tierra
TL, TM	Trans-lunar, Trans-Marte
∞	Torrente aerodinámico o exceso hiperbólico
$0, i$	Inicial

Sistemas de Coordenadas

(XYZ)	Sistema Geocéntrico Inercial
$(X_r Y_r Z_r)$	Sistema Geocéntrico Giratorio
(xyz)	Sistema Horizontal Local
$(x_v y_v z_v)$	Sistema de Ejes de viento
(pqr)	Sistema perifocal
$(\rho\theta\varphi)$	Sistema Esférico

Constantes

Constante Gravitacional Geocéntrica	$\mu = GM_T = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Constante de Gravitación Universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Número de Avogadro	$N_a = 6.02213674 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzman	$k = 1.3806581 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante del Gas ideal	$R' = N_a k = 8314.5107 \text{ J/kg mol K}$
Constante de Stefan Boltzman	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$
Velocidad angular terrestre	$\Omega_E = \frac{2\pi}{T} = 7.29211 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

Introducción

Desde tiempos remotos, el hombre siempre ha tenido el deseo de volar. Sin embargo, no fue sino hasta finales del siglo XIX y principios del XX, que la historia fue marcada con el primer vuelo planeado experimental realizado por los Hermanos Wright en 1903^[1]. Conforme avanzaron los años, más y más prototipos de aeroplanos fueron diseñados con la intención de volar más alto y más rápido. Así en los años 50's, llegaron las aeronaves de propulsión a chorro y con estas, las de vuelos supersónicos. Finalmente, con el advenimiento de la Guerra fría entre EEUU y la desaparecida URSS, ambas potencias se vieron inmersas en un campo de competencia científico-militar enfocada a la exploración espacial. Como resultado, en 1957 la URSS envió su primer satélite artificial Sputnik I, iniciando la carrera espacial. Inmediatamente doce años después en 1969, el hombre llegaba por vez primera a la superficie lunar. Siete años después, en 1978, naves no tripuladas fueron puestas en las superficies de Venus y Marte y mientras eso se llevaba a cabo, el hombre seguía yendo a la superficie Lunar. Después, en 1981 se aprobó el primer Sistema de Transporte Espacial STS que permitiera enviar astronautas al espacio a bordo de un vehículo reutilizable (Shuttle). Para entonces, tanto EEUU como la URSS habrán puesto ya en órbita, pequeñas estaciones habitables. Estas fueron el Skylab (del inglés: “Laboratorio del Cielo”) y la Mir (del Ruso “Mundo”). Sin embargo, En 1989, la colaboración de la comunidad espacial internacional iniciaba la construcción del hábitat espacial más grande jamás construido por la humanidad fuera de la atmósfera terrestre, ésta es, la Estación Espacial Internacional ISS. A pesar de que todo lo realizado en la exploración espacial fue acompañado de exitosas misiones, también hubieron numerables fracasos, muchos de ellos trágicos, los cuales, de ningún modo impidieron el deseo del hombre por trascender hacia el cosmos. Como resultado de todo esto, la humanidad se vio

altamente beneficiada en el adelanto de la investigación científica y tecnológica en distintas áreas de aplicación como pueden ser en: telecomunicaciones, medicina, microtecnología, informática, materiales, química, mecatrónica (Mecánica y Electrónica), Sistemas de Control, etc.

Los vehículos del vuelo atmosférico están adaptados esencialmente para estar inmersos en medios de poca fricción aerodinámica y pueden ser clasificados en vehículos de sustentación (o aeronaves) y vehículos de no-sustentación (o balísticos). En estos últimos, la categoría aerostática comprende a los globos de aire caliente y dirigibles, mientras que en la categoría de sustentación aerodinámica tenemos a los aeroplanos, planeadores y helicópteros.

Un aeroplano es un vehículo atmosférico versátil que consiste de alas fijas, fuselaje y estabilizadores como son, cola, aletas, elevador, alerones y timón. Mientras las alas producen la sustentación aerodinámica, la carga, tripulantes, plantas de poder y combustible están contenidos dentro del fuselaje. Las superficies estabilizadoras mantienen al vehículo en un equilibrio estable, y proveen control para maniobrar. Así, cualquier otro vehículo aéreo posee más de alguna de las formas antes mencionadas. Por ejemplo, un planeador es un aeroplano sin una fuente de poder, mientras que un helicóptero tiene alas giratorias (en vez de fijas).

La categoría balística de los vehículos atmosféricos incluyen misiles, vehículos de lanzamiento, y cápsulas de reingreso. Algunos misiles y vehículos de lanzamiento incorporan aletas como superficies de control y estabilidad aerodinámica. Las naves espaciales también están categorizadas de acuerdo a sus misiones como pueden ser: de órbita terrestre baja, órbita terrestre media, órbita geosincronizada, lunar e interplanetaria. Cada misión está definida por la carga y los elementos orbitales de la órbita final. Un vehículo de lanzamiento reutilizable, tal como el sistema de transporte espacial norteamericano o STS (“Space Transport System”) o simplemente “Transbordador

Espacial”, es también una nave espacial definida para una misión única además de que, trajo consigo en las décadas de los 1980’s un nuevo concepto de investigación. Estas son: las Ciencias Aeroespaciales, es decir, vehículos Aéreos y Espaciales simultáneos pues, hay que recordar que primero, el STS despegue verticalmente como un cohete y después de varios días orbitando la Tierra, reingresa a la atmósfera aterrizando horizontalmente como un planeador. Recientemente, los vehículos aeroespaciales están siendo desarrollados e investigados con ciertas finalidades de tipo turístico, tal como el “rocketplane” o el “SpaceShip One”, los cuales deben cubrir ambas las dos expectativas: aéreas y espaciales y con ello, unir su operabilidad dentro y fuera de la atmósfera.

Tradicionalmente, un vehículo volador es considerado como un ente ya sea como vehículo atmosférico o espacial dependiendo de la localización instantánea del mismo. Por ejemplo, un vuelo por encima de los 100 km de altura sobre la tierra es generalmente considerado como vuelo espacial. Sin embargo, cuando se modela el vuelo transatmosférico (tal como el ascenso de un cohete al espacio, y un ingreso atmosférico), es necesario que la distinción artificial entre vuelo espacial y atmosférico sea removida, tal como una trayectoria continua y suave que sea gobernada por un conjunto de ecuaciones de movimiento. Como consecuencia, el mismo conjunto de ecuaciones podría ser usado a través de toda la atmósfera y hacia el espacio (Cap4), éstas serían provistas de un modelo atmosférico y gravitacional (Cap1). Una vez fuera de la atmósfera y con suficiente velocidad, es posible aplicar maniobras orbitales enfocadas hacia un fin determinado (Cap2). Estas maniobras requieren del posicionamiento lineal y angular del vehículo, por lo que éste habrá de ser tratado como un cuerpo (Cap3) y no como partícula.

El objetivo pues de esta tesis es: la descripción detallada y discusión de todos estos conceptos, desde un triple punto de vista: Matemático (ecuaciones que gobiernan el proceso), Mecánico (Física Orbital) e Ingenieril (Alta Tecnología).

Capítulo 1

Generalidades Planetarias

1.1. Aerodinámica

La aerodinámica estudia el movimiento del aire y otros fluidos gaseosos, así como de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos que ahí se mueven. En ésta sección, serán deducidas algunas ecuaciones necesarias para la comprensión del movimiento aéreo, partiendo de la suposición de que el aire obedece la ley de gas ideal:

$$p = \rho RT \quad (1.1)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad, T la temperatura y $R = mR'$, donde m es el peso molecular del gas en moles y R' es la constante universal del gas, cuyo valor es de $8314.32 \text{ J/kg mol K}^{[9]}$.

Por el momento, se despreciarán tanto la fricción como el peso del fluido. El flujo aéreo será tratado de dos maneras. Una de ellas es de forma: incompresible, para la cual $\rho = \text{constante}$ y $v < 102.12 \text{ m/s}^{[1]}$, mientras que la otra es la forma: compresible, donde $\rho = \rho(t)$ y $v > 102.12 \text{ m/s}$. Su estudio simplificado se hará mediante los fundamentos del flujo isentrópico y de la ecuación de energía.

Además, en cualquier caso el flujo es de régimen estacionario, es decir, sujeto a una velocidad v_∞ podrá representarse por líneas de flujo continuas y separadas una de la otra en las cuales, dado un punto sobre una de estas líneas, se desplazará con la misma velocidad v_∞ (el subíndice ∞ denota valores en un torrente aéreo) en cualquier instante, dependiendo únicamente de la posición.

1.1.1. Ecuación de Continuidad

Supóngase un fluido que circula por un conducto cuyos extremos tienen áreas transversales A_1 y A_2 con $A_1 < A_2$. Sean v_1 y v_2 las velocidades del fluido a través de dichas áreas respectivamente. Asumiendo que el flujo parte de A_1 y se dirige hacia A_2 , en un lapso de tiempo dt , cierta cantidad dm de masa habría recorrido un volumen $\rho_1 A_1 v_1 dt$, donde ρ_1 es la densidad del fluido en ese punto. Así que, $dm_1 = \rho_1 A_1 v_1 dt$, entonces el flujo es $\dot{m}_1(t) = \rho_1 A_1 v_1$. Mientras que en la sección de área A_2 de igual modo $\dot{m}_2(t) = \rho_2 A_2 v_2$.

Por el principio de conservación de la materia, tenemos la ecuación de continuidad:

$$\dot{m}_1(t) = \dot{m}_2(t) \Rightarrow \dot{m}(t) = \rho A v = C = \text{Constante} \quad (1.2)$$

La ecuación de continuidad general, válida para un flujo compresible $\rho(t)$ es^[8]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3)$$

1.1.2. Ecuación del momento Euler

Supongamos que un elemento infinitesimal de fluido con volumen $dV = dx dy dz$, se desplaza en un torrente aéreo con velocidad v_∞ paralela a dx . Entonces, en la cara anterior del elemento tendremos una presión p actuando en dirección de la velocidad, mientras que en la cara posterior tendremos una presión $p + dp = p + (dp/dx)dx$ actuando en dirección opuesta a la velocidad. Como el área de ambas caras es $dy dz$, la suma de fuerzas da:

$$F = p dy dz - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) dy dz = -\frac{dp}{dx} dV \quad (1.4)$$

luego, la masa del elemento y la aceleración son: $dm = \rho(dx dy dz) = \rho dV$, y $a = \dot{v}(t) = \dot{v}(t)\dot{x}(t) = \dot{v}(x)v$ respectivamente. Aplicando la segunda ley de Newton $F = ma$ así como la ecuación (1.4) se tiene la ecuación del momento de Euler:

$$dp = -\rho v dv \quad (1.5)$$

Para un flujo compresible, la forma general de la ecuación de Euler^[9] sería:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.6)$$

Sean ahora p_1, p_2 y v_1, v_2 las presiones y velocidades en dos puntos sobre una línea de un flujo compresible. Entonces, al integrar la ecuación (1.5), tenemos la llamada, Ecuación de Bernoulli^[1]:

$$\Delta p + \rho \frac{\Delta v^2}{2} = 0 \Rightarrow p + \rho \frac{v^2}{2} = C = \text{Constante} \quad (1.7)$$

1.1.3. Termodinámica

Sea m_0 una cantidad de masa unitaria de fluido isentrópico cubierta por una frontera ∂m_0 “flexible”. A todo este conjunto se le llamará sistema^[27]. Sean δq y δw cantidades infinitesimales de calor y trabajo respectivamente que son agregadas (o extraídas) al sistema a través de la frontera. La energía interna del sistema se define como la suma total del movimiento individual molecular del cual se compone m_0 . Esta es, la energía cinética molecular: $e = \frac{3}{5} kT$. Así, la primera ley de la Termodinámica enuncia que:

$$de = \delta q + \delta w \quad (1.8)$$

donde de , ya es una diferencial exacta.

Sea un trozo de frontera de diferencial de área $dA \subset \partial m_0$, y sea s la distancia a través de la cual se ejerce presión p sobre esa área. El trabajo realizado al sistema es entonces $\Delta w = (pdA)s$. Luego, si es aplicado el mismo trabajo simultáneo a todo el sistema, tendremos:

$$\delta w = p \int_{\partial m_0} s dA = -pdV \quad (1.9)$$

donde, se ha hecho la suposición de presión constante. Dado que la integral representa todo el volumen del sistema, tenemos que a sido reducido una cantidad $-dV$. Al combinar las ecuaciones (1.8) y (1.9) obtenemos:

$$\delta q = de + pdV \quad (1.10)$$

Definimos otra cantidad importante. La entalpía $h = e + pV = e + RT$, que al diferenciarla y combinarla con la ecuación (1.10) se tiene:

$$\delta q = dh - Vdp \quad (1.11)$$

Cuando esta cantidad de calor es agregada al sistema, éste presentará un cambio de temperatura dT que depende de si p o V es constante. Por otro lado, los calores específicos a presión o volumen constante están dados como:

$$c_p \doteq \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p \text{ cte}} \quad c_v \doteq \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{v \text{ cte}} \quad (1.12)$$

De éstas se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} e &= c_v T \\ h &= c_p T \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.1.4. Flujo Isentrópico

Decimos que un proceso isentrópico ocurre cuando este es tanto adiabático como reversible, lo cual significa respectivamente que no hay intercambios de calor ($\delta q = 0$) ni de algún efecto disipativo como la fricción. Todo flujo en el cual se hace presente este proceso se le llama flujo isentrópico^[1].

Asumiendo que $\delta q = 0$ en las ecuaciones (1.10) y (1.11), se tiene respectivamente:

$$\begin{aligned} de &= -pdV \\ dh &= Vdp \end{aligned} \quad (1.14)$$

Diferenciando las ecuaciones (1.13) y sustituyéndolas en las expresiones (1.14) se tiene:

$$\begin{aligned} -pdV &= c_v dT \\ Vdp &= c_p dT \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda por la primera y aplicando separación de variables:

$$\frac{dp}{p} = -\left(\frac{c_p}{c_v}\right) \frac{dV}{V} \doteq -\gamma \frac{dV}{V} \quad (1.15)$$

donde ahora, se ha introducido la definición de la razón de calores específicos $\gamma \doteq c_p/c_v$, cuyo valor para el aire en condiciones normales es $\gamma = 1.4$ ^[1]. Luego, usando los mismos límites de integración tratados en la ecuación de Bernoulli, e integrando lo anterior asumiendo que $v_1 = 1/p_1$ y $v_2 = 1/p_2$:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\gamma} \quad (1.16)$$

Usando la ecuación de estado (1.1):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.17)$$

Estas expresiones son útiles al proveer información importante para p, T y ρ entre dos puntos distintos sobre una línea de flujo isentrópico.

1.1.5. Ecuación de Energía

Al tratar un flujo adiabático ($\delta q = 0$) con las ecuaciones (1.7) y (1.11), sabiendo que $V = 1/\rho$ ^[1], entonces $dh + vdv = 0$. Luego, integrando entre dos puntos a lo largo de una línea de flujo y considerando la segunda ecuación de (1.13), tenemos la ecuación de Energía:

$$c_p \Delta T + \frac{1}{2} \Delta v^2 = 0 \Rightarrow c_p T + \frac{1}{2} v^2 = C = \text{Constante} \quad (1.18)$$

Para analizar flujos incompresibles, necesitamos únicamente la ecuación de continuidad (1.2), la ecuación del momento de Euler (1.5) y la ecuación de energía (1.18). En cambio, si el flujo es compresible isentrópico, las relaciones de isentropía de la ecuación (1.17), pueden reemplazar ya sea a la ecuación del momento de Euler o bien, a la de energía.

1.1.6. Ecuación Hidrostática

Asumiendo un gas isentrópico por la ecuación (1.17) se cumple: $p = C\rho^\gamma = C\rho^{c_p/c_v}$ donde C es una constante. Despreciando las corrientes de aire verticales (como la convección) es posible modelar una columna de gas en equilibrio hidrostático.

Sea V un volumen cilíndrico de gas delimitado por dos áreas de igual magnitud A separadas por una distancia (altura del cilindro) dh . La cara inferior experimenta dos fuerzas, una hacia arriba pA y otra debida a la presión hidrostática hacia abajo $\rho g A dh$, mientras que en la cara superior, solo experimenta una hacia abajo dada por $A(p + dp)$. Mediante suma de fuerzas al elemento, se obtiene la ecuación hidrostática:

$$dp = -\rho g dh$$

Definamos ahora, una altura geopotencial h_g como $g_0 dh_g \doteq g dh$, donde g_0 es la aceleración de la gravedad a nivel del mar, y cuya relación con la altura geométrica h es

$h_g = hr_0 / (r_0 + h)$. No obstante, utilizando un radio $r_0 = 6.356766 \times 10^6 \text{ m}^{[1]}$ (que es el radio terrestre a una latitud de 45°), es posible determinar para $0 \leq h \leq 150 \text{ km}$ (límites de la atmósfera sensible), el error porcentual de h_g/h el cual se encuentra entre el 100 y 98 %, hace prácticamente indistinguible a bajas altitudes la diferencia entre h y h_g . Así pues, haciendo $h \ll r_0$, entonces, $r_0 / (r_0 + h) \approx 1$. Por lo tanto, la ecuación hidrostática es:

$$dp = -\rho g dh \approx -\rho g_0 dh_g \quad (1.19)$$

1.1.7. Velocidad del Sonido

Supóngase una onda sonora que se propaga a través de un tubo “imaginario” de área transversa de derecha a izquierda con velocidad a . Detrás de la onda hay una cantidad de presión $p + dp$, mientras que en frente (aire sin perturbar) sólo hay p .

Situados en la onda, de modo relativo se vería como fluye el aire (de izquierda a derecha) con velocidad a . Aplicando las ecuaciones de estado y de continuidad:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da) \quad (1.20)$$

Desarrollando lo anterior y despreciando el producto de cantidades diferenciales $dad\rho$, tenemos: $a = -\rho da/d\rho$. Luego, la ecuación del momento de Euler es: $da = -dp/\rho a$. Combinando ambos resultados y resolviendo para a :

$$a = \sqrt{dp/d\rho} \quad (1.21)$$

Debido a que las ondas sonoras fluyen de modo isentrópico, tenemos, de la ecuación (1.17) que $p = C\rho^\gamma$, donde C es una constante y, que al obtener su derivada tenemos: $dp/d\rho = \gamma p/\rho$. Sustituyendo esto en la ecuación (1.21) usando la definición del gas ideal, se obtiene la velocidad del sonido:

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.22)$$

Usando un valor promedio de la temperatura a nivel del mar: $T = 288.16 \text{ K}^{[1]}$, se obtiene:
 $a = 340.4 \text{ m/s}$.

Considérese ahora un punto B en una línea de flujo, cuya velocidad es v . Se define el número Mach M_a en ese punto (localmente) por el cociente:

$$M_{aB} \doteq v/a \quad (1.23)$$

que a su vez, permite clasificar^[1] ciertos regímenes de flujo (Tabla 1.1).

Valores de M	Tipo de flujo
$0 < M_a < 0.8$	Subsónico
$0.8 \leq M_a < 1.2$	Transónico
$M_a = 1$	Sónico
$1.2 < M_a \leq 5$	Supersónico
$M_a > 5$	Hipersónico

Tabla 1.1. Regímenes de flujo

1.1.8. Presión Dinámica

Considérese un arreglo de conductos (Fig. 1.1), y sean A y B dos puntos situados en los orificios llamados de presión estática y punto de estagnación (en el cual, la velocidad del viento es $v_\infty = 0$) respectivamente. En el punto B se hace presente la presión total p , mientras que en el punto A la presión es p_0 . Entonces, aplicando la ecuación de Bernoulli, se tiene la ecuación de presión dinámica^[1]:

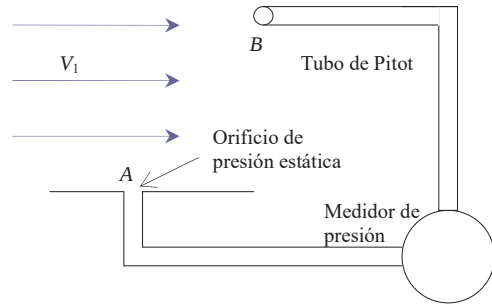


Fig. 1.1. Esquema de medición De presión dinámica

$$q_\infty \doteq p_0 - p = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 \quad (1.24)$$

1.1.9. Flujo Compresible Isentrópico

Las velocidades en el rango $0.3 \leq M_a < 1$ nos llevan a tratar el aire como flujo compresible. Considérese la entalpía: $h = e + pV$. Ya que $h = c_p T$ y $e = c_v T$, entonces $c_p T = c_v T + RT$, o $c_p - c_v = R$. Dividiendo entre c_p y resolviendo para c_p :

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma c_v \quad (1.25)$$

Sean v_1 y T_1 la velocidad y temperatura del fluido en el punto de presión estática, y T_0 la temperatura en el punto de estagnación, (Fig. 1.1). Usando la ecuación de energía (1.18) y sustituyéndola en la ecuación (1.25) se tiene:

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_1^2}{\gamma R T_1} \quad (1.26)$$

Combinando a esta la ecuación de la velocidad del sonido y el número Mach, $M_{a1} = v_1/a_1$:

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{a1}^2 \quad (1.27)$$

Como el fluido está comprimido isentrópicamente dentro del tubo de Pitot (Fig. 1.1), las ecuaciones (1.17) se cumplen entre los dos puntos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{a1}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{a1}^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nótese que las razones (incluso de ρ/ρ_0), son funciones del número M_{a1} , que a su vez lo es de v_1 .

Resolviendo para v_1 ($= M_{a1}a_1$) en la primera de las ecuaciones (1.28), es posible obtener una expresión muy útil para medir la velocidad verdadera de la aeronave relativa al aire (velocidad aérea^[1]):

$$v_1^2 = \frac{2a_1^2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.29)$$

1.1.10. Ondas de Mach

Cuando un objeto se desplaza en un fluido a velocidad $M_a = 1$, las ondas sonoras situadas al frente convergerán a un frente plano que corresponde a la barrera del sonido u onda de Mach límite. En este perfil, la onda sonora viaja junto con el vehículo, de modo que será escuchado hasta que este mismo pase por el punto de referencia (no antes).

Si las velocidades son $M_a > 1$, entonces esta barrera será deflectada en forma de un cono llamado cono de Mach^[8], (Fig. 1.2.).

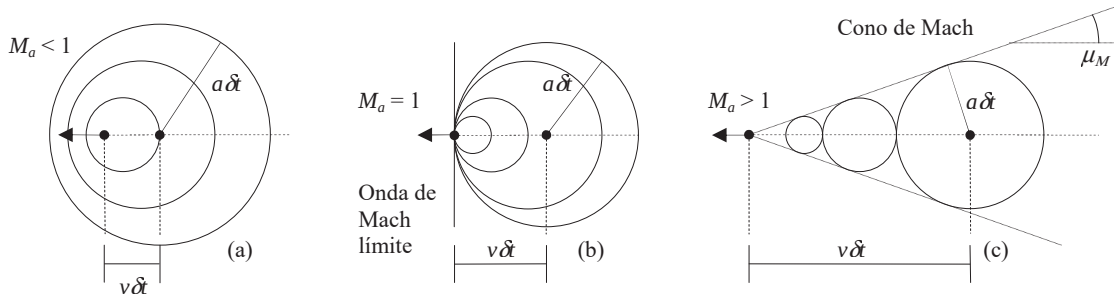


Fig. 1.2.

Ondas sonoras de una partícula con velocidad: (a) subsónica, (b) sónica y (c) supersónica respectivamente.

En esta situación, el vehículo pasará primero un punto de referencia situado en tierra, y después de cierto tiempo en ese mismo punto será escuchado el estampido sónico. De ahí, (Fig. 1.2 c), es posible ver que el ángulo del cono de Mach vale:

$$\mu_M = \text{Arcsen}\left(\frac{a\delta t}{v\delta t}\right) = \text{Arcsen}\left(\frac{1}{M_a}\right) \quad (1.30)$$

1.1.11. Viscosidad

Por ejemplo, en la sección de ala, (Fig. 1.3 a), justo por encima del trazo frontera, es donde se hace presente este tipo de flujo, por debajo del mismo, se consideran ya, las fuerzas de resistencia (viscosidad). La región comprendida entre una superficie y el trazo frontera, debe ser tratada ya no más como isentrópica (hay fricción del aire con la superficie).

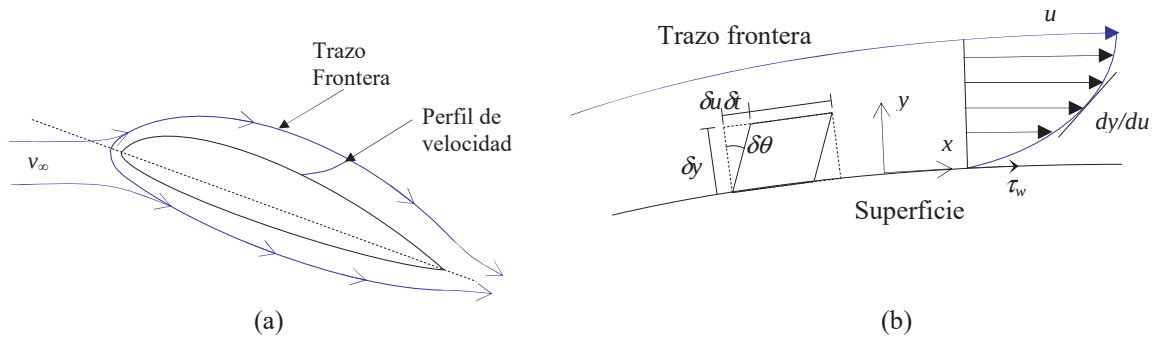


Fig. 1.3. (a) Esquema de un perfil de ala, (b) Elemento de flujo deformado dentro del trazo frontera detrás de un perfil de velocidad.

Para ello, consideremos dicha región con un perfil de velocidad (Fig. 1.3 b), en el cual, la velocidad del fluido en $y = 0$ es $u = 0$. Sin embargo, parte del momento lineal (la otra parte se disipa en forma de calor) es transmitido a la superficie como una tensión local o esfuerzo cortante τ_w , cuyas unidades son de Newton/m^2 .

En este perfil, se aprecia en un elemento diferencial de fluido deformado donde $\tan(\delta\theta) = \delta u \delta t / \delta y$. Para cantidades infinitesimales de θ en radianes, tenemos $d\theta/dt = du/dt$. La tensión local depende del gradiente de la velocidad en el punto de contacto $y = 0$ de modo proporcional. Es decir:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (1.31)$$

La constante de proporcionalidad se llama coeficiente de viscosidad absoluta. Y su valor a nivel del mar es $\mu_0 = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}^{[9]}$.

Su variación con la temperatura está dada por la formula de Sutherland^[8]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \frac{(T/T_0)^{3/2} (T_0 + S)}{T + S} \quad (1.32)$$

Donde, T_0 es una temperatura de referencia, y S es una constante. Sus valores respectivos para el aire son, $T_0 = 288.16\text{K}$ y $S = 100.4 \text{ K}^{[9]}$.

1.1.12. Ondas de choque

Una onda de choque es una onda de presión abrupta producida por un objeto que viaja más rápido que la velocidad del sonido en un medio aerodinámico. Esta es parecida a la onda Mach salvo que para éste caso, la diferencia de presiones del fluido delante y detrás de la onda de choque es mucho más elevada.

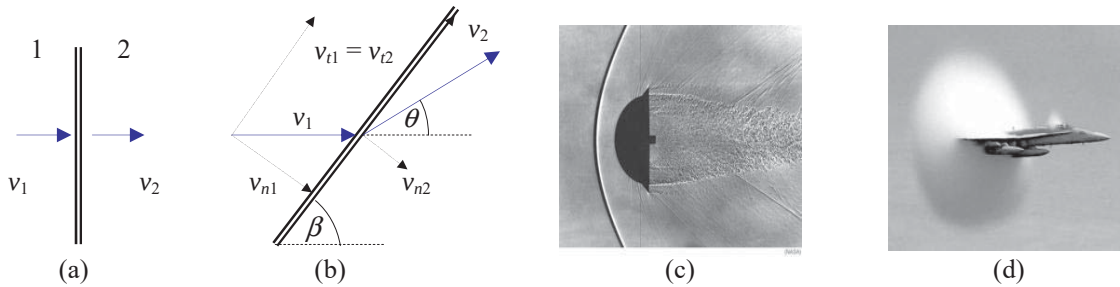


Figura 1.4. Ondas de choque: (a) normal a $M_a = 1$ y (b) oblicua a $M_a > 1$.
Imágenes reales que muestran: (c) una onda de choque y (d) la discontinuidad de Prantl-Glauert

De este modo, habrá también una componente audible de la onda de choque provocada por un objeto cuando sobrepasa la velocidad $M_a = 1$ llamada: explosión sónica o estampido sónico. Matemáticamente, la frecuencia percibida f' por un observador en reposo cuando el objeto volador se aproxima a la velocidad del sonido (Ref.

http://es.wikipedia.org/wiki/explosi3n_s3nica) es: $f' = f \lim_{v \rightarrow a} [1/(1 - \frac{v}{a})]$ donde v es la velocidad de la fuente y a es la velocidad del sonido. Sin embargo, cuando $v = a$, justo en ese momento se produce la explosi3n s3nica. Mientras que si $v > a$, la frecuencia aparente ser3 negativa. Esta inconsistencia y se conoce como Singularidad de Prantl-Glauert. F3sicamente se interpreta como un punto en el cual ocurre una ca3da s3bita de presi3n del aire.

Se tiene la teor3a de que si la humedad del aire es notable, se produce una variaci3n extrema de presi3n, la cual puede producir la condensaci3n del vapor de agua presente en el aire circundante (Fig. 1.4 d).

Suponiendo que la onda de choque es normal, define dos regiones, 1 y 2 (Fig. 1.4 a) (la cual ocurre tambi3n para $M_a = 1$), es posible aplicar las ecuaciones de continuidad, de Euler y de energ3a eliminando ρ_2 y V_2 , e introduciendo $h = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$, para obtener^[8]:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{2\rho_1 V_1^2}{p_1} - (\gamma - 1) \right] = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_{a1}^2 - (\gamma - 1)] \quad (1.33)$$

Empleando la raz3n de presiones:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_{a1}^2}{1 + \gamma M_{a2}^2} \quad (1.34)$$

y la ecuaci3n (1.33), se obtiene la raz3n de n3meros Mach:

$$M_{a2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{a1}^2 + 2}{2\gamma M_{a1}^2 - (\gamma - 1)} \quad (1.35)$$

La cual muestra, que para $\gamma > 1$, y como $M_{a1} > 1$, entonces, $M_{a2} < 1$ (debe ser subs3nico). Por otro lado, la manipulaci3n de las ecuaciones anteriores junto con la

ecuación de estado, nos proporciona^[8] también, las siguientes relaciones útiles en flujos isentrópicos:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1)M_{a1}^2}{(\gamma-1)M_{a1}^2+2} = \frac{V_1}{V_2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left[2 + (\gamma-1)M_{a1}^2\right] \frac{2\gamma M_{a1}^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_{a1}^2}\end{aligned}\tag{1.36}$$

En caso de que la onda de choque sea oblicua (Fig. 1.4 b) y sabiendo que β es el ángulo de la onda, entonces las ecuaciones anteriores simplemente se modifican al reemplazar M_{a1} por: $M_{a1} \text{Sen}(\beta)$. Para M_{a2} sería: $M_{a2} \text{Sen}(\beta - \theta)$, donde θ es el ángulo de deflexión de la línea de flujo al atravesar la onda.

1.1.13. Número de Knudsen

Considérese una componente de gas con todas sus moléculas en reposo salvo una de ellas, la cual está viajando a través del gas con una velocidad promedio u . Cuando ésta choca con alguna de las que están en reposo, la distancia entre sus centros es d . De aquí que esta molécula chocará con cualquier otra, barriendo un cilindro de diámetro $2d$ conforme éstas se mueven.

En un tiempo dt la molécula se habrá movido una distancia udt , barriendo un cilindro de volumen $\pi d^2 udt$. Si el número de moléculas en el gas es n , entonces el número de colisiones (frecuencia de colisión) por unidad de tiempo y de volumen será $z = \pi n d^2 u$. Ahora considérense todas las moléculas moviéndose. Entonces, la frecuencia molecular será $Z = zn/2$, pues una misma colisión se habría contado por dos. Si todas las moléculas se están moviendo con una distribución Maxwelliana^[27] (aleatoria), entonces $Z = \sqrt{2}zn/2$. Para obtener la distancia recorrida entre dos colisiones es necesario dividir u por z (o bien, dividir Z por n y multiplicar por 2) se deduce, el trayecto principal libre:

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{m}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_a} \quad (1.37)$$

donde, m es el peso molecular en kg/mol, d se llama, diámetro de colisión, ρ es la densidad del aire, y N_a es el número de Avogadro, cuyo valor^[9] es $N_a = 6.0220978 \times 10^{23}$.

Según la Termodinámica Molecular^[27] la ecuación (1.37), representa la distancia promedio que una partícula recorre entre dos colisiones con dos partículas de un sistema.

La línea que une las dos puntas (inicial y final) de un perfil de ala es llamada línea cuerda^[1] (Fig. 1.5). Sea l_c la longitud característica que parte del extremo inicial a cualquier punto sobre la línea cuerda. Un flujo rarificado puede ser descrito como aquel en el cual es posible comparar esta longitud característica l_c , con el trayecto principal libre, ecuación (1.37). La comparación se obtiene definiendo un número llamado, número de Knudsen, $Kn \doteq \lambda / l_c$.

A muy grandes altitudes, se presentan valores $Kn > 0.01$ ^[9]. Dado que en general, este flujo es difícil de modelar, se emplean modelos empíricos basados en la subdivisión del flujo como puede ser: molecular libre o de no-colisión ($Kn > 10$ ^[9]) el cual corresponde a la colisión que se presenta únicamente entre una partícula libre con las superficies sólidas (de las aeronaves). Los otros regímenes son, el de flujo continuo, y el de flujo de transición (entre el continuo y el molecular libre) los cuales, constituyen la parte más densa de la atmósfera.

1.1.14. Número de Reynolds

Se define el número de Reynolds localmente como:

$$\text{Re}_{l_c} \doteq \frac{\rho_\infty v_\infty l_c}{\mu_\infty} \doteq \frac{v_\infty l_c}{\nu_\infty} \quad (1.38)$$

Donde $\nu_\infty \doteq \mu_\infty / \rho_\infty$ es una cantidad llamada viscosidad cinemática. El número Re representa la razón entre las fuerzas inerciales y viscosas.

El número de Reynolds representa una razón adimensional del momento lineal de un elemento de fluido con respecto a su fuerza viscosa por unidad de masa en un flujo estable^[9]. Si el elemento se mueve muy rápido, entonces su momento lineal es muy grande, y por consecuencia experimenta una aceleración pequeña debida a la viscosidad.

1.1.15. Vector de Fuerza Aerodinámica

Considérese un sistema de ejes de viento ($S_{x_v y_v z_v}$) cuyo origen está dispuesto en el centro de masa del vehículo. Si éste se encuentra volando con una velocidad relativa a la atmósfera $\mathbf{v}_\infty$ (velocidad aérea), el eje $S_{x_v}(\mathbf{i}_v)$ será paralelo a éste vector, mientras que el eje $S_{z_v}(\mathbf{k}_v)$ será paralelo al eje de simetría del vehículo.

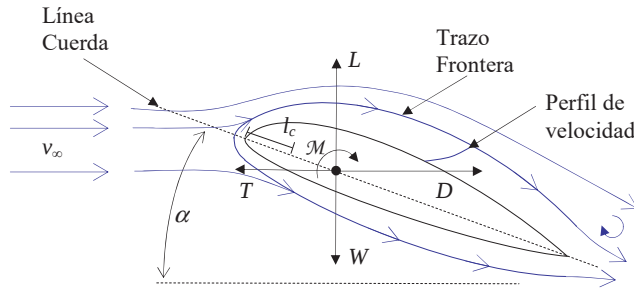


Fig. 1.5.
Sección transversal de ala

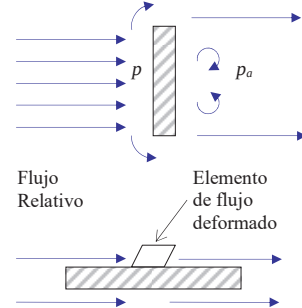


Fig. 1.6.
Fricción de presión y superficial

Generalmente, cualquier vehículo aeroespacial, presentará un vector de fuerza externa aerodinámico:

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i}_v + f_y \mathbf{j}_v + f_z \mathbf{z}_v \quad (1.39)$$

Las componentes básicas son, la fricción D , el peso W , la sustentación L y la propulsión T de modo que $\mathbf{f} = (T - D) \mathbf{i}_v + (L - W) \mathbf{z}_v$, (Fig. 1.5).

Además se hace presente el momento $\mathcal{M}$ que permite estabilidad en el movimiento lo cual se logra, orientando el perfil de ala modo tal que $L = W$ en magnitud. La sustentación L se presenta únicamente en el centro de masa de superficies planas que formen un ángulo $0 < \alpha < 90^\circ$, llamado ángulo de ataque. Ya que $\alpha = 0$ o $\alpha = 90^\circ$ entonces $L = 0$.

Debido a la forma del ala, la velocidad con la que el aire circula la parte superior debe ser mayor que la parte inferior. Esto por continuidad del fluido. Luego, por la ecuación de Bernoulli (1.7), la presión en la parte inferior será mayor que en la parte superior. Y por lo tanto de igual modo la diferencia entre las fuerzas L y W será tal que $L > W$, permitiendo así la sustentación.

En la figura 1.5, se muestran las componentes únicamente de un perfil de ala. No obstante, para una aeronave entera, el vector de sustentación se manifiesta únicamente en las alas, definiendo el llamado centro aerodinámico, mientras que los otros son tratados en el centro de gravedad de toda la aeronave.

La fricción D , se clasifica en superficial D_s y de presión D_p (Fig. 1.6). La primera se manifiesta cuando se dispone de una placa horizontal en un medio de flujo no isentrópico. Ahí, todo elemento diferencial de flujo que hace contacto con la superficie es deformado por efectos de viscosidad, mientras que la fricción de presión se presenta por la diferencia de presiones p y p_a (presión atmosférica, la cual se mantiene casi inalterada) que hay entre dos regiones de flujo separadas por la misma placa en posición vertical. Esta fricción se considera como una fuerza que convierte parte de la energía cinética lineal del flujo, en energía cinética rotacional. Por lo tanto su total es, $D = D_s + D_p$.

1.1.16. Coeficientes de Sustentación, Fricción y Momento

Las magnitudes L , D y $\mathcal{M}$, no solo dependen del ángulo de ataque α , sino también de la velocidad del flujo v_∞ , densidad del flujo ρ_∞ , área de la superficie aerodinámica S , coeficiente de viscosidad μ_∞ , y la compresibilidad del perfil de ala, la cual, está determinada por el número $M_{a_\infty} = v_\infty/a_\infty$. Como ya se incluye v_∞ , basta designar para este

parámetro, la cantidad a_∞ . Así, la variación funcional en la sustentación, para un α fijo es $L = L(v_\infty, \rho_\infty, S, \mu_\infty, a_\infty)$. Luego, Empleando Análisis Funcional, se asume lo siguiente: $L = Z v_\infty^a \rho_\infty^b S^d a_\infty^e \mu_\infty^f$, donde Z, a, b, d, e y f son constantes adimensionales.

De este modo, asumiendo las dimensiones m – masa, l – longitud y t – tiempo, tenemos:

$$\frac{ml}{t^2} = \left(\frac{l}{t}\right)^a \left(\frac{m}{l^3}\right)^b (l^2)^d \left(\frac{l}{t}\right)^e \left(\frac{m}{lt}\right)^f \quad (1.40)$$

Dado que en la izquierda, el exponente de m es 1, en la derecha, la suma de los exponentes para m también deberá sumar 1. Haciendo algo similar para l y t :

$$\begin{aligned} 1 &= b + f \\ -2 &= -a - e - f \\ 1 &= a - 3b + 2d + e - f \end{aligned} \quad (1.41)$$

Resolviendo a, b y d en términos de e y f , y sustituyendo en la expresión funcional de L :

$$L = Z \rho_\infty v_\infty^2 S \left(\frac{a_\infty}{v_\infty}\right)^e \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty v_\infty \sqrt{S}}\right)^f \quad (1.42)$$

Nótese que $a_\infty/v_\infty = 1/M_{a_\infty}$ y $S^{1/2}$ tiene unidades de longitud. Designando por convención, $S^{1/2} = c$ (línea cuerda), entonces con la ecuación (1.38), y definiendo el coeficiente de sustentación como $C_l/2 \doteq Z/(M_{a_\infty}^e R_e^f)$ se tiene:

$$L = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 S C_l = q_\infty S C_l \quad (1.43)$$

Si α varía, entonces el coeficiente de sustentación se vuelve función de α . Procediendo de igual modo para $\mathcal{M}$ y para D , (en función de α) se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$C_l(\alpha, M_{a\infty}, Re) = \frac{L}{q_\infty S} \quad C_d(\alpha, M_{a\infty}, Re) = \frac{D}{q_\infty S} \quad C_m(\alpha, M_{a\infty}, Re) = \frac{\mathcal{M}}{q_\infty S c} \quad (1.44)$$

1.1.17. Esfuerzo Cortante

La ecuación (1.31), nos determina el esfuerzo cortante sólo de modo local. Para una superficie total, considérese un elemento diferencial (superficial del ala) de longitud dx , (Fig. 1.7.) con las dimensiones dadas.

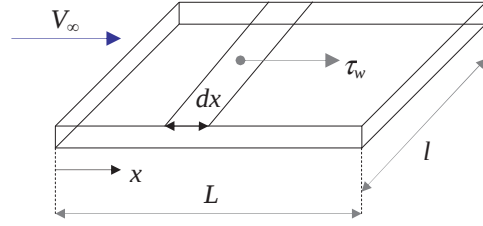


Fig. 1.7. Esfuerzo cortante

La fuerza debida a la fricción sobre este elemento es $\tau_w dx(1) = \tau_w dx$. La fricción total sobre toda la superficie se obtiene al integrar la fricción sobre este elemento:

$$D_s = \int_0^L \tau_w dx \quad (1.45)$$

La relación entre el esfuerzo cortante y el número de Reynolds es, $\tau_w \sqrt{Re_x} = 0.664 q_\infty^{[1]}$ ($C_d \doteq \tau_w / q_\infty$). Así que introduciendo esto en la integral:

$$D_s = \frac{0.664 q_\infty}{\sqrt{\rho_\infty v_\infty / \mu_\infty}} \int_0^L dx = \frac{1.328 q_\infty L}{\sqrt{\rho_\infty v_\infty / \mu_\infty}} \quad (1.46)$$

Empleando la definición de C_d y la ecuación (1.44), se tiene que:

$$C_d = \frac{D_s}{q_\infty L(1)} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \quad (1.47)$$

donde ahora el número de Reynolds está basado en la longitud total L .

1.1.18. Calor Aerodinámico

La fricción D siempre va acompañada de transferencia de calor mediante conducción a través del trazo frontera u ondas de choque, y convección a lo largo de la dirección del flujo. La conducción está dada por^[9]:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} = -k_T \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.48)$$

donde k_T es el coeficiente de conductividad térmica, y el índice y indica la dirección de transferencia calorífica, (Fig. 1.3). Durante los reingresos atmosféricos, también se hace presente la radiación, la cual transporta el calor a través de ondas electromagnéticas y está dada por:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{P}}{A} = e_m \sigma T^4 \quad (1.49)$$

donde $\mathcal{P}$ es la potencia de radiación en Watts, A es el área de la superficie emisora de radiación, e_m es la emisividad y cuyos valores son $0 \leq e_m \leq 1$, (0 para reflector perfecto o 1 para cuerpo negro). La σ es la constante de Stefan Boltzman cuyo valor^[1] es $\sigma = 5.67 \times 10^6 \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Para un flujo de gas, k_T se obtiene ya sea por la Teoría cinética de los gases^[27], o bien, de formulas empíricas^[19] como:

$$k_T = \frac{2.64638 \times 10^{-3} T^{\frac{3}{2}}}{T + 245.4 \times 10^{-\frac{12}{T}}} \text{ J/msK} \quad (1.50)$$

El parámetro adimensional que gobierna la conducción de calor causada por la disipación viscosa es el número de Prandtl Pr definido por, $Pr \doteq \mu c_p / k_T$ donde c_p es el calor específico a presión constante, y μ el coeficiente de viscosidad. Para el aire con temperaturas $T \leq 600 \text{ K}$ ^[9], $Pr \approx 0.71$; mientras que para $T > 600 \text{ K}$, el número Prandtl se vuelve función de la temperatura y de la presión.

1.2. Modelo Atmosférico Estándar

La atmósfera terrestre es un sistema dinámico cambiante que depende de la latitud, longitud, hora del día, estación y actividad solar. Eso hace que cada modelo deba ser actualizado de acuerdo a tales consideraciones, dando por resultado un modelo bastante complicado.

Con fines de practicidad, sería necesario un modelo estándar que nos permita conocer las propiedades térmicas atmosféricas, siendo crucial en el diseño de vehículos aeroespaciales.

Región	Altura h (km)	Descripción
Troposfera	$0 \leq h < 11$	Decrecimiento lineal. Comprendiendo fenómenos de clima.
Estratosfera	$11 \leq h < 47$	Un segmento constante, seguido de dos de crecimiento. La mayoría de las aeronaves están limitadas a volar hasta esta región.
Mesosfera	$47 \leq h < 86$	Dos segmentos isotérmicos que comprenden tres más de decrecimiento. Hasta esta región, se asume equilibrio termodinámico.
Termosfera	$86 \leq h < 500$	Decrecimiento no lineal. Las propiedades térmicas quedan determinadas en función de radiaciones solares.
Exosfera	$h \geq 500$	Región indefinida dominada por efectos electromagnéticos de la ionización debida a la interacción entre la atmósfera y el viento solar.

Tabla 1.2. Regiones atmosféricas y descripción de las mediciones térmicas

Por debajo de los 15 km^[1] de altura, los efectos constituyentes de lo que se conoce como clima (vientos horizontales, evaporación, precipitación, etc.) tienen un impacto muy pequeño en cuanto a propiedades térmicas que pudieran afectar al vehículo.

Por eso, enfocaremos nuestra atención únicamente en la variación vertical promedio de las variables termodinámicas, despreciando los efectos horizontales, (Tabla 1.2). Más allá de los 100 km de altura hay incertidumbres debido a los efectos de radiación solar (actividad de manchas solares), etc.

Estas influencias externas nos ponen en un estado de no equilibrio termodinámico que aunque de modo afortunado, los vehículos aeroespaciales tampoco son afectados por

dichas incertidumbres, sin embargo, la durabilidad de un vehículo se podría ver influenciada drásticamente por encima de los 200 km de altura en relación con el tiempo. Atendiendo estas consideraciones, la atmósfera será tratada empleando la ecuación de gas ideal, $p = \rho RT$, la razón presión-densidad de flujo isentrópico $p = C\rho^\gamma$, y la ecuación hidrostática $dp = -\rho g dh = -\rho g_0 dh_g$.

i	h_i (m)	T_i (K)	u (K/m)	R (J/kgK)
1	0	288.15	-6.5	287.0
2	11.0	216.65	0.0	287.0
3	20.1	216.65	1.0	287.0
4	32.2	228.65	2.8	287.0
5	47.4	270.65	0.0	287.0
6	51.4	270.65	-2.8	287.0
7	71.8	214.65	-2.0	287.02
8	86.0	186.95	1.7	287.02
9	100	210.02	5.0	287.84
10	110	257.00	10.0	291.06
11	120	349.49	20.0	308.79
12	150	892.79	15.0	311.80
13	160	1022.2	10.0	313.69
14	170	1103.4	7.0	321.57
15	190	1205.4	5.0	336.68
16	230	1322.3	4.0	366.84
17	300	1432.1	3.3	416.88
18	400	1487.4	2.6	463.36
19	500	1506.1	1.7	493.63
20	600	1506.1	1.1	514.08
21	700	1507.6	0.0	514.08

Tabla 1.3. Datos de la Atmósfera Estándar US76 y 62

Los datos recolectados para un modelo estándar (Tabla 1.3), son obtenidos por mediciones realizadas en globos aerostáticos y cohetes sonda.

La figura 1.8 muestra la gráfica de la variación de la temperatura con la altura. Ahí, es posible apreciar zonas gradiente (rectas inclinadas) y zonas isotérmicas

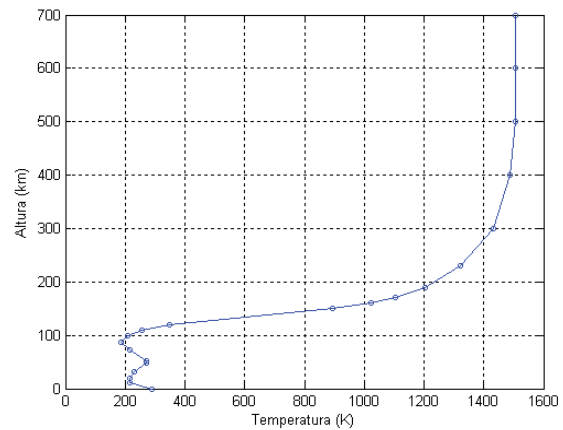


Fig. 1.8. Modelo Atmosférico estándar

(rectas verticales). De este modo, la variación lineal de la temperatura se puede expresar de forma recursiva como:

$$T(h) = T_i + u_i(h - h_i), \quad i = 1, 21 \quad (1.51)$$

donde T_i es la temperatura inicial en cada tramo de recta y u_i es una constante llamada razón de cambio térmico y es la pendiente de cada tramo ($u_i = dT_i / dh_i$).

Diferenciando la ecuación de estado (1.1) junto con $p = C\rho^\gamma$ y dividiendo la ecuación hidrostática entre dT , es posible combinar las tres ecuaciones que resultan para obtener una expresión que al ser resuelta para $dT/dh = u$ se tendría para cada segmento i :

$$u_i = \frac{dT_i}{dh_i} = -\frac{(\gamma_i - 1)}{\gamma_i} \frac{g_i}{R} \quad (1.52)$$

Aplicando las leyes de gravitación universal de Newton, es posible obtener^[1]:

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = g_0 \left(\frac{r_0}{r_0 + h} \right)^2 \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0} \right) \doteq g_0 (1 - \beta h) \quad (1.53)$$

donde, se ha hecho la consideración $h^2 \ll r_0^2$ para la aproximación. Sustituyendo la ecuación de Estado (1.1), y las ecuaciones (1.51) y (1.53) en la ecuación hidrostática (1.19) se tiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0(1 - \beta h)}{R[T_i + u_i \Delta h_i]} dh \quad (1.54)$$

donde $\Delta h_i = h - h_i$. Luego, integrando la ecuación (1.54) por partes entre (h_i, p_i) y (h, p) en una zona gradiente $u_i \neq 0$:

$$p(h) = p_i \left[\left(1 + \frac{u_i \Delta h_i}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{u_i R} \left\{ p \left(\frac{T_i}{u_i} - h_i \right) + 1 \right\}} \right] e^{\frac{g_0 \beta}{u_i R} \Delta h_i} \quad (1.55)$$

Mientras que para las regiones isotérmicas $u_i = 0$ y $T = T_i$ tenemos:

$$p(h) = p_i e^{-\frac{g_0}{RT} \left[\Delta h_i - \frac{\beta}{2} (h^2 - h_i^2) \right]} = p_i e^{-\left[\frac{g_0 \Delta h_i}{RT} \right] \left[1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right]} \quad (1.56)$$

La densidad puede ser deducida para las regiones gradiente e isotérmica usando respectivamente las dos ecuaciones anteriores en la ecuación de estado (1.1) y la ecuación (1.51). La variación de la densidad y presión en altitudes comprendidas en el rango de entre 0 y 200 km de altura (Fig. 1.9).

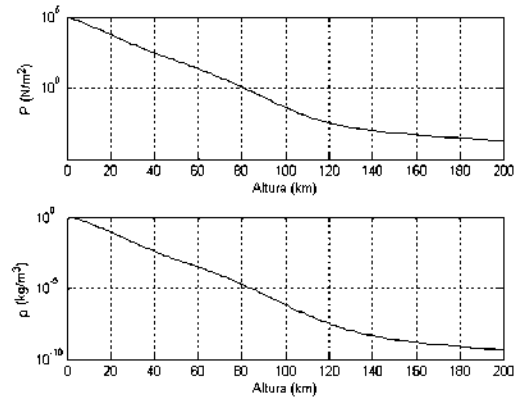


Fig. 1.9. Presión y Densidad en función de la altura

Dada la complejidad del modelo atmosférico, es posible emplear una aproximación isotérmica al seleccionar regiones determinadas a cierta altura. De modo que la densidad sea ahora:

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H} \quad (1.57)$$

donde ρ_0 es la densidad base (no necesariamente a nivel del mar) y H , se le llama altura de escala, la cual, depende del mejor ajuste que se obtiene en relación al modelo atmosférico. En seguida se muestran gráficas de la variación de algunas cantidades aerodinámicas importantes en el diseño de vehículos aeroespaciales en función de la altura, obtenidas en base al mismo modelo. Todas emplean como parámetros, una longitud característica $l_c = 20$ m, una velocidad de flujo de $v_\infty = 50$ m/s, a partir de una altura geométrica $h = 0$.

Algunas cantidades dadas en función de la masa molecular, se pueden relacionar en función de la temperatura, mediante la Temperatura molecular (o cinética), dada por: $T_m \doteq T(m_0/m)^{[9]}$, donde m_0 es la masa molecular a nivel del mar. En la figura 1.10, es empleada la ecuación $a = \sqrt{\gamma RT}$, y del número M_a .

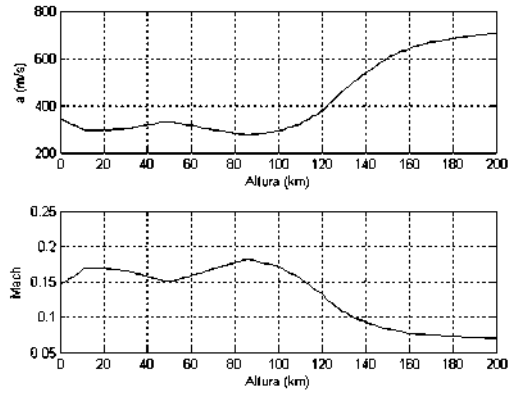


Fig. 1.10 Velocidad del sonido y Número Mach

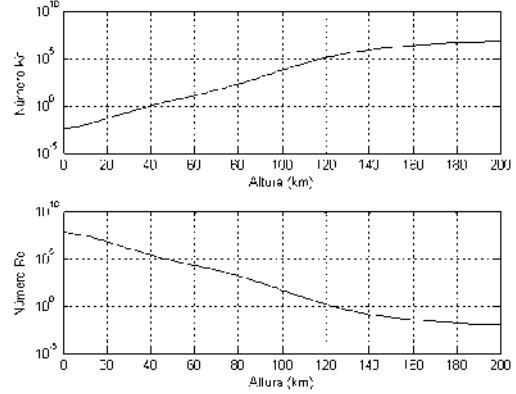


Fig. 1.11 Números de Knudsen y de Reynolds

En la figura 1.11, se usa $Kn \doteq \lambda/l_c$, donde λ está dada por la ecuación (1.37). El número de Reynolds está dado por la igualdad (1.38). La primera emplea una relación con la temperatura dada por T_m , mientras que la segunda emplea los valores de la densidad.

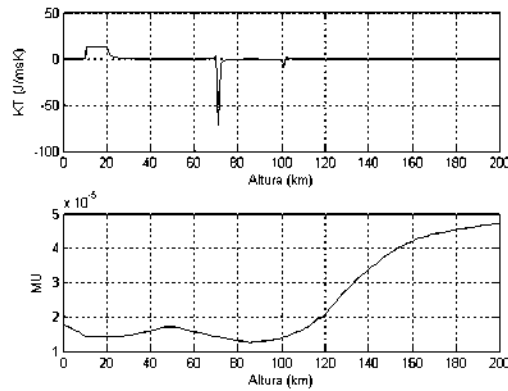


Fig. 1.12

Conductividad térmica y Coeficiente de viscosidad

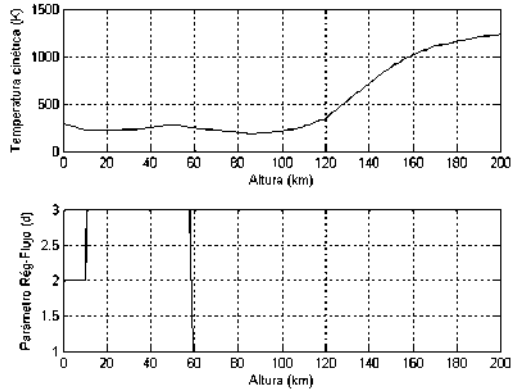


Fig. 1.13

Temperatura cinética y Régimen de flujo

En la figura 1.12, se muestra la conductividad térmica dada por la ecuación (1.50) y el coeficiente de viscosidad dado por la fórmula de Sutherland (1.32). En la figura 1.13, se muestra la relación de temperatura T_m y el régimen de flujo determinado por el número de Knudsen como $d = 1$ (flujo molecular libre), $d = 2$ (flujo continuo) y $d = 3$ (flujo de transición).

1.3. Problema de los N-cuerpos

Supóngase un sistema de n -cuerpos de masas $m_{j=1,n}$ en un sistema inercial (OXYZ), (Fig. 1.14). Teniendo en cuenta que los vectores de posición de las n -masas son los $\mathbf{r}_j$ para cada m_j y aplicando la ley de gravitación universal a la fuerza aplicada a m_i por influencia de otra m_j :

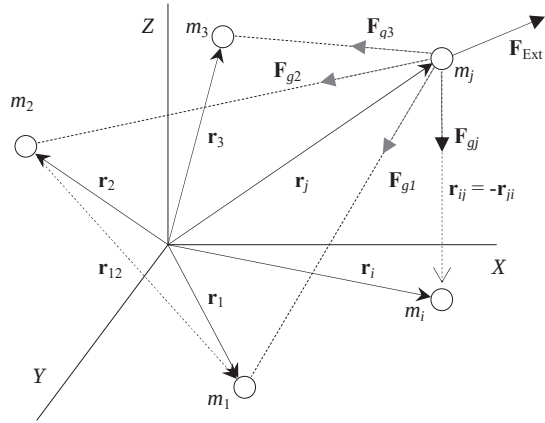


Figura 1.14. Sistema de n-cuerpos

$$\mathbf{F}_{gj} = -\frac{Gm_im_j}{r_{ji}^3}\mathbf{r}_{ji} \quad (1.58)$$

donde $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, es el vector de posición de la j -ésima masa relativo a la i -ésima. Aplicando la suma vectorial sobre $j = 1 \dots n$, donde el término $j = i$ no se incluye, la fuerza neta que actúa sobre la j -ésima masa bajo la influencia de los demás $(n-1)$ -cuerpos es:

$$\mathbf{F}_g = -\mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1.59)$$

donde $\mu_j = Gm_j$, con G la constante de gravitación universal, y cuyo valor^[1] es $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Ahora, si $\mathbf{F}_e$ es la suma de fuerzas externas como pueden ser las

aerodinámicas (§ 1.13), de presión solar, etc. excluyendo la gravitacional, entonces, la fuerza neta es, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g$.

Asumiendo que el cuerpo se mueve con aceleración constante y su masa m_j , está dada en función del tiempo, debido ya sea por razones relativistas presentes en la dinámica espacial, o bien, el consumo del combustible, la fuerza neta es:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{r}}_j \dot{m}_j = \mathbf{F}_e - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1.60)$$

donde, se ha incluido en el último miembro, la fuerza gravitacional dada por la ecuación (1.59). Finalmente, al resolver para $\ddot{\mathbf{r}}_j$ se tiene la expresión del vector de aceleración del j -ésimo cuerpo:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \frac{(\mathbf{F}_e - \dot{\mathbf{r}}_j \dot{m}_j)}{m_j} - G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1.61)$$

Suponiendo que la masa m_j es constante ($\dot{m}_j = 0$) y que las fuerzas externas están ausentes, entonces junto con la ecuación (1.59), la ecuación anterior es simplemente:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_g / m_j$$

Suponiendo que m_2 fuera la masa de la tierra y m_1 la masa de un satélite, entonces las masas restantes pueden ser del Sol, Luna, etc. Debido a que si $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$, empleamos la ecuación (1.61) para $i = 1$ e $i = 2$, expandiendo^[2] hasta $j = 3$ y agrupando:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} \mathbf{r}_{j2} + \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} \mathbf{r}_{j1} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - \sum_{j=3}^n \mu_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j1}^3} - \frac{\mathbf{r}_{j1}}{r_{j2}^3} \right) \quad (1.62)$$

La expresión anterior corresponde a la aceleración del satélite relativa a la tierra. El término adicional representa los efectos perturbativos de otros cuerpos como la Luna, etc.

1.3.1. Energía y Momento de los N-cuerpos

Debido a que estas fuerzas son todas conservativas, la fuerza total actuante en el vehículo se puede expresar como el gradiente de la función potencial $\mathbf{F}_i = -\nabla_i U$:

$$F_{q_{ki}} = m_i \ddot{q}_{ki} = -\frac{\partial U}{\partial q_{ki}} \quad (1.63)$$

Para cada $i \neq j$, $i = 1, \dots, n$. donde $(q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}) = (x_i, y_i, z_i)$. Multiplicando ambos lados por $\dot{q}_{ki}$ y sumando:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{k=1}^3 \ddot{q}_{ki} \dot{q}_{ki} \right) = - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_{ki}} \dot{q}_{ki} \right) \quad (1.64)$$

donde el lado derecho es la derivada total de U con respecto a t . Integrando ambos lados^[8]:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}_{ki}^2 \right) + U = T + U = C = \text{Constante} \quad (1.65)$$

lo indica que la energía total del sistema es invariante.

La energía potencial se define como la cantidad de trabajo realizado para cambiar una configuración a otra. Empleando la parte escalar de la ecuación (1.58) e integrando:

$$W_{ij} = Gm_i m_j \int_{r(0)_{ij}}^{r_{ij}} \frac{dr_{ji}}{r_{ji}^2} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ji}} \quad (1.66)$$

donde se ha considerado $r(0)_{ij} \rightarrow \infty$. Luego, el trabajo total es la doble sumatoria de los trabajos individuales:

$$W_T = U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n u_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ji}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \Phi_{ji} m_j \quad (1.67)$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ surge debido a que los términos aparecen dos veces. También se ha definido el potencial gravitacional Φ_{ji} por unidad de la j -ésima masa con respecto a la i -ésima. Así, la energía total es:

$$E = T + U = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{k=1}^3 \dot{q}_{ki}^2 \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ji}} \right] \quad (1.68)$$

Debido a que la función potencial depende de las posiciones relativas de los n -cuerpos y no de la elección del origen, supongamos que éste es desplazado por un vector $\mathbf{r}_0 = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}}$, con α , β y γ constantes. De modo que ahora $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_0$. Así:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_i + \alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} = 0 \quad (1.69)$$

donde, la última igualdad resulta del hecho de que U no depende explícitamente de α . Del mismo modo será para y'_i y z'_i . Así $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$, que al integrar dos veces:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{M}\mathbf{R} = \mathbf{C}t + \mathbf{B} \quad (1.70)$$

donde $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$ son matrices constantes. Esto indica que el centro de masa del sistema, obedece la segunda ley de Newton, y se mueve con velocidad constante en línea recta con la suposición de que no hay fuerzas externas actuando.

Aplicando producto cruz por $\mathbf{r}_i$ a la función potencial y sumando:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \nabla_i U \quad (1.71)$$

Por la tercera ley de Newton, hay fuerzas iguales en magnitud y opuestas en dirección, para cualquier par de masas. Así, cuando se suma sobre todas las masas la ecuación (1.71) el lado derecho de la misma vale cero^[8]. Por lo tanto $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$, es decir:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d\mathbf{h}}{dt} \quad (1.72)$$

De aquí que el momento angular $\mathbf{h}$ del sistema es constante y por lo tanto conservativo.

1.3.2. Problema de los dos cuerpos.

Supónganse un sistema de coordenadas inercial (Fig. 1.14) únicamente con dos cuerpos cuyas masas constantes son m_1 y m_2 y vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ respectivamente.

Sea $\mathbf{R}_0$ el vector de posición del centro de masa de m_1 y m_2 . Entonces, desplazando el origen de coordenadas al centro de masa tendremos, $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_0$ para $i = 1, 2$. De acuerdo a la ecuación (1.61), despreciando las fuerzas externas. Para $j = 1$ y $j = 2$, empleando los vectores de posición anteriores:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2}{R_{12}^3} \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2}{R_{12}^3} \quad (1.73)$$

Pero el centro de masa satisface $m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0$, entonces $\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{R}_1$ por lo tanto:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -GM \frac{\mathbf{R}_1}{R_{12}^3} \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -GM \frac{\mathbf{R}_2}{R_{12}^3} \quad (1.74)$$

donde, $M = m_1 + m_2$ y $R_{12} = R_1 - R_2 = \frac{M}{m_2} R_1 = -\frac{M}{m_1} R_2$. Así, tenemos las Ecuaciones de los dos cuerpos:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_2^3}{M^2} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1^3}{M^2} \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad (1.75)$$

Suponiendo que m_2 es la masa de la tierra (esférica) y m_1 la masa de un vehículo espacial que la orbita, entonces $m_2 \gg m_1$ de este modo, $M \approx m_2$, por lo tanto, $\ddot{\mathbf{R}}_2 \rightarrow 0$ y

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 \approx -\frac{Gm_2}{R_1^3} \mathbf{R}_1 = -\frac{\mu}{R_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 \quad (1.76)$$

donde $\mathbf{R}_1$ es el radio vector de posición del vehículo espacial con respecto al centro de masa de ambos cuerpos, el cual por las dimensiones dadas, se encuentra muy próximo al centro de la tierra. La expresión anterior se llama ecuación de los dos cuerpos^[8]. La constante μ es el parámetro gravitacional terrestre y vale^[9]: $\mu = 398600.4418 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

1.4. Topografía y Gravitación

Debido al movimiento de rotación de algunos cuerpos celestes, estos presentan un desplazamiento de masa centrífuga, alterando su forma a la de un cuerpo axisimétrico elipsoidal. Ahí el radio ecuatorial es mayor que el radio polar. Es decir, $R_e > R_p$.

De este modo, se requerirá un de un modelo gravitacional distinto al proporcionado por la ecuación (1.58), el

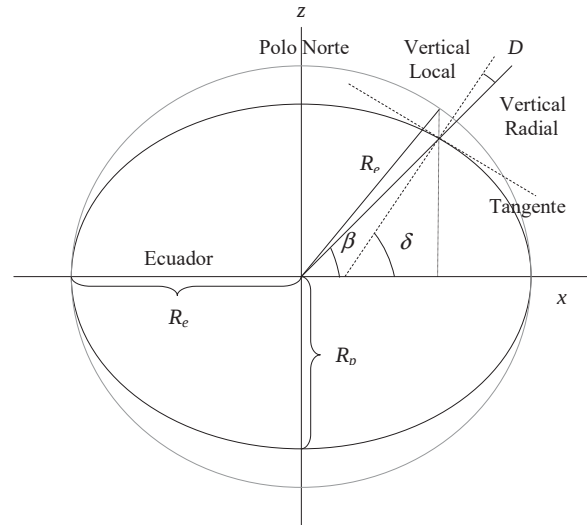


Fig. 1.15. Latitudes Geodésica y Reducida

cual es válido únicamente en masas puntuales o bien, con distribuciones perfectamente esféricas, siendo ya erróneo si una de ellas tuviera distribución elipsoidal.

1.4.1. Radio Planetario

Considérese la superficie del planeta comprendida en una circunferencia (Fig. 1.15). Los ángulos δ y β se les llama^[2] latitudes geodésica y reducida, y son medidas respecto a las verticales local y radial respectivamente. El ángulo de deflexión D es la diferencia entre ambos ángulos. Las coordenadas sobre la elipse son (Fig. 1.15) $x = R_e \cos \beta$ y $z = (R_p/R_e)R_e \sin \beta$. Además, se tiene^[2] que para cualquier elipse $R_e^2 = R_p^2 + c^2$ y $e = c/R_e$. Así que $R_p = R_e(1 - e^2)^{1/2}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} x &= R_e \cos \beta \\ z &= R_e \sqrt{1 - e^2} \sin \beta \end{aligned} \quad (1.77)$$

Por cálculo elemental, el cambio en la normal es: $-dx/dz = \tan \delta$. Diferenciando las ecuaciones anteriores para x y z , y sustituyendo en $\tan \delta$:

$$\tan \beta = \sqrt{1 - e^2} \tan \delta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \delta}{\cos \delta} \quad (1.78)$$

donde ahora:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \delta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \delta}} \\ \cos \beta &= \frac{\cos \delta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \delta}} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Para un punto que está a una altura h por encima del elipsoide, es fácil mostrar que las componentes x y z de tal elevación son $\Delta x = h \cos \delta$ y $\Delta z = h \sin \delta$. Con estas

aseveraciones y las ecuaciones anteriores al ser sustituidas en las ecuaciones (1.77) tenemos las expresiones^[2] en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} x &= \left| \frac{R_e}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{Sen}^2 L}} + h \right| \operatorname{Cos} \delta \\ z &= \left| \frac{R_e (1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{Sen}^2 L}} + h \right| \operatorname{Sen} \delta \end{aligned} \quad (1.80)$$

La tercera coordenada queda determinada por la longitud terrestre λ la cual, es el ángulo medido entre un meridiano terrestre y otro. Con esto tenemos que el vector del radio geocéntrico $\mathbf{R}$ en términos de x y z es:

$$\mathbf{R} = x \operatorname{Cos}(\lambda) \mathbf{I} + x \operatorname{Cos}(\lambda) \mathbf{J} + z \mathbf{K}$$

Por otro lado, es posible deducir^[1] la expresión escalar R para $\mathbf{R}$ la cual está dada por la siguiente expansión en serie:

$$R = R_e \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} [1 - \operatorname{Cos}(2\delta)] + \frac{5\varepsilon^2}{16} [1 - \operatorname{Cos}(4\delta)] - \dots \right\} \quad (1.81)$$

donde ε se llama elipsoidad del planeta y está dada por la expresión: $\varepsilon = 1 - R_p / R_e$ y cuyo valor^[9] para la tierra es $\varepsilon = 1/298.257$. Debido a que dicha serie es bastante precisa, basta retener los primeros dos términos teniendo así:

$$R \approx R_e (1 - \varepsilon \operatorname{Sen}^2 \delta) \quad (1.82)$$

De igual modo, haciendo la misma referencia que antes, está dada^[1] la siguiente serie para la deflexión D :

$$D = \varepsilon \operatorname{Sen}(2\delta) - \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{Sen}(2\delta) + 2\varepsilon^2 \operatorname{Sen}(2\delta) \operatorname{Sen}^2 \delta + \dots \quad (1.83)$$

Usando los primeros dos términos de las series para R y D es posible ver (Fig. 1.16) para el dominio latitudinal $0 \leq \delta \leq \pi/2$ que el radio mínimo $R = R_p = 6356.755$ km, ocurre en el polo, mientras que la máxima deflexión $D = 0.192^\circ$ ocurre a una latitud de $\delta = 45^\circ$.

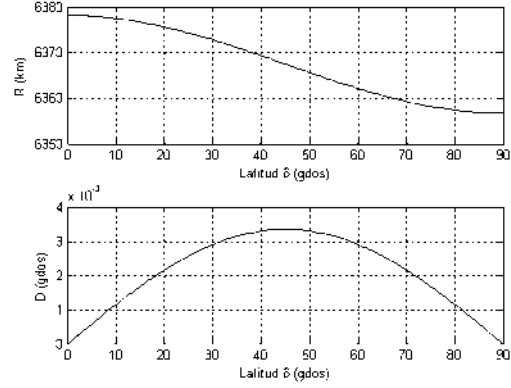


Fig. 1.16. Variación del Radio y la Deflexión

1.4.2. Modelo Gravitacional Axisimétrico

Suponiendo que se tienen, m_i masas para $i = 2, \dots, n$ densamente acumuladas, formando la masa de la tierra, y m_1 la masa de prueba de un satélite.

Sea r_{i1} la distancia i -ésima a la masa del satélite. Empleando la ecuación (1.67), para hallar la función potencial u_{i1} de m_1 :

$$u_{i1} = \sum_{i=2}^n \frac{Gm_i}{r_{i1}} m_1 \doteq \sum_{i=2}^n \Phi_i m_1 \quad (1.84)$$

Luego, la fuerza gravitacional del satélite causada por las masas individuales es:

$$\mathbf{g} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{F_{g1i}}{m_1} \hat{\mathbf{r}}_{i1} = -\frac{1}{m_1} \frac{\partial u_{i1}}{\partial r_{i1}} \hat{\mathbf{r}}_{i1} = \sum_{i=2}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_{i1}} \hat{\mathbf{r}}_{i1} = \frac{\partial}{\partial r_i} \sum_{i=2}^n \frac{Gm_i}{r_{i1}} \hat{\mathbf{r}}_{i1} \quad (1.85)$$

La derivada de la última igualdad se puede sacar de la suma debido a que la masa de prueba es despreciable comparada con la distribución de las demás^[9].

Nótese además que el vector de la gravedad apunta en dirección hacia cada i -ésima masa, de ahí el cambio del signo, del cuarto al quinto miembro, ya que $\hat{\mathbf{r}}_{li} = -\hat{\mathbf{r}}_{il}$.

Tomando el límite a una masa infinitesimal, $m_i \rightarrow dM$ y $n \rightarrow \infty$, la ecuación anterior adquiere su forma integral:

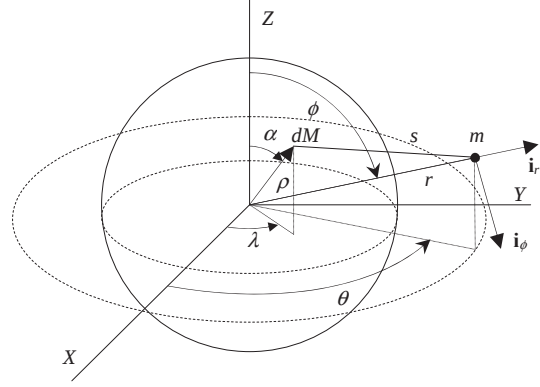


Figura 1.17.
Masa de prueba y masa planetaria elemental

$$\mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{G}{s} dM \hat{\mathbf{r}} \quad (1.86)$$

donde s es la distancia entre la masa de prueba m y el diferencial de masa dM que está dada por $s = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma}$, (Fig. 1.17). Aquí, r y ρ son las posiciones tanto de la masa de prueba como del diferencial de masa respectivamente, y γ es el ángulo entre ellos. Es claro que $r = s + \rho$, con ρ constante. Así, el potencial gravitacional de la distribución de masa planetaria es:

$$\Phi = \int \frac{GdM}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma}} \quad (1.87)$$

Con el propósito de resolver dicha integral, es conveniente expandir el integrando en una serie asumiendo ($r > \rho$) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma}} &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\rho}{r} \cos \gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \gamma - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^3 \cos \gamma (5 \cos^2 \gamma - 3) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[P_0(\cos \gamma) + \frac{\rho}{r} P_1(\cos \gamma) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 P_2(\cos \gamma) + \dots + \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) + \dots \right] \end{aligned}$$

donde $P_n(v)$ es el polinomio de Legendre de orden n . Algunas propiedades importantes son: $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$, $P_n(-v)=(-1)^n P_n(v)$. Luego, $|P_n(\text{Cos } \gamma)| < 1$ lo cual implica que convergen.

Además, un polinomio de Legendre puede ser generado ya sea por una formula de recurrencia^[25] $nP_n(v) = (2n-1)vP_{n-1}(v) - (n-1)P_{n-2}(v)$ o bien, la función generadora^[8]:

$$P_n(v) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dv^n} (v^2 - 1)^n \quad (1.88)$$

Por lo tanto:

$$\Phi = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\text{Cos } \gamma) dM \quad (1.89)$$

El término $P_0(\text{Cos } \gamma)=1$ nos da en la integral simplemente M , mientras que el siguiente $P_1(\text{Cos } \gamma)=\text{Cos } \gamma$ se anula debido a cuestiones de simetría^[9]. Por lo tanto:

$$\Phi = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\text{Cos } \gamma) \frac{dM}{M} \right] \quad (1.90)$$

Una simplificación requiere de la densidad de masa planetaria $D(\rho, \alpha, \lambda)$. La suposición de simetría alrededor del eje de rotación, nos permite despreciar cualquier dependencia longitudinal, de modo que, $dM = D(\rho, \alpha) \rho^2 \text{Sen}(\alpha) d\rho d\alpha d\lambda$. Usando trigonometría esférica^[A1]: $\text{Cos } \gamma = \text{Cos } \alpha \text{Cos } \phi + \text{Sen } \alpha \text{Sen } \phi \text{Cos}(\theta - \lambda)$ y despreciando variaciones de masa longitudinal, en esta ecuación tenemos:

$$P_n(\text{Cos } \gamma) = P_n(\text{Cos } \alpha) P_n(\text{Cos } \phi)$$

por lo tanto:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{GM}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \quad (1.91)$$

donde:

$$A_n \doteq G \int D(\rho, \alpha) \rho^{n+2} P_n(\cos \alpha) \sin(\alpha) d\rho d\alpha d\lambda \quad (1.92)$$

Una expresión más útil puede ser obtenida en términos de la distancia adimensional r/R_e donde R_e es el radio ecuatorial del planeta para obtener:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \phi) \right] = \frac{\mu}{r} - \Xi \quad (1.93)$$

donde, $J_n \doteq -A_n / GMR_e^n$ se les conoce como constantes de Jeffery^[9] y representan los armónicos esféricos de la distribución de masa planetaria, únicos para cada planeta, y disminuyen en magnitud conforme crece n . La constante $\mu = GM$ es el parámetro gravitacional, y Ξ es el término del potencial secular del cuerpo axisimétrico.

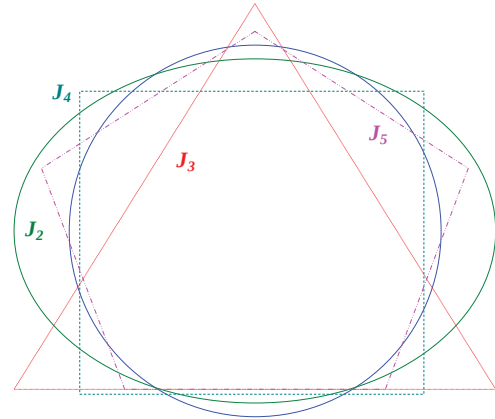


Figura 1.18. Armónicos Esféricos del cuerpo axisimétrico

El más grande de estos J_2 denota una diferencia adimensional entre los momentos de inercia alrededor del eje polar SZ y algún eje en el plano ecuatorial. J_3 es el armónico triangular, mientras que J_4 y J_5 corresponden a las formas cuadrada y pentagonal, (Fig. 1.18).

Para este modelo basta con emplear las primeras tres constantes J_n que para el caso de la tierra valen^[9]: $J_2 = 0.00108263$, $J_3 = -0.00000254$ y $J_4 = -0.00000161$.

Si se desea expresar el potencial Φ en función de la latitud terrestre δ , y de cualquier $R \leq R_e$ situado a esa latitud, basta con sustituir R_e de la ecuación (1.82) para obtener:

$$\Phi(r, \phi, \delta, R) = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{R}{r(1 - \varepsilon \text{Sen}^2 \delta)} \right]^n J_n P_n(\text{Cos} \phi) \right\} \quad (1.94)$$

Supóngase ahora, que toda la masa planetaria está distribuida en un cuerpo esférico $m_2 = M$, y el satélite en otro de masa $m_1 = m$. Luego, sea $\mathbf{R}_{12}$ el vector de posición de m relativo a M , cuya magnitud es r . De este modo se tendrá un problema de dos cuerpos en el cual, por las ecuaciones (1.76) y (1.85) se tiene:

$$\mathbf{g} = \ddot{\mathbf{R}}_{21} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{R}}_{21} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{R}}_{21} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{R}}_{12} \quad (1.95)$$

Usando el mismo vector en coordenadas polares, $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r} = r\mathbf{i}_r + r\phi\mathbf{i}_\phi$, y tomando el gradiente de la ecuación (1.93) con respecto a $\mathbf{r}$, se tiene para un satélite^[9]:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi} \mathbf{i}_\phi = g_r \mathbf{i}_r + g_\phi \mathbf{i}_\phi \quad (1.96)$$

donde:

$$g_r = -\frac{\mu}{r^2} \left[1 - \sum_{n=2}^4 (n+1) J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\text{Cos} \phi) \right] \quad (1.97)$$

y

$$g_\phi = \frac{3\mu R_e^2}{r^3} \text{Sen} \phi \text{Cos} \phi \left[J_2 + \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{R_e}{r} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (5 \text{Cos}^2 - 1) \text{Sec} \phi + \frac{5}{6} J_4 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 (7 \text{Cos}^2 \phi - 1) \right] \quad (1.98)$$

Suelen emplearse componentes radial y transversal de $\mathbf{g}$ en direcciones opuestas, de modo que $\mathbf{g} \doteq -g_c \mathbf{i}_r - g_\delta \mathbf{i}_\phi$, donde g_c es la componente dirigida hacia el centro del planeta, y g_δ la componente longitudinal dirigida en dirección norte.

Debido a que $g_\phi \neq 0$, tendremos que la dirección de $\mathbf{g}$ diferirá de la dirección radial g_r , mientras ésta misma, será más pequeña en magnitud comparada con el modelo gravitacional esférico. Estas desviaciones son del todo relevantes en aplicaciones astronáuticas (vuelos de largo alcance o reingresos atmosféricos).

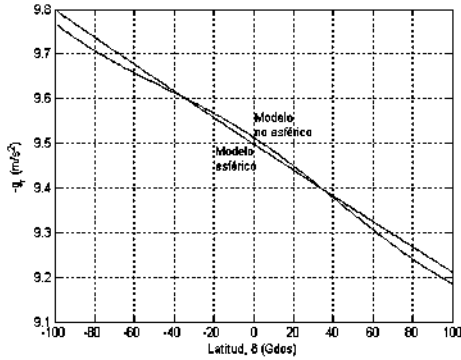


Fig. 1.19. Componente radial de la gravedad

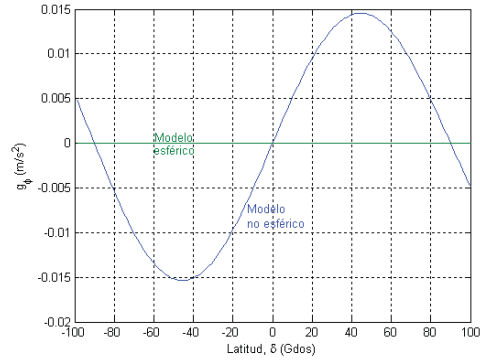


Fig. 1.20. Componentes transversal de la gravedad

Supóngase una trayectoria cuya latitud δ (en grados) varía con la altitud (en km) dada en términos del radio ecuatorial $h = r - R_e$, (donde $R_e = 6378.14 \text{ km}^{[9]}$) como sigue:

$$\delta(h) = [h - 100]^\circ, \quad (0 \leq h \leq 200) \text{ km}$$

Así, es posible comparar las componentes de la aceleración $\mathbf{g}$ (que son resultado del modelo axisimétrico) con el modelo gravitacional esférico empleando las ecuaciones (1.97) y (1.98). Para g_r la diferencia entre ambos modelos es mínima cuando $\delta \approx \pm 40^\circ$ (Fig. 1.19), mientras que para g_ϕ la diferencia es mínima en $\delta = 0^\circ$ que es el ecuador y en

$\delta = \pm 90^\circ$ que es en los polos, (Fig. 1.20). Recíprocamente, las diferencias son mayores para g_r en los polos, mientras que para g_ϕ lo es en $\delta \approx \pm 40^\circ$.

1.4.3. Anomalías Gravitacionales

El modelo anterior trata la superficie planetaria como un elipsoide generado por un contorno de potencial gravitacional constante, llamado superficie equipotencial. Sin embargo, en la realidad existen ciertas variaciones de masa planetaria presentes en formas superficiales irregulares (montañas, valles, planicies, zonas tectónicas, etc.), así como la distribución de masa planetaria. Estas consideraciones hacen diferir ligeramente el modelo dado por la formula (1.93), con uno más “real” en el cual, se deben considerar las variaciones longitudinales δ en la distribución de masa planetaria. Estas variaciones, son insignificantes en vuelos aerodinámicos, más no así, en vuelos espaciales. Ya que las más ligeras variaciones de $\mathbf{g}$ pueden cambiar significativamente una trayectoria.

Un modelo gravitacional que incluya estas anomalías nos proporciona una superficie equipotencial modificada llamada geoide. Para dichas aplicaciones, los armónicos esféricos son cuidadosamente modelados usando funciones de Legendre (Polinomios Asociados de Legendre), $P_{n,m}$ y cuya relación con los de Legendre es: $P_{n,m} = P_{n,m=0}$ o bien, para $m \neq 0$ mediante la expresión [6]:

$$P_{n,m}(\cos \phi) = \frac{(1 - \cos^2 \phi)^{\frac{m}{2}}}{2^n m!} \left(\frac{\partial}{\partial \cos \phi} \right)^{n+m} (\cos^2 \phi - 1)^n$$

Las constantes de Jeffery son ahora los coeficientes armónicos esféricos de orden 0 $J_n = -c_n^{m=0}$ los cuales se hace referencia a ellos como coeficientes armónicos de zona [6], mientras que los coeficientes con $m \neq 0$ se deben a una distribución de masa no axisimétrica. Estos son, los coeficientes armónicos sectoriales $n = m$ y los armónicos tesserales $n \neq m$. Ambos para $c_{n,m}$ y $s_{n,m}$. Dicha corrección requerirá ahora un parámetro más que es la latitud δ . Aplicando estas modificaciones tenemos:

$$\Phi(\phi, r, \delta) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n-1} (1 - \varepsilon \text{Sen}^2 \delta)^n} \bar{P}_{n,m}(\text{Cos } \phi) [\bar{c}_{n,m} \text{Cos}(m\delta) + \bar{s}_{n,m} \text{Sen}(m\delta)] \right] \quad (1.99)$$

Se incluye además, la función asociada de Legendre normalizada:

$$\bar{P}_{n,m}(\text{Cos } \phi) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\text{Cos } \phi)$$

Actualmente, se utiliza el World Geodetic System 84 (WGS 84)^[17] para el sistema de referencia de NAVSTAR, (conjunto de satélites GPS), empleando el modelo dado por la ecuación (1.99) usando valores de los coeficientes gravitacionales normalizados $\bar{c}_{n,m}$ y $\bar{s}_{n,m}$ truncados hasta $n = m = 18$.

Más fácil que emplear un modelo teórico, es posible medir la gravedad en varios puntos sobre la superficie del planeta utilizando satélites que permitan construir un mapa detallado de la gravedad g . Este trabajo, sigue siendo realizado por algunos satélites de la NASA como el Lageos, TOPEX/Poseidón y GRACE al igual que el Francés SPOT-2/Doris. En la figura 1.21. (Ref. http://www.fas.org/irp/imint/docs/rst/Intro/Part2_1b.html) se muestra un mapa geopotencial medido por el GRACE, con las zonas gravitacionales gradiente (con unidades de miligals mGal) en función de la altura. Ahí, el valor observado de g es reducido a cero a nivel del geode (zonas de color verde) donde, $1\text{Gal} = 1\text{cm/s}^2$, y $1\text{mGal} = 10^{-3} \text{ cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ m/s}^2$.

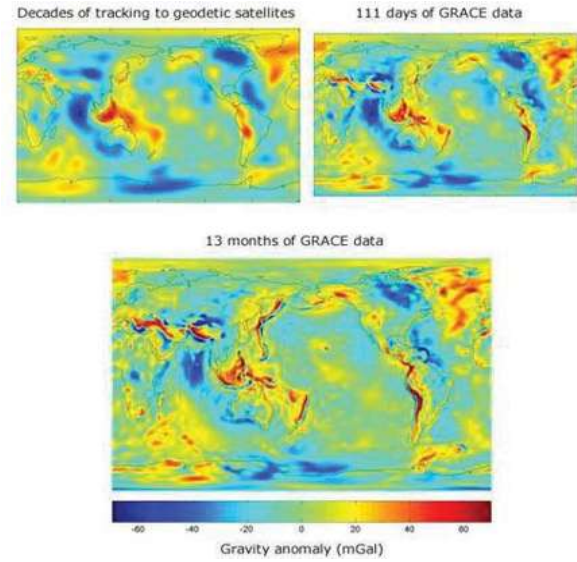


Fig. 1.21. Mapa Geopotencial obtenido por el GRACE

Capítulo 2

Mecánica Orbital

Si una partícula de masa m es lanzada partiendo ya sea del punto 1 o 2, (Fig. 2.1), para que alcance una distancia r con respecto al centro de la tierra ($r = R + h$, donde R es el radio terrestre y h una altura tal que $h > h_a \approx 125 \text{ km}^{[9]}$ que es el espesor promedio de la atmósfera), en el momento en que dicha partícula llegue a la parte más alta P , llevará consigo una velocidad v_1 (o bien, $v_2 > v_1$). Después, caerá a la Tierra (atravesando toda la atmósfera), describiendo una trayectoria de misil balístico^[2], tal como se aprecia en la primera sección curva superior de la elipse imaginaria que atraviesa el planeta. No obstante, si en la parte más alta de la sección elíptica, se aplica un amento de velocidad en dirección tangencial al movimiento para lograr una velocidad v_3 o bien, $v_4 > v_3 \gg v_2$ entonces, la elipse del caso 1 (o del 2) se modifica gradualmente hasta tomar una forma circular 3 o bien la forma excéntrica 4. Cualquiera de estas dos últimas definen una órbita y ahí, la partícula no vuelve a caer al planeta. Más aún, si la velocidad v_4 se incrementa mucho más hasta ser $v_5 \gg v_4$, la órbita elíptica toma forma de una trayectoria hiperbólica, caso 5. Por lo tanto, para definir una órbita alrededor de la Tierra, ésta dependerá tanto de la energía cinética K (generar suficiente velocidad v_3 o v_4) así como de la energía potencial U (para no caer de nuevo a la Tierra), es decir, su energía mecánica total es $E(v, r) = K(v) + U(r)$. Nótese la importancia en la restricción de que la órbita no cruce por la atmósfera pues de lo contrario, la fricción haría que la velocidad disminuya hasta hacer que la órbita se degenera a una trayectoria del caso 2 o 1 lo cual implica un reingreso a la tierra.

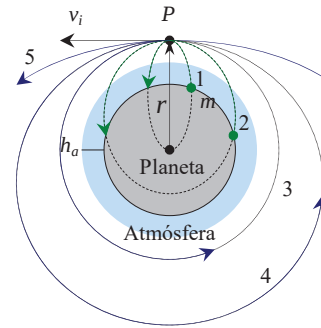


Figura 2.1.
Trayectorias Cónicas

2.1. El Plano Orbital.

2.1.1 Ecuación de Lagrange.

En vez de usar un sistema de coordenadas particular, Lagrange tuvo la idea de emplear coordenadas generalizadas (dependientes del tiempo) que pudieran representar cualquier sistema de coordenadas. A estas les llamó $q_i(t)$, (Tabla 2.1). Sus derivadas $\dot{q}_i(t)$ serían llamadas velocidades generalizadas.

Generalizadas	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$q_1(t)$	X	r	ρ
$q_2(t)$	Y	θ	θ
$q_3(t)$	Z	z	φ

Tabla 2.1. Coordenadas tridimensionales más comunes.

Sea P una partícula moviéndose en un espacio tridimensional cartesiano (XYZ). Entonces las coordenadas (xyz) de su vector de posición $\mathbf{r}$, pueden estar dadas en función de otras coordenadas generalizadas distintas de las cartesianas:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(q_1, q_2, q_3, t) \\ y(q_1, q_2, q_3, t) \\ z(q_1, q_2, q_3, t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Debido a que la energía cinética depende de la posición y velocidad, en coordenadas generalizadas es: $K = K(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = K(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, mientras que la energía potencial depende sólo de la posición, así que: $U = U(x, y, z) = U(q_1, q_2, q_3)$. Sea $B \doteq T - U$ el Lagrangiano del sistema. Finalmente, se obtienen^[25] las tres ecuaciones del movimiento de la dinámica de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial B}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

El Lagrangiano B nos proporciona la descripción de la dinámica de P independientemente del sistema de coordenadas que estemos usando para posicionar a la partícula.

2.1.2. Trayectorias Cónicas.

Supongamos que se dispone de un sistema de dos cuerpos con masas esféricas M para la tierra y m para un satélite situado a una distancia r del centro de la tierra. El satélite se mueve con velocidad no nula $\mathbf{v}$. Luego, tenemos que $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i}_r + r\dot{\theta}\mathbf{i}_\theta$, donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular (Fig. 2.2). De ahí que la energía cinética sea:

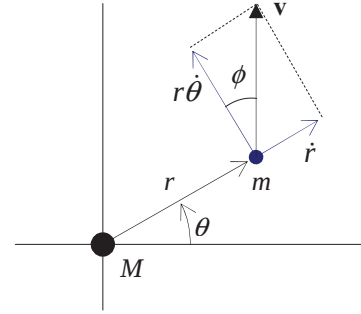


Fig. 2.2. Componentes polares de $\mathbf{v}$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right] \quad (2.3)$$

El ángulo ϕ se llama ángulo de trayecto de vuelo, y está dado por:

$$h = |\mathbf{h}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = rv \sin \gamma = rv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = rv \cos \phi \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{h}$ es el momento angular, y γ es el ángulo formado entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}_r$. Los ejes definidos por las componentes rectangulares $\mathbf{i}_r$ e $\mathbf{i}_\theta$ de $\mathbf{v}$, se llaman vertical local y horizonte local. Ambos determinan un sistema llamado local^{[2][9]}.

La fuerza gravitacional entre dos cuerpos así como la energía potencial (Cap 1) están dadas respectivamente por $F = \mu m/r^2$ y $U = -\mu m/r$. Así que la función lagrangiana es:

$$B = K - U = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{\mu m}{r}$$

Empleando la ecuación del movimiento de Lagrange (2.2) para $q_1 = \theta$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = I\dot{\theta} \doteq h = \text{constante} \quad (2.5)$$

donde es posible ver el momento de inercia del vehículo $I = mr^2$, y el momento angular definido como h , el cual es constante. Luego, para $q_2 = r$ se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\theta} + \frac{m\mu}{r^2} = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (2.6)$$

Aplicando un cambio de variable $r = 1/u$, entonces $h = \dot{\theta}/u^2$, de modo que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{du}{d\theta}$$

Luego:

$$\ddot{r} = -h \left(\frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (2.7)$$

Aplicando el cambio de variable $r = 1/u$ y combinando las ecuaciones (2.6) y (2.7), se obtiene entonces la ecuación diferencial $\ddot{u}(\theta) + u - \mu/h^2 = 0$, cuya solución general es: $u = \mu/h^2 + A \cos(\theta - \theta_0)$, donde A y θ_0 son constantes de integración cuyos valores dependen de las condiciones iniciales. Este último es un ángulo de fase a partir del cual, la trayectoria queda definida en el punto P_0 y además no se aplica más impulso al vehículo. Así, regresando a la variable r :

$$r(\theta) = \frac{h^2/\mu}{1 + A(h^2/\mu) \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.8)$$

Esta expresión nos define un conjunto de trayectorias cónicas para el vehículo, únicamente bajo la influencia gravitatoria de la tierra, (Fig. 2.3). El último miembro es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares, la cual por analogía, muestra que $p = h^2/\mu = \mu^{-1} r^2 v^2 \cos^2 \phi$, esto por la ecuación (2.4).

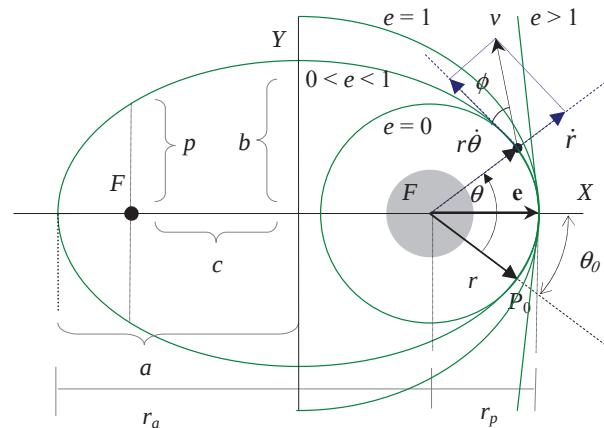


Figura 2.3. Trayectorias Cónicas

Además, $e = Ah^2/\mu = A\mu^{-1}r^2v^2 \cos\phi$ es la excentricidad, cuyo valor determina la forma de la órbita de la siguiente manera: $e = 0$, círculo; $0 < e < 1$, elipse; $e = 1$, parábola; $e > 1$, hipérbola. Todas están dadas únicamente en términos de los parámetros orbitales, p y e . El papel que juegan las dos primeras son para órbitas cerradas, mientras que las dos últimas, se emplean en la determinación y condiciones necesarias que nos permitan un escape de la influencia gravitatoria terrestre como puede ser en vuelos interplanetarios.

Otra forma de obtener el mismo resultado^[2] es, considerando la ecuación de los dos cuerpos (Cap. 1) $\ddot{\mathbf{r}} + \mu r^{-3}\mathbf{r} = 0$ y aplicando producto cruz por $\mathbf{r}$ sabiendo que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ y $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$, se obtiene la ecuación (2.4). Luego, Aplicando producto cruz por $\mathbf{h}$ a la ecuación de los dos cuerpos, teniendo en cuenta que $\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})$ y que además:

$$\frac{1}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = \frac{1}{r^3}[\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})] = \frac{1}{r}\mathbf{v} - \frac{v}{r^2}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

igualando e integrando se tiene:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{B} \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{B}$ es un vector constante obtenido de la integración.

Aplicando producto punto por $\mathbf{r}$ a la ecuación (2.9) y teniendo que en general $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$, se obtiene la ecuación de las cónicas (2.8) salvo que ahora $B = Ah^2 = e\mu$. Empleando su forma vectorial $\mathbf{B} = \mathbf{e}\mu$ al ser reemplazada en la ecuación (2.9) y resuelta para $\mathbf{e}$ obtenemos el llamado vector de excentricidad^[2]:

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.10)$$

De este modo, el ángulo $(\theta - \theta_0)$ está entre los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{e}$, apuntando éste último en dirección del periapsis que es, el punto de la órbita más cercano al foco (Fig 2.3). Algunas relaciones generales muy útiles en secciones cónicas son las siguientes:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2c}{r_p + r_a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (2.11)$$

$$r_p = \frac{p}{1 \pm e} = a(1 \mp e) \quad (2.12)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.13)$$

donde r_a y r_p son los Radios del Apoapsis “AP” (punto de la elipse más alejado del foco) y del Periapsis “PE” respectivamente. Cuando es la tierra en vez de –apsis se sustituye por –geo, la luna, –selene, el sol –helio o –felio etc.

2.1.3. Ecuación de Energía.

Diferenciando la ecuación (2.8) y sustituyéndola en la energía cinética (2.3) se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} m \left\{ \frac{h^2 e^2 \text{Sen}^2(\theta - \theta_0)}{r^2 [1 + e \text{Cos}(\theta - \theta_0)]^2} + \frac{h^2}{r^2} \right\}$$

Recordando que $r^2 [1 + e \text{Cos}(\theta - \theta_0)]^2 = (h^2/\mu)^2$, se tiene para la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2} m \frac{\mu^2}{h^2} [1 + 2e \text{Cos}(\theta - \theta_0) + e^2] \quad (2.14)$$

Luego, al combinar la ecuación (2.8), con el valor absoluto^[1] de la energía potencial:

$$|U| = \frac{\mu^2 m}{h^2} [1 + e \text{Cos}(\theta - \theta_0)] \quad (2.15)$$

Definiendo el Hamiltoniano $H \doteq K - |U|$ junto con las ecuaciones (2.14) y (2.15) se tiene:

$$H = -\frac{1}{2}m\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2) \quad (2.16)$$

Y al ser resuelta para e :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h^2H}{m\mu^2}} \doteq \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\left(\frac{h}{\mu}\right)^2} \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.8) determinan de manera única, la trayectoria de un cuerpo dadas la velocidad v y la distancia r con respecto al centro de la tierra. Esto debido a que la ecuación (2.17) está dada en términos de H , que a su vez, depende también de v y r en su forma elemental. También se ha incluido la definición de la energía por unidad de masa o energía específica^[2]: $\mathcal{E} \doteq H/m$.

Aplicando producto punto por $\dot{\mathbf{r}}$ a la ecuación de los dos cuerpos, teniendo en cuenta que en general $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\dot{v}$ y $\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\right) = \frac{\mu\dot{r}}{r^2}$:

$$\mathcal{E} = \frac{H}{m} = \frac{v^2}{2} + \left(c - \frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.18)$$

donde, la constante de integración c es arbitraria y su valor depende del “cero” referencial a la energía potencial. Se usará, $c = 0$ a nivel del piso, dejando el cero de la energía potencial en $r \rightarrow \infty$.

El último miembro surge al considerar $v = v_p$ de $h = r_p v_p = r_a v_a$, que al ser sustituido en la ecuación (2.18), se tiene $\mathcal{E} = h^2/2r_p^2 - \mu/r_p$. Después, esta ecuación se expresa en términos de e y a , usando el último miembro de la ecuación (2.12), resolviendo para h^2 de la expresión (2.13) y combinando todo.

Por otro lado, resolviendo v de la ecuación de energía (2.18) se tiene la velocidad necesaria para que el vehículo describa una órbita elíptica:

$$v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r} + \mathcal{E} \right)} \quad (2.19)$$

Si se tiene $r = a$, entonces la velocidad requerida para orbitar en forma circular, es $v_c^2 = \mu/r$. El mismo resultado se obtiene haciendo $e = 0$ en la ecuación de la excentricidad (2.17) y resolviendo para v . Usando valores para la tierra^[9] ($r = 6.4 \times 10^6$ m, casi igual al radio terrestre), la velocidad mínima para entrar en órbita circular es: $v_c \approx 7.9$ km/s.

2.1.4. Tiempo de vuelo orbital

Hay que notar que la componente angular local de la velocidad en coordenadas polares es $r\dot{\theta}(t)$, así que el momento angular es, $h = r^2\dot{\theta}(t)$. Por cálculo elemental se tiene $dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$, donde dA es un elemento diferencial de área barrido por un diferencial angular $d\theta$. Combinando esta expresión con la de h , tenemos como resultado la segunda ley de Kepler: $dt = \frac{2}{h}dA$. Además, el área de una elipse es por definición^[2] πab , así que, si $dt = T =$ un periodo orbital, entonces:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \quad (2.20)$$

Que es la tercera ley de Kepler. Así, para un par de órbitas:

$$(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3 \quad (2.21)$$

Supongamos ahora que se tiene circunscrita la órbita en un mismo plano, (Fig. 2.4). De acuerdo a la segunda ley de Kepler:

$$\frac{t - \tau}{A_1} = \frac{T}{\pi ab} \quad (2.22)$$

donde T es el periodo, t el instante en el cual el vehículo se encuentra en un punto arbitrario P , y τ es el instante en el cual, el vehículo pasa por el periapsis. La única cantidad que se desconoce es el área A_1 .

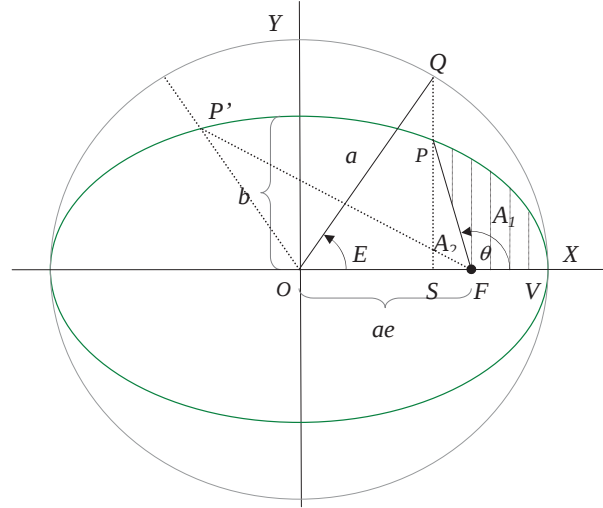


Figura 2.4. Anomalía Excéntrica

Una razón círculo-elipse que se obtiene de las ecuaciones canónicas de ambas cónicas es: $ay_{\text{elipse}} = by_{\text{círculo}}$. Empleando esta razón se obtiene la altura del triángulo formado por PSF que es: $\frac{b}{a}(a \text{ Sen } E)$ y la base: $a(e - \text{Cos } E)$ entonces, el área A_2 es:

$$A_2 = \frac{ab}{2}(e \text{ Sen } E - \text{Cos } E \text{ Sen } E) \quad (2.23)$$

La razón círculo-elipse, también nos permite expresar el área de la sección elíptica PSV_{SE} como, $A(PSV_{SE}) = (b/a)A(QSV_{SC})$, donde $A(QSV_{SC}) = A(QOV_{SC}) - A(\triangle QOS)$. Por propiedades de la circunferencia, $A(QOV_{SC}) = a^2 E/2$, donde E (La Anomalía excéntrica) está dada en radianes. Por lo tanto, si el triángulo QOS tiene como base: $a \text{ Cos } E$ y altura: $a \text{ Sen } E$, es posible calcular $A(QSV_{SC})$ y con eso obtener:

$$A(PSV_{SE}) = \frac{ab}{2}(E - \text{Cos } E \text{ Sen } E) \quad (2.24)$$

Así, al combinar la ecuación $A_1 = A(PSV_{SE}) - A_2$ con las ecuaciones (2.23) y (2.24) se obtiene:

$$A_1 = \frac{ab}{2}(E - e \text{ Sen } E) \quad (2.25)$$

Finalmente, sustituyendo esta ecuación en la razón (2.22), introduciendo la definición de anomalía principal, $M \doteq E - e \text{ Sen } E$ y la definición del movimiento principal, $n^2 \doteq \mu/a^3$ así como el uso de la tercera ley de Kepler (2.20), se obtiene^[2] la llamada Ecuación de Kepler:

$$M \doteq n(t - \tau) = E - e \text{ Sen } E \quad (2.26)$$

De modo general, supongamos que se desea conocer el tiempo que tarda el vehículo en recorrer el arco $\widehat{PP'}$. Esto implica dos tiempos y dos anomalías excéntricas E y E' tales que $t' - t = (t' - \tau) - (t - \tau)$. Por otro lado, si se desea conocer el tiempo que tarda en recorrer el arco $\widehat{P'P}$ (pasando por el PE), tendríamos $t' - t = 2k\pi + (t' - \tau) - (t - \tau)$ con k el número de veces que el vehículo pasa por el PE en el trayecto de θ a θ' . De este modo, la ecuación (2.26) queda:

$$\Delta M = M' - M = n(t' - t) = 2k\pi + E' - E - e(\text{Sen } E' - \text{Sen } E) \quad (2.27)$$

De la figura 2.4 se tiene $\text{Cos } E = (ae + r \text{ Cos } \theta)/a$, y expresando r en términos de a , e y θ mediante las ecuaciones (2.8) y (2.13) es posible obtener:

$$\text{Cos } E = \frac{e + \text{Cos } \theta}{1 + e \text{ Cos } \theta} \quad (2.28)$$

$$\text{Sen } E = \frac{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 E}}{1 + e \text{ Cos } \theta} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \text{ Sen } \theta}{1 + e \text{ Cos } \theta} \quad (2.29)$$

Usando la identidad trigonométrica $\text{Tan } \frac{E}{2} = (\text{Sen } \frac{E}{2}) / (1 + \text{Cos } \frac{E}{2})$, así como las ecuaciones (2.28) y (2.29) es se obtiene la relación^[9] entre las anomalías excéntrica y verdadera:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.30)$$

Otra expresión útil se obtiene resolviendo $1+e \cos \theta$ de la ecuación de las cónicas (2.28) y sustituyéndola en la ecuación (2.8) para obtener:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.31)$$

Algo importante por mencionar es que la ecuación (2.26) es trascendental en E , y no es posible obtener solución analítica. Para ello se requiere de una aproximación numérica empleando expansiones en serie de Taylor^[15] de la forma funcional:

$$f(E, e, M) = E - e \sin E - M \quad (2.32)$$

dadas por:

$$f(E + \Delta E) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(E) \frac{(\Delta E)^k}{k!} \quad (2.33)$$

donde $f^{(k)}$ es la k -ésima derivada de f . Cuando esta serie es aproximada por un número finito de términos, la precisión de la aproximación depende del tamaño de la partición ΔE a la vez que también, del número de términos retenidos. Así, reteniendo únicamente los dos primeros términos, los resultados de la aproximación de Newton están dados por: $f(E + \Delta E) \approx f(E) + f'(\Delta E)$, o bien de forma recursiva:

$$f(E_k + \Delta E_k) = f(E_k) + f'(E_k)(\Delta E_k) \quad (2.34)$$

donde, $\Delta E_k = E_k - E_{k-1}$, para $k \in \mathbb{N}$. Dado $M = n(t - \tau)$, se elige algún valor inicial de prueba para E_0 . Se sugiere^[9] $E_0 = M + e \sin M$, o bien, por método gráfico dividiendo la ecuación (2.26), en dos partes $y_1 = y_2$ tales que $y_1(E_0) = \sin E_0$, y $y_2(E_0) = (E_0 - M)/e$, y cuya intersección de ambas gráficas proporcione dicha estimación. En seguida se calcula

el cambio requerido en E de modo que $f(E + \Delta E) \approx 0$ en la ecuación (2.34), y al ser resuelta^[11] para E_k se tiene la solución de forma recursiva:

$$E_k = E_{k-1} - \frac{f(E_{k-1})}{f'(E_{k-1})} = \frac{e(\text{Sen } E_{k-1} - E_{k-1} \text{ Cos } E_{k-1}) + M}{1 - e \text{ Cos } E_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

Después, cada una de estas E_i se utilizan para calcular $f(E_i)$ donde, dado un número pequeño $\varepsilon > 0$ y real (tolerancia), se habrá de cumplir que $f(E_i) \leq \varepsilon$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. De lo contrario, E_i se actualiza a E_{i+1} mediante la fórmula (2.35). Dicho proceso constituye el llamado: método de Newton^[15].

2.1.5. Expansiones en Serie para Órbitas Elípticas.

Muchas de las soluciones en problemas de trayectorias, pueden simplificarse en gran manera al utilizar ciertas aproximaciones de los parámetros involucrados. La ecuación de Kepler (2.26) puede ser escrita como una expansión en series de potencias de excentricidad^[12]:

$$E = M + e \text{ Sen } E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\text{Sen}^n M) \quad (2.36)$$

por lo tanto:

$$\text{Sen } E = \frac{E - M}{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\text{Sen}^n M) \quad (2.37)$$

Para encontrar la expansión en serie tal como en la ecuación (2.37) pero para $\text{Cos } E$, se requiere de la siguiente integral auxiliar I_{aux} definida por la ecuación (2.36) como:

$$I_{aux} \doteq - \int (E - M) dM = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\text{Sen}^n M) \quad (2.38)$$

Además:

$$\begin{aligned}
I_{aux} &= - \int (E - M) dM = - \int e \operatorname{Sen} E dM \\
&= -e \int \left[\operatorname{Sen} E - \frac{e}{2} \operatorname{Sen}(2E) \right] dE = c + e \operatorname{Cos} E - \frac{e^2}{4} \operatorname{Cos}(2E)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Integrando las ecuaciones (2.38) y (2.39) e igualando una con la otra se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{e^2}{4} \right) dM = \int_0^{2\pi} \left[c - \frac{e^2}{2} + \left(e - ec + \frac{e^3}{8} \right) \operatorname{Cos} E - \frac{3e^2}{4} \operatorname{Cos}(2E) + \frac{e^3}{8} \operatorname{Cos}(3E) \right] dE \tag{2.40}$$

Como la integral de cosenos es cero, se tiene $c = e^2/4$. Por lo tanto, la función integral auxiliar es:

$$I_{aux} = e \operatorname{Cos} E + \frac{e^2}{4} [1 - \operatorname{Cos}(2E)] \tag{2.41}$$

Por otro lado, la derivada de E con respecto a e es calculada usando el jacobiano:

$$\frac{dE}{de} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial e}}{\frac{\partial f}{\partial E}} = \frac{\operatorname{Sen} E}{1 - e \operatorname{Cos} E} \tag{2.42}$$

donde f está dada por la ecuación (2.32). Derivando la expresión (2.41) respecto a e :

$$\frac{dI_{aux}}{de} = \operatorname{Cos} E + \frac{e}{2} - \frac{e}{2} \operatorname{Cos}(2E) + e (\operatorname{Sen} E) \frac{dE}{de} + \frac{e^2}{2} [\operatorname{Sen}(2E)] \frac{dE}{de} \tag{2.43}$$

Combinando las ecuaciones (2.42) y (2.43), agrupando y acomodando los términos se obtiene: $\frac{dI_{aux}}{de} = \operatorname{Cos} E$ que al ser sustituida en la ecuación (2.38):

$$\operatorname{Cos} E = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\operatorname{Sen}^n M) \tag{2.44}$$

Nótese que $\frac{d^{-1}}{dM^{-1}}(F) = \int (F) dM$, y que $\frac{d^0}{dM^0}(F) = F$. Por otro lado, combinando las ecuaciones (2.31) y (2.44):

$$\frac{r}{a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\text{Sen}^n M) \quad (2.45)$$

resolviendo para r/a de la ecuación (2.31), elevando al cuadrado y comparando los términos ya desarrollados con la ecuación (2.41), $(r/a)^2 = 1 + e^2 - 2I_{aux}$, e inmediatamente de la ecuación (2.38) es posible obtener:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + e^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\text{Sen}^n M) \quad (2.46)$$

Luego, de la ecuación (2.32):

$$\frac{dE}{dM} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial M}}{\frac{\partial f}{\partial E}} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r} \quad (2.47)$$

Más aún, combinando las ecuaciones (2.36) y (2.47):

$$\frac{r}{a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^n}{dM^n} (\text{Sen}^n M) \quad (2.48)$$

Además, se sabe que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos E - e \\ \frac{y}{a} &= \sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \quad (2.49)$$

Luego, al combinar las ecuaciones (2.49), (2.44) y (2.37):

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= -e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\text{Sen}^n M) \\ \frac{y}{a} &= \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\text{Sen}^n M) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por lo tanto, las relaciones entre la anomalía verdadera θ y la anomalía excéntrica E son:

$$\begin{aligned}\text{Sen } \theta &= \frac{\sqrt{1-e^2} \text{ Sen } E}{1-e \text{ Cos } E} = \sqrt{1-e^2} \frac{dE}{de} \\ \text{Cos } \theta &= \frac{\text{Cos } E - e}{1-e \text{ Cos } E} = -\frac{d}{de} \left(\frac{r}{a} \right)\end{aligned}\quad (2.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.42), (2.48) y (2.36) en las ecuaciones (2.51), se llega a:

$$\begin{aligned}\text{Sen } \theta &= \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\text{Sen}^n M) \\ \text{Cos } \theta &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dM^{n-2}} (\text{Sen}^n M)\end{aligned}\quad (2.52)$$

Reteniendo un número finito de términos, se deduce de las ecuaciones (2.51) que^[12]:

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \text{ Cos } E)^2} = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (2.53)$$

2.2. Elementos Orbitales

a	Semieje Mayor
e	Excentricidad
ω	Argumento del Periapsis
τ	Tiempo del paso por el periapsis
i	Inclinación
Ω	Longitud del nodo de Ascenso

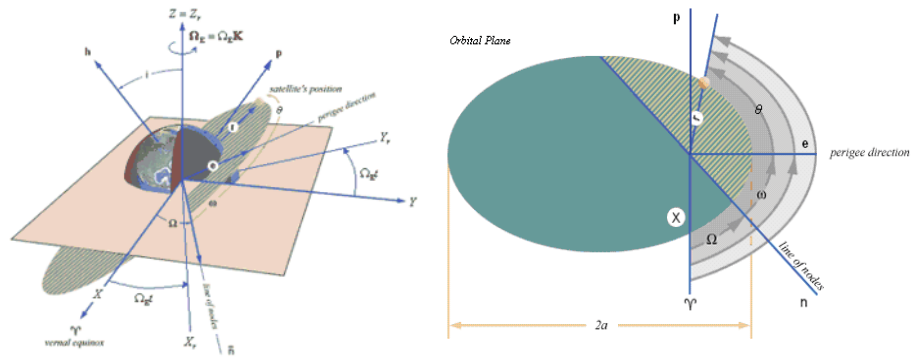


Figura 2.5. Elementos Orbitales vistos desde dos perspectivas

Existen 6 cantidades escalares llamadas elementos orbitales (EO) que determinan la configuración tridimensional orbital, (Fig. 2.5). Estos suelen variar ligeramente debido a la forma irregular de la tierra. Para describirlas se emplea el sistema rectangular Perifocal ($\mathbf{e} = e\mathbf{i}_e, \mathbf{p} = p\mathbf{i}_p, \mathbf{h} = h\mathbf{i}_h$) que a su vez está dado de acuerdo al plano fundamental (XY) del sistema Geocéntrico ($X = x\mathbf{I}, Y = y\mathbf{J}, Z = z\mathbf{K}$) que es fijo respecto a las estrellas, y cuyo eje positivo X , apunta en dirección de la constelación de Aries (Equinoccio vernal). Dado que la tierra gira con una velocidad angular $\Omega_E = \omega_E/t$, se define el sistema Geocéntrico Giratorio ($X_r = x\mathbf{I}_r, Y_r = y\mathbf{J}_r, Z = z\mathbf{K}_r$) que se obtiene al girar el sistema geocéntrico inercial un ángulo positivo ω_E .

Otros elementos orbitales adicionales que suelen emplearse son también^[2]: Longitud del perigeo $\Pi = \Omega + \omega$; Anomalía verdadera a una época θ (aparece como funcional de r en la ecuación (2.8)); Argumento de latitud instantáneo $u = \omega + \theta$ y longitud verdadera instantánea: $\ell = \Omega + \omega + \theta = \Pi + \theta = \Omega + u$. El tiempo de paso del PE, fue introducido ya en la ecuación (2.22). Nótese que en órbitas circulares ($e = 0$), ω y τ quedan indeterminados pues en este caso, no hay punto del PE ni de AP, además si dichas órbitas son ecuatoriales ($i = 0^\circ$ o 180°) entonces Ω tampoco está definido, ya que no hay ningún nodo o punto de transito por el ecuador.

2.2.1. Ángulos de Euler

Las transformaciones de coordenadas más simples, se realizan mediante rotaciones (positivas o negativas) alrededor de los ejes de cualquier sistema de coordenadas rectangulares. Estas se llaman, rotaciones elementales y se requieren al menos tres de ellas para generar una transformación completa^[24].

Sea $\hat{\mathbf{R}}$ un vector unitario en un sistema de coordenadas rectangular $S(OXYZ)$. Luego, una rotación φ de S alrededor del eje OX , genera un nuevo sistema $S'(OX'Y'Z')$ al igual que un nuevo vector unitario $\hat{\mathbf{R}}'$ cuya relación con el primero es:

$$\hat{\mathbf{R}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}' \\ \mathbf{J}' \\ \mathbf{K}' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_1(\varphi) \hat{\mathbf{R}} \quad (2.54)$$

Una segunda rotación ϑ de S' alrededor del eje OY' , genera otro sistema S'' al igual que otro vector unitario dado por:

$$\hat{\mathbf{R}}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}'' \\ \mathbf{J}'' \\ \mathbf{K}'' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}' \\ \mathbf{J}' \\ \mathbf{K}' \end{pmatrix} = \mathbf{C}_2(\vartheta) \hat{\mathbf{R}}' \quad (2.55)$$

Finalmente, la tercera rotación positiva ψ de S'' alrededor del eje OZ'' genera otro sistema S''' y otro vector unitario:

$$\hat{\mathbf{R}}''' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}''' \\ \mathbf{J}''' \\ \mathbf{K}''' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}'' \\ \mathbf{J}'' \\ \mathbf{K}'' \end{pmatrix} = \mathbf{C}_3(\psi) \hat{\mathbf{R}}'' \quad (2.56)$$

Combinando las tres transformaciones y aplicando producto matricial se tiene:

$$\hat{\mathbf{R}}''' \doteq \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} C\psi C\vartheta & S\psi C\phi + C\psi S\vartheta S\phi & S\psi S\phi - C\psi S\vartheta C\phi \\ -S\psi C\vartheta & C\psi C\phi - S\psi S\vartheta S\phi & C\psi S\phi + S\psi S\vartheta C\phi \\ S\vartheta & -C\vartheta S\phi & C\vartheta C\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

donde $C\psi = \cos \psi$, $S\phi = \sin \phi$, etc.

Nótese que en la ecuación (2.57) se ha definido una matriz de rotación cuya secuencia es del tipo $\mathbf{C}_{ijk}$ con $(i-j-k) = (1-2-3)$. En total hay 6 posibilidades (Tabla 2.2). Los índices que obedecen estas secuencias se dice que son cíclicos, y las matrices que los cumplen son asimétricas. En cambio, cuando se repite al menos un índice por ejemplo $(i-j-i)$, entonces se dice que son simétricas. También de estos hay 6 posibilidades en total.

	1-2-1	1-3-1
Simétricas	2-3-2	2-1-2
	3-1-3	3-2-3
	1-2-3	1-3-2
Asimétricas	2-3-1	2-1-3
	3-1-2	3-2-1

Tabla 2.2. Secuencias de índices

Defínase ahora:

$$\alpha_{ij} \doteq \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \text{ tal que } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{para } j, \text{ sucesor cíclico de } i \\ -1, & \text{para } i, \text{ sucesor cíclico de } j \\ 0, & \text{índices repetidos.} \end{cases} \quad (2.58)$$

De modo general, las matrices de rotaciones simétricas y asimétricas quedan determinadas respectivamente por^[19]:

$$\mathbf{C}_{iji} = \begin{matrix} & i & j & k \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} C\vartheta & S\vartheta S\varphi & -\alpha_{ij}S\vartheta C\varphi \\ S\psi S\vartheta & C\psi C\varphi - S\psi C\vartheta S\varphi & \alpha_{ij}(C\psi S\varphi + S\psi C\vartheta C\varphi) \\ \alpha_{ij}C\psi S\vartheta & -\alpha_{ij}(S\psi C\varphi + C\psi C\vartheta S\varphi) & -S\psi S\varphi + C\psi C\vartheta C\varphi \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.59)$$

y

$$\mathbf{C}_{ijk} = \begin{matrix} & i & j & k \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} C\psi C\vartheta & \alpha_{ij}S\psi C\varphi + C\psi S\vartheta S\varphi & S\psi S\varphi - \alpha_{ij}C\psi S\vartheta C\varphi \\ -\alpha_{ij}S\psi C\vartheta & C\psi C\varphi - \alpha_{ij}S\psi S\vartheta S\varphi & \alpha_{ij}C\psi S\varphi + S\psi S\vartheta C\varphi \\ \alpha_{ij}S\vartheta & -\alpha_{ij}C\vartheta S\varphi & C\vartheta C\varphi \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.60)$$

donde $\mathbf{C}_{ijk} = \mathbf{C}_{ijk}(\varphi, \vartheta, \psi) = \mathbf{C}_k(\psi)\mathbf{C}_j(\vartheta)\mathbf{C}_i(\varphi)$ y $\mathbf{C}_{iji} = \mathbf{C}_{iji}(\varphi, \vartheta, \psi) = \mathbf{C}_i(\psi)\mathbf{C}_j(\vartheta)\mathbf{C}_i(\varphi)$. Estas constituyen todas las formas posibles para generar matrices de rotaciones completas con fines prácticos.

Dados los elementos $c_{pq} \in \mathbb{R}$ con entradas en $(p, q) \in (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\})$, de las ecuaciones (2.59) y (2.60), es posible determinar los ángulos de Euler mediante las funciones inversas:

$$\vartheta_s = \text{Arccos } c_{ii} \quad \psi_s = \text{Arctan } \frac{c_{ji}}{c_{ki}} \quad \varphi_s = \text{Arctan } \frac{c_{ij}}{c_{ik}} \quad (2.61)$$

$$\vartheta_a = \text{Arccos } c_{ki} \quad \psi_a = \text{Arctan } \frac{c_{ji}}{c_{ii}} \quad \varphi_a = \text{Arctan } \frac{c_{kj}}{c_{kk}} \quad (2.62)$$

donde los subíndices s y a denotan los casos de simétricas y asimétricas respectivamente. Sin embargo, nótese que para las simétricas, dos ángulos quedan indeterminados para $\vartheta = \pm n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, mientras que para las asimétricas lo son para $\vartheta = \pm n\pi/2$, $n \in \mathbb{N}$. Estas singularidades son evitadas aplicando técnicas que serán dadas posteriormente.

2.2.2. Determinación Orbital de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ a partir de los EO.

Sea $\hat{\mathbf{R}}$ un vector unitario en el sistema geocéntrico (XYZ), y sea $\hat{\mathbf{r}}_p$ el mismo vector en el sistema perifocal ($\mathbf{eph}$). La relación entre ambos vectores está dada por la matriz de transformación $\mathbf{C}_{(pG)} = \mathbf{C}_3(-\Omega)\mathbf{C}_1(-i)\mathbf{C}_3(-\omega)$ que es simétrica con singularidades $i = \pm n\pi$ (órbitas ecuatoriales) con $n \in \mathbb{N}$. Así, por la ecuación (2.59):

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} C\Omega C\omega - S\Omega S\omega Ci & -C\Omega S\omega - S\Omega C\omega Ci & S\Omega Si \\ S\Omega C\omega + C\Omega s\omega Ci & -S\Omega S\omega + C\Omega C\omega Ci & -C\Omega Si \\ S\omega Si & C\omega Si & Ci \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_h \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{(pG)} \hat{\mathbf{r}}_p \quad (2.63)$$

Supóngase que se conocen los EO (a , e , i , ω , Ω y τ). Sean $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ los vectores de estado del vehículo en el sistema perifocal. El vector de posición puede expresarse en este sistema usando coordenadas polares: $\mathbf{r} = (r \cos \theta) \mathbf{i}_e + (r \sin \theta) \mathbf{i}_p$ (Fig. 2.5). Para la velocidad, en términos del sistema horizontal está dada por: $\mathbf{v}_l = (v \sin \phi) \mathbf{i}_r + (v \cos \phi) \mathbf{i}_\phi$. Para expresarla en el sistema perifocal basta emplear la transformación $\mathbf{v} = \mathbf{C}_3(-\theta) \mathbf{v}_l$ donde $\mathbf{C}_3$ está dada como en la ecuación (2.56), para $\psi = -\theta$. De este modo, los vectores de estado^[9] expresados en forma matricial son:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ v(\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta) & v(\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Combinando las ecuaciones (2.8), (2.13) y (2.4) se obtiene resolviendo para $\cos \phi$:

$$\cos \phi = \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{h v} \quad (2.65)$$

La velocidad radial se define como la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.8) a la vez que también, como la componente radial de $\mathbf{v}_l$, de manera que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ep \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{ep \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{h}{r^2} = v \sin \phi \quad (2.66)$$

Por lo tanto:

$$\sin \phi = \frac{\mu e \sin \theta}{h v} \quad (2.67)$$

El cociente de las ecuaciones (2.65) y (2.67) determinan el ángulo de trayectoria de vuelo en términos de la anomalía verdadera:

$$\phi = \text{Arctan} \left(\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{re \sin \theta}{p} \right) \quad (2.68)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.65) y (2.67) en la ecuación (2.64) para $\mathbf{v}$ se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

La misma expresión para la velocidad en el sistema perifocal en términos de E se puede obtener al sacar la derivada del vector de posición $\mathbf{r}$, que a su vez requiere también de la ecuación (2.66) y recordando que:

$$h = r^2 \dot{\theta}(t) = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (2.70)$$

Resolviendo para $\text{Cos } \theta$ y $\text{Sen } \theta$ de las ecuaciones (2.28) y (2.29) respectivamente y utilizando las expresiones (2.31) y (2.13) se llega a:

$$\text{Cos } \theta = \frac{a(\text{Cos } E - e)}{r} \quad \text{Sen } \theta = \frac{\sqrt{pa} \text{ Sen } E}{r} \quad (2.71)$$

Sustituyendo lo anterior en las entradas de la ecuación (2.69):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a(\text{Cos } E - e) & \sqrt{ap} \text{ Sen } E \\ -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \text{ Sen } E & \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \text{ Cos } E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Hasta entonces en la expresión (2.72), se involucran ya los elementos a , e y τ . Este último se encuentra de modo implícito en E que es la solución numérica de la ecuación (2.26). Los EO restantes i , ω y Ω quedan determinados una vez que se realiza la transformación de coordenadas de los vectores de estado de la ecuación (2.72), al sistema geocéntrico inercial: $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\} \rightarrow \{\mathbf{R}, \mathbf{V}\}$ dado por la ecuación (2.63):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{(pG)} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{(pG)} \begin{pmatrix} a(\text{Cos } E - e) & \sqrt{ap} \text{ Sen } E \\ -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \text{ Sen } E & \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \text{ Cos } E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Más aún, considerando la rotación de la tierra con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_E = \Omega_E \mathbf{K}$, es posible relacionar también mediante ángulos de Euler, las coordenadas del sistema geocéntrico fijo con las del geocéntrico giratorio $\mathbf{R}_r$ el cual es fijo con respecto a algún punto sobre la superficie de la tierra, de modo que:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_r \\ \mathbf{V}_r \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{Gr} \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{Gr} \mathbf{C}_{(pG)} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{Gr} \mathbf{C}_{(pG)} \begin{pmatrix} a(\text{Cos } E - e) & \sqrt{ap} \text{ Sen } E \\ -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \text{ Sen } E & \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \text{ Cos } E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

donde $\{\mathbf{R}_r, \mathbf{V}_r\}$ son los vectores de estado en el sistema geocéntrico giratorio y la matriz de transformación está dada también por la ecuación (2.56), donde: $\psi = \Omega_E t = \omega_E$.

El valor de Ω_E , se define como la razón angular que la tierra tarda en dar una vuelta completa respecto a las estrellas distantes en un tiempo dado t . Dicho tiempo se llama día sideral principal y es igual a: 23h 56m 4.1s^[2]. Así, $\Omega_E = \frac{2\pi}{T} = 7.29211 \times 10^{-5}$ rad/s. Este tiempo es distinto al día solar principal el cual tiene una duración de 24 h, pues se mide respecto al sol.

2.2.3. Determinación Orbital de los EO a partir de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$.

Recíprocamente, supóngase que se conocen los vectores de estado en el sistema perifocal $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ en un instante de tiempo t , y se desea obtener la configuración de una órbita dada por los EO $(a, e, i, \omega, \tau, \Omega)$. El vector $\mathbf{h} = h_I \mathbf{I} + h_J \mathbf{J} + h_K \mathbf{K}$ es perpendicular a los vectores de estado dados por la ecuación (2.64), y de ahí que lo sea también del plano orbital. Luego, en el sistema geocéntrico, el vector $\mathbf{K}$ es perpendicular al plano ecuatorial, de modo que la línea que interseca el plano ecuatorial y el orbital, define un vector nodal $\mathbf{n}$ (Fig. 2.5), cuya dirección apunta hacia el nodo de ascenso NA (punto de la órbita que pasa del hemisferio sur al norte de acuerdo al plano ecuatorial), mientras que su negativo $-\mathbf{n}$ apunta en dirección del nodo de descenso ND (análogo al NA). Además, este vector resulta perpendicular tanto a $\mathbf{K}$ como a $\mathbf{h}$, así que:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{K} \times \mathbf{h}|} = \frac{-h_J \mathbf{I} + h_I \mathbf{J}}{|-h_J \mathbf{I} + h_I \mathbf{J}|} = n_I \mathbf{I} + n_J \mathbf{J} \quad (2.75)$$

En el sistema geocéntrico, en coordenadas polares éste vector es: $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{I} \cos \Omega + \mathbf{J} \sin \Omega$, que al compararla con la expresión (2.75) se tiene que: $n_I = \cos \Omega$ y $n_J = \sin \Omega$, permitiendo

así identificar el cuadrante del sistema geocéntrico en el cual se encuentra el NA evitando alguna ambigüedad, (Tabla 2.3).

Cuadrante	Arcsen(n_J)	Arccos(n_I)
I ($n_I > 0$ y $n_J > 0$)	Ω	Ω
II ($n_I < 0$ y $n_J > 0$)	$\Pi - \Omega$	Ω
III ($n_I < 0$ y $n_J < 0$)	$\Pi - \Omega$	$2\pi - \Omega$
IV ($n_I > 0$ y $n_J < 0$)	$2\pi - \Omega$	$2\pi + \Omega$

Tabla 2.3. Cuadrantes para Ω (rads)

La inclinación i se obtiene directamente sabiendo que es el ángulo formado por los dos vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{K}$, así:

$$i = \text{Arccos}\left(\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{h}}{h}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{h_K}{h}\right) \quad 0 \leq i \leq \pi \quad (2.76)$$

El valor de la excentricidad e se obtiene mediante la ecuación (2.10), de la cual simplemente $e = |\mathbf{e}|$. El semieje mayor a se obtiene empleando el resultado anterior, usando la ecuación (2.13) de modo que $a = h^2(1 - e^2)/\mu$.

Sean $\mathbf{i}_e = \mathbf{e}/e$ e $\mathbf{i}_h = \mathbf{h}/h$ los vectores unitarios de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$ respectivamente. Dado que el argumento del periapsis ω , es el ángulo formado por los dos vectores unitarios anteriores (Fig. 2.5), tenemos que las dos expresiones que permiten definirlo evitando las mismas ambigüedades presentadas para el argumento del periapsis y cuyas reglas de obtención siguen el mismo patrón presentado anteriormente (Tabla 2.3). Estas son:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_e \\ \sin \omega &= \mathbf{i}_h \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Para determinar el tiempo del paso por el periapsis τ , se recurre a la ecuación (2.31) de la cual se resuelve para E y se sustituye en la anomalía principal dada por la ecuación (2.26), y al ser resuelta para τ se tiene:

$$\tau = t + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} e \sin E \quad (2.78)$$

donde t es el instante en el cual son observados los vectores de estado.

2.2.4. Recursividad predictiva orbital

Sean $\{\mathbf{r}_0(r_0, \theta_0), \mathbf{v}_0(\theta_0)\}$ los vectores de estado en un instante (inicial) dados por la ecuación (2.69). Dado que la matriz es cuadrada y no singular (su determinante es h), es posible invertirla:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}(e + \cos \theta_0) & -\frac{r_0}{h} \sin \theta_0 \\ \frac{1}{p} \sin \theta_0 & \frac{r_0}{h}(e + \cos \theta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

de modo que al ser sustituida en la expresión (2.69) y aplicando producto matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ \dot{f} & \dot{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \doteq \Phi(t, t_0) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

donde,

$$\begin{aligned} f &\doteq 1 + \frac{r}{p} [\cos(\theta - \theta_0) - 1] \\ g &\doteq \frac{rr_0}{h} \sin(\theta - \theta_0) \\ \dot{f} &\doteq \frac{df}{dt} = -\frac{h}{p^2} [\sin(\theta - \theta_0) + e(\sin \theta - \sin \theta_0)] \\ \dot{g} &\doteq \frac{dg}{dt} = 1 + \frac{r_0}{p} [\cos(\theta - \theta_0) - 1] \end{aligned} \quad (2.81)$$

a f y g así como sus derivadas son llamados, coeficientes de Lagrange^{[9][2]}.

La ecuación (2.80) puede ser empleada de forma recursiva en la obtención de trayectorias (dados e, μ, h y $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0\}$) para k instantes de tiempo, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} f_k & g_k \\ \dot{f}_k & \dot{g}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{k-1} \\ \mathbf{v}_{k-1} \end{pmatrix} \doteq \Phi(t_k, t_{k-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{k-1} \\ \mathbf{v}_{k-1} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

donde ahora, los coeficientes de lagrange quedan determinados por (2.81) de acuerdo a los parámetros $\{r_{k-1}, r_k, \theta_{k-1}, \theta_k\}$, para $k \in \mathbb{N}$.

La matriz Φ de (2.80) se llama “de transición^[9]”, y tiene las siguientes propiedades:

1.- Por conservación del momento angular $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (f \dot{g} - g \dot{f}) \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ entonces:

$$|\Phi| = f \dot{g} - g \dot{f} = 1 \quad (2.83)$$

Una consecuencia de esto es que (Φ es simpléctica) la inversa de la matriz es:

$$\Phi^{-1} \doteq \begin{pmatrix} \dot{g} & -g \\ -\dot{f} & f \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

2.- Dados cualesquiera tres instantes en la trayectoria (t_0, t_1, t_2) , se cumple que:

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad (2.85)$$

2.2.5. Razones de Cambio en los EO

Toda trayectoria orbital de algún satélite se verá afectada en sus EO, los cuales, presentaran variaciones debidas a alguna fuerza perturbativa como puede ser, algún impulso breve, ligeras fricciones con la atmósfera (órbitas muy bajas), forma irregular de la tierra, etc.

Sean $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{W}$ los vectores unitarios de un sistema perifocal girado un ángulo θ . Esto es, el vector $\mathbf{R}$ apunta en dirección de la posición actual del satélite, $\mathbf{S}$ está a 90° respecto de $\mathbf{R}$ en dirección positiva de θ , y $\mathbf{W}$ es perpendicular a $\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ en dirección de $\mathbf{h}$. De este modo, sea $\mathbf{F} = m(F_r \mathbf{R} + F_s \mathbf{S} + F_w \mathbf{W})$ el vector de fuerza perturbativa aplicada al satélite de masa m en el sistema RSW con sus componentes de fuerza específica respectivas. Nótese además, los vectores de posición y velocidad del vehículo en dicho sistema son respectivamente $\mathbf{r} = r\mathbf{R}$ y

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{R} + r\dot{\theta}\mathbf{S} = \dot{\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \mathbf{R} + r\mathbf{S} \right) \quad (2.86)$$

2.2.5.1. Razones $\dot{a}$ y $\dot{e}$.

Resolviendo para a de la ecuación (2.18), y derivando:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (2.87)$$

Sin embargo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \dot{\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} F_r + r F_s \right) = \frac{na^2}{r} \left(\frac{e \operatorname{Sen} \theta}{1 + e \operatorname{Cos} \theta} F_r + F_s \right) \quad (2.88)$$

de donde, se ha calculado el producto punto de $\mathbf{F}$ por la ecuación (2.86), y además se ha sustituido $\dot{\theta} = nr^{-2} a^2 (1 - e^2)^{1/2}$ de la expresión (2.70) dada en términos del movimiento principal n , así como la derivada de la ecuación (2.8). Combinando las ecuaciones (2.88) y (2.87), y simplificando:

$$\dot{a}(t) = \frac{da}{dt} = \frac{2e \operatorname{Sen} \theta}{n\sqrt{1 - e^2}} F_r + \frac{2a\sqrt{1 - e^2}}{nr} F_s \quad (2.89)$$

De acuerdo a la expresión (2.13), $e = (1 - p/a)^{1/2} = (1 - h^2/\mu a)^{1/2}$, al ser diferenciada:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{h}{2\mu a e} \left(2 \frac{dh}{dt} - \frac{h}{a} \frac{da}{dt} \right) = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{2nea^2} \left(2 \frac{dh}{dt} - na\sqrt{1 - e^2} \frac{da}{dt} \right) \quad (2.90)$$

Sin embargo:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{dh}{dt} \mathbf{W} + h \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{S} = \frac{1}{m} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = r (F_s \mathbf{W} - F_r \mathbf{S}) \quad (2.91)$$

donde el segundo miembro se obtiene de suponer que $d\alpha$ es el ángulo a través del cual el vector del momento angular es girado durante un instante dt , mientras que el último se obtiene de la definición de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{r}$ dadas anteriormente.

Por lo tanto, se observa que $\frac{dh}{dt} = rF_s$. Sustituyendo esto en la ecuación (2.90), al igual que en la ecuación (2.89) se tiene:

$$\dot{e}(t) = \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2} \text{ Sen } \theta}{na} F_r + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} \left[\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r \right] F_s \quad (2.92)$$

2.2.5.2. Razones $\dot{i}$ y $\dot{\Omega}$.

El movimiento del nodo $\mathbf{n}$ es el mismo que se presenta en el movimiento de la proyección de $\mathbf{h}$ en el plano ecuatorial^[11], (Fig. 2.6). De este modo, sea $\mathbf{h}_p$ la proyección de $\mathbf{h}$ en el plano ecuatorial, $(d\mathbf{h}/dt)_p$ la proyección de $d\mathbf{h}/dt$ en el plano ecuatorial, y $\hat{\mathbf{h}}_p \times (d\mathbf{h}/dt)_p = (\mathbf{h}_p/h_p) \times (d\mathbf{h}/dt)_p$ la componente de $(d\mathbf{h}/dt)_p$ que es normal a $\mathbf{h}_p$ (Fig. 2.6.).

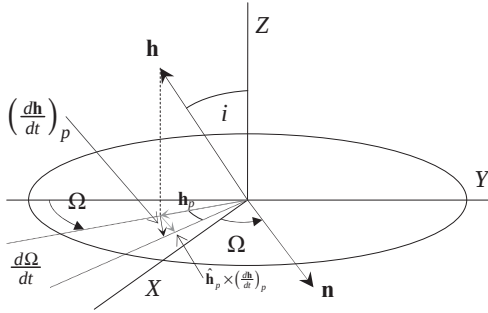


Fig. 2.6. Proyección del Momento angular

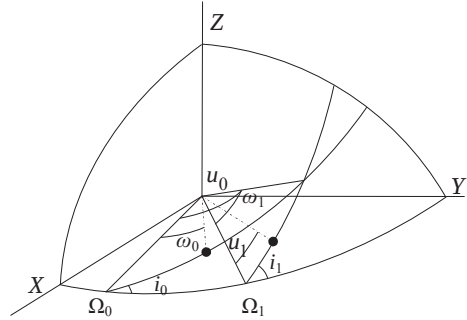


Fig. 2.7. Relación entre i y Ω

por lo tanto:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\left| \frac{\mathbf{h}_p}{h_p} \times \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} \right)_p \right|}{h_p} = \frac{\left| \mathbf{h}_p \times \left(h \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{S} \right)_p \right|}{h_p^2} \quad (2.93)$$

Sin embargo, aplicando transformaciones de coordenadas entre el sistema RSW, y el geocéntrico XYZ se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_p &= h(\mathbf{I} \text{Sen } \Omega - \mathbf{J} \text{Cos } \Omega) \text{Sen } i \\ \left(h \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{S} \right)_p &= -r\mathbf{W} \left[\mathbf{I}(-\text{Cos } u \text{Cos } i \text{Sen } \Omega - \text{Sen } u \text{Cos } \Omega) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{J}(-\text{Sen } u \text{Sen } \Omega + \text{Cos } u \text{Cos } i \text{Cos } \Omega) \right]\end{aligned}\quad (2.94)$$

donde $u = \omega + \Omega$ es el argumento de latitud instantáneo. Sustituyendo las ecuaciones (2.94) en la ecuación (2.93) y calculando el determinante del producto cruz:

$$\dot{\Omega}(t) = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{rF_w \text{Sen } u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{Sen } i} \quad (2.95)$$

Nótese que el cambio de la inclinación se relaciona también con el cambio de la longitud del nodo de ascenso (Fig. 2.7). Así, $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0$ y $\Delta i = i_1 - i_0$. Empleando trigonometría esférica^[A1]:

$$\text{Sen } \Delta i = \frac{\text{Sen } i_0}{\text{Sen } u_1} \left[\text{Cos } i_0 \text{Sen } u_0 (1 - \text{Cos } \Delta\Omega) + \text{Cos } u_0 \text{Sen } \Delta\Omega \right] \quad (2.96)$$

Diferenciando ambos lados, y haciendo $\Delta\Omega \rightarrow 0$, se tiene la relación entre i y Ω , así como la expresión final dada una vez que se incluye la expresión (2.95):

$$\dot{i}(t) = \frac{di}{dt} = \frac{\text{Sen } i}{\text{Sen } u} (\text{Cos } u) \frac{d\Omega}{dt} = \frac{rF_w \text{Cos } u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \quad (2.97)$$

2.2.5.3. Razones $\dot{\omega}$ y $\dot{\tau}$

El cambio en el argumento del periapsis, surge de dos formas. Una es el movimiento del perigeo causado por las fuerzas en el plano orbital que tienden a girar la elipse en su plano. El otro cambio ocurre debido a que ω es medido desde el nodo en movimiento, (Fig. 2.7). Para evaluar este último, se asume que las fuerzas perturbativas en el plano son cero. El cambio en ω también lo es en u . De acuerdo a la relación de triángulos esféricos

usando leyes de cosenos, $\cos u_1 = \cos \Delta\Omega \cos u_0 + \sin \Delta\Omega \sin u_0 \cos i_0$. Diferenciando y haciendo $\Delta\Omega \rightarrow 0$:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_w} = -(\cos i) \frac{d\Omega}{dt} = \frac{-r \sin u \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} F_w \quad (2.98)$$

donde el subíndice F_w significa que es el cambio en ω contribuido por el movimiento nodal causado por la componente de la aceleración perturbativa F_w/m que es normal al plano orbital. Las componentes rectangulares F_r y F_s en el plano cambian de modo instantáneo el vector de velocidad el cual, en cada instante permanece tangente a la órbita oscilante. Esta elipse tendrá por lo tanto, una posición del perigeo que cambia en el tiempo. La razón de cambio resultante en el argumento del periapsis será:

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_r, F_s} = \left(-\frac{d\theta}{dt} \right)_{F_r, F_s} \quad (2.99)$$

la cual, no habrá de confundirse con la razón de cambio de la anomalía verdadera $\dot{\theta}$ vista en la ecuación (2.70). Después de que la fuerza $m(F_r \mathbf{R} + F_s \mathbf{S})$ ha sido aplicada por un instante dt , el vector de velocidad habría cambiado de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (Fig. 2.8), la anomalía verdadera de θ a $\theta + d\theta$, y el ángulo ϕ a $\phi + d\phi$.

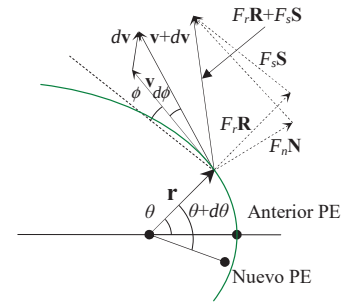


Fig. 2.8. Componentes de giro secular

Combinando la ecuación (2.4), en la componente de velocidad de la ecuación (2.3) y resolviendo para $\cos \phi$:

$$\cos \phi = \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.100)$$

Calculando la derivada del radical usando la ecuación (2.8) y sustituyéndola, en la derivada de la ecuación (2.100):

$$\text{Cos } \phi = \frac{1 + e \text{ Cos } \theta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta}}$$

y, por la identidad trigonométrica:

$$\text{Sen } \phi = \frac{e \text{ Sen } \theta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta}} \quad (2.101)$$

Diferenciando la ecuación (2.101) con respecto al tiempo y usando la relación (2.99) se tiene:

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_r, F_s} = \left[\frac{1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta}{e(e + \text{Cos } \theta)} \left(\frac{\text{Sen } \theta}{1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta} \frac{de}{dt} - \frac{d\phi}{dt} \right) \right] \quad (2.102)$$

Sea F_n la componente de la fuerza específica normal a $\mathbf{v}$. Entonces $d\phi = F_n dt / v$. Pero

$F_n = F_r \text{ Cos } \phi - F_s \text{ Sen } \phi$, y además $v = h\sqrt{1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta} / r(1 + e \text{ Cos } \theta)$, por lo tanto:

$$\frac{d\phi}{dt} = \left\{ \frac{r(1 + e \text{ Cos } \theta)}{h(1 + e^2 + 2e \text{ Cos } \theta)} \left[F_r(1 + e \text{ Cos } \theta) - F_s(e \text{ Sen } \theta) \right] \right\} \quad (2.103)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.103) y (2.92) en la ecuación (2.102) resulta:

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_r, F_s} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{nae} \left[-F_r \text{ Cos } \theta + F_s \text{ Sen } \theta \left(1 + \frac{1}{1 + e \text{ Cos } \theta} \right) \right] \quad (2.104)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.104) y (2.98) proporcionan la razón de cambio total de ω :

$$\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_s} + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{F_r, F_s} \quad (2.105)$$

También existe una razón de cambio en el tiempo, que se obtiene directamente de la ecuación de kepler. Sea $\sigma = M_0 = -n\tau = E - e \text{ Sen } E - nt$. Utilizando las razones $\dot{e}(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ ya obtenidas, junto con las ecuaciones (2.28) y (2.29) es posible llegar^[11] a:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \text{Cos } \theta \right) F_r - \frac{(1-e^2) \text{Sen } \theta}{nae} \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] F_s - t \frac{dn}{dt} \quad (2.106)$$

2.2.6. Perturbaciones Seculares de Primer Orden

En la práctica, los EO se consideran cantidades constantes. Sin embargo, existen ligeras variaciones en algunos de ellos debido a la forma abultada de la tierra. Estas son causadas por el potencial secular Ξ (§ 1.4). Expresando las componentes de $\mathbf{F}$ en su forma lagrangiana, $F_r = \frac{\partial \Xi}{\partial r}$, $F_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \Xi}{\partial \phi}$ y $F_w = \frac{1}{r \text{ Sen } \phi} \frac{\partial \Xi}{\partial i}$ se tienen^[11] las variaciones de los EO:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma} & \frac{dM}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial \Xi}{\partial a} - \frac{1-e^2}{nea^2} \frac{\partial \Xi}{\partial e} + n \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} \left[\sqrt{1-e^2} \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Xi}{\partial \omega} \right] & \frac{di}{dt} &= \frac{\text{Cos } i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{ Sen } i} \frac{\partial \Xi}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nea^2} \frac{\partial \Xi}{\partial e} - \frac{\text{Cot } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Xi}{\partial i} & \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{ Sen } i} \frac{\partial \Xi}{\partial i} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Luego, despreciando los términos con coeficientes J_n para $n > 2$ del potencial secular^[11],

$$\Xi = \frac{\mu}{r} \left[\frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \text{ Sen}^2 \delta - 1) \right] = \frac{\mu}{2} \left[\frac{J_2 R_e^2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (3 \text{ Sen}^2 i \text{ Sen}^2 u - 1) \right]$$

donde el segundo miembro incluye el semieje mayor a y de acuerdo a la trigonometría esférica empleada, su relación también con i y $u = \omega + \theta$. Sin embargo, la expresión $\text{Sen}^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos}(2u)$ tiene una parte no periódica, $\frac{1}{2}$. Luego, la parte $(a/r)^3$ puede ser evaluada de acuerdo a la serie^[12]:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \text{Cos}(kM) \quad (2.108)$$

donde, $c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (a/r)^k dM$, son funciones de excentricidad, tal como fueron vistas en la sección 2.1.5. Así, empleando la ecuación (2.53) en la ecuación (2.108) y reteniendo el primer término:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = \frac{1}{2\pi} (1-e^2)^{-3/2} \int_0^{2\pi} (1+e \text{Cos} \theta) d\theta = (1-e^2)^{-3/2} \quad (2.109)$$

por lo tanto:

$$\Xi = \frac{\mu}{2} \left[J_2 \frac{R^2}{a^3} (1-e^2)^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \text{Sen}^2 i \right) \right] \quad (2.110)$$

Sustituyendo el potencial secular dado por la ecuación (2.110) en las ecuaciones (2.107) se tiene por un lado que: $\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$, y además (en unidades rads/rev):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_e}{p} \right)^2 (5 \text{Cos}^2 i - 1) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_e}{p} \right)^2 \text{Cos} i \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{3}{4} J_2 n t \left(\frac{R_e}{p} \right)^2 \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{3}{2} \text{Sen}^2 i \right) \end{aligned} \quad (2.111)$$

La variación secular $d\Omega/dt$ se le llama: regresión nodal^[2], la cual indica que la línea de los nodos (y por lo tanto el vector nodal $\mathbf{n}$) gira en dirección opuesta a la velocidad angular terrestre en función de la inclinación orbital i , cuyos valores se repiten para $i > 90^\circ$ y de la altura h , (Figs. 2.9).

Dado un valor inicial Ω_0 , después de un día (según los valores dados por i y h), éste habría disminuido una cantidad $\Omega = \Omega_0 - \Omega_{\text{reg}}(h, i)$.

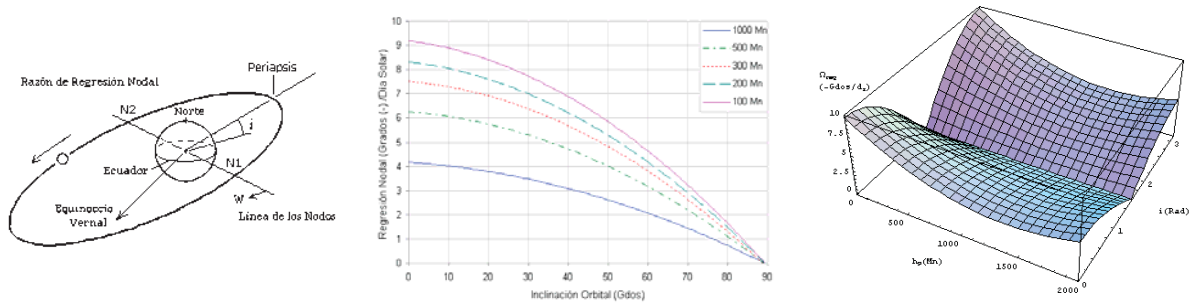


Fig. 2.9. Razón de Regresión Nodal por día solar. (Mn = Millas náuticas)

La variación secular $d\omega/dt$ se le llama: rotación de la línea apsidal^[2]. Esta última se define como la línea que une ambos puntos del PE y AP de la órbita. El vector de excentricidad $\mathbf{e}$ gira de acuerdo a la altitud del PE y a la inclinación orbital cuyos valores se repiten para $i > 90^\circ$ (Figs. 2.10).

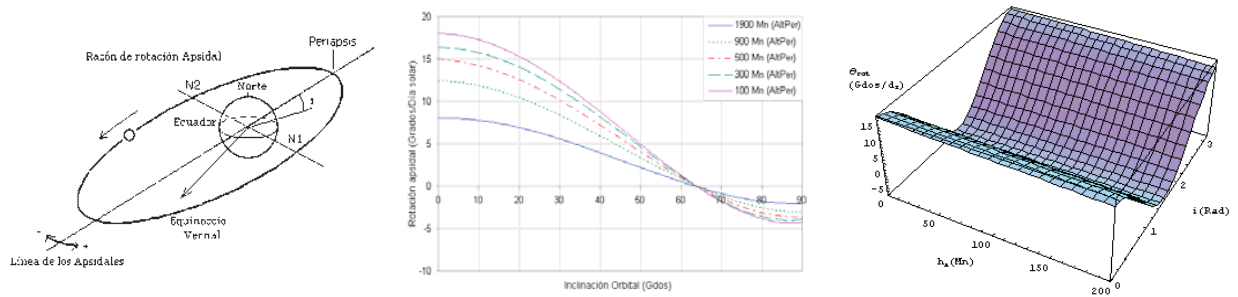


Fig. 2.10. Razón de Rotación apsidal. (AltPer = Altitud del Periapsis)

2.3. Maniobras Orbitales

Suponiendo que el vehículo (sin impulsos) se encuentra ya en una órbita estable σ_0 dada en términos de sus EO, $\sigma_0(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \tau_0, \Omega_0)$ con velocidad $\mathbf{v}_0$, para modificar alguno(s) de sus EO, es necesario aplicar un impulso $\Delta \mathbf{v}$ en dirección de algún ángulo ϕ_t , el cual, es medido con respecto al vector de velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, durante algún intervalo de tiempo Δt breve (unos cuantos segundos).

Los cambios en la velocidad y en el tiempo, pueden ser expresados como incrementos finitos, $\Delta v_k = v_k - v_{k-1}$, y $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ $k \in \mathbb{N}$, de modo que:

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sum_{k=1}^m \Delta v_k = \sum_{k=1}^m (v_k - v_{k-1}) = v_m - v_0 \\ \Delta t &= \sum_{k=1}^m \Delta t_k = \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) = t_m - t_0\end{aligned}\tag{2.112}$$

donde m , denota el valor final. Análogamente, es posible expresar, el cambio de los EO de modo similar a las ecuaciones (2.112):

$$\Delta X = \sum_{k=1}^m \Delta X_k = \sum_{k=1}^m (X_k - X_{k-1}) = X_m - X_0\tag{2.113}$$

donde X = un EO, y cada valor k -ésimo queda definido en términos de la velocidad y del tiempo k -ésimo de las ecuaciones (2.112).

Este razonamiento aplica a cualquier tipo de maniobra, las cuales en general, se clasifican en impulsivas (requieren un solo impulso en algún punto) y bi-impulsivas (requieren dos, cada uno en puntos distintos).

2.3.1. Maniobra Impulsiva simple (ajustes e y a).

Supóngase que se desea modificar una órbita inicial circular σ_{cl} , a otra de forma elíptica σ_e en el mismo plano orbital, (Fig. 2.11).

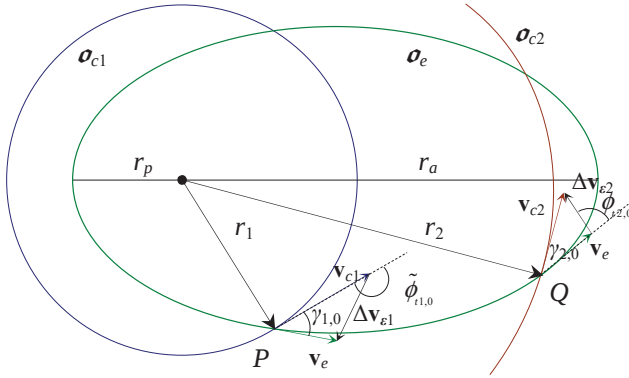


Fig. 2.11. Transferencia Orbital

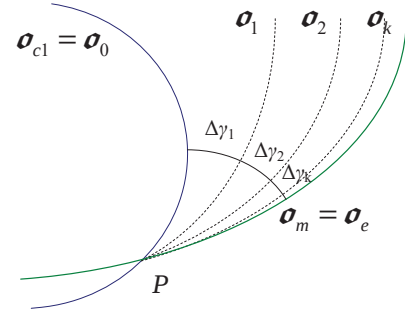


Fig.2.12 Transición de Ajuste

Es posible observar que el vector de cambio Δv forma un triángulo con los vectores inicial v_{cl} y final v_e , donde $(v_{cl}) = v_0 > v_m (= v_e)$. También están los ángulos de transferencia γ_0 y de dirección $\tilde{\phi}_{t,0}$. Sin embargo, en el punto Q se aprecia el otro caso en que $v_0 < v_m$. Además, durante la transición del cambio orbital ($\sigma_{cl} \rightarrow \sigma_e$), se tendrá una secuencia de trayectorias elípticas $\sigma_{cl}(v_{cl}) = \sigma_0(v_0) \rightarrow \sigma_1(v_1) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_m(v_m) = \sigma_e(v_e)$, definidas cada una de ellas, por la ecuación (2.8), con valores p_k y e_k , (Fig. 2.12).

De acuerdo a las figuras. 2.13 y 2.14, es posible apreciar dos casos dados por los puntos P y Q al igual que cada uno de los incrementos finitos determinados por σ_k . Aplicando leyes de cosenos^[2] a los vectores de velocidad (Fig. 2.11) de acuerdo a la (Fig. 2.14) se tiene que:

$$\Delta v_{e1}^2 = v_{cl}^2 + v_e^2 - 2v_{cl}v_e \cos \gamma_0 = v_0^2 + v_m^2 - 2v_0v_m \cos \gamma_0 = \Delta v^2 \quad (2.114)$$

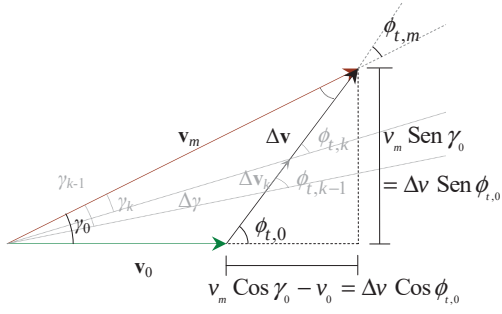


Fig. 2.13. Caso $v_0 < v_m$

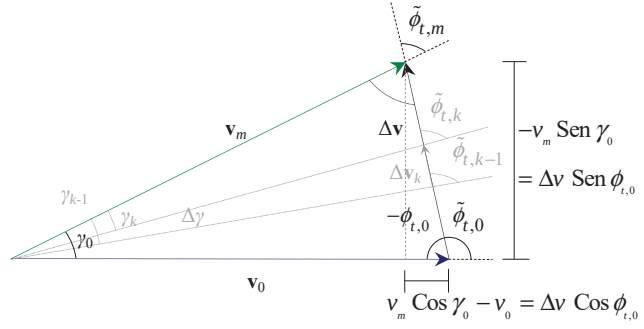


Fig. 2.14. Caso $v_0 > v_m$

Este impulso debe aplicarse en la dirección $\tilde{\phi}_{t,0}$, el cual, se obtiene aplicando trigonometría plana a los triángulos formados (Fig. 2.13) y (Fig. 2.14):

$$\pm \phi_{t,0} \doteq \pm \text{Arcsen} \left(\frac{v_{c1}}{v_e} \text{Sen } \gamma_0 \right) = \pm \text{Arcsen} \left(\frac{v_0}{v_m} \text{Sen } \gamma_0 \right) \quad (2.115)$$

donde el signo $(-)$ representa el caso $v_0 > v_m$. De modo que $\tilde{\phi}_{t,0} = 180^\circ - \phi_{t,0}$. Por lo tanto, ambas expresiones (2.112), quedan determinadas en su forma recursiva como:

$$\Delta v_{\varepsilon 1} = (v_m - v_0) = \sum_{k=1}^m \sqrt{v_{k-1}^2 + v_k^2 - 2v_{k-1}v_k \text{Cos } \Delta \gamma_k} \quad (2.116)$$

$$\pm \phi_{t,k} \doteq \pm \text{Arcsen} \left(\frac{v_{k-1}}{v_k} \text{Sen } \Delta \gamma_k \right) \quad (2.117)$$

Si tenemos $\gamma_m = 0$, (Fig. 2.13) de modo que $\Delta \gamma = \sum_{k=1}^m \Delta \gamma_k = \gamma_0$.

Es decir, $\gamma_k \rightarrow 0$ conforme $\phi_{t,k} \rightarrow \phi_{t,m}$, que es el ángulo direccional final que se ajusta automáticamente después de haber aplicado el impulso $\Delta v_{\varepsilon 1}$. Usando leyes de senos vale:

$$\phi_{t,m} = \text{Arcsen} \left(\frac{v_0}{\Delta v} \text{Sen } \gamma_0 \right) = \text{Arcsen} \left(\frac{v_0}{\sum_{k=1}^m \Delta v_k} \text{Sen } \sum_{k=1}^m \Delta \gamma_k \right) \quad (2.118)$$

mientras que para el caso de la figura 2.14, lo es de igual modo para $\tilde{\phi}_{t,m}$.

Hay que recordar que si la velocidad inicial $v_0 = v_{c1}$ es circular, entonces $v_{c1}^2 = \mu/2$, mientras que para las demás v_k están dadas por la ecuación (2.19), y e_k por la ecuación (2.17). Por lo tanto, se tienen ahora energías específicas $\mathcal{E}_k(v_k)$, y momentos angulares $h_k = r_1 v_k \text{Cos } \gamma_k$. Los cambios Δe y Δa en general, quedan definidos^[11] de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_m - a_k = \sum_{k=1}^m r_1^2 \left[\frac{v_k^2 - v_{k-1}^2}{(2 - r_1 v_{k-1}^2)(2 - r_1 v_k^2)} \right] \\ \Delta e^2 &= e_m^2 - e_0^2 = \sum_{k=1}^m \frac{2r_1^2}{\mu^2} (\mathcal{E}_{k-1} h_{k-1}^2 - \mathcal{E}_k h_k^2) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Nótese que en órbitas circulares (órbita inicial $v_0 = v_{c1}$) $e_0 = 0$, y $a_0 = r_1$. El instante en el cual se aplica la corrección está dado por la ecuación de Kepler (2.26) para los instantes τ y t_0 . A partir de t_0 .

2.3.2. Maniobra Bi-impulsiva Generalizada (ajustes a y e)

La órbita anterior se le llama de transferencia, si una vez terminado el primer impulso Δv_{e1} aplicado en el punto P , con ángulo direccional $\phi_{t1,0}$, y después de haber recorrido el arco PQ (sin propulsión), se aplica un segundo impulso Δv_{e2} al vehículo una vez situado ya en el punto Q , dado de forma similar por, $\Delta v_{e2}^2 = v_{c2}^2 + v_e^2 - 2v_{c2}v_e \text{Cos } \gamma_{2,0}$ para generar una segunda órbita circular de radio $r_{c2} > r_{c1}$, con un ángulo direccional $\phi_{t2,0}$, (Fig. 2.11). (obtenido de modo análogo al anterior $\phi_{t,0} = \phi_{t1,0}$ de la Sección anterior), entonces su impulso total y sus direcciones en ambos casos (uno para cada punto) son:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^2 \Delta v_{\epsilon i} = \sum_{i=1}^2 \sqrt{v_{ci}^2 + v_e^2 - 2v_{ci}v_e \cos \gamma_{i,0}} \quad (2.120)$$

$$\phi_{ti,0} = \text{Arcsen} \left(\frac{v_{ci}}{\Delta v_{\epsilon i}} \text{Sen } \gamma_{i,0} \right), \quad i = 1(\text{en } P), 2(\text{en } Q).$$

donde $\gamma_{i,0} = \Delta \gamma_i = \sum_{k=1}^m \Delta \gamma_{i,k}$.

De modo similar, es posible expresar de la ecuación (2.116) para el caso de la ecuación (2.120) en su forma recursiva realizando en esta última, un razonamiento similar al de las primeras de modo que habría que agregar un índice adicional ($i=2$) correspondiente a la segunda maniobra. Por lo tanto, las expresiones recursivas de la maniobra bi-impulsiva son:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^2 \Delta v_{\epsilon i} = \sum_{i=1}^2 (v_{mi} - v_{0i}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^m \Delta v_{ki} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^m \sqrt{v_{(k-1)i}^2 + v_{ki}^2 - 2v_{(k-1)i}v_{ki} \cos \Delta \gamma_{i,k}} \quad (2.121)$$

$$\pm \phi_{ti,k} \doteq \pm \text{Arcsen} \left(\frac{v_{(k-1)i}}{v_{ki}} \text{Sen } \Delta \gamma_{i,k} \right), \quad i = 1(\text{en } P), 2(\text{en } Q).$$

2.3.3. Impulsos Tangenciales (ajustes a y e)

Suponiendo que en σ_{c1} se aplicara un impulso $\Delta v_{\epsilon 1}$ tangencial a la trayectoria en dirección de la velocidad, $v_0^2 = v_{c1}^2 = \mu/r_{c1}$, (Posición, u órbita Directa, OD) en P, entonces $\gamma = 0$, o bien en dirección opuesta a ella (Posición, u órbita Retrógrada, OR) en el mismo punto, entonces se tiene $\gamma = 180^\circ$, por lo tanto, la ecuación (2.116), se simplifica:

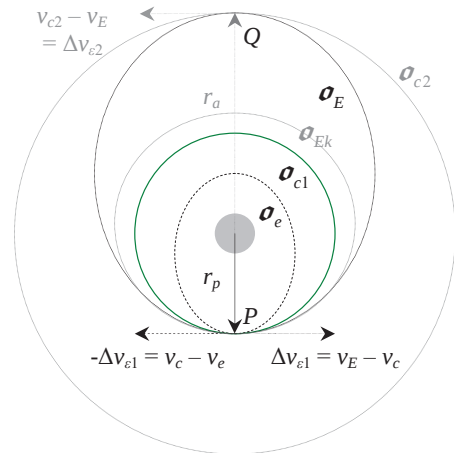


Fig. 2.15 Transferencia de Hohmann

$$\pm \Delta v_{\varepsilon 1} = \pm (v_{M,m} - v_0) = \sum_{k=1}^{M,m} (v_k \mp v_{k-1}) \quad (2.122)$$

donde el signo + indica un ángulo $\gamma = 0$, y el signo – para $\gamma = 180^\circ$. El valor de $v_M (= v_E)$ queda determinado para σ_E , mientras que el de $v_m (= v_e)$ lo es para σ_e , (Fig.2.15). Este impulso (aplicado aún por muy breves instantes Δt_k), modifica σ_{c1} a una forma elíptica σ_{Ek} donde ahora la velocidad $v_k = \Delta v_k + v_{k-1}$, está dada por la ecuación (2.19), la cual, se encuentra en el PE de σ_{Ek} (o bien en el AP de σ_{ek} , en caso de haber disminuido la velocidad).

Tomando el caso $\gamma = 0$, y suponiendo que se desea generar otra órbita circular σ_{c2} de radio $r_2 = r_a$, a partir de σ_E , entonces, después de recorrer el arco PQ (sin propulsión), se aplica de nuevo otro impulso breve en el punto Q en dirección $\gamma = 0$ de modo que en total, se tenga una maniobra bi-impulsiva tangencial llamada también, transferencia de Hohmann, la cual, corresponde al mínimo de energía requerido en cualquier transferencia orbital:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^2 \Delta v_i = (v_M - v_0) + (v_Q - v_M) = \sum_{k=1}^M (v_k - v_{k-1}) + \sum_{k=M+1}^Q (v_k - v_{k-1}) \quad (2.123)$$

donde, la velocidad inicial de los segundos términos, $v_M = v_E$ es la velocidad final de los primeros, mientras que la velocidad final de los segundos es $v_Q = v_{c2}$. La velocidad v_{M+1} es la velocidad que el vehículo lleva en el AP de la órbita de transferencia.

Recíprocamente, el caso determinado por la posición retrógrada ($\gamma = 180^\circ$) es análogo a la ecuación (2.123), salvo el cambio de signos y los valores para v_m en σ_e y v_q (órbita circular de radio $r_{c0} < r_{c1}$). Por lo tanto, las cuatro posibilidades de transferencias de Hohmann, quedan determinadas (combinando los signos de los términos) por:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^2 \Delta v_i = \pm(v_{M,m} - v_0) \pm(v_{Q,q} - v_{M,m}) = \sum_{k=1}^{M,m} (v_k \mp v_{k-1}) + \sum_{k=M,m+1}^{Q,q} (v_k \mp v_{k-1}) \quad (2.124)$$

esto es, se permite aplicar un aumento (o disminución) de velocidad en P y luego un aumento o disminución en Q .

Nótese que mientras se aplica el impulso constante con dirección $\gamma = 0$ en una órbita circular de radio r_c , ésta irá tomando gradualmente forma elíptica salvo que ahora $r_c = r_{pk}$ es constante para todo k de la secuencia, mientras que $r_{ak} \rightarrow r_a > r_p = r_c$. Así, tomando la diferencial de la ecuación (2.18), entre el segundo y tercer miembro manteniendo r constante se llega a, $\mu da = 2a^2 v dv$. Por lo tanto, para un cambio infinitesimal en la velocidad, se obtiene un cambio del semieje mayor da . Como el eje mayor es $2a$, la longitud de la órbita cambia el doble de esta cantidad, o sea, $2da$.

Suponiendo que el cambio de velocidad se aplica en el PE ($\pm \Delta v_p$), el cambio resultante en el eje mayor afectará la altura del AP ($\pm \Delta h_a$). Análogamente sucede para el cambio de velocidad en el AP, así se tiene^[2] que:

$$\pm \Delta h_{a,p} = \pm \frac{4a^2}{\mu} v_{p,a} \Delta v_{p,a} \quad (2.125)$$

Por lo tanto, para ajustar a y e con un mínimo de energía, será preferible siempre aplicar impulsos en el AP o PE.

2.3.4. Giro Relativo del Plano Orbital (ajuste simultáneo de i y Ω).

Considérese la proyección de una órbita σ_0 sobre la tierra, (Fig. 2.16). La finalidad ahora es la de mantener constantes tanto e como a , mientras se modifica la inclinación i , que a su vez por geometría, modificará también de modo simultáneo a Ω , generando una nueva órbita σ_m .

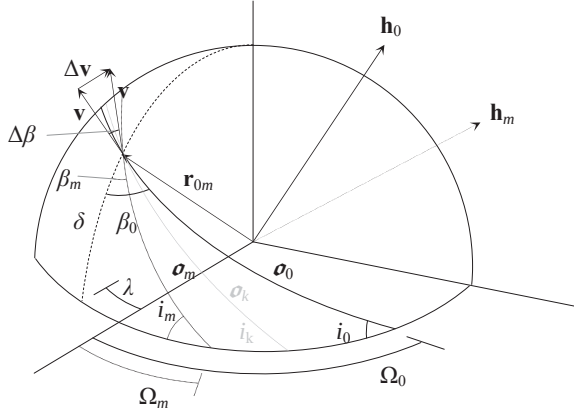


Fig. 2.16 Proyección del giro orbital

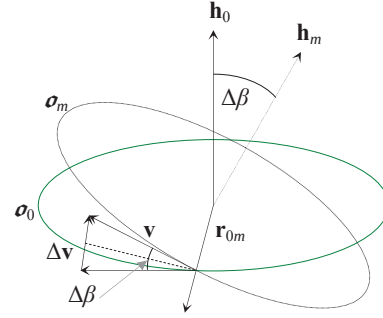


Fig. 2.17. Giro orbital

Así que la única posibilidad, es la de aplicar un impulso Δv_e en dirección normal a σ_0 , en algún punto situado a una latitud δ y longitud λ . El ángulo formado en un vértice del triángulo (Fig. 2.16) dado por los vectores de cambio es:

$$\Delta\beta = \beta_m - \beta_0 = \sum_{k=1}^m (\beta_k - \beta_{k-1}) = \sum_{k=1}^m \Delta\beta_k \quad (2.126)$$

donde, β_0 es el ángulo azimutal (medido con respecto al meridiano que pasa por el punto de maniobra) de la órbita inicial, y β_m es el azimut final. Luego, al dividir por mitad el triángulo formado por los vectores de velocidad en el punto de maniobra (Fig. 2.17), de la figura 2.16 y aplicando trigonometría plana se llega a:

$$\begin{aligned} \Delta v_e &= \sum_{k=1}^m \Delta v_k = 2v \operatorname{Sen} \frac{\Delta\beta}{2} = 2v \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\beta_k \right) \\ \phi_t &= \frac{\Delta\beta}{2} + 90^\circ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\beta_k + 90^\circ \end{aligned} \quad (2.127)$$

donde v es la velocidad tangencial del vehículo en la órbita que se gira, la cual, puede ser circular o elíptica y cuyo valor es constante durante la maniobra, y ϕ_t es el ángulo direccional de vuelo que permite el cambio.

Nótese que la longitud λ es fija. Así que se define el ángulo $\Lambda_k \doteq \Omega_k \pm \lambda$, donde es (+) si Ω_k y λ_k están en lados opuestos y (−) si están en el mismo lado. Por lo tanto, aplicando trigonometría esférica al triángulo PQR usando formulas de Bessel, y cotangentes^[A1] se tiene:

$$\begin{aligned}\cos i &= \cos L \sin \beta \\ \sin \Lambda &= \tan L \cot i \\ \cot \beta &= \sin L \cos \Lambda\end{aligned}\tag{2.128}$$

y como $\Omega_k = \Lambda_k \mp \lambda$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \arctan(\sin \delta \tan \beta_k) \mp \lambda \\ i_k &= \arccos(\cos L \sin \beta_k)\end{aligned}\tag{2.129}$$

que son la inclinación i_k y la longitud del nodo de ascenso Ω_k resultantes de haber girado la órbita σ_0 un ángulo $\Delta\beta_k$ para obtener σ_k . Por lo tanto, los cambios en estos dos EO en forma recursiva son^[11]:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= \sum_{k=1}^m \Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^m \arctan(\sin \delta \tan \beta_k) - \arctan(\sin \delta \tan \beta_{k-1}) = \Omega_m - \Omega_0 \\ \Delta i &= \sum_{k=1}^m \Delta i_k = \sum_{k=1}^m \arccos(\cos L \sin \beta_k) - \arccos(\cos L \sin \beta_{k-1}) = i_m - i_0\end{aligned}\tag{2.130}$$

Sean $\mathbf{h}_0$ y $\mathbf{h}_m$ los momentos angulares orbitales inicial y final respectivamente, (Fig.2.15). El vector nodal unitario (relativo) que proporciona el punto^[9] en el cual debe aplicarse el impulso es:

$$\hat{\mathbf{n}}_{0m} = \frac{\mathbf{h}_0 \times \mathbf{h}_m}{|\mathbf{h}_0 \times \mathbf{h}_m|}\tag{2.131}$$

Así, el vector de posición $\mathbf{r}_{0m} = r\hat{\mathbf{n}}_{0m}$ y con la ecuación (2.8), es posible conocer v . Luego, el ángulo de cambio $\Delta\beta$ es:

$$\Delta\beta = \text{Arccos}\left(\frac{\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{h}_m}{h_0 h_m}\right) \quad (2.132)$$

La dirección ϕ_t del impulso que generará el cambio está dada por la ecuación (2.127) la cual resulta en la siguiente expresión^[2] de incremento de velocidad en su forma vectorial:

$$\Delta\mathbf{v} = \left(2v \text{ Sen } \frac{\Delta\beta}{2}\right) \left[(\text{Cos } \phi_t) \hat{\mathbf{v}} + (\text{Sen } \phi_t) \hat{\mathbf{h}} \right] \quad (2.133)$$

Por lo tanto, para efectuar un cambio en i y Ω de una órbita a otra, de acuerdo a las ecuaciones (2.127) y (2.133), el ángulo de transferencia ϕ_t debe ser poco mayor de 90° .

Recíprocamente, si la órbita inicial y final hubiesen sido σ_m y σ_0 respectivamente, entonces en la ecuación (2.133), habría un cambio de signo en $\hat{\mathbf{h}}$, y en el ángulo ϕ_t . Por lo tanto, Las orientaciones definidas por ϕ_t son:

$$\pm\Delta\phi = \pm\phi_t = \pm\left(\frac{\Delta\beta}{2} + 90^\circ\right) = \pm\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\beta_k + 90^\circ\right) \quad (2.134)$$

donde el signo $+$ queda definido en posición normal $\mathbf{h}$ (P+), y el $-$ para la posición antinormal $-\mathbf{h}$ (P-) a la línea perpendicular a $\Delta\beta$. P+ ocurre en el ND relativo, mientras que P- ocurre en el NA relativo.

Para generar un cambio en la inclinación sin alterar el valor de Ω_0 , el vector nodal $\mathbf{n}_{0m}$ debe apuntar en dirección ya sea del NA o del ND sobre el plano ecuatorial terrestre, donde habría de aplicar la maniobra de cambio de velocidad dada por la ecuación (2.133).

2.3.5. Giro nodal del Plano Orbital (ajuste Ω).

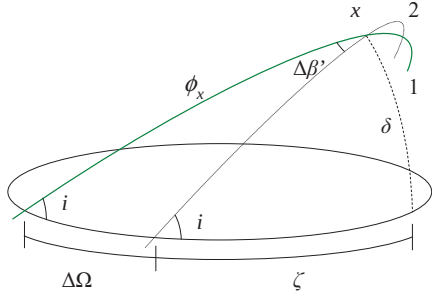


Fig. 2.18. Corrección nodal

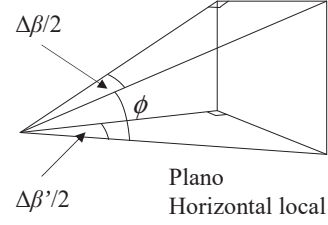


Fig. 2.19. Relación azimuthal

La inclinación i se mantiene fija en el punto cuya latitud es δ . Considerando los triángulos esféricos formados por las proyecciones de las órbitas original (1) y corregida (2), (Fig. 2.18), empleando identidades de cotangentes se llega a:

$$\tan i = \frac{\tan \delta}{\sin(\zeta + \Delta\Omega)} = \frac{\tan \delta}{\sin \zeta} \quad (2.135)$$

Es decir, $\sin(\zeta + \Delta\Omega) = \sin \zeta$, de modo que, $\zeta = 90^\circ - \frac{\Delta\Omega}{2}$.

Sea ϕ_x el ángulo del nodo al punto de la transición x en la órbita incorrecta. Empleando identidades trigonométricas esféricas de cotangentes se llega a:

$$\phi_x = \arctan \left[\frac{\tan \left(90^\circ + \frac{1}{2} \Delta\Omega \right)}{\cos i} \right] \quad (2.136)$$

La velocidad en x debe ser cambiada a un valor que tendría si se encontrara en la órbita corregida, con una longitud ζ . Para esto, es requerido un cambio $\Delta\beta$ del ángulo azimuthal, y en seguida, una rotación de la órbita en su plano para reajustar el valor del argumento del periapsis ω . Empleando identidades de senos en trigonometría esférica, para la proyección del cambio azimuthal:

$$\Delta\beta' = 180^\circ - 2 \operatorname{Arccos}\left(\operatorname{Sen} \frac{\Delta\Omega}{2} \operatorname{Sen} i\right) \quad (2.137)$$

Mientras que la relación entre la proyección de cambio azimutal $\Delta\beta'$ y el real $\Delta\beta$ se obtiene empleando trigonometría plana (Fig. 2.19), de modo que:

$$\Delta\beta = 2 \operatorname{Arcsen}\left(\operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sen} \frac{\Delta\beta'}{2}\right) \quad (2.138)$$

donde ϕ es el ángulo de trayectoria de vuelo de ambas órbitas medido respecto al plano horizontal local. Por lo tanto, de acuerdo a las ecuaciones (2.137) y (2.138) el primer impulso necesario para la corrección nodal, manteniendo la velocidad v_x constante tal como sucede en la primera de las ecuaciones (2.127), es:

$$\Delta v_n' = 2v_x \operatorname{Sen} \frac{\Delta\beta}{2} = 2v_x \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sen} i \operatorname{Sen} \frac{\Delta\Omega}{2} \quad (2.139)$$

Sin embargo, $r_x v_x \operatorname{Cos} \phi = \sqrt{\mu p}$, por lo tanto:

$$\Delta v_n' = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \operatorname{Cos} \theta_x) \operatorname{Sen} \frac{\Delta\Omega}{2} \operatorname{Sen} i \quad (2.140)$$

donde $\theta_x = \phi_x - \omega_0$ de la cual, ω_0 es el argumento del periapsis inicial que presenta la órbita antes de la corrección.

2.3.6. Giro de Apsidales (ajuste ω).

Debido que la órbita es elíptica y a su vez gira alrededor de la línea que une el punto en que se aplica el impulso (de la maniobra anterior) y el centro de la tierra, la línea de los apsidales habrá de girar dentro del plano orbital durante la maniobra. Por lo tanto, es necesario un segundo impulso $\Delta v''$ para girar la línea de apsidales un ángulo específico α en su plano orbital (Fig. 2.20) y corregir así su argumento de periapsis ω .

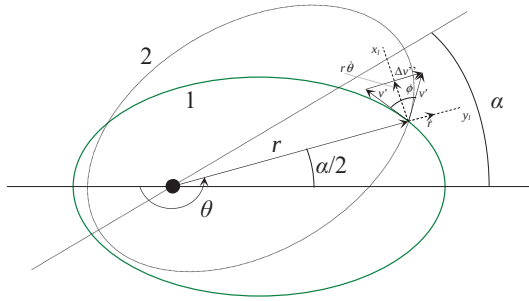


Fig. 2.20. Ajuste apsidal coplanar

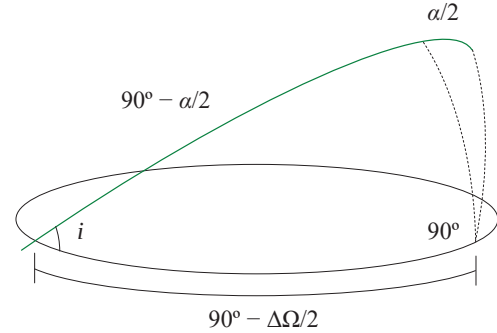


Fig. 2.21. Corrección apsidal en relación nodal

Si r es el radio de la transición, entonces $\Delta v'' = 2v' \text{ Sen } \phi$. Dado que la anomalía verdadera es $\theta = 180^\circ + \alpha/2$, entonces la ecuación de la órbita inicial 1 es $p = r(q - e \text{ Cos } \frac{\alpha}{2})$. Por lo tanto la velocidad^[11] en ese punto debe ser:

$$v' = \frac{\sqrt{p\mu}}{r \text{ Cos } \phi} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{1 - e \text{ Cos } \frac{\alpha}{2}}{\text{Cos } \phi} \quad (2.141)$$

El sistema local (x_l, y_l) de la figura 2.20 muestra que la tangente de ϕ es justo la derivada negativa (pendiente inclinada a la izquierda) de la curva en ese punto de modo que:

$$\text{Tan } \phi = -\frac{dy_l}{dx_l} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} = \frac{-e \text{ Sen } \frac{\alpha}{2}}{1 - e \text{ Cos } \frac{\alpha}{2}} \quad (2.142)$$

donde se han utilizado las componentes angulares de la velocidad de acuerdo a la ecuación (2.69), (segundo renglón de la matriz).

Por lo tanto, al combinar las ecuaciones (2.142) y (2.141):

$$\Delta v'' = 2v' \text{ Sen } \phi = -2e\sqrt{\frac{\mu}{p}} \text{ Sen } \frac{\alpha}{2} \quad (2.143)$$

donde p y e son los parámetros de la órbita deseada, y α queda determinada por la relación de identidades de cotangentes de trigonometría esférica, aplicadas al triángulo esférico (Fig. 2.21) obtenido por la rotación de apsidales de modo conjunto en analogía con la figura 2.18:

$$\alpha = 180^\circ - 2 \operatorname{Arctan} \left[\frac{\operatorname{Tan} \left(90^\circ - \frac{\Delta\Omega}{2} \right)}{\operatorname{Cos} i} \right] \quad (2.144)$$

2.3.7. Sincronía Orbital (ajuste simultáneo ω y τ).

Supóngase que un satélite está desfasado una cantidad angular $\Delta\theta$ de alguna otra posición deseada Q dentro de una órbita circular. Entonces, el tiempo durante el cual el satélite recorre $\Delta\theta$ es:

$$\pm\Delta t = \frac{T}{2\pi} \pm \Delta\theta \quad (2.145)$$

donde T es el periodo de la órbita circular, y los signos indican que será necesario eliminar o adquirir Δt respecto al periodo, dependiendo de si el satélite está delante o detrás de su posición Q deseada.

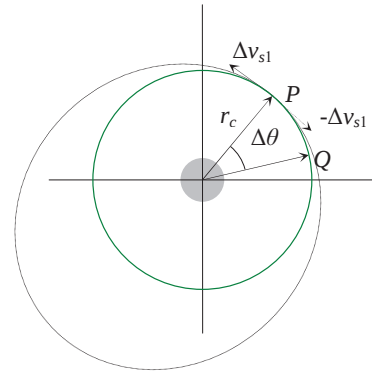


Fig. 2.22. Sincronía Orbital

La manera más simple de lograr una sincronía es hacer que el satélite entre en órbita elíptica con un periodo T_s (de modo que el punto P sea el PE o AP de la elipse de sincronía según sea el caso $+$ o $-$ Δt respectivamente) adquirido por un impulso tangencial a la órbita original.

Si n es el número de periodos, es necesario $nT_s = nT \pm \Delta t$, de modo que $T_s = T \pm \Delta t/n$, con $0 \leq \Delta t \leq T$. Una vez recorridos los n periodos necesarios para sincronizar la posición del satélite en el punto Q , se regresa a la órbita original aplicando un segundo impulso

igual en magnitud pero opuesto al primero. Así, si a_s es el semieje mayor de dicha órbita, y r_c es el radio de la órbita circular (que a su vez, es también r_p de la órbita de sincronía) (Fig. 2.22), empleando^[11] la ecuación (2.21) se tiene:

$$\pm \frac{\Delta t}{n} = (T_s - T) = T \left\{ \left(\frac{a_s}{r_c} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \quad (2.146)$$

notando que $r_c = r_p$, al resolver para a_s de la energía mecánica específica (2.18):

$$a_s = \frac{\mu r_p}{2\mu - r_p v_p^2} \quad (2.147)$$

Sustituyendo a_s de la ecuación (2.147) en la expresión (2.146) y resolviendo para v_p :

$$v_p = v_c \sqrt{2 - \frac{1}{\left(\frac{\Delta \theta}{2n\pi} + 1 \right)^{\frac{2}{3}}}} \quad (2.148)$$

que es la velocidad requerida para generar la órbita elíptica de sincronía.

Por lo tanto, si la velocidad inicial de la órbita circular es v_c , el cambio de velocidad requerido en el punto P será $\Delta v_{s1} = v_p - v_c$, mientras que una vez recorridos n periodos, un segundo impulso $\Delta v_{s2} = -\Delta v_{s1}$ es necesario para volver a la órbita circular original, ambos impulsos aplicados tangencialmente entre un intervalo de tiempo (periodo sinódico^{[9][2]}):

$$nT_s = nT \pm \frac{nT}{2n\pi} \Delta \theta = nT \left(1 \pm \frac{\Delta \theta}{2n\pi} \right) \quad (2.149)$$

Si el signo es (+), entonces el refase será hacia atrás de la posición actual en la órbita, (Δv en PD), (Fig. 2.22), mientras que si es (-) entonces el refase es hacia delante (Δv en PR).

En caso de que la órbita inicial sea elíptica, ésta debería estar ya ajustada en todos sus demás EO (su último ajuste habría sido el visto anteriormente para ω). Como su orientación ya es la correcta, este último ajuste debe ser realizado ya sea en el AP o en el PE. Así, si el tiempo del paso por el periapsis observado es τ , y el que debería tener al cruzar por el mismo punto es τ' , entonces el periodo de la órbita de sincronía tangente al PE es $T_s = T + \Delta t = T + |\tau - \tau'|$.

De acuerdo a la tercera ley de Kepler, el semieje mayor a_s de la órbita de sincronía está dada por $a_s^{3/2} = \sqrt{\mu} T_s / 2\pi = \sqrt{\mu} (T + \Delta t) / 2\pi$, que al ser combinada con la ecuación (2.147), y resuelta para v_p :

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \sqrt{2 - r_p \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\mu} (\Delta t + T)} \right)^{2/3}} \quad (2.150)$$

que es la velocidad requerida para generar la órbita elíptica de sincronía.

Por lo tanto, si la velocidad inicial del vehículo en la órbita elíptica original, en el punto del PE es $v_{p0} = \sqrt{2\mu/r_p - \mu/a_0}$, entonces el primer impulso requerido es, $\Delta v_{s1} = v_p - v_{p0}$. Al igual que antes, el segundo impulso $\Delta v_{s2} = -\Delta v_{s1}$ deberá ser aplicado después de un intervalo de tiempo $t = \tau' + n(T + \Delta t)$ en dirección opuesta al mismo punto.

2.4. Vuelo Extrplanetario Orbital

Un vuelo extrplanetario es simplemente salir de la atmósfera planetaria ya sea o no, entrando en órbita circular o elíptica alrededor de un planeta como la tierra, tal como fue visto en las secciones anteriores. No obstante, si es extrplanetario orbital se refiere a vuelos cuyo propósito es generar una trayectoria que permita librar al vehículo de cualquier influencia gravitacional que pudiera causar un retorno al planeta que se orbitaba inicialmente.

2.4.1. Cónicas de Escape

Dichas trayectorias tienen forma de cónicas vistas por la ecuación (2.8), para $e = 1$ (parábola) y $e > 1$ (hipérbola). En el primer caso, la geometría de una parábola dispone únicamente como parámetros, el lado recto p , el radio del PE $r_p = p/2$ y el foco F situado en el centro de la tierra.

Estas trayectorias son raramente encontradas en la naturaleza, salvo el caso en algunos cometas cuya trayectoria se aproxima bastante a ella. Su estudio es importante, ya que representa el caso límite entre una trayectoria cerrada y otra abierta.

Haciendo $e = 1$ en la expresión (2.17), lo cual por la ecuación (2.18) se tiene que $v_{esc} = \sqrt{2\mu/r}$. Esta es la velocidad de escape necesaria para generarla. Además, hay que notar que: $v_{esc} = \sqrt{2}v_c$. Así, para la tierra: $v_{esc} \approx 11.2 \text{ km/s}^{[9]}$. Esto también se obtiene haciendo $a \rightarrow \infty$ en la ecuación (2.19).

En el segundo caso, (trayectoria hiperbólica), su geometría dispone de dos brazos, de los cuales, únicamente se considera uno de ellos, con el foco en el centro del planeta. Estas se encuentran en meteoros que impactan algún cuerpo celeste, o bien, en pruebas interplanetarias.

Los parámetros a , b y c (Fig. 2.23) satisfacen $c^2 = a^2 + b^2$. El ángulo δ ubicado entre las asintotas, representa el ángulo de cambio de trayectoria necesario para que el vehículo se encuentre con algún cuerpo distante. Este se relaciona con los parámetros como: $\text{Sen} \frac{\delta}{2} = \frac{a}{c}$. No obstante, $e = c/a$ por lo tanto, $\delta = 2 \text{ Arcsen}(e^{-1})$.

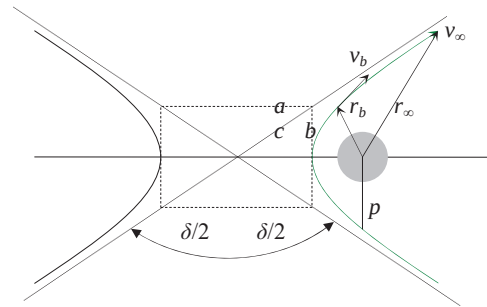


Fig. 2.23. Trayectoria Hiperbólica

El valor de la velocidad de escape obtenido anteriormente, es un valor mínimo que le permite al vehículo escapar de la influencia gravitacional terrestre.

Sin embargo, al aplicar en ese mismo instante una cantidad adicional de velocidad, se esperaría después de cierto tiempo y a una gran distancia, que el vehículo presente una cantidad finita residual de velocidad. A esta se le llama, velocidad de exceso hiperbólica^[2] v_∞ . Empleando la ecuación de energía (2.18) en dos puntos de la trayectoria (uno próximo r_b y otro distante r_∞ del planeta), se llega a:

$$v_\infty^2 = v_b^2 - \frac{2\mu}{r_b} = v_b^2 - v_{esc}^2 \quad (2.151)$$

2.4.1.1. Perturbación del Tercer Cuerpo

La perturbación gravitacional del tercer cuerpo sobre un sistema de dos cuerpos orbitando es modelada de forma similar a la del cuerpo axisimétrico.

Considérese el cuerpo m_2 orbitando a m_1 y cuya órbita experimenta una perturbación por un tercer cuerpo m_3 (Fig. 2.23). Las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos son^[9]:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{Gm_1}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{Gm_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} &= 0 \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 + \frac{Gm_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - \frac{Gm_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

donde $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ denotan las posiciones inerciales respectivas de los tres cuerpos, y $\mathbf{r}_{12} \doteq \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{r}_{13} \doteq \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$ y $\mathbf{r}_{23} \doteq \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$. Al restar ambas ecuaciones (2.152):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = Gm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \quad (2.153)$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$, y $\mu = Gm_1$. Debido a que en el tercer cuerpo está a una distancia mucho mayor, comparada con la de los otros dos ($r_{13} \gg r$, $r_{23} \gg r$), la diferencia en el segundo miembro de la ecuación (2.153) nos lleva a definir $\mathbf{r}_{23} \doteq -\mathbf{r}_{32}$, y la función del potencial:

$$\Phi \doteq Gm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}^T}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}^T}{r_{13}^3} \right) = Gm_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{r_{32}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \quad (2.154)$$

Por lo tanto la ecuación (2.153), se convierte^[9] en:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \quad (2.155)$$

Al considerar perturbaciones adicionales, únicamente es necesario agregar las perturbaciones causadas por dichos cuerpos en el lado derecho de la ecuación (2.155). Al igual que en el capítulo anterior, es posible expandir el potencial perturbativo en series de Legendre infinitas:

$$\Phi = \frac{Gm_3}{r_{13}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{13}} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] \quad (2.156)$$

donde γ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_{13}$, (Fig. 2.24). La ventaja de la expresión (2.156) es la independencia de $\mathbf{r}_{32}$ del potencial que está cambiando continuamente en la órbita. Por lo tanto es posible calcular el gradiente del potencial, y así la ecuación (2.155) es:

$$\mathbf{r} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = G \frac{m_3}{r_{13}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{13}} \right)^n \left[P'_{n+1}(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} - P'_n(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad (2.157)$$

donde, las P' denotan la derivada de los polinomios de Legendre con respecto a sus argumentos. También existen algunos métodos numéricos para la resolución de la ecuación diferencial (2.157), correspondiente a la perturbación de un tercer cuerpo. Más

aún, al tratar la perturbación de un cuarto cuerpo o incluso de un n -ésimo cuerpo, el problema se torna bastante más complicado. Así, con fines de simplicidad y practicidad, serán tratadas primero, las ecuaciones cónicas del vuelo interplanetario de acuerdo a como fue dado por Lagrange.

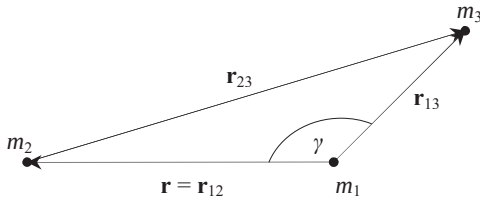


Fig. 2.24. Perturbación del tercer cuerpo

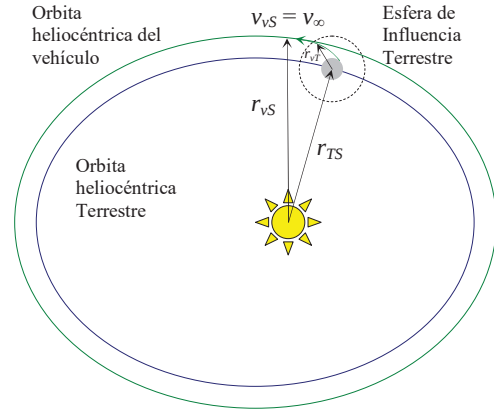


Fig. 2.25. Esfera de Influencia terrestre

2.4.1.2. Esfera de Influencia y Enlace Cónico

Lagrange diseñó un método para el estudio de trayectorias interplanetarias sujetas a fuerzas perturbativas de un tercer cuerpo. Dicho método consiste en asignar una región esférica a cada planeta, dentro de la cual, son predominantes los efectos gravitacionales de cada uno, mientras que fuera de ella, los efectos serían de la esfera Solar, Dicha región se le llama esfera de influencia gravitacional o simplemente, esfera de influencia^{[2] [9]}.

Se aprecia como al pasar el vehículo de dicha frontera (Fig. 2.25), la distancia r_{vT} con respecto al sistema geocéntrico, definiendo una cónica hiperbólica, cambia inmediatamente al sistema heliocéntrico cuya distancia es ahora r_{vS} ($\approx r_{TS}$, distancia media de la tierra al Sol) y define ahora una cónica elíptica (casi similar a la de la órbita terrestre alrededor del Sol) con una velocidad de exceso hiperbólica v_{∞} , que a su vez, respecto al sistema geocéntrico es casi nula, mientras que en el heliocéntrico, es casi el valor de la velocidad tangencial terrestre vista desde el Sol ($\approx v_{TS}$). Esto es, hay un enlazado cónico de hipérbola geocéntrica, a elipse heliocéntrica, justo en la frontera de la esfera de influencia. Expresando el movimiento de m_2 , (Fig. 2.24) mediante:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} + \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} &= -Gm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} + \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \\
\ddot{\mathbf{r}}_{32} + \frac{G(m_2 + m_3)}{r_{32}^3} \mathbf{r}_{32} &= -Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right)
\end{aligned} \tag{2.158}$$

Es posible deducir el radio de la esfera de influencia, r_s para una masa planetaria m_1 al comparar magnitudes de las perturbaciones en el lado derecho de las ecuaciones (2.158).

En la frontera de la región de influencia, las dos razones concernientes son idénticas. Igualando ambas y desarrollando términos^[9], se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{r_s}{r_{13}} = \left[\frac{m_1 + m_2}{m_3(m_2 + m_3)} \right]^{\frac{1}{3}} (1 + 3 \cos^2 \gamma)^{-\frac{1}{6}}$$

la cual, puede ser aún más aproximada asumiendo que $m_3 \gg m_1 \gg m_2$ y $r_{13} \gg r$, y que el segundo factor es ≈ 1 ^[9], dando:

$$\frac{r_s}{r_{13}} \approx \left(\frac{m_1}{m_3} \right)^{\frac{2}{5}} \tag{2.159}$$

Esta es una buena aproximación para los planetas, y depende de la razón de masas del cuerpo primario m_1 y del perturbativo m_3 así como de la distancia entre ellos r_{13} .

Por lo tanto, para un cuerpo pequeño orbitando muy de cerca al Sol como Mercurio, tendrá una esfera de influencia $r_s = 0.111 \times 10^6$ km^[9], mientras que de modo recíproco para Neptuno sería $r_s = 80.196 \times 10^6$ km.

Para la tierra^[9], $r_{sT} \approx 0.93 \times 10^6$ km, la Luna $r_{sL} \approx 0.065 \times 10^6$ km y para Marte, $r_{sM} \approx 0.5262 \times 10^6$ km. Nótese que la esfera de influencia lunar está comprendida dentro de r_{sT} , ya que la distancia media de la tierra a la luna es 0.38×10^6 km.

2.4.1.3. Trayectoria de Escape Parabólico

A pesar de que esta trayectoria no es práctica en vuelos interplanetarios, no obstante, es en algunas ocasiones de gran ayuda en cuanto a la determinación de los mínimos requerimientos de combustible para una misión.

Empleando las ecuaciones: $h = \sqrt{\mu p} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ y $r = p/(1 + e \cos \theta) = p/2(\cos^2 \frac{\theta}{2})$ donde, en esta última se ha empleado $e = 1$, se tiene que para una órbita parabólica:

$$\frac{1}{4} \left(\sec^4 \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt$$

que al integrarse da:

$$\tan^3 \frac{\theta}{2} + 3 \tan \frac{\theta}{2} = 6 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau) \quad (2.160)$$

Esta ecuación representa la forma parabólica de la ecuación de Kepler y se llama ecuación de Barker^{[2][9]}. Afortunadamente, existe única solución para la misma y se resuelve de forma directa al sustituir $\tan \frac{\theta}{2} = \alpha - \frac{1}{\alpha}$, y resolviendo la cuadrática para α^3 dando como resultado:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \left(c + \sqrt{1 + c^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(c + \sqrt{1 + c^2} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (2.161)$$

donde $c \doteq 3 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau)$, equivale a la anomalía verdadera en elípticas.

2.4.1.4. Posición y velocidad en una Trayectoria Hiperbólica

Es posible obtener una ecuación análoga a la de Kepler (2.26), introduciendo la anomalía hiperbólica H , y las funciones hiperbólicas. Una de las ecuaciones paramétricas de una hipérbola con centro en el origen, (Fig. 2.23) y semieje mayor a puede ser escrita como $x = a \cosh H$, o bien, $r \cos \theta = a(\cosh H - e)$. Se sigue que la magnitud del radio

vector es $r = a(1 - e \cosh H)$; así, las relaciones entre las anomalías hiperbólica y verdadera son:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\cosh H - e}{1 - e \cosh H} \\ \sin \theta &= \pm \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh H}{1 - e \cosh H}\end{aligned}\tag{2.162}$$

En la segunda de las ecuaciones (2.162), ambos signos son casos posibles. Tomando el signo negativo es posible escribir la segunda ecuación paramétrica como $y = -b \sinh H$, donde $b = a(e^2 - 1)^{1/2}$, es el semieje menor. Al igual que antes, es posible obtener mediante la identidad de tangentes (para mitades angulares), de las ecuaciones (2.162):

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tanh \frac{H}{2}\tag{2.163}$$

Empleando la ecuación (2.64):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cosh H - e) & -\sqrt{-ap} \sinh H \\ -\frac{\sqrt{-\mu a}}{r} \sinh H & \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cosh H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{pmatrix}\tag{2.164}$$

Diferenciando la primera ecuación de (2.162), $d\theta = -(b/r)dH$. Como $r^2 d\theta = h dt$, se tiene $(e \cosh H - 1)dH = \sqrt{-\frac{\mu}{a^3}} dt$, que al ser integrada partiendo de $H = 0$ y $t = \tau$:

$$e \sinh H - H = \sqrt{-\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) = n(t - \tau)\tag{2.165}$$

donde se aprecia la definición del movimiento hiperbólico principal n . La ecuación^[9] (2.165) es análoga a la de kepler, y puede ser resuelta numéricamente del mismo modo.

2.4.2. Aproximación de Enlazado Cónico

Como se vio anteriormente, la única trayectoria empleada en vuelos interplanetarios por practicidad es la hiperbólica. Sin embargo, esta subsiste única y exclusivamente dentro de la esfera de influencia del cuerpo cuya influencia gravitacional se pretende escapar (por ejemplo la tierra), ya que una vez fuera de ahí, la trayectoria hiperbólica será enlazada^{[9][2][22][21]} con la órbita elíptica respecto al tercer cuerpo (en este caso el Sol) que permite orbitar al primario (la Tierra).

Esta aproximación ofrece un método eficiente para la descripción de órbitas interplanetarias. Dicha partición se hace sobre una trayectoria, en una serie de órbitas de dos cuerpos, simplificando enormemente el análisis de la misión. No obstante, dicha aproximación tiene limitantes, ya que se desprecian los efectos perturbativos de otros cuerpos. Dicho estudio corresponde al problema restringido de los tres o cuatro cuerpos, que emplea métodos iterativos de prueba y error mediante técnicas de integración numérica. Esto será tratado posteriormente.

Una descripción de modo generalizado del enlace cónico contempla dos casos. 1, transferencia dentro de una esfera a otra de radio menor, contenida dentro de la primera, y 2, transferencia de una esfera a otra que se encuentra fuera de la primera. Las misiones (ida y vuelta), Tierra-Luna y Tierra a Cualquier planeta del sistema Solar, contemplan estos dos casos respectivos de forma generalizada.

2.4.2.1. Transferencia Tierra-Luna

Partiendo de una órbita terrestre se requiere de una órbita geocéntrica de partida, (Fig. 2.26), preferentemente de Hohmann (por cuestiones de mínima energía), y coplanar con la órbita lunar. Las cuatro cantidades que especifican completamente^[2] la fase geocéntrica son, r_0 , v_0 , ϕ_0 y γ_0 . Donde, éste último se le llama ángulo de apertura inicial. La dificultad que hay al seleccionar estas cantidades es que la determinación en la cual la trayectoria geocéntrica cruza la esfera de influencia lunar (EIL), involucra un proceso iterativo cuyo tiempo de vuelo debe ser calculado durante cada iteración.

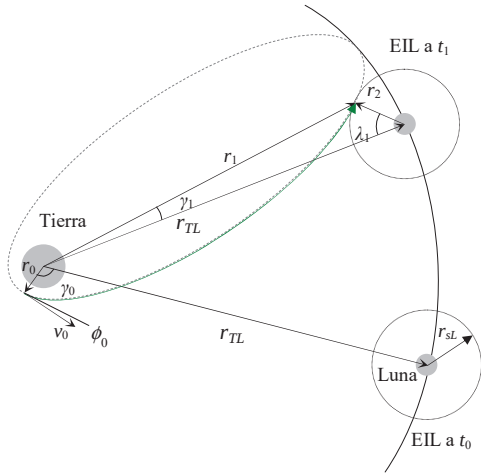


Fig. 2.26. Transferencia Tierra Luna

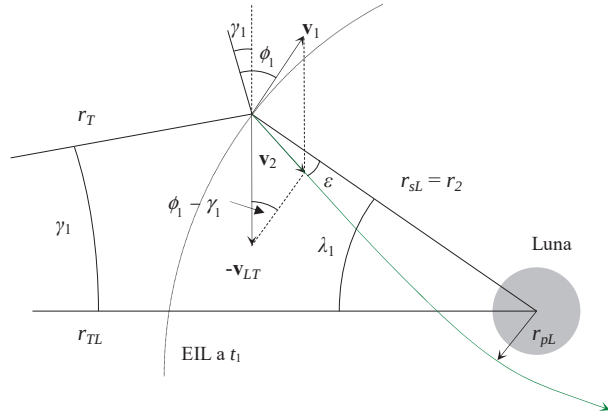


Fig. 2.27. Punto de enlace cónico

Así pues, se eligen tres valores de condiciones iniciales y una condición de llegada. Un conjunto conveniente es r_0 , v_0 , ϕ_0 y λ_1 , donde este último, especifica el punto en el cual la trayectoria geocéntrica cruza la EIL. Dadas esas cantidades iniciales, se calculan las condiciones de llegada r_1 , v_1 , ϕ_1 y γ_1 , (Fig. 2.27).

Asumiendo que la trayectoria geocéntrica es directa y que el arribo lunar ocurre antes del apogeo (AP) en la elipse de transferencia, la energía y el momento angular iniciales son $\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}$ y $h = r_0 v_0 \cos \phi_0$. De la ley de cosenos, el radio r_1 de arribo lunar es:

$$r_1 = \sqrt{r_{TL}^2 + r_{sL}^2 - 2r_{TL}r_{sL} \cos \lambda_1}$$

La velocidad y el ángulo de trayectoria de vuelo de arribo lunar se siguen de la conservación de la energía y del momento, $v_1 = \sqrt{2(\mathcal{E} + \mu/r_1)}$ y $\cos \phi_1 = h/r_1 v_1$, donde $0^\circ \leq \phi_1 \leq 90^\circ$, pues el arribo ocurre antes del AP. Finalmente, por la geometría:

$$\gamma_1 = \text{Arctan} \left(\frac{r_{sL}}{r_1} \sin \lambda_1 \right)$$

El tiempo que dura el viaje del punto de la expulsión translunar al arribo sobre la EIL, $t_1 - t_0$, puede ser calculado una vez determinadas las anomalías verdaderas θ_0 y θ_1 vistas desde la tierra. De la ecuación cónica orbital $\text{Cos } \theta_{1,0} = (p - r_{1,0}) / e r_{1,0}$, empleando en seguida la ecuación (2.28), $\text{Cos } E_{1,0} = (e + \text{Cos } \theta_{1,0}) / (1 + e \text{Cos } \theta_{1,0})$, se tiene que:

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[E_1 - E_0 - e (\text{Sen } E_1 - \text{Sen } E_0) \right] \quad (2.166)$$

La Luna se mueve un ángulo $\omega_L(t_1 - t_0)$ entre el punto de expulsión translunar y la llegada a la EIL, donde ω_L es la velocidad angular Lunar alrededor de la tierra. Para un modelo simplificado Tierra-Luna se tiene $\omega_L = 2.649 \times 10^{-6}$ rads/seg^[9]. Por lo tanto, el ángulo de apertura translunar es:

$$\gamma_0 = \theta_1 - \theta_0 - \gamma_1 - \omega_L (t_1 - t_0) \quad (2.167)$$

Las ecuaciones (2.166) y (2.167) deben ser calculadas hasta que se hayan verificado los valores apropiados de r_0 , v_0 , ϕ_0 y λ_1 que resulten en una trayectoria de aproximación lunar satisfactoria. De no ser así, deben ser reajustados mediante un procedimiento de prueba y error. Nótese además, que la energía en la expulsión geocéntrica está determinada completamente por r_0 y v_0 . El radio geocéntrico de arribo a la EIL r_1 está determinado por λ_1 . Por lo tanto, si la trayectoria no es suficientemente energética para alcanzar el punto de enlazado (EIL), v_1 quedará indeterminada.

Si el vehículo logra entrar a la EIL donde únicamente se asume que la gravedad lunar tiene influencia sobre él, es necesario ahora considerar la luna como el cuerpo central, y encontrar la velocidad y dirección del vehículo respecto a la Luna, (Fig. 2.27).

Además, atendiendo a la ecuación cónica orbital, es posible determinar que dicha trayectoria tendrá forma hiperbólica dentro de la EIL, forma que a su vez deberá ser reajustada a otra forma determinada.

Suponiendo que r_2 es el radio inicial selenocéntrico del vehículo, entonces $r_2 = r_{sL}$. La velocidad del vehículo respecto al centro lunar es: $v_2 = v_1 - v_{LT}$, donde v_{LT} es la velocidad de la Luna con respecto a la Tierra, la cual, para un modelo simplificado Tierra-Luna: $v_{LT} = 1.018 \text{ km/seg}^{[2]}$. La velocidad de arribo selenocéntrico v_2 puede ser obtenida aplicando leyes de cosenos, $v_2^2 = v_1^2 + v_{LT}^2 - 2v_1^2 v_{LT}^2 \text{ Cos}(\phi_1 - \gamma_1)$. El ángulo ε define la dirección de la velocidad inicial selenocéntrica. Para un impacto justo en el centro de la Luna, se requiere $\varepsilon = 0$, (Fig. 2.27). Igualando las componentes perpendiculares de $\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{r}_2$, y resolviendo para ε :

$$\varepsilon = \text{Arctan} \left[\frac{v_{LT}}{v_2} \text{Cos } \lambda_1 - \frac{v_1}{v_2} \text{Cos}(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \right]$$

Conocidas las condiciones selenocéntricas iniciales v_2 y ε , se prosigue al cálculo de condiciones terminales en otros puntos sobre la trayectoria. Dependiendo de la naturaleza de la misión, hay tres casos de interés en el punto periselene (o periluna) r_{pL} :

- 1.- Impacto lunar, esto es $r_{pL} < r_L = 1738 \text{ km}^{[2]}$.
- 2.- Inserción Orbital, en cuyo caso habrá de calcularse el incremento de velocidad requerido en r_{pL} para producir una órbita circular o elíptica.
- 3.- Vuelo circumlunar, en donde se habrá de calcular lo requerido para librar nuevamente la EIL y generar un curso de vuelta a la Tierra.

Por lo tanto, las condiciones del punto periselene son determinantes en cuanto a la misión lunar preestablecida. Estas son, $r_{pL} = p/(1+e)$ y $v_{pL}^2 = 2(E + \frac{\mu_L}{r_{pL}})$, donde^[9] $\mu_L = 4.90287 \times 10^3 \text{ km/seg}^2$, es el parámetro gravitacional lunar. De no ser satisfactorias ambas condiciones, deben ser reajustados los valores iniciales r_0 , v_0 , ϕ_0 o bien λ_1 . Para el caso 2, suponiendo que se está orbitando la Luna, y se desea regresar a la Tierra, es necesario entonces, seguir in procedimiento similar para escapar de la EIL aplicando impulso justo antes de llegar al punto de la cara opuesta lunar vista desde la tierra, de

modo que la asíntota de la hipérbola reflectada apunte en dirección de la tierra. Esto será analizado con mayor detalle en el Cap 4.

Todo lo anterior se ha hecho asumiendo que la órbita geocéntrica de transferencia se encuentra en el mismo plano orbital lunar. Sin embargo, esta condición no siempre está disponible, ya que la inclinación orbital lunar varía de 18.2° a 28.5° cada 18.6 años^[2] con respecto al ecuador terrestre. El centro Espacial Kennedy se encuentra a 28.5° de latitud, por lo que ahí solo se podrá aprovechar la inclinación orbital lunar en su máximo, el cual ocurrió a principios de 1969 y ocurrirá nuevamente en el 2024^[23].

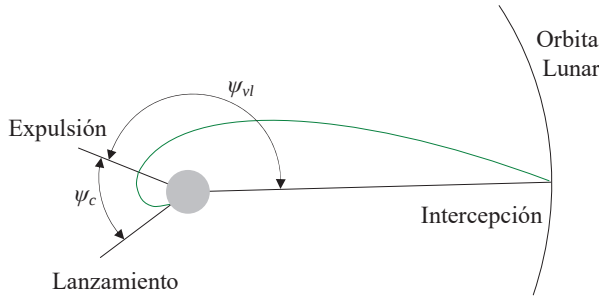


Fig. 2.28. Ángulo de barrido total

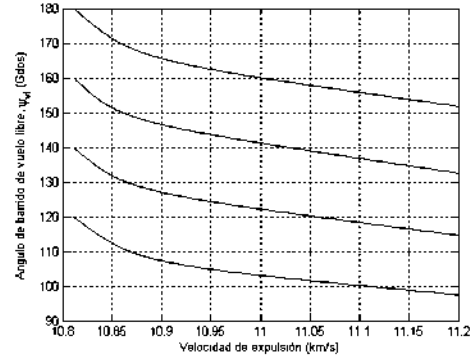


Fig. 2.29. Requerimientos de expulsión.

Es posible enviar misiones a la luna en fechas distintas a las preestablecidas, salvo que la órbita geocéntrica de transferencia será no coplanar con la órbita lunar. Un parámetro importante en la determinación de fechas de lanzamientos aceptables es el ángulo total de barrido^[2], $\psi_t = \psi_c + \psi_{vl}$, el cual consta del viaje angular del lanzamiento al punto de expulsión ψ_c y el ángulo de barrido de viaje libre ψ_{vl} , (Fig. 2.28). Mientras el primero se elige de forma arbitraria, el segundo depende de las condiciones iniciales r_0 , v_0 , y ϕ_0 . Se observan también (Fig. 2.29) los valores más apropiados (por cuestiones de mínima energía) siendo para una expulsión translunar, los que $\psi_{vl} \approx 180^\circ$.

Debido a que la latitud del sitio de lanzamiento es conocida, es posible determinar la declinación del vehículo después de haber recorrido ψ_t en función del azimut β_0 , (Fig. 2.30). Aplicando leyes de cosenos para la trigonometría esférica:

$$\delta_1 = \text{Arcsen}(\text{Sen } \delta_0 \text{ Cos } \psi_t + \text{Cos } \delta_0 \text{ Sen } \psi_t \text{ Cos } \beta_0) \quad (2.168)$$

Los valores de β_0 sólo están permitidos (a una latitud de 28.5° en Cabo Kennedy) para el rango de 40° a 115° además de que la latitud lunar varía entre 25.8° a -25.8°, se observa que al graficar la ecuación (2.168) bajo estas restricciones, (Fig. 2.31), las áreas sombreadas corresponden a condiciones de lanzamiento imposibles.

La leyenda inferior muestra distintos valores azimutales β_0 . Algo interesante es que para un ángulo de barrido de 180° es posible sólo si la intercepción ocurre en su máxima declinación sur. Además, esto cumple también los requerimientos de mínima energía (Fig. 2.29). Una vez determinada la declinación lunar en la intercepción, el siguiente paso es buscar la fecha adecuada para ese valor. Si las condiciones de fases lunares son importantes, es necesario considerarlas de acuerdo al Almanaque Americano de Efemérides Náuticas (AAEN), el cual muestra las fases lunares, y la aparente declinación y ascensión recta.

Suponiendo que se elige t_1 como la intercepción lunar atendiendo a los datos anteriores. Entonces, la ascensión recta lunar en ese instante es α_1 , (Fig. 2.30). La diferencia en la ascensión recta entre el lanzamiento y la intercepción es^[2]:

$$\Delta\alpha = \text{Arccos}\left(\frac{\text{Cos } \psi_t - \text{Sen } \delta_0 \text{ Sen } \delta_1}{\text{Cos } \delta_0 \text{ Cos } \delta_1}\right)$$

Luego, el instante para el lanzamiento es, $t_0 = t_1 - t_t = t_1 - (t_{vl} + t_c)$.

La ascensión recta del sitio de lanzamiento α_0 es simplemente el tiempo sideral local, $\alpha_0 = \theta_g + \lambda_E$, donde θ_g es el tiempo sideral de Greenwich, y λ_E es la longitud este del sitio de lanzamiento.

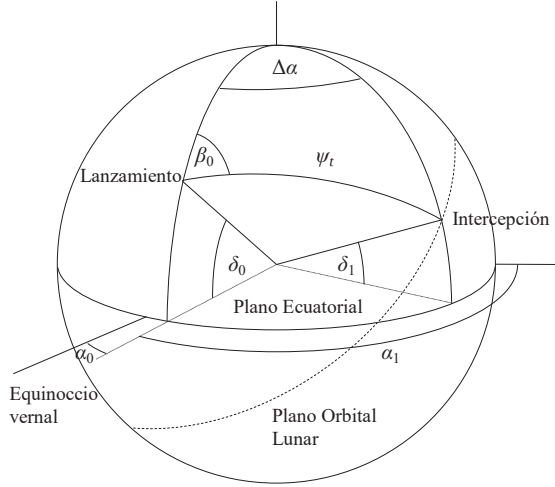


Fig. 2.30.
Relaciones angulares lunares interceptoras

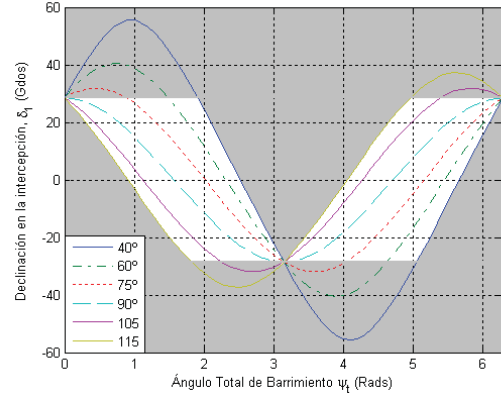


Fig. 2.31.
Declinación interceptora vs ángulo de barrido.

2.4.2.2. Transferencias Interplanetarias

De forma análoga (al caso anterior), supóngase por simplicidad, que las órbitas de la Tierra y Marte son coplanares (sobre la eclíptica) y circulares (no son muy excéntricas).

Entonces, la energía de la órbita de transferencia de Hohmann es $\mathcal{E}_t = -\mu_s / (r_1 + r_2)$, donde μ_s es el parámetro gravitacional del Sol, $r_1 = r_{TS}$ es el radio orbital del planeta de partida (la Tierra), y $r_2 = r_{MS}$ es el radio orbital del planeta de llegada (Marte), (Fig. 2.32).

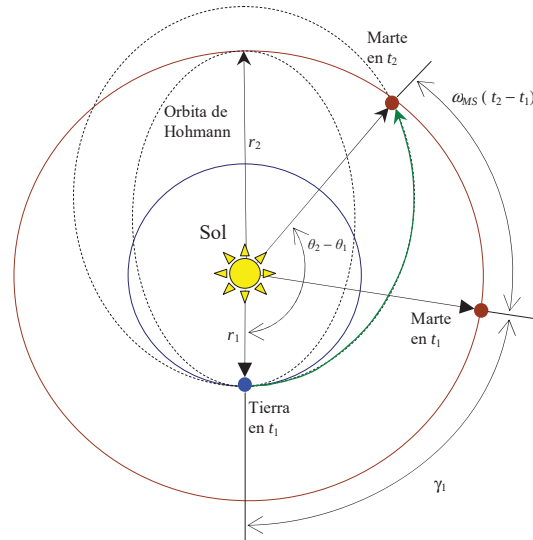


Fig. 2.32. Transferencias Tierra-Marte

La velocidad de apertura transmarte requerida en el punto de expulsión heliocéntrica es $v_1^2 = 2(\frac{\mu_s}{r_1} + E_t)$. Por lo tanto, sabiendo que v_{TS} es la velocidad de la tierra respecto al sol, $\Delta v_1 = v_1 - v_{TS}$. Para una transferencia que no es de Hohmann, Δv_1 queda determinada por las ecuaciones (2.114) y (2.115) para el caso heliocéntrico.

Si se desea que el vehículo intercepte al planeta objetivo (digamos Marte) en un punto anterior al afelio de la elipse de transferencia (Fig. 2.32), es necesaria la determinación del ángulo fase de apertura inicial γ_1 .

La diferencia angular entre ambos planetas es $\theta_{TS} - \theta_{MS}$ (o bien $\theta_2 - \theta_1$), la diferencia de sus anomalías verdaderas respecto al Sol, que de acuerdo a la ecuación de trayectorias cónicas son $\theta_{1,2} = (p - r_{1,2})/er_{1,2}$. Además, el planeta objetivo se moverá un ángulo $\omega_{MS}(t_2 - t_1)$, donde ω_{MS} es la velocidad angular de Marte respecto al Sol, mientras el vehículo se encuentra viajando. Así, el ángulo de fase es: $\gamma_1 = (\theta_2 - \theta_1) - \omega_{MS}(t_2 - t_1)$.

La buena elección de este valor depende de forma limitante, de las fechas disponibles para la misión (ventanas de lanzamiento), las cuales pueden ser consultadas en el AAEN basándose en las longitudes heliocéntricas de los planetas.

En caso de perderse una ventana de lanzamiento, si se desea conseguir otra, es necesario esperar para la misma, una cantidad de tiempo llamada Periodo Sinódico τ_y , el cual se define como el tiempo requerido para que cualquier ángulo fase de apertura se repita nuevamente. También en el Apéndice^[A7], se muestran estos periodos sinódicos.

Si en un tiempo τ_{yT} la tierra se mueve un ángulo $\omega_{TS}\tau_y$ y el objetivo avanza $\omega_{MS}\tau_y$ entonces el avance angular excederá mutuamente 2π rads para que el ángulo de fase se repita. Así, $\omega_{TS}\tau_y - \omega_{MS}\tau_y = \pm 2\pi$, por lo tanto: $\tau_y = 2\pi / (\omega_{TS} - \omega_{MS})$. Todo lo anterior se ha hecho sin considerar las esferas de influencia terrestre y marciana. Debido a que esfera

de influencia terrestre EIT, tiene radio $r_{sT} \approx 10^6$ km, Δv_1 vista desde el sistema geocéntrico es precisamente, la velocidad de exceso hiperbólica, $v_{\infty T}$,

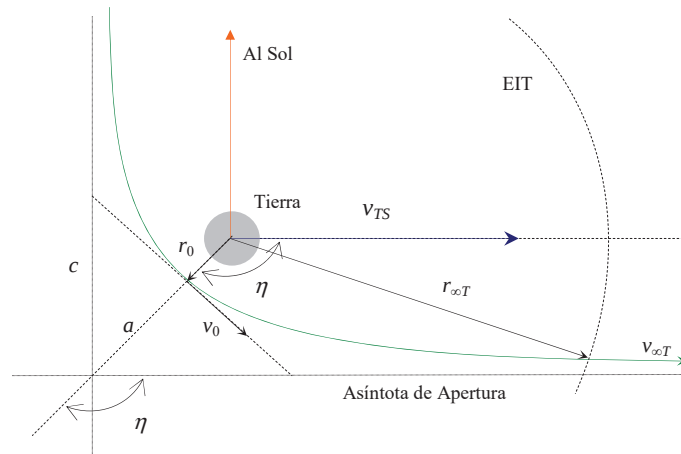


Fig. 2.33. Hipérbola de Escape

Como la energía $\mathcal{E}$ es constante a lo largo de la hipérbola de escape, (Fig.2.33) es posible emplearla en dos puntos r_0 y $r_{\infty T}$ para obtener la velocidad de expulsión transnorte, de escape requerida en r_0 , $v_0^2 = v_{\infty T}^2 + 2\mu/r_0 = \Delta v_1^2 + 2\mu/r_0$.

Cabe mencionar que dicha cantidad es muy sensible a errores, ya que al diferenciarla manteniendo r_0 constante, el error relativo en $v_{\infty T}$ puede ser expresado para una transferencia de Hohmann^[2], $v_{\infty T} = 2.98$ km/s y $v_0 = 11.6$ km/s, como:

$$\frac{dv_{\infty T}}{v_{\infty T}} = \left(\frac{v_0}{v_{\infty T}} \right)^2 \frac{dv_0}{v_0} = 15.2 \frac{dv_0}{v_0}$$

Esto es, que un error del 1% en la velocidad de expulsión, resulta en un 15.2% en la velocidad de exceso hiperbólica. Asumiendo que la expulsión ocurre en el perigeo, el ángulo entre el vector de velocidad terrestre (ésta debe ser paralela a la velocidad orbital terrestre v_{TS}) y el radio vector de expulsión (Fig. 2.33) está dado por la ecuación:

$\cos \eta = -a/c = -1/e$, donde la excentricidad e se obtiene directamente de las condiciones de expulsión $\mathcal{E}_{p0}$ y h_{p0} .

No es necesario que la hipérbola de apertura geocéntrica sea coplanar a la eclíptica, basta con que la asíntota sea paralela al vector de velocidad terrestre, de este modo, los sitios permitidos para dicha expulsión forman un círculo sobre la superficie Fig. 2.34. Una vez que el vehículo ha librado la EIT, Fig. 2.33, y ha recorrido alguna órbita de transferencia heliocéntrica (Fig. 2.32), éste habrá de encontrarse después, con la esfera de influencia del planeta objetivo, EIM (Fig. 2.35), la órbita de transferencia heliocéntrica cruzará la órbita del planeta a un ángulo ϕ_2 (Fig. 2.35). Si $\mathcal{E}_t$ y h_t son la energía y momento angular de dicha órbita, entonces $V_2^2 = 2(\mu_\odot/r_2 + \mathcal{E}_t)$ y $\phi_2 = \text{Arccos}(h_t/r_2 V_2) = h_t/(r_2 V_2)$. Si v_3 es la velocidad del vehículo respecto al planeta objetivo entonces, $v_3^2 = V_2^2 + V_{MS}^2 - 2V_2 V_{MS} \cos \phi_2$, donde V_{MS} es la velocidad orbital heliocéntrica del planeta objetivo (Marte). Además, $\text{Sen } \theta = (V_2/v_3) \text{ Sen } \phi_2$.

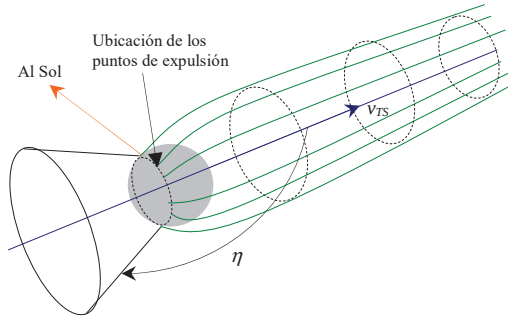


Fig. 2.34.

Envoltura hiperbólica de trayectorias de apertura

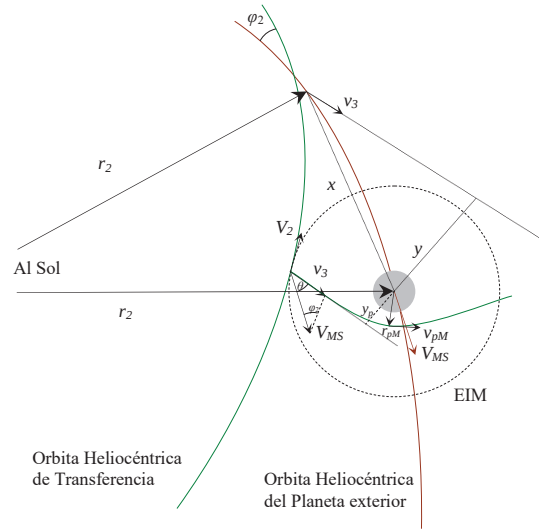


Fig. 2.35.

Punto de enlace cónico y parámetro interceptor

Si se planea enviar una prueba que impacte justo al centro aparente del planeta sobre la superficie, una buena elección en γ_1 permitirá dicha acción, de modo que el vector de velocidad relativa $\mathbf{v}_3$ sea dirigido hacia su objetivo en forma aproximada de una trayectoria lineal hiperbólica. Es decir, el parámetro interceptor $y_p = 0$. Por otro lado, si se desea sobrevolar el objetivo, entonces el ángulo fase de apertura deberá ser ajustado de acuerdo a dos consideraciones posibles. Una es que el vehículo cruce la órbita del planeta objetivo ya sea por delante, reduciendo la velocidad orbital del vehículo, o bien la otra es sobrevolar por detrás, dándole un mayor impulso. Esta última se utiliza al enviar pruebas interplanetarias no tripuladas, para adquirir mayor energía. Por ejemplo, la sonda espacial Cassini-Huygens. Ambos casos se logran bajo la condición $y_p < r_{sM}$ y serán tratados a fondo en el Cap4.

Para evitar un posible error en la trayectoria del vehículo de modo que el vector relativo $\mathbf{v}_3$ cruzara por encima de la EIM, (Fig. 2.35), siendo x la distancia de desviación, entonces el ángulo fase de apertura transmarte deberá ser: $\gamma_1 = \theta_2 - \theta_1 - \omega_{MS}(t_2 - t_1) \pm x/r_2$, donde los signos $\pm$ se refieren a los casos en que cruce por detrás o por delante del objetivo respectivamente. El parámetro interceptor es, $y = x \text{ Sen}\theta$. Una vez conocido este valor, es posible saber ya sea la distancia más próxima o el radio del periapsis. Partiendo de la EIP, la velocidad relativa $\mathbf{v}_3$ es equivalente a la velocidad de exceso hiperbólica marciana $v_{\infty M}$, la cual empleando nuevamente la ecuación de energía da:

$$v_3^2 = v_{\infty M}^2 = 2\mathcal{E} \quad (2.169)$$

El momento angular es $h = y_p v_3$. Además, $p = h^2/\mu_M$ y $e^2 = 1 + 2Eh^2/\mu_M^2$, donde μ_M es el parámetro gravitacional del planeta objetivo (Marte). La distancia $r_{pM} = p/(1 + e)$. Debido a que el momento angular se conserva:

$$v_{pM} = \frac{y_p v_e}{r_{pM}} \quad (2.170)$$

Igualando la Ecuación de energía en los puntos del enlazado cónico con la ecuación (2.169), y en el punto perimarte:

$$\mathcal{E} = \frac{v_{\infty M}^2}{2} = \frac{v_{pM}^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_{pM}} \quad (2.171)$$

Resolviendo para v_{pM} de la energía (2.171) y sustituyéndola en la razón (2.170) se tiene:

$$y_p = \frac{r_{pM}}{v_3} \sqrt{v_3^2 + \frac{2\mu_M}{r_{pM}}} \quad (2.172)$$

Es importante apreciar que tomando el radio perimarte igual al radio planetario r_M , se llega a un parámetro interceptor particular llamado, parámetro de impacto b o sección transversa de colisión efectiva:

$$b = \frac{r_M}{v_3} \sqrt{v_3^2 + \frac{2\mu_M}{r_M}}$$

Por lo tanto, el parámetro interceptor para una captura gravitacional queda restringido a $b < y_p < r_s$, donde r_s es el radio de la esfera de influencia en cualquier cuerpo carente o no, de atmósfera. Más aún, algunos planetas que tienen atmósfera, es posible sacar ventaja de ella para producir un frenado aerodinámico y permitir el ingreso de alguna sonda (como las, Spirit, Opportunity o Huygens en Titán, etc.). Esto nos lleva a considerar un blanco db mucho más pequeño que el anterior llamado corredor de ingreso, y es tal que $b < b + db < y_p < r_{sM}$, (Fig. 2.36). No obstante, al tratar aspectos concernientes al reingreso de vehículos tripulados (dados en el Cap4.), las condiciones de reingreso definen un corredor todavía más angosto (dentro de db) llamado corredor de reingreso.

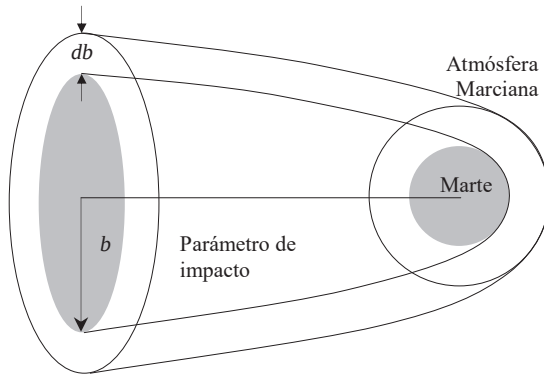


Fig. 2.36.
Corredor de Ingreso

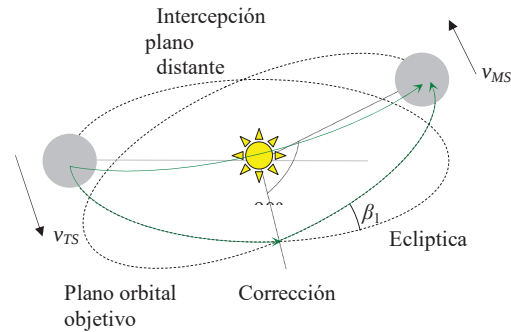


Fig. 2.37. Correcciones de
Curso medio y plano distante

Hasta el momento se ha hecho la suposición de que todas las órbitas planetarias son coplanares. Esto es en parte cierto ya que en la mayoría de los casos, sus inclinaciones orbitales son pequeñas. Sin embargo, para obtener una intercepción más óptima es posible^[2] enviar al vehículo a través de una órbita de transferencia coplanar con la eclíptica (trayectoria del Sol vista desde la Tierra), y después, a medio curso, se aplica un impulso para ajustar β_2 que es justo la inclinación de plano orbital del planeta objetivo (del mismo modo como fue tratado en las secciones previas), (Fig. 2.37).

Existen otros métodos igualmente válidos en los que la corrección puede ser antes o después de medio curso, aunque sin duda el más conveniente por cuestiones de practicidad y optimización en requerimientos de mínima energía es la denominada transferencia heliocéntrica de plano distante^[2] (Fig 2.37), que consiste en mandar el vehículo sobre un plano orbital directo, calculando las condiciones iniciales necesarias para que el vehículo intercepte y sincronice al planeta objetivo de forma simultánea, sujeto todo a una configuración tridimensional de trayectorias orbitales. Esto tiene la gran ventaja de que ya no sería requerido ningún impulso adicional a medio curso, sino simplemente la expulsión transplanetaria. Dicho proceso es posible mediante el llamado problema de Lambert que será dado posteriormente.

Capítulo 3

Postura y Control Aeroespacial

Anteriormente se hizo toda la descripción del vuelo aeroespacial tratando al vehículo como si se tratara de una partícula y debido a que las condiciones necesarias para un desempeño adecuado del vehículo sujeto a efectos aerodinámicos (presentes sólo en el ascenso de cohetes y/o reingreso de cápsulas) o sin ellos (vuelo orbital Cap.2), nos lleva ahora a tratar al vehículo como cuerpo y de este modo proporcionar las condiciones necesarias que nos permitan tener un control óptimo en medios aerodinámicos y no aerodinámicos, siendo en estos primeros los que determinan de forma definitiva las condiciones iniciales para la cónica orbital mientras que los segundos, se requieren para la ejecución de maniobras orbitales mediante el control de postura del vehículo en el espacio.

3.1. El Referencial Móvil.

Supóngase que un sistema de referencia S es girado alrededor de su origen con respecto a alguno de sus ejes rectangulares, o bien, respecto a algún otro eje e , (Fig. 3.1) de modo que ahora se tiene un sistema S' , el cual puede ser obtenido mediante alguna transformación de coordenadas.

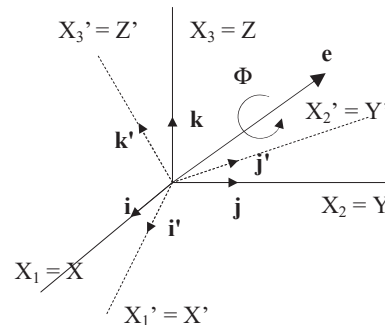


Fig. 3.1. Eje de Euler y ángulo principal

La transformación más simple, (Cap. 2) consiste de rotaciones elementales determinadas por los ángulos de Euler alrededor de los ejes rectangulares. Sin embargo, existen valores para los cuales dichas formas de representar rotaciones quedan

indeterminadas^[9] (Ref.: curso de Met. Mat de la Física I, Suárez, M., 2009). Por lo tanto conviene usar una reformulación del modelo el cual nos permita aplicarlo a cualquier situación práctica. Una de ellas, es cuando se asigna el sistema referencial móvil, fijo respecto a un cuerpo, para determinar su postura en el espacio.

3.1.1. Eje de Euler y Ángulo Principal

Considérese la rotación de ángulo principal Φ en un sistema de coordenadas alrededor de un eje llamado de Euler^[9]: $\mathbf{e} = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$, (Fig. 3.1). Un vector $\mathbf{A}$ expresado en ambos sistemas sería:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Tomando productos escalares $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}'$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}'$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}'$ al vector de la ecuación (3.1), se tiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz de rotación necesaria para la transformación de coordenadas. Del mismo modo, $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}'$. No obstante, $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$, y $\mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{1}$. Es decir, la matriz $\mathbf{C}$ es ortogonal.

Considérense ahora, los eigenvectores $\mathbf{c}$ y eigenvalores λ de la matriz de rotación. Es decir, $\mathbf{C} \mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$. Multiplicando por el conjugado hermitiano $(\mathbf{C} \mathbf{c})^H (\mathbf{C} \mathbf{c}) = \bar{\lambda} \lambda \mathbf{c}^H \mathbf{c}$, y como $\mathbf{C}$ es real y satisface la condición de ortogonalidad se tiene^[9], $(\bar{\lambda} \lambda - 1) \mathbf{c}^H \mathbf{c} = 0$ o bien, como $\mathbf{c} \neq 0$ se sigue que $\lambda \bar{\lambda} = 1$. Esto es, todos los eigenvalores tienen magnitudes unitarias. Como $\mathbf{C}$ es una matriz de 3×3 , entonces tiene 3 eigenvalores, y como los complejos

conjugados se dan en pares, al menos uno es real. Supongamos $\lambda = 1$, entonces, $\mathbf{C}\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1$, es decir, $\mathbf{c}_1$ es invariante bajo rotaciones. Luego, por la propiedad de ortogonalidad^[9] se tiene, $\mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_1 = 1$, y por lo tanto, $\mathbf{c}_1$ es un vector unitario. Este corresponde al llamado eje de Euler:

$$\mathbf{e} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (3.3)$$

Los otros dos eigenvalores $\lambda_{2,3}$ son complejos conjugados: $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\beta} = \cos \beta \pm i \sin \beta$, así se tiene que $\mathbf{C}\mathbf{c}_{2,3} = e^{\pm i\beta} \mathbf{c}_{2,3}$. El segundo miembro denota una rotación $\pm \beta$ de los eigenvectores, y ya que $\mathbf{C}$ es ortogonal, se sigue que los eigenvectores son mutuamente perpendiculares, de modo que $\beta = \Phi$. Este es el llamado ángulo principal^[9]. Una forma simple para obtenerlo es mediante la Traz de $\mathbf{C}$:

$$\text{Trz} \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 c_{ii} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi$$

o bien

$$\Phi = \arccos \left[\frac{1}{2} (\text{Trz} \mathbf{C} - 1) \right] \quad (3.4)$$

De este modo, si la matriz de transformación es:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_3(\psi) \mathbf{C}_2(90^\circ) \mathbf{C}_1(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) & 0 \\ \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, es posible determinar el eje de Euler $\mathbf{e} = e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}$ de acuerdo a la ecuación (3.3) teniendo en cuenta que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \pm \frac{1 - \cos(\phi - \psi)}{\sqrt{3 + \cos(\phi - \psi)^2 - 4 \cos(\phi - \psi)}} \\
e_2 &= \frac{\sin(\phi - \psi)}{1 - \cos(\phi - \psi)} e_1 \\
e_3 &= -e_1
\end{aligned}$$

El signo apropiado para e_1 se obtiene de la ecuación (3.4) de modo que, para este caso en particular (ya sin alguna singularidad):

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi - \psi}{2}$$

3.1.2. Representación con Cuaternios

Debido a que la representación $(\mathbf{e}, \Phi)$ está libre de singularidades^[9], existe otra representación muy útil que puede ser deducida. Esto es, mediante parámetros simétricos de Euler, o simplemente, cuaternios^{[19],[26]}. Un cuaternio representa un número complejo generalizado $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q})$, el cual está formado por una parte escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ y una vectorial $\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ representan la base del sistema la cual cumple:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\
\mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\
\mathbf{ki} &= -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \\
\mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i}
\end{aligned}$$

Dicha representación puede ser deducida^[26] en términos de $\mathbf{e}$ y Φ de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}) = \left(\cos \frac{\Phi}{2}, \hat{\mathbf{e}}_i \sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Está claro que el cuaternio de la ecuación (3.5) satisface la condición: $\sum_{i=1,3} q_i^2 = 1$.

Con esto diremos que $\mathbf{q}$ es un quaternion unitario de rotación^[26], y cuyas rotaciones finitas nos conduce a una expresión simple en términos de operaciones de quaternios:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{r}\mathbf{q} \quad (3.6)$$

donde, las componentes de $\mathbf{q}$ están expresadas en el sistema del vector bajo la rotación, y de ahí que las componentes de $\mathbf{p}$ también lo estén. Con ello, para n rotaciones sucesivas:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_n \mathbf{C}_{n-1} \cdots \mathbf{C}_1 \mathbf{r} = \overline{\mathbf{q}_n \mathbf{q}_{n-1} \cdots \mathbf{q}_1} \mathbf{r} \mathbf{q}_n \mathbf{q}_{n-1} \cdots \mathbf{q}_1 \quad (3.7)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.7) y (3.6) son útiles también en cambios de base entre dos sistemas. Suponiendo que se tiene uno inercial $\mathcal{N}$ y otro relativo $\mathcal{B}$, entonces para estos dos sistemas se tienen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_i &= \mathbf{q} \hat{\mathbf{n}}_i \bar{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{n}}_i &= \bar{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{b}}_i \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esto para $i=1,2,3$. Luego:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{i=1}^3 \rho_i \hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{q} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \hat{\mathbf{n}}_i \right) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \mathbf{p} \bar{\mathbf{q}} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.5) nos determina el quaternion que a su vez depende de los valores de la matriz de rotación. Por otro lado, dado un quaternion es posible obtener la matriz de rotación correspondiente empleando la ecuación (3.6) para un vector dado $\mathbf{r}' = (0, \mathbf{r}')$. Aplicando álgebra de quaternios^[A2]:

$$\begin{aligned} (0, \mathbf{r}') &= (q_0, \mathbf{q})(0, \mathbf{r})(q_0, -\mathbf{q}) \\ &= (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}, q_0 \mathbf{r} + \mathbf{q} \times \mathbf{r})(q_0, -\mathbf{q}) \\ &= \left(0, (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{r} + 2\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) + 2q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Por la equivalencia con la matriz $\mathbf{C}$ de la ecuación (3.6) se sigue que:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{q}_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\mathbf{S}(\mathbf{q})$$

donde:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Es una matriz simétrica-oblicua, con la propiedad $\mathbf{S}(\mathbf{q})^T = -\mathbf{S}(\mathbf{q})$. Por lo tanto^[20]:

$$\mathbf{C} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & q_0q_3 + q_1q_2 & q_1q_3 - q_0q_2 \\ q_1q_2 - q_0q_3 & \frac{1}{2}(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & q_0q_1 + q_2q_3 \\ q_0q_2 + q_1q_3 & q_2q_3 - q_0q_1 & \frac{1}{2}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Reemplazando la ecuación (3.5) en la expresión matricial (3.11), se obtiene la llamada, formula de Euler^{[9][19]}:

$$\mathbf{C} = (\cos \Phi) \mathbf{I} + (1 - \cos \Phi) \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \mathbf{S}(\mathbf{e}) \sin \Phi \quad (3.12)$$

La ecuación (3.5) junto con la condición $\sum_{i=1,3} q_i^2 = 1$ también nos permite generar^[19] cuaternios a partir de los elementos de la matriz de rotación $\mathbf{C} = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ q_1 &= \frac{c_{23} - c_{32}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{c_{31} - c_{13}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{c_{12} - c_{21}}{4q_0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

No obstante, si $q_0 \rightarrow 0$, las ecuaciones (3.13) quedan indeterminadas. Para resolver esto notamos que los elementos de la diagonal de la ecuación (3.11) que se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 \\ c_{22} &= 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 \\ c_{33} &= 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lo cual nos conduce a tres conjuntos más de relaciones de cuaternios:

$$\begin{array}{lll} q_0 = \frac{c_{23} - c_{32}}{4q_1} & q_0 = \frac{c_{31} - c_{13}}{4q_2} & q_0 = \frac{c_{12} - c_{21}}{4q_3} \\ q_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}} & q_1 = \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_2} & q_1 = \frac{c_{31} + c_{13}}{4q_3} \\ q_2 = \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_1} & q_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - c_{11} + c_{22} - c_{33}} & q_2 = \frac{c_{23} + c_{32}}{4q_3} \\ q_3 = \frac{c_{31} + c_{13}}{4q_1} & q_3 = \frac{c_{23} + c_{32}}{4q_2} & q_3 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - c_{11} - c_{22} + c_{33}} \end{array}$$

Con el fin de obtener la mayor precisión posible, de estas se recomienda aquella cuyo denominador sea mayor, es decir, el máximo argumento del radical correspondiente.

3.1.2.1. Secuencias Eulerianas con Cuaternios

Empleando todo lo que se ha visto hasta el momento es posible determinar las secuencias de Euler mediante cuaternios. Volviendo a las matrices de rotaciones eulerianas (Cap 2.):

$$\mathbf{C}_{ijk}(\phi, \vartheta, \psi) = \mathbf{C}(\psi, \mathbf{a}_k) \mathbf{C}(\vartheta, \mathbf{m}_j) \mathbf{C}(\phi, \mathbf{n}_i)$$

donde $i = 1, 2, 3$, al igual que para j y k , y usando la ecuación (3.5):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\phi &= \mathbf{r}(\phi, \mathbf{n}_i) = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{n}_i \sin \frac{\phi}{2} \right) \\
\mathbf{r}_\vartheta &= \mathbf{r}(\vartheta, \mathbf{m}_j) = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \mathbf{m}_j \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
\mathbf{r}_\psi &= \mathbf{r}(\psi, \mathbf{a}_k) = \left(\cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{a}_k \sin \frac{\psi}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Debido a que la parte escalar no es afectada por las rotaciones, siendo $\mathbf{m}_j = \mathbf{r}_\phi \mathbf{n}_j \bar{\mathbf{r}}_\phi$ y $\mathbf{a}_k = \mathbf{r}_\vartheta \mathbf{r}_\phi \mathbf{n}_k \overline{\mathbf{r}_\vartheta \mathbf{r}_\phi}$ los ejes intermedios de las rotaciones, al ser sustituidos en la ecuación (3.15) y aplicando álgebra de cuaternios:

$$\mathbf{r}_{ijk}(\phi, \vartheta, \psi) = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{n}_i \sin \frac{\phi}{2} \right) \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \mathbf{m}_j \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left(\cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{a}_k \sin \frac{\psi}{2} \right) \tag{3.16}$$

desarrollando el producto junto con la definición de cuaternio de la ecuación (3.5), se tiene^[19] para la secuencia simétrica euleriana:

$$q_{ijk}(\phi, \vartheta, \psi) = \begin{matrix} 0 \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} C \vartheta C(\phi + \psi) \\ C \vartheta S(\phi + \psi) \\ S \vartheta C(\phi - \psi) \\ \alpha_{ij} S \vartheta S(\phi - \psi) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Mientras que para la asimétrica:

$$q_{ijk}(\phi, \vartheta, \psi) = \begin{matrix} 0 \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} C \psi C \vartheta C \phi - \alpha_{ij} S \psi S \vartheta S \phi \\ C \psi C \vartheta S \phi + \alpha_{ij} S \psi S \vartheta C \phi \\ C \psi S \vartheta C \phi - \alpha_{ij} S \psi C \vartheta S \phi \\ S \psi C \vartheta C \phi + \alpha_{ij} C \psi S \vartheta S \phi \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

donde, α_{ij} está dada como en el Capítulo 2 (§ 2.1.1), salvo la notación de las funciones trigonométricas que para este caso son: $S \phi = \sin \frac{\phi}{2}$, $C \phi = \cos \frac{\phi}{2}$, etc.

Por otro lado, expresando dos factores de la ecuación (3.16) en términos de cuaternios $\mathbf{pq}$, únicamente se requiere del producto entre ellos para obtener la siguiente regla de composición, fácilmente obtenida^[9] aplicando álgebra de cuaternios^[A2]:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \mathbf{pq} = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3.1.2.2. Parámetros de Rodríguez

Se define el parámetro Rodríguez $\boldsymbol{\rho}$ (o vector de Gibbs) del cuaternio $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}$ como:

$$\boldsymbol{\rho} \doteq \frac{\mathbf{q}}{q_0} = \mathbf{e} \tan \frac{\Phi}{2} \quad (3.20)$$

luego, la regla de composición para el parámetro $\boldsymbol{\rho}$ puede ser deducida^[9] de la regla de composición dada en la expresión (3.19) como:

$$\boldsymbol{\rho}'' = \frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}}{1 - \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}'} \quad (3.21)$$

Al usar la fórmula de Euler, se deduce^[9] la siguiente matriz de rotación en términos de los parámetros de Rodríguez:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}))(\mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (3.22)$$

donde $\mathbf{S}$ está dada de forma similar como en la ecuación (3.10). Es claro que los parámetros de Rodríguez se pueden obtener en términos de los elementos de la matriz de rotación $\mathbf{C}$ mediante:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \text{Trz} \mathbf{C}} \begin{pmatrix} c_{23} - c_{32} \\ c_{31} - c_{13} \\ c_{12} - c_{21} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Sin embargo, nótese que el uso de la ecuación (3.20), está limitada a valores $\Phi < 180^\circ$ únicamente, ya que hay singularidad en $\Phi = n\pi$, ($n = 1, 2, \dots$). Con la finalidad de extender su aplicación, se define el parámetro de Rodriques modificado, PRM:

$$\mathbf{p} \doteq \frac{\mathbf{q}}{1 + q_0} = \mathbf{e} \tan \frac{\Phi}{4} \quad (3.24)$$

el cual, es no singular para rotaciones $\Phi < 360^\circ$, que corresponden a la mayoría de los casos posibles al orientar vehículos aeroespaciales. La matriz de rotación puede ser expresada^[9] en términos de los PRM como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{4(\mathbf{p}^T \mathbf{p} - 1)}{(1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p})^2} \mathbf{S}(\mathbf{p}) + \frac{8}{(1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p})^2} \mathbf{S}^2(\mathbf{p}) \quad (3.25)$$

Al sustituir la relación entre los parámetros Rodrigues y PRM, $\mathbf{p}(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{p}) = 2\mathbf{p}$ en la ecuación (3.21), se tiene^[9] la siguiente regla de composición:

$$\mathbf{p}'' = \frac{(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{p}' + (1 - \mathbf{p}'^T \mathbf{p})\mathbf{p} - 2\mathbf{p}' \times \mathbf{p}}{1 + (\mathbf{p}^T \mathbf{p})(\mathbf{p}'^T \mathbf{p}') - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'} \quad (3.26)$$

3.1.3. Cinemática de Postura

Dadas las formas para orientar algún sistema de coordenadas (secciones previas), es posible atender a la evolución del mismo con respecto al tiempo. Suponiendo que los ejes varían en el tiempo, $X_i = X_i(t)$ y $X'_i = X'_i(t + \Delta t)$, (Fig. 3.1) se tiene que la matriz de rotación del sistema giratorio con respecto al fijo también es función del tiempo $\mathbf{C}(t)$.

Considérese una rotación infinitesimal $\Phi = \Delta\Phi$, medida durante un intervalo de tiempo Δt , el cual por ser muy pequeño, se tendrá que el eje principal $\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ permanecerá casi inalterado, siendo posible hacer las aproximaciones, $\text{Cos } \Delta\Phi \approx 1$ y $\text{Sen } \Delta\Phi \approx \Delta\Phi$. Con esto se tiene, usando^[19] la fórmula de Euler (3.12) lo siguiente:

$$\mathbf{C}(\Delta t) \approx 1 - \Delta\Phi \mathbf{S}(\mathbf{e}) \approx 1 - \mathbf{S}(\Delta\phi_{\mathbf{e}}) \quad (3.27)$$

donde, $\mathbf{S}$ está dada de forma similar a la ecuación (3.10). Si $\mathbf{C}(\Delta t)$ denota la rotación requerida para producir $\mathbf{C}(t + \Delta t)$ a partir de $\mathbf{C}(t)$, entonces $\mathbf{C}(t + \Delta t) = \mathbf{C}(\Delta t)\mathbf{C}(t)$, lo cual, junto con la ecuación (3.27):

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}(t + \Delta t) - \mathbf{C}(t)}{\Delta t} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{C}(t) \doteq -\mathbf{S}\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_{\mathbf{e}}}{\Delta t}\right)\mathbf{C}(t) \quad (3.28)$$

donde $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el vector de velocidad angular, y cuyas componentes están resueltas únicamente en el instante t del sistema giratorio. La ecuación (3.28) también se puede deducir^[9] diferenciando en ambos lados de la expresión $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{R}}$:

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \hat{\mathbf{R}} \quad (3.29)$$

Sabiendo que el producto vectorial puede ser escrito como $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}$, al ser tratado así junto con $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{R}}$, la ecuación (3.29) se convierte en:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})^T \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{C}^T \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{R}} \quad (3.30)$$

Nótese que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ es resuelta a lo largo de los ejes del sistema giratorio (OXYZ). Dicha elección es bastante útil, ya que permite ser asignado de modo fijo, a un sistema de cuerpo rígido (Secciones posteriores).

La ecuación diferencial (3.28), para la matriz de rotación tiene dada una función $\boldsymbol{\omega}(t)$ y una condición inicial $\mathbf{C}(0)$. Con esto, debe ser resuelta para $\mathbf{C}(t)$ con la finalidad de dar la descripción evolutiva del sistema. Es posible mostrar que dicha solución satisface las condiciones de ortogonalidad $\frac{d}{dt} \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \frac{d}{dt} \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0$. Por lo tanto $\mathbf{C}(t)$ habrá de satisfacerse para cualquier otro $t \neq 0$. Nótese que si los elementos para la velocidad angular están dados constantes y en el sistema giratorio, entonces la matriz ecuación diferencial (3.28) es un conjunto de ecuaciones algebraicas con coeficientes constantes, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$, y puede ser fácilmente resuelta empleando $\mathbf{C}(t + \Delta t) = \mathbf{C}(\Delta t) \mathbf{C}(t)$ la cual es válida únicamente para un intervalo de tiempo infinitesimal, Δt el cual a su vez, tendrá que ser dividido en pequeños subintervalos Δt_k infinitesimales de igual longitud, y aplicarla a cada uno de ellos comenzando con $\mathbf{C}(t_0)$. Dicha aproximación se le llama marcha-temporal^[9]:

$$\mathbf{C}(\Delta t_k + t_{k-1}) = \mathbf{C}(\Delta t_k) \mathbf{C}(t_{k-1}) = \mathbf{C}(t_k - t_{k-1}) \mathbf{C}(t_{k-1}) \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.31)$$

El tamaño de Δt_k debe ser mucho más pequeño que el ángulo de rotación, dependiendo de su valor de acuerdo a la tolerancia deseada para satisfacer la condición de ortogonalidad. De este modo, se tienen una gran cantidad de productos matriciales. Más aún, si cada uno de los elementos de $\boldsymbol{\omega}(t)$ es una función del tiempo, la obtención de la matriz de rotación final requerirá un enorme número de ecuaciones diferenciales que habrán de ser resueltas para la obtención de $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$. Por esto, es más conveniente emplear otro tipo de

representaciones de posturas evolutivas como ángulos de Euler, cuaternios o parámetros modificados.

3.1.3.1. Evoluciones Eulerianas

Considérese la representación $C_3(\phi)C_1(\vartheta)C_3(\psi)$ (Cap.2) que es utilizada ampliamente en la postura de vehículos espaciales ($0 < \vartheta < \pi$). Entonces^[19]:

$$C_3(\phi)C_1(\vartheta)C_3(\psi) = \begin{pmatrix} C\psi C\phi - S\psi S\phi C\vartheta & S\psi C\phi + C\psi S\phi C\vartheta & S\phi S\vartheta \\ -C\psi S\phi - S\psi C\phi C\vartheta & -S\psi S\phi + C\psi C\phi C\vartheta & C\phi S\vartheta \\ S\psi S\vartheta & -C\psi S\vartheta & C\vartheta \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

En términos de las razones angulares de Euler, $\dot{\phi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ es:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\vartheta}\mathbf{i}' + \dot{\psi}\mathbf{K} \quad (3.33)$$

donde, $\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \phi - \mathbf{j} \sin \phi$ y $\mathbf{K} = \mathbf{i} \sin \phi \sin \vartheta + \mathbf{j} \cos \phi \sin \vartheta + \mathbf{k} \cos \vartheta$ son los ejes intermedios resultantes de las rotaciones que, al ser sustituidos en la ecuación (3.33):

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \phi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

o bien^[9]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \vartheta & -\sin \phi \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \phi \cos \vartheta & -\cos \phi \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Por lo tanto, se tiene una relación cinemática entre los ángulos de Euler, y la velocidad angular en la forma de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, no lineales. Su resolución se obtiene aplicando algún método de integración numérica que permita la obtención de las evoluciones eulerianas durante un intervalo de tiempo finito partiendo de condiciones iniciales.

3.1.3.1.1. Método de Integración: Runge Kutta

De este hay dos que son, incrementos fijos y variables. Primero, considérese la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y, t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Para calcular y_{n+1} en $t_{n+1} = t_n + h$, ($n = 0, \dots$) dado y_n se integra (ec anterior) en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, haciendo uso de la regla del trapecio:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt \simeq y_n + \frac{1}{2} h [f_1(y_n, t_n) + f_2(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})] \quad (3.37)$$

donde $\bar{y}_{n+1} = y_n + hf_1(y_n, t_n)$ es la estimación para y_{n+1} correspondiente a otro método de integración llamado método de Euler^[15].

Por lo tanto, ya escrito en forma global, se tiene el llamado método de Runge-Kutta de 2º Orden:

$$RK^2 \begin{cases} k_1 = hf_1(y_n, t_n) \\ k_2 = hf_2(y_n + k_1, t_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

Suponiendo que el segundo miembro de la expresión (3.37) es aproximado por la regla de 1/3 de Simpson, es posible obtener esquemas globales Runge-Kutta de 3^{er} y 4^o Orden respectivamente:

$$RK^3 \begin{cases} k_1 = hf_1(y_n, t_n) \\ k_2 = hf_2(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_3 = hf_3(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \quad RK^4 \begin{cases} k_1 = hf_1(y_n, t_n) \\ k_2 = hf_2(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_3 = hf_3(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_4 = hf_4(y_n + k_3, t_n + h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

Considerando un conjunto de n ecuaciones diferenciales, la ecuación (3.36), puede ser rescrita en forma vectorial como, $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, con $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ expresando de forma general, el algoritmo de Runge-Kutta de incremento fijo h , orden p con s etapas como:

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_0 + h \sum_{k=0}^{s-1} a_k \mathbf{f}_k + O(h^{p+1}) \quad (3.38)$$

donde $O(h^{p+1})$ es la parte de la serie que se omite y se llama, error de truncamiento^[9]. En general, se dice que cualquier algoritmo es de orden p cuando su error de truncamiento es de orden $p+1$. Las etapas s se refieren al número de evaluaciones de la funcional requerida en cada incremento. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \mathbf{f}(y_0, 0) \\ \mathbf{f}_k &= \mathbf{f}\left(y_0 + h \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} \mathbf{f}_i, b_k h\right) \quad (k = 1, 2, \dots, s-1) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Los coeficientes a_k , b_k , y c_{ki} se eligen de modo tal que la solución sea idéntica a una aproximación de serie de Taylor del mismo orden dada por:

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_0 + h \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^{k-1} \mathbf{f}}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t_0, \mathbf{y}_0} \quad (3.40)$$

Con la intención de improvisar una mayor eficiencia, el incremento temporal h se hace variable en la ecuación (3.38), de modo tal que la precisión del siguiente algoritmo de orden más alto sea alcanzada en cada incremento. La solución de orden más alto de r etapas está dado por:

$$\hat{\mathbf{y}}(h) = \mathbf{y}_0 + h \sum_{k=0}^{r-1} \hat{a}_k \mathbf{f}_k + O(h^{p+2}) \quad (3.41)$$

Donde las evaluaciones funcionales son ahora llevadas a cabo como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0) \\ \mathbf{f}_k &= \mathbf{f} \left(\mathbf{y}_0 + h \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} \mathbf{f}_i, b_k h \right) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde el número de etapas m en la solución es $m = \text{Max}(s, r)$. El incremento temporal es tomado de modo tal que el error de truncamiento $\Delta_{TE} = \hat{\mathbf{y}}(h) - \hat{\mathbf{y}}(h)$ permanezca por debajo de una tolerancia específica Δ .

Es decir, si $\Delta_{TE} = Kh^{p+1}$, es posible elegir el siguiente incremento temporal h' en base a la tolerancia dada, asumiendo que K permanece constante sobre el siguiente incremento $h' = h(\Delta/\Delta_{TE})^{1/(1+p)}$, $\Delta_{TE} \leq \Delta$. Así, es alcanzada una precisión de orden $(p + 1)$ con un método de orden p . Por esta razón, los métodos de integración numérica Runge-Kutta con incrementos variables son referidos también como métodos de orden $p(p + 1)$.

k	0	1	2	3	4	5
a_k	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	--
$\hat{a}_k$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
b_k	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{13}$	1	$\frac{1}{2}$
c_{k0}	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{439}{216}$	$-\frac{8}{27}$
c_{k1}	--	--	$\frac{9}{32}$	$-\frac{7200}{2197}$	-8	-2
c_{k2}	--	--	--	$\frac{7296}{2197}$	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{3544}{2565}$
c_{k3}	--	--	--	--	$-\frac{845}{4104}$	$\frac{1859}{4104}$
c_{k4}	--	--	--	--	--	$-\frac{11}{40}$

Tabla 3.1. Coeficientes del algoritmo de Runge-Kutta 4(5)

El algoritmo Runge-Kutta 4(5) implementado como una función intrínseca ode45.m en MATLAB, emplea ciertos coeficientes (Tabla 3.1) para el error de truncamiento^[9]:

$$\Delta_{TE} = h \left(-\frac{1}{360} \mathbf{f}_0 + \frac{128}{4275} \mathbf{f}_2 + \frac{2197}{75240} \mathbf{f}_3 - \frac{1}{50} \mathbf{f}_4 - \frac{2}{55} \mathbf{f}_5 \right)$$

Retomando el tema de evoluciones eulerianas, se tiene que para una orientación $\mathbf{C}_3(\phi)\mathbf{C}_1(\vartheta)\mathbf{C}_3(\psi)$ tal que digamos: $\psi = 81.1266^\circ$ $\vartheta = \phi = 162.2532^\circ$ y con velocidad angular dada por $\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{10}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ rad/s, empleando dicho integrador numérico es posible resolver numéricamente la ecuación (3.35), y así, obtener el resultado en intervalos de tiempo de 1 y 5 segundos, (Fig. 3.2):

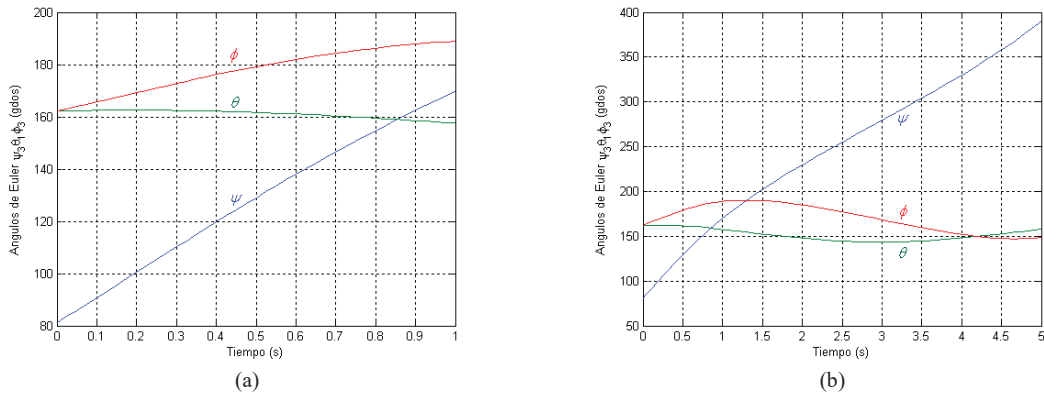


Fig.(3.2) Evoluciones Eulerianas durante, (a) 1 segundo y (b) 5 segundos.

Nótese que la singularidad para $\vartheta=180^\circ$, jamás cruza por dicho valor. Esto se debe a la variación de la velocidad angular. Por lo tanto, esta forma de representar evoluciones angulares, es mucho más práctica que la presentada anteriormente, ya que el número de pasos necesarios para la iteración es bastante menor al requerido en la ecuación (3.31).

3.1.3.2. Evoluciones Quaterniarias

Los cuaternios tienen la ventaja de ser no singulares. Es por esto que son empleados en aplicaciones de la dinámica del vuelo moderno.

Considérese un vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ sujeto a una rotación finita $\boldsymbol{\omega}$ cuya razón de cambio es^[25]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.43)$$

Más aún, disponiendo a $\mathbf{r}$ fijo en el sistema relativo $\mathcal{B}$ respecto al inercial $\mathcal{N}$, se tiene al diferenciar la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \hat{\mathbf{n}}_i \right) \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \dot{\hat{\mathbf{n}}}_i \right) \bar{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \hat{\mathbf{b}}_i \right) \mathbf{q} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \bar{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \dot{\hat{\mathbf{b}}}_i \right) \mathbf{q} \bar{\dot{\mathbf{q}}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}} \left[\mathbf{q} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \hat{\mathbf{n}}_i \right) \bar{\mathbf{q}} \right] + \left[\mathbf{q} \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i \dot{\hat{\mathbf{n}}}_i \right) \bar{\mathbf{q}} \right] \mathbf{q} \bar{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}} \mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{q} \bar{\dot{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Donde, en el tercer miembro se ha hecho el cambio de base dado por (3.8), mientras que en el cuarto y quinto se ha acomodado de modo que $\boldsymbol{\rho} \mathbf{q} = \mathbf{q} \mathbf{r}$, para llegar a una forma expresada en términos de $\mathbf{r}$ tal como se da en la ecuación (3.9).

Dado que los cuaternios no conmutan, es posible mostrar que para dos de ellos, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}$, se tiene, $\boldsymbol{\rho} \mathbf{r} - \mathbf{r} \boldsymbol{\rho} = (0, 2\mathbf{p} \times \mathbf{r})$. Dicha forma es parecida a la obtenida en la ecuación (3.44), la cual se logra haciendo por analogía, que la parte escalar del producto de cuaternios $\dot{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}$ sea cero. Sin embargo, es fácil mostrar que para todo cuaternio $\mathbf{q}$, $q_0 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q} = -\bar{\mathbf{q}}$ de

modo que $\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}\dot{\bar{\mathbf{q}}}$, quedando para la ecuación (3.44), $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{r} - \mathbf{r}\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} = (0, 2\mathbf{r} \times \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})$, que al ser igualada con la ecuación (3.43), se tiene por analogía que, $\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}$. Dicho producto se puede expandir para obtener^[19]:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = 2Q_{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.45)$$

El primer renglón de $Q_{\mathcal{N}}$ debe ser elegido tal que $Q_{\mathcal{N}} \in \text{SO}(4)$, donde $\text{SO}(4)$ denota el grupo simétrico de orden cuatro, o bien, el grupo de matrices $M_{4 \times 4}$ tales que $M^{-1} = M^T$.

Las restricciones $\Sigma q_{i=0,3} = 1$, así como $\frac{d}{dt}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = 2(\Sigma q_i \dot{q}_i) = 0, i=0,3$ proveen la relación correcta. Esto para disponer de su relación inversa dada de dos formas equivalentes:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}Q_{\mathcal{N}}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Omega_{\mathcal{N}} \begin{Bmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde ahora:

$$\Omega_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el sistema relativo, se aplica el cambio de base, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{q}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(2\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}})\mathbf{q} = 2\bar{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$, donde, el quaternion $\mathbf{q}$ es medido respecto a $\mathcal{N}$. De igual modo, dicho producto se puede expandir:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = 2Q_{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.47)$$

Lo requerido para que $Q_{\mathcal{B}} \in \text{SO}(4)$, se obtiene de modo similar que para la ecuación (3.45), pudiendo expresar también su relación inversa:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} Q_{\mathcal{B}}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

donde:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se desea reducir el número de ecuaciones diferenciales cinemáticas haciendo uso de cuaternios, es posible hacerlo empleando los parámetros de Rodrigues modificados $\mathbf{p}$. A pesar de que su singularidad $\Phi = 360^\circ$, limita sus aplicaciones a rotaciones $\Phi < 360^\circ$, tiene un alto rango de validez en aplicaciones de vuelos aeroespaciales.

Empleando la definición de PRM de la ecuación (3.24) así como la propiedad $\sum q_{i=0,3} = 1$ en la ecuación (3.48), se tiene^[9] después de aplicar algo de álgebra:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{S}(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{p}^T + \frac{1}{2}(1 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T) \right] \quad (3.49)$$

Dicha ecuación, es posible resolverla empleando algún método de integración numérica.

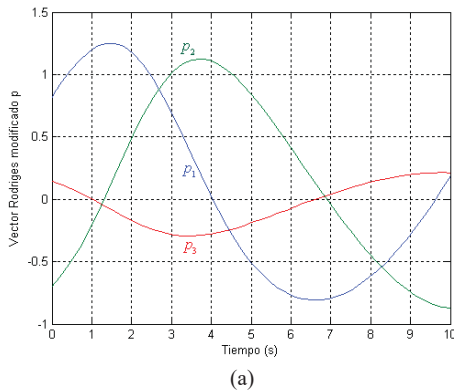


Fig. 3.3. Evolución de los parámetros de Rodríguez modificados

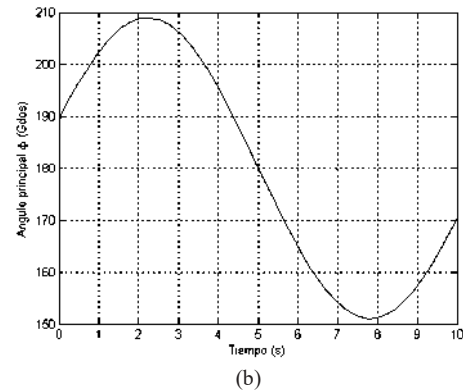


Fig. 3.4. Evolución del Angulo Principal

Retomando el caso mostrado en la figura 3.2, se tiene ahora empleando los mismos datos para los parámetros modificados, lo mostrado en las figuras 3.3 y 3.4 durante 10 s.

3.1.4. Movimiento general de un Sistema Móvil

Hasta el momento, se disponen ya de los fundamentos necesarios para comprender el movimiento de cinemática rotacional de algún sistema referencial móvil que bien pudiera ser asignado fijo respecto a algún cuerpo en el espacio. En seguida se proporciona la teoría necesaria para complementar dicho movimiento con el movimiento traslacional dando como resultado, un movimiento general espacial del sistema inercial e inercial respecto a alguna partícula en el espacio.

3.1.4.1. Derivada vectorial general

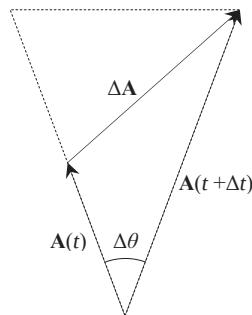


Fig. 3.5. Derivada vectorial

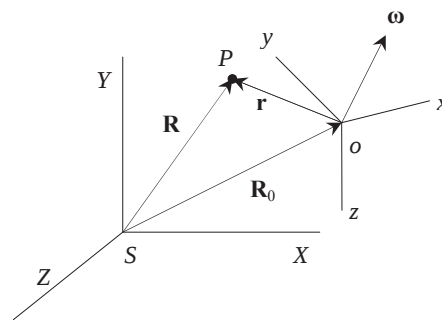


Fig. 3.6. Referencial relativo móvil

La derivada de un vector $\mathbf{A}$ con respecto al tiempo se define^[9] como:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \doteq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \quad (3.50)$$

donde $\Delta \mathbf{A}$ representa el cambio total del vector $\mathbf{A}$ tanto en magnitud como en dirección (Fig. 3.5). Además es posible ver que el vector final de $\mathbf{A}(t)$ es $\mathbf{A}(t + \Delta t)$, a la vez que si $\Delta t \rightarrow 0$, entonces $\Delta \theta \rightarrow 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{A} = \left[\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \right] \frac{A(t)}{A(t)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}(t) \Delta t \quad (3.51)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de $\mathbf{A}$, el cual está dirigido hacia adentro del plano de la figura 3.6 y cuya magnitud es $\omega = d\theta/dt$. Sustituyendo la ecuación (3.51) en la expresión (3.50) se tiene:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \frac{\mathbf{A}}{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3.52)$$

donde el primer término representa la derivada del vector en magnitud, mientras que el segundo lo es debido a la rotación.

3.1.4.2. Cinemática del referencial móvil

Considérese una partícula P , localizada en un instante por el vector $\mathbf{R}$ respecto al sistema $SXYZ$ (Fig. 3.6). Suponiendo que otro sistema móvil ($OXYZ$) gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cuyo origen está determinado por $\mathbf{R}_0$, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula con respecto al sistema móvil. Luego, al derivar dicha expresión se tiene, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{R}}_0(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)$. El segundo término estaría dado de acuerdo a la ecuación (3.52) de modo que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.53)$$

la cual, relaciona la velocidad total de la partícula con del sistema móvil relativo. Luego, para obtener la aceleración, se deriva la ecuación (3.53):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

En el segundo paso se ha sustituido la ecuación (3.53) y simplificado después. Por lo tanto^[24], se tiene para la aceleración:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.54)$$

Al igual que antes, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}_0$ son las aceleraciones total, respecto al sistema inercial y traslacional respecto al móvil respectivamente. El segundo término es la aceleración lineal de la partícula P respecto al sistema móvil. El tercero es la aceleración total debida a la aceleración angular $d\boldsymbol{\omega}/dt$ del sistema móvil, mientras que el cuarto, es la aceleración de coriolis causada por la velocidad lineal $\partial \mathbf{r}/\partial t$ de la partícula respecto al sistema móvil. El último término es la aceleración centrípeta que actúa en dirección radial hacia el origen O .

3.2. Propiedades del Cuerpo General

Ahora serán dadas algunas propiedades del cuerpo general asignado al sistema relativo (oxyz), atendiendo a las leyes de Newton, así como sus relaciones de Energía y Momento angular junto con el sistema inercial (OXYZ) el cual viene a representar el sistema geocéntrico inercial (Cap. 2).

3.2.1. Movimiento Rotacional y Traslacional

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula de masa constante m localizada por un vector $\mathbf{R}$ con respecto a un sistema inercial ($OXYZ$) es:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \quad (3.55)$$

Considerando un cuerpo de masa constante m , constituido de masas elementales ∂m , tales que $\sum \partial m = m$, y aplicando la segunda y tercera (las fuerzas actuantes internas entre cada par de partículas son iguales y opuestas, de modo que suman cero) leyes de Newton a cada una ellas, se tiene:

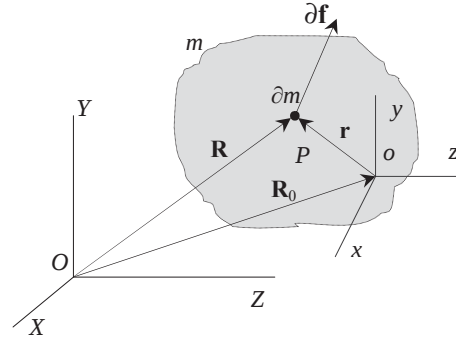


Fig. 3.7. Cuerpo de Partículas

$$\mathbf{f} = \sum \partial \mathbf{f} = \sum \partial m \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{v} \partial m \quad (3.56)$$

Eligiendo un punto fijo en el cual un sistema de referencia ($OXYZ$) está fijo en el cuerpo, (Fig. 3.7), entonces la velocidad interna de una partícula elemental sería $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}(t)$, la cual, al ser sustituida en la ecuación (3.56) se tiene:

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}(t)] \partial m = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_0) + \frac{d^2}{dt^2} \sum \mathbf{r} \partial m \quad (3.57)$$

Todo cuerpo tiene un punto especial asociado llamado centro de masa cm , tal que el momento de la masa es $\sum \mathbf{r} \partial m = 0$, alrededor de dicho punto que no necesariamente habrá de pertenecer al cuerpo. Por lo tanto, si o es el centro de masa se tiene la ecuación que gobierna el movimiento traslacional del cuerpo:

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \quad (3.58)$$

Este movimiento puede ser considerado como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto, al igual que si fuera ahí donde actúa la fuerza neta aplicada. Esto forma las bases para la idealización del cuerpo como partícula.

Dada una partícula de masa ∂m , aplicándole producto cruz por $\mathbf{r}$ en ambos lados de la ecuación (3.56) se tiene, $\mathbf{r} \times \partial \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \partial m \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \partial m \dot{\mathbf{v}}(t)$ y sumando sobre todas las partículas recordando que las torcas internas se cancelan (tercera ley de Newton^[24]) se llega a:

$$\mathbf{M} = \sum \left(\mathbf{r} \times \partial m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (3.59)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{M} \doteq \Sigma(\mathbf{r} \times \partial \mathbf{f})$ es la torca externa neta alrededor de o . Luego, sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}(t)$ en la ecuación (3.59):

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r} \times \partial m \mathbf{v}) - \left(\sum \frac{d\mathbf{r}}{dt} \partial m \right) \times \mathbf{v}_0 \quad (3.60)$$

Si el punto está fijo en el espacio, entonces $\mathbf{v}_0 = 0$, o bien, si O es el centro de masa se tiene $\frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{r} \partial m = 0$ lo cual, nos da como torca externa, la ecuación del movimiento rotacional del cuerpo alrededor ya sea del punto fijo o , o del cm:

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r} \times \partial m \mathbf{v}) \quad (3.61)$$

3.2.2. Cuerpo de Masa Variable

Considérese un cuerpo de masa $m - \Delta m$ (Fig. 3.8), donde Δm es la masa de partículas expulsadas. Sean o , y o' los centros de masa del sistema y del cuerpo respectivamente. Sean también, $\mathbf{v}'_0$ y $\mathbf{v}_R$ la velocidad del centro de masa del cuerpo, y la velocidad relativa del centro de masa del cuerpo expulsado con respecto a o' . Suponiendo que no hay cambio de momento lineal en el sistema^[9], se tiene:

$$m\mathbf{v}_0 = (m - \Delta m)\mathbf{v}'_0 + \Delta m\mathbf{u} = (m - \Delta m)(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0) + \Delta m(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R) \quad (3.62)$$

la cual, al ser resuelta para $\mathbf{v}_0$ se tiene, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0 + \frac{\Delta m}{m}\mathbf{v}_R$. Sustituyendo esto en la ecuación (3.58):

$$\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} + \Delta m\frac{d\mathbf{v}_R}{dt} + \mathbf{v}_R\frac{d\Delta m}{dt} \quad (3.63)$$

o bien, la ecuación (3.63) en la expresión (3.62):

$$\mathbf{f} = (m - \Delta m)\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} + \Delta m\frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} + \mathbf{v}_R\frac{d\Delta m}{dt} \quad (3.64)$$

El primer término, describe el movimiento del cuerpo primario de masa $m - \Delta m$ en términos de la aceleración de su centro de masa. La suma de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema está dada por $\mathbf{f}$, y los otros dos términos corresponden al opuesto del impulso de reacción, $\mathbf{f}_T$ causado por el cuerpo primario debido a la expulsión de masa^[9].

Por lo tanto, la fuerza neta externa es:

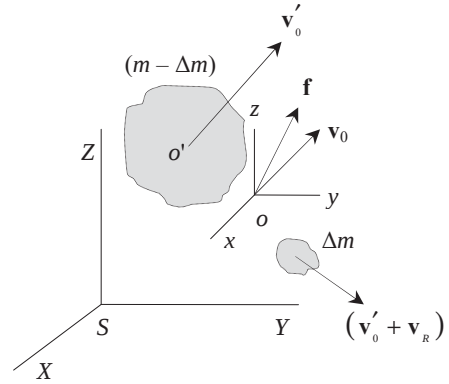


Fig. 3.8. Cuerpo de masa variable

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_T = (m - \Delta m)\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} \quad (3.65)$$

3.2.3. Energía y Momento Partícula-Cuerpo

Defínase el trabajo δw realizado por una fuerza $\mathbf{f}$, actuando sobre una partícula como, $\delta w = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{R}$, donde $\delta \mathbf{R}$ es el desplazamiento resultante de la fuerza. Luego, el trabajo total w_{12} realizado por $\mathbf{f}$ cuando la partícula es desplazada de $\mathbf{R}_1$ a $\mathbf{R}_2$ es:

$$w_{12} = \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{R} \quad (3.66)$$

Existen fuerzas cuyo trabajo es independiente de la trayectoria $\mathbf{R}(t)$, es decir, depende únicamente de las posiciones inicial $\mathbf{R}_1$ y final $\mathbf{R}_2$. Tales fuerzas se les conocen como conservativas^[25]. En la naturaleza pocas fuerzas son conservativas, por ejemplo, la gravedad. De modo que el trabajo neto para regresar a la partícula a su posición original es cero:

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

La integral anterior se satisface si $\mathbf{f}$ queda determinada por el gradiente de la función escalar $\Phi(\mathbf{R})$ como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}) = m \nabla \Phi(\mathbf{R})^T = m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{R}} \right)^T \quad (3.67)$$

donde Φ , tiene la propiedad de que si se satisface en la ecuación (3.67) dependiente de forma explícita en t , $\Phi(\mathbf{R}, t)$, entonces $\mathbf{f}$ es no conservativa. Ejemplo de tales casos son las que presentan disipación de energía como la fricción. Sustituyendo la ecuación (3.58) en la expresión (3.66) notando que $d\mathbf{R} = \mathbf{v} dt$ se tiene la diferencia en las energías cinéticas:

$$w_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = K_1 - K_2 \quad (3.68)$$

Si la fuerza es conservativa, se sustituye la ecuación (3.67) en la ecuación (3.66), y se tiene la diferencia en las energías potenciales:

$$w_{12} = m \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{R}} \right)^T \cdot d\mathbf{R} = m [\Phi(\mathbf{R}_2) - \Phi(\mathbf{R}_1)] = U_2 - U_1 \quad (3.69)$$

Igualando las ecuaciones (3.68) y (3.69), $K_2 - K_1 = U_2 - U_1$ o bien, $E = K - U = \text{cte}$. Es decir, la energía total de una partícula influenciada por una fuerza conservativa se conserva. Si es no conservativa, la energía total no se conserva y se tiene, $\dot{w}(t) \doteq \dot{K}(t) = m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}(t)$, que es^[9] potencia = cambio en K . La energía cinética para un sistema de N partículas (Cap. 1) es, $K = \frac{1}{2} \sum (m_i v_i^2)_{i=1,N}$. Sabiendo que $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i$ donde $\mathbf{v}_0$ es la velocidad del centro de masa y $\mathbf{u}_i$ es la velocidad de la partícula i -ésima respecto al centro de masa:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i v_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i u_i^2 \right) \\ &+ \mathbf{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{1}{2} \left(m v_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i u_i^2 \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde, el último término se anula por definición de centro de masa. Si el cuerpo es rígido, entonces el segundo término se deberá únicamente a la rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa, tal como será tratado en las secciones posteriores.

Si todas las fuerzas actuantes en las partículas son conservativas, entonces la energía potencial de un sistema conservativo es:

$$-U = -\sum_{i=1}^N U_i^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N U_{ij} \quad (3.71)$$

donde, $-U_i^{(e)}$ es la energía potencial asociada con la fuerza externa $\mathbf{f}_i^{(e)}$ y $-U_{ij}$ es la energía potencial debida a la fuerza interna $\mathbf{f}_{ij}$ entre las partículas i y j , (Cap. 1). Se sabe además por definición de momento angular que $\mathbf{H} \doteq \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}$ es la posición de P relativa a o , y $\mathbf{v}$ es medida respecto al sistema inercial. De modo que al diferenciarla:

$$\mathbf{M} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) \quad (3.72)$$

Esto es, la torca $\mathbf{M}$ alrededor de o (el cual no necesariamente es estacionario). Un momento angular cero implica vectores de posición y velocidad paralelos entre sí. Para o estacionario se tiene, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, y por lo tanto:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (3.73)$$

De aquí que, si la torca aplicada a un punto fijo es cero, entonces $\frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0$, lo cual implica que $\mathbf{H}$ es un vector constante, (Cap. 1).

3.3. Dinámica de Postura

El movimiento rotacional de un vehículo en general, gobierna su postura instantánea, la cual evidentemente depende de la cinemática rotacional. Considerando un cuerpo rígido, con un marco referencial fijo a él, éste podría ser usado para representar su postura. Sin embargo, en tal caso, la velocidad angular está sujeta ahora, a las leyes de la dinámica rotacional que a su vez lo es, de acuerdo a la distribución de masa del cuerpo.

Debido a que el movimiento traslacional puede ser tratado simplemente como una traslación de ejes (Fig. 3.7), donde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}(t)$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}}(t)$, se analizará de manera profunda lo concerniente al movimiento rotacional.

3.3.1. Ecuaciones de Euler para el Movimiento Rotacional

Para calcular el momento alrededor de un punto o (el cual puede ser estacionario o el cm), es necesario tratar al cuerpo como una colección de partículas elementales ∂m y tomar el límite $\partial m \rightarrow 0$ de la ecuación (3.59), para obtener su equivalente en forma integral:

$$\mathbf{M} = \int \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dm = \frac{d}{dt} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \int \mathbf{v} \times \mathbf{v} dm + \int \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dm = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (3.74)$$

donde, en el penúltimo miembro se ha obtenido la derivada asumiendo que m es constante. En la práctica, tomando a o como centro de masa se tendrá un referencial llamado, sistema de cuerpo fijo^[9]. Además, si el cuerpo es rígido en dicho sistema, se tiene que la velocidad y aceleración total (inercial) de un punto arbitrario localizado por $\mathbf{r}$ relativo a O está dada por las ecuaciones (3.53) y (3.54) anulando los términos de la velocidad lineal $\partial \mathbf{r} / \partial t$ de la partícula respecto al sistema móvil dando:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

También equivale a localizar los puntos o y P para un cuerpo rígido, en el sistema referencial relativo (Fig. 3.6). La $\mathbf{v}_0$ denota la velocidad del centro de masa o y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular con respecto al sistema de cuerpo.

Empleando la definición del momento angular así como de $\mathbf{v}$ por la ecuación (3.75) se tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 dm + \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (3.76)$$

donde, el segundo término se anula debido a que $\int \mathbf{r} dm = 0$. Resolviendo los vectores en el sistema de cuerpo con ejes unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$ tales que:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ \mathbf{H} &= H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}\end{aligned}\tag{3.77}$$

que al ser sustituidas en la ecuación (3.76) y simplificando se tiene el siguiente producto matriz vector para el momento angular:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{zy} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\tag{3.78}$$

donde, $\mathbf{J}$ es una matriz simétrica llamada Tensor de Inercia^[9]. Un Tensor se define como una aplicación $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{J} : \boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{H}$. Sus componentes J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} se les llama momentos de inercia, y las J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} son los productos de inercia, los cuales tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned}J_{xx} &= \int_M \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2) dm \\ J_{xy} &= \int_M \rho(\mathbf{r}) xy dm\end{aligned}\tag{3.79}$$

donde ρ es la densidad del cuerpo. Con un ligero cambio en la notación, todos los elementos de la matriz pueden ser enunciados para cuerpos continuos. Si los ejes se denotan por x_i , $i = 1, 2, 3$, entonces los elementos J_{jk} son:

$$J_{jk} = \int_M \rho(\mathbf{r})(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dm\tag{3.80}$$

o bien:

$$\mathbf{J} = \int_M \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) dm \quad (3.81)$$

donde $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$; y cero para $i \neq j$. Hay que recordar que estas cantidades son obtenidas en el sistema de cuerpo fijo el cual, tiene una orientación arbitraria respecto al mismo y centrado en su centro de masa, dando como resultado, una infinidad de posibilidades para su asignación.

No obstante, existe una elección particular en la cual, los productos de inercia se anulan, dando como resultado una matriz diagonal $\mathbf{J}_p$ cuyos elementos se llaman momentos principales de inercia, J_x, J_y, J_z . Dicho sistema se le llama sistema principal de cuerpo fijo^[7]. De este modo, si $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en el sistema de cuerpo fijo, y $\hat{\mathbf{r}}_p$ es el vector unitario en el sistema principal de cuerpo fijo, entonces existe una matriz $\mathbf{C}_p$ tal que, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}_p \hat{\mathbf{r}}_p$. Dicha matriz será proporcionada en la siguiente sección.

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento rotacional del sólido rígido pueden ser obtenidas en el sistema principal de cuerpo fijo al sustituir la ecuación (3.78) en la ecuación (3.73) y aplicando la regla de derivación vectorial de la ecuación (3.52):

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}_p \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{J}_p \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega} \quad (3.82)$$

donde, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ es la velocidad angular del sistema giratorio situado en el centro de masa del cuerpo. Alineando los ejes del sistema relativo con respecto a los ejes principales del cuerpo se tiene $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}$, y por lo tanto, al desarrollarse la ecuación (3.82), se obtiene la forma familiar de las ecuaciones de Euler para el movimiento del cuerpo rígido:

$$\begin{aligned}
M_x &= J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z \\
M_y &= J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x \\
M_z &= J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y
\end{aligned} \tag{3.83}$$

En caso de que el desplazamiento sea traslacional, se recurre al conocido Teorema de los ejes paralelos^[9] el cual enuncia que el tensor de inercia de una masa m , alrededor de un desplazamiento paralelo del sistema de referencia $\mathbf{J}$, puede ser obtenido del sistema original del cuerpo $\mathbf{J}'$ mediante la siguiente expresión,

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{J} - \mathbf{J}' = m \begin{pmatrix} \Delta y^2 + \Delta z^2 & -\Delta x \Delta y & -\Delta x \Delta z \\ -\Delta x \Delta y & \Delta x^2 + \Delta z^2 & -\Delta y \Delta z \\ -\Delta x \Delta z & -\Delta y \Delta z & \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

donde $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ son las componentes del desplazamiento paralelo del sistema del cuerpo.

3.3.2. Energía Cinética Rotacional

Como ya se vio, la energía cinética para un sistema de N partículas se puede expresar como, en la ecuación (3.70). Luego, al ser aplicada a un cuerpo, la suma se sustituye por una integral y ya que para un cuerpo rígido $u^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ se tiene:

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \tag{3.85}$$

El término de la integral representa la energía cinética rotacional del cuerpo, el cual se puede simplificar usando la ecuación (3.76), así como las identidades vectoriales: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ teniendo:

$$K_{rot} \doteq \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \tag{3.86}$$

Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ tal que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\omega$. Entonces, una forma alternativa^[7] para la energía cinética rotacional es:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \int_M \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 \right] dm \right\} \omega^2 \quad (3.87)$$

Esta energía se conserva si no hay torcas externas aplicadas al sistema. Esto es, aplicando la derivada en el tiempo a la ecuación (3.86):

$$\frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0 \quad (3.88)$$

Debido a que $\mathbf{M} = 0$, el segundo término se anula, mientras que el primero también debido a que $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{H} = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}) = 0$. Volviendo a la ecuación (3.82), el tensor $\mathbf{J}_p$ se obtiene de la siguiente manera. Debido a que no hay cambios en la energía cinética rotacional por el cambio de coordenadas, es posible utilizar la ecuación (3.86):

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_p^T \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_p \quad (3.89)$$

Denotando el subíndice p para el sistema principal de cuerpo fijo, se tiene que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{C}_p \boldsymbol{\omega}_p$, y al ser sustituida en la ecuación (3.89) y comparando ambos miembros se obtiene $\boldsymbol{\omega}_p^T \mathbf{C}_p^T \mathbf{J} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega}_p^T \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_p$. Así:

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{C}_p^T \mathbf{J} \mathbf{C}_p \quad (3.90)$$

Debido a que $\mathbf{J}_p$ debe ser una matriz diagonal^[9], se sigue que sus elementos diagonales son los distintos eigenvalores de $\mathbf{J}$, mientras que $\mathbf{C}_p$ tiene como columnas los eigenvectores de $\mathbf{J}$. Por lo tanto, la ecuación (3.90) diagonaliza al tensor de inercia $\mathbf{J}$.

3.3.3. Rotación Rígida Ausente de Torcas Externas

Generalmente, un movimiento rotacional de un vehículo se presenta ausente de alguna torca externa, de modo que el momento angular se conserva, tal como se puede ver en la ecuación (3.73). Por lo tanto, las ecuaciones (3.83) de Euler para el movimiento del cuerpo rígido asimétrico sin torcas externas ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) son:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_z \omega_x \\ \dot{\omega}_z &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x \omega_y\end{aligned}\tag{3.91}$$

Debido a que un cuerpo rígido no tiene mecanismos para la disipación de la energía, su energía rotacional se conserva. Sin embargo, un vehículo espacial es un cuerpo rígido imperfecto pues, consiste de muchos cuerpos rígidos girando unos respecto de otros, así como líquidos y gases. A pesar de ello, las ecuaciones de Euler para este caso de cuerpos semirígidos siguen siendo válidas, aunque la energía cinética no se conserva.

El sistema de ecuaciones (3.91) se puede resolver empleando el ya mencionado método de integración numérica. A pesar de ello, existe solución analítica^[19]. El método tradicional para obtenerla comienza al investigar las constantes del movimiento. Como se tiene que $M_i = 0$, para $i=1,2,3$, el momento angular total $\mathbf{H}$ alrededor del centro de masa, se conserva. Esto es:

$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = H^2 = \sum_{i=1}^3 J_i^2 \omega_i^2\tag{3.92}$$

donde ahora los índices $i=1,2,3$ denotan los subíndices x,y,z respectivamente en el sistema principal de cuerpo fijo. Además, no hay fuerzas externas actuando en el cuerpo rígido. Así que la energía total se conserva:

$$K = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2 \right) \quad (3.93)$$

Usando las ecuaciones (3.92) y (3.93) es posible hallar expresiones digamos para ω_1 y ω_3 en términos de ω_2 . Como consecuencia, de la ecuación (3.91), la expresión $\dot{\omega}_y = \dot{\omega}_2$ puede ser escrita estrictamente en términos de ω_2 , para desacoplarla y después aplicar separación de variables.

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $J_1 < J_2 < J_3$, al aplicar álgebra elemental a las ecuaciones (3.92) y (3.93) se tiene:

$$\begin{aligned} H^2 - 2KJ_1 &= J_2(J_2 - J_1)\omega_2^2 + J_3(J_3 - J_1)\omega_3^2 > 0 \\ 2KJ_3 - H^2 &= J_1(J_3 - J_1)\omega_1^2 + J_2(J_3 - J_2)\omega_2^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Así:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{J_1(J_3 - J_1)}(a_1^2 - b_1^2 \omega_2^2) \\ \omega_3^2 &= \frac{1}{J_3(J_3 - J_1)}(a_3^2 - b_3^2 \omega_2^2) \end{aligned} \quad (3.95)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 2KJ_3 - H^2 \\ a_3^2 &= H^2 - 2KJ_1 \\ b_1^2 &= J_2(J_3 - J_2) \\ b_3^2 &= J_2(J_2 - J_1) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.95) y (3.96) en la ecuación (3.91) se tiene que:

$$\dot{\omega}_2 = \pm \frac{a_1 a_3}{J_2 \sqrt{J_1 J_3}} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \omega_2^2} \sqrt{1 - \frac{b_3^2}{a_3^2} \omega_2^2} \quad (3.97)$$

Para que $\dot{\omega}_2 \in \mathbb{R}$:

$$\omega_2 \leq \min \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_3}{b_3} \right) \quad (3.98)$$

Sin pérdida de generalidad supóngase que $\frac{b_3}{a_3} \leq \frac{b_1}{a_1}$. Luego, introduciendo el siguiente cambio de variable, $x = \frac{b_1}{a_1} \omega_2$ en la ecuación (3.97), se tiene:

$$\dot{x} = \pm \nu \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2} \quad (3.99)$$

donde:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{b_1 a_3}{J_2 \sqrt{J_1 J_3}} \\ k &= \frac{b_3 a_1}{b_1 a_3} \end{aligned} \quad (3.100)$$

De la suposición $\frac{b_3}{a_3} \leq \frac{b_1}{a_1}$ se infiere que $k \leq 1$. Luego, separando variables en la ecuación (3.99) e introduciendo la variable de integración s se llega a:

$$u(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2} \sqrt{1-k^2 s^2}} = \pm \nu (t - t_0) \quad (3.101)$$

Debido a que no es posible expresar la integral de la ecuación (3.101) en términos de una colección finita de funciones elementales, es posible sin embargo, usarla para definir una función $u(x)$ llamada la integral elíptica normal de primer orden^[19].

Considérese el caso especial para $k = 0$, en la cual, la ecuación (3.101) se convierte en:

$$u(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad (3.102)$$

para $x \leq 1$. Esta es reconocida de forma inmediata como:

$$\text{Arcsen } x = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad (3.103)$$

Es decir, $x = \text{Sen } u$. Así por analogía, al usar la ecuación (3.101) para definir una familia de funciones parametrizadas por k , donde $k \in \mathbb{R}[0,1]$, es posible pensar que la ecuación (3.101) es una función Seno generalizada. Denotando esta función como “Sn”:

$$u(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2} \sqrt{1-k^2 s^2}} = \text{Arcsn } x \quad (3.104)$$

o bien, $\text{Sn } u = x$. Por lo tanto, al regresar el cambio de variable $x = \frac{b_1}{a_1} \omega_2$ en la ecuación (3.104):

$$\omega_2 = \frac{a_1}{b_1} \text{Sn } u \quad (3.105)$$

Así como Sn se trata de una función impar de u , también se tienen un par de ecuaciones parecidas a los cosenos definidas por las relaciones:

$$\begin{aligned} \text{Cn } u &= \sqrt{1 - \text{Sn}^2 u} \\ \text{Dn } u &= \sqrt{1 - k^2 \text{Sn}^2 u} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Usando las ecuaciones (3.95) y (3.106) se llega a las soluciones analíticas del cuerpo rígido para ω_1 y ω_3 :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{j_1(j_3 - j_1)}} \operatorname{Cn} u \\ \omega_3 &= \frac{a_3}{\sqrt{j_3(j_3 - j_1)}} \operatorname{Dn} u\end{aligned}\tag{3.107}$$

En caso de haber tenido $\frac{b_3}{a_3} \geq \frac{b_1}{a_1}$, entonces el cambio de variables sería simplemente $x = \frac{b_3}{a_3} \omega_2$, y se continuaría el desarrollo para llegar a la solución del mismo modo que antes. Dicho resultado estaría dado también para ω_1 y ω_3 en términos de $\operatorname{Dn} u$ y $\operatorname{Cn} u$ respectivamente.

3.3.3.1. Cuerpo Axisimétrico

Cuando el vehículo posee un eje de simetría, las ecuaciones de Euler se simplifican bastante. Considérese un cuerpo girando alrededor de su eje de simetría, o, llamado, eje longitudinal. Debido a la simetría axial, $J_1 = J_2$, y se tiene:

$$\begin{aligned}J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.108}$$

La última de estas tres ecuaciones enuncia que ω_3 es una constante, y que puede ser por lo tanto, tratada como una de las condiciones iniciales del problema. Las restantes dos pueden ser rescritas como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \Omega \omega_1\end{aligned}\tag{3.109}$$

donde, $\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3$ es la frecuencia angular^[7]. La eliminación de ω_2 en (3.109) da $\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1$ cuya solución es:

$$\omega_1 = A \operatorname{Cos}(\Omega t)\tag{3.110}$$

Sustituyendo la expresión (3.110) en la primera de las ecuaciones (3.109) se tiene:

$$\omega_2 = A \text{ Sen}(\Omega t) \quad (3.111)$$

Las soluciones para ω_1 y ω_2 muestran que el vector $\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j}$ tiene una magnitud ω_{12} constante y gira uniformemente alrededor del eje z del cuerpo con frecuencia angular Ω , (Fig. 3.9). De aquí que la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ también es constante en magnitud y precesa alrededor del eje z con la misma frecuencia. Las constantes A y ω_3 pueden ser evaluadas en términos de las constantes de movimiento más usuales digamos, la energía cinética K y la magnitud del momento angular H . Ambas escritas como funciones de A y ω_3 , son:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} J_1 A^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \\ H^2 &= J_1^2 A^2 + J_3^2 \omega_3^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

de las cuales es posible poder resolver para A y ω_3 en términos de K y H .

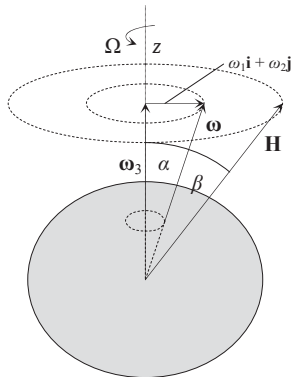


Fig. 3.9. Efecto precesional

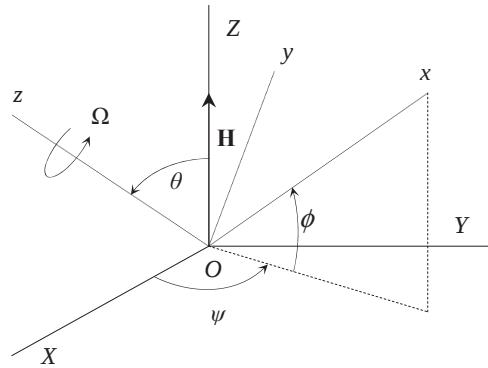


Fig. 3.10. Representación Euleriana 3-1-3 de postura precesional

También es posible ver (Fig. 3.9) que la velocidad angular forma un ángulo $\alpha = \text{Arctan} \frac{\omega_{12}}{\omega_3}$ con el eje de simetría. Más aún, el momento angular:

$$\mathbf{H} = J_1 (\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j}) + J_3 \omega_3 \mathbf{k} \quad (3.113)$$

forma un ángulo constante $\beta = \text{Arctan} \frac{J_1 \omega_{12}}{J_3 \omega_3}$ con el eje de simetría, llamado ángulo de nutación. El cono descrito por el semivértice de ángulo α , es llamado cono de cuerpo^[7], mientras que el formado por β se le llama cono espacial. Nótese que mientras ω se trata de un vector que gira, $\mathbf{H}$ es fijo en el espacio inercial XYZ , debido a la conservación del momento angular. Por esto, una elección obvia para un sistema inercial sería con el eje $\mathbf{K}$ a lo largo de $\mathbf{H}$.

Los parámetros cinemáticos comúnmente más usados para este tipo de movimiento es mediante los ángulos de Euler, $C_3(\phi)C_1(\vartheta)C_3(\psi)$, dados por la ecuación (3.32). Ya que el eje de giro del cuerpo precesional jamás está alienado con el momento angular, ($\theta \neq 0$), la singularidad de esta postura jamás será encontrada. Por lo tanto, el ángulo constante de nutación θ y de acuerdo a la figura 3.10 se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Sen } \theta &= \frac{J_1 \omega_{12}}{H} = \frac{J_1 \omega_{12}}{\sqrt{J_1 \omega_{12}^2 + J_3 \omega_3^2}} \\ \text{Cos } \theta &= \frac{J_3 \omega_3}{H} = \frac{J_3 \omega_3}{\sqrt{J_1 \omega_{12}^2 + J_3 \omega_3^2}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Ya que $\omega_{12}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, se tiene empleando la ecuación (3.35):

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\omega_{12}}{\text{Sen } \theta} \\ \dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\phi} &= \omega_3 - \frac{\omega_{12}}{\text{Tan } \theta} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Debido a que θ y ω_{12} son constantes, las razones angulares $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ son también constantes, y cuyas expresiones alternativas se obtienen al sustituir la ecuación (3.114) en la expresión (3.115):

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{\sqrt{J_1 \omega_{12}^2 + J_3 \omega_3^2}}{J_1} \\
\dot{\theta} &= 0 \\
\dot{\phi} &= \omega_3 \left(1 - \frac{J_3}{J_1} \right)
\end{aligned} \tag{3.116}$$

La razón $\dot{\psi}$ representa la frecuencia de la precesión, y es llamada razón precesional^[7], mientras que $\dot{\phi}$ representa la razón de giro total del cuerpo en el sistema inercial y se llama razón de giro inercial. Si $J_1 > J_3$, el cuerpo se dice que es alargado verticalmente, y ambas razones tienen el mismo signo. De lo contrario, si $J_1 < J_3$, el cuerpo es achatado, y las razones tienen signos opuestos. La solución de la ecuación (3.116) se obtiene fácilmente integrando con la orientación inicial $t = 0$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_0 + \frac{\sqrt{J_1 \omega_{12}^2 + J_3 \omega_3^2}}{J_1} t \\
\theta &= \theta(0) \\
\phi &= \phi(0) - \omega_3 \left(1 - \frac{J_3}{J_1} \right) t
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Por lo tanto, hay una variación de ψ y ϕ de forma lineal con el tiempo debido a la razón de precesión constante ω_{12} .

3.4. Control de postura

A partir de ahora se hará enfoque ocasionalmente, ya no más en cuerpos arbitrarios, sino más bien en vehículos espaciales específicos. El movimiento rotacional que describen en el espacio, es posible controlarlo mediante dispositivos ya sean de propulsión, o rotores internos.

3.4.1. Sistema de Control de Reacción (SCR)

Por lo general, los vehículos espaciales poseen un sistema de control de reacción (SCR) que emplea un par de pequeños propulsores llamados, propulsores de postura. Cuando hay torcas aplicadas alrededor de cada eje principal para tener estabilidad y control, empleando el SCR, el vehículo se dice ser, triaxial estabilizado^[9]. Por lo tanto, los propulsores son empleados para aplicar impulsos breves de torcas, que a su vez, asignando el sistema de coordenadas al vehículo (Figs. 3.11 a, b ,c) habrán cambios en los ángulos de Euler denominados para este caso particular, como ángulos de nutación, precesión, y giro.

Además de tener la capacidad de alterar el momento angular para permitir alguna orientación en el espacio, dichos propulsores también son utilizados para efectuar desplazamientos del vehículo de forma paralela a los ejes de cuerpo (Figs.3.11 d, e, f).

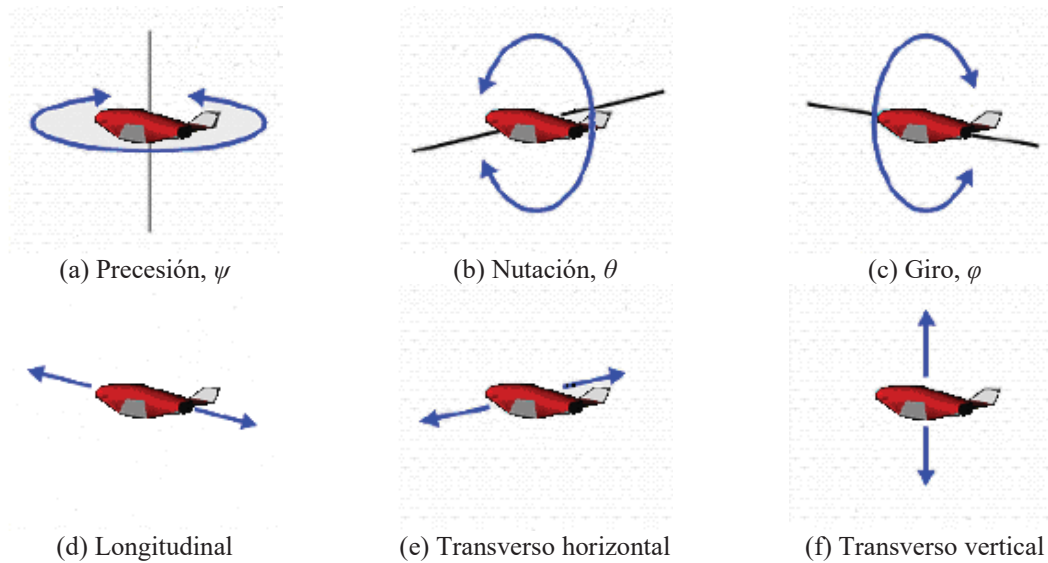


Fig. 3.11. Movimientos controlados por el SCR en modalidad rotacional, (a),(b),(c) y translacional (d),(e),(f).

Un impulso de torca se define como una torca de magnitud infinita de duración infinitesimal. De ahí que hay un cambio instantáneo en el momento angular. Dada una

torca externa por $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0)\delta(t)$, donde, $\delta(t)$ es la llamada función delta de Dirac, y cuya propiedad para cualquier función real valuada $f(t)$, es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Se tiene que el cambio en el momento angular puede ser obtenido como el área total bajo la gráfica contra el tiempo, dado por

$$\Delta \mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(0) \delta(t) dt = \mathbf{M}(0) \quad (3.118)$$

Por lo tanto, hay un cambio instantáneo en el momento angular causado por un impulso de torca, que es igual al valor de la torca en el instante en el que se aplica $t = 0$.

3.4.1.1. Rotación de Impulso Axial.

Considérese un cuerpo (rígido) o vehículo, (Fig. 3.11) con momento de inercia J_z , alrededor del eje de rotación deseada, oz, y equipado con un par de propulsores de postura capaces de ejecutar una torca máxima $M_z(0)$, para una duración infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$, la cual provoca un cambio instantáneo en el momento angular dado por $\Delta H_z = M_z(0)$. Si la torca está dada en función del tiempo como $\Delta H_z = M_z(0)\delta(t)$, las ecuaciones de Euler se reducen a:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= 0 \\ \dot{\omega}_y &= 0 \\ J_z \dot{\omega}_z &= M_z(0)\delta(t) \end{aligned} \quad (3.119)$$

En términos del desplazamiento angular alrededor del eje oz, ψ , la última de las ecuaciones (3.119), puede ser rescrita como:

$$\ddot{\psi} = \frac{M_z(0)}{J_z} \delta(t) \quad (3.120)$$

cuya solución es fácilmente obtenida usando transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} \omega_z(t) &= \dot{\psi} = \omega_z(0) + \frac{M_z(0)}{J_z} u_s(t) \\ \psi(t) &= \psi(0) + \omega_z(0)t + \frac{M_z(0)}{J_z} r(t) \end{aligned} \quad (3.121)$$

donde $\psi(0)$ y $\omega_z(0)$ se refieren a la condición inicial justo antes de aplicarse la torca. Por otro lado, $u_s(t) \doteq \int \delta(t)dt$, es la función escalón unitario aplicada en $t = 0$, definida por:

$$u_s(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

y $r(t) \doteq \int u_s(t)dt$, es la función rampa unitaria aplicada en $t = 0$ y definida por,

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t - t_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

En la práctica, el impulso de torca, $M_z(0)$ no es infinito, y el intervalo de tiempo, Δt sobre el cual la torca actúa, tiende a cero. Sin embargo, el hecho de que Δt es mucho más pequeño que el periodo de la maniobra, hace que sea buena aproximación. Dicha aplicación puede extenderse a cada uno de los ejes alrededor de los cuales se desea aplicar alguna torca.

Si solo se desea efectuar un cambio en la velocidad angular, la maniobra se dice extragiro. De lo contrario, si se desea una rotación de ejes, la maniobra se llama “rest-to-rest”^[9] (reposo a reposo), y un segundo impulso aplicado en dirección opuesta es necesario para detener el giro, después de un tiempo $t = \tau$. Como la ecuación (3.120) es lineal, su solución obedece el principio de superposición lineal, y por lo tanto es posible tener para ambos impulsos:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_z(t) &= \frac{M_z(0)}{J_z} [u_s(t) - u_s(t-\tau)] \\ \Delta\psi(t) &= \frac{M_z(0)}{J_z} [r(t) - r(t-\tau)] + \omega_z\tau = \psi_d\end{aligned}\quad (3.122)$$

De aquí que la velocidad angular se hace cero, y es alcanzado un desplazamiento ψ_d al instante $t = \tau$. La magnitud de ψ_d puede ser ajustada de acuerdo al valor de τ , (Fig. 3.12). La aplicación de dos impulsos opuestos pero de igual magnitud para alcanzar un desplazamiento con tiempo óptimo se le llama control bang-bang^[9], el cual puede ser aplicado de forma aproximada para el control de sistemas lineales que pudieran presentar ligeras fuerzas oscilantes.

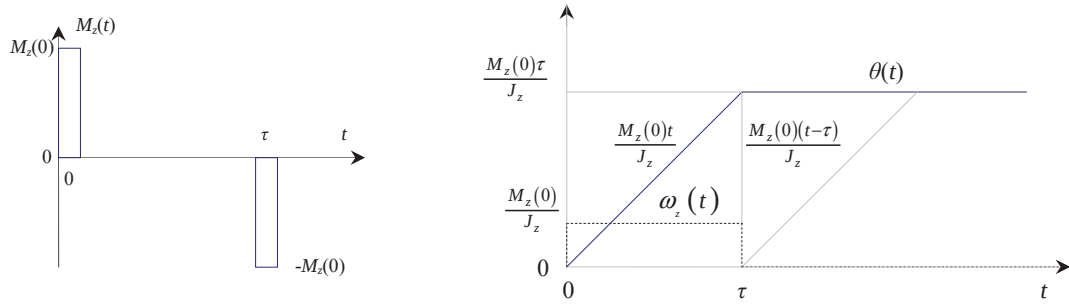


Fig. 3.12. Tiempo óptimo, rest-to-rest, de maniobra de postura eje-simple con $\theta(0) = \omega_z(0) = 0$.

3.4.1.2. Maniobras de postura en Vehículos Asimétricos

Desafortunadamente, el control bang-bang no puede ser extendido a rotaciones arbitrarias de cuerpos asimétricos. Esto debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Euler cuando más de una de las componentes de la velocidad angular es distinta de cero, en cuyo caso es inválido el principio de superposición.

Un método práctico es el de aplicar maniobras rest-to-rest multiaxiales de alguna manera secuencial. Existen algoritmos avanzados como el ya conocido Runge-Kutta, para el modelado de posturas de un vehículo para un perfil de torca arbitrario en función de sus

condiciones iniciales una de la otra. Estas situaciones son mostradas (Figs. 3.13. y 3.14) para el caso^[9]:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} 1000\mathbf{i} - 1000\mathbf{k} \text{ (Nm)} & 0 \leq t \leq 1\text{s} \\ -1000\mathbf{i} - 750\mathbf{j} + 750\mathbf{k} \text{ (Nm)} & 5\text{s} < t \leq 5.97\text{s} \\ \mathbf{0} & t > 5.97\text{s} \end{cases}$$

Con momentos de inercia^[9] $J_x = 400 \text{ kg/m}^2$, $J_y = 750 \text{ kg/m}^2$ y $J_z = 850 \text{ kg/m}^2$, que en términos de ángulos de Euler 3-1-3, las condiciones iniciales son $\psi(0) = \varphi(0) = 0$, $\theta = \pi/2$.

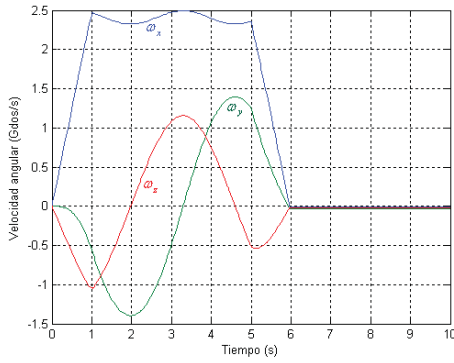


Fig. 3.13.

Velocidad angular del vehículo asimétrico

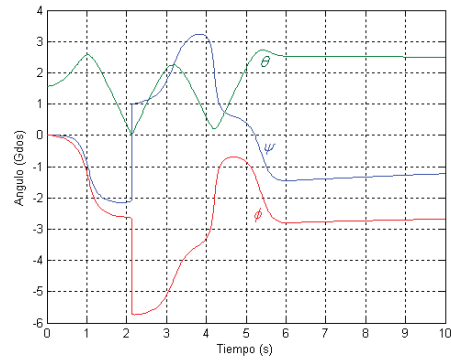


Fig. 3.14.

respuesta de postura del vehículo asimétrico

Nótese el gran cambio que aparece durante la maniobra. Mientras que al final, la velocidad angular es muy cercana con valor constante a cero, resultando en una postura casi constante. Esta velocidad angular residual puede ser eliminada empleando impulsos bang-bang o bien, empleando, (como será visto en seguida) rotores estabilizadores

3.4.2. Dispositivos de Intercambio de Momento (DIM)

Debido a que el uso del SCR requiere de cierto consumo de combustible, la mayoría de los vehículos triaxiales-estabilizados emplean de forma adicional un conjunto de mecanismos llamados Dispositivos de intercambio de momento^[9] (DIM) los cuales consisten de rotores giratorios capaces de proporcionar torcas internas alrededor de cada eje. Estos emplean energía eléctrica obtenida por los arreglos de paneles solares.

Considérese un vehículo con tensor principal de inercia $\mathbf{J}$ y velocidad angular resuelta en los ejes principales, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$. Ahora considérese un rotor con tensor de inercia $\mathbf{J}_r$ alrededor de los ejes principales del vehículo, con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_r = \omega_{rx} \mathbf{i} + \omega_{ry} \mathbf{j} + \omega_{rz} \mathbf{k}$, también resuelta en sus ejes principales. El momento angular neto del sistema es:

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_r) \quad (3.123)$$

Nótese que $\mathbf{J}_r$ está relacionado con $\mathbf{J}$ mediante el teorema de los ejes paralelos enunciado dado por la ecuación (3.84). Es posible mostrar que la derivada de la ecuación (3.123) es cero. Esto debido a que no hay torcas externas actuando en el sistema, y por lo tanto ver que:

$$\mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{J}_r \left[\frac{\partial (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_r)}{\partial t} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_r \right] - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_r)\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_r) \quad (3.124)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (3.82) es posible ver que el vehículo puede ser tratado como cuerpo rígido con los términos del lado derecho, como la torca aplicada por el rotor dentro del vehículo. Si hay varios de ellos, entonces dicho lado sería reemplazado por la suma de todas sus torcas respectivas. Esta expresión es general para la rotación de un vehículo, cuya velocidad angular puede cambiar en el tiempo debido a ciertos cambios en su magnitud, así como alguna variación el eje de giro. Cuando el eje es fijo, se dice que es una rueda de reacción^[9]. Cuando se emplea un gran rotor con su eje de giro alineado con el eje de giro del cuerpo, dicha configuración se le llama vehículo de spin-dual.

Si la velocidad angular del rotor es fija respecta al cuerpo, pero el eje es capaz de ladearse de modo tal que se aplique una torca giroscópica, se dice que el rotor es un giroscopio de control de momento (GCM). En algunos vehículos avanzados, el rotor puede tener una

razón de giro variable al igual que un eje variable. Así es llamado, Giroscopio de control de momento de rapidez variable (GCMRV).

3.4.2.1. Giroscopio de Control de Momento de Rapidez Variable

Considérese un rotor axisimétrico con una razón de giro variable montado en el centro de masa del vehículo de moto tal que el eje de giro está libre de girar en cualquier dirección, (Fig. 3.15). Tal rotor se le llama giroscopio totalmente Cardaniano^[9], cuyo dispositivo que permite tal movimiento se llama, soporte de Cardán, (Fig. 3.16). Se emplea un rotor para aplicar la torca necesaria en el rotor del GCMRV relativo a cada uno de los ejes principales del vehículo, con la finalidad de mover el rotor de algún modo deseado.

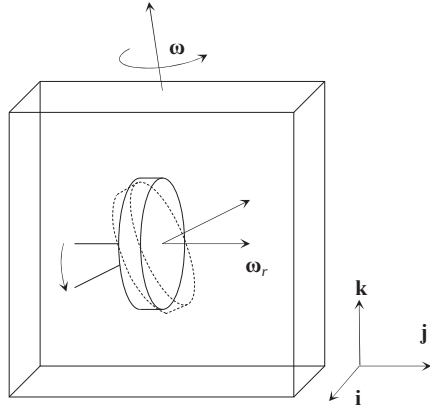


Fig. 3.15. Un vehículo con rotor GCMRV



Fig. 3.16. Soporte de Cardán

Sea $\mathbf{M}_r$ la torca aplicada al rotor. Así, para el movimiento del rotor relativo al vehículo se tiene:

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{J}_r \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r}{\partial t} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_r) \mathbf{J}_r \boldsymbol{\omega}_r \quad (3.125)$$

Dado que la postura del vehículo es arbitraria, es posible usar la representación por cuaternios dada por la ecuación (3.48). Para una simulación general de la maniobra de postura, es necesario integrar las ecuaciones (3.124), (3.125) y (3.48) partiendo de

condiciones iniciales $\omega(0), \omega_r(0)$ y $q(0), q_0(0)$, así como el perfil de torca preestablecido para el motor $M(t)$, al igual que el tensor de inercia J_r el cual depende de la orientación relativa del rotor con el vehículo.

Empleando para todo lo anterior, los siguientes datos^[9], es posible apreciar tal aplicación:

$$J_r = \begin{pmatrix} 50 & -10 & 0 \\ -10 & 100 & 15 \\ 0 & 15 & 250 \end{pmatrix} \text{ kg m}^2 \quad M_r = \begin{cases} 7\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \text{ (Nm)} & 0 < t \leq 5 \text{ s} \\ -7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \text{ (Nm)} & 5 \text{ s} < t \leq 10 \text{ s} \\ \mathbf{0} & t > 10 \text{ s} \end{cases}$$

Se tiene las siguientes respuestas del vehículo para $0 \leq t \leq 400 \text{ s}$:

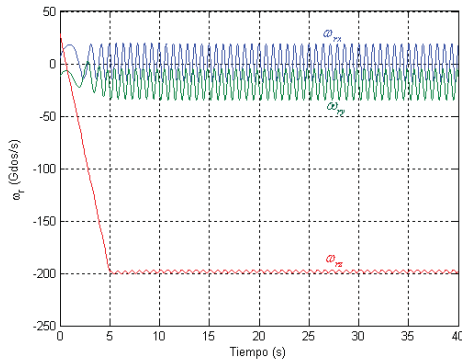


Fig. 3.17. Velocidad angular del rotor GCMRV relativa al vehículo

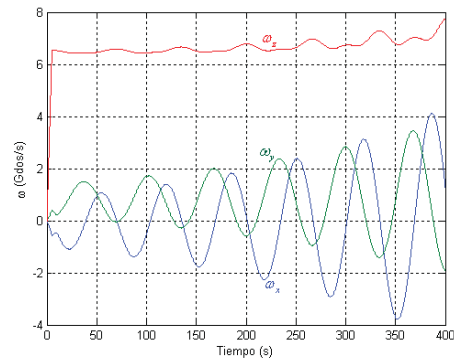


Fig. 3.18. Respuesta en la velocidad angular del vehículo con un rotor GCMRV

Nótese, (Fig. 3.17) que el GCMRV se mantiene casi con una velocidad relativa constante alrededor del eje oz después de 5s, con pequeñas oscilaciones de amplitud alrededor de un valor principal de $-200^\circ/\text{s}$. Sin embargo, las componentes ω_{rx} y ω_{ry} se muestran con amplitudes mucho mayores alrededor de los valores promedio de 0 y $-22.5^\circ/\text{s}$ respectivamente. Debido a este movimiento, una parte del momento angular del vehículo es absorbida por el rotor, mientras que, las componentes de la velocidad angular tienen un comportamiento divergente^[9] (Fig. 3.18).

Se muestran también, (Fig. 3.19) y (Fig. 3.20) otros parámetros que permiten ver que la rotación del vehículo se mantiene creciente casi de forma estable con el tiempo. El ángulo principal tiene una tendencia de oscilación aleatoria debido a la transferencia de energía cinética del rotor. Tal respuesta inestable es causada por el movimiento no amortiguado del GCMRV, después que los motores han dejado de aplicar la torca. En la realidad, los efectos de fricción de dicho dispositivo traerían al rotor al reposo, y de ahí, un movimiento amortiguado del vehículo.

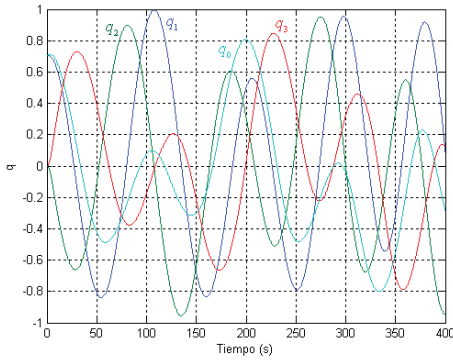


Fig. 3.19. Respuesta de postura para el vehículo con rotor GCMRV

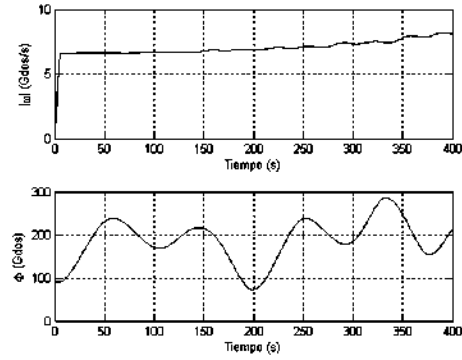


Fig. 3.20. Velocidad angular y rotación principal del vehículo causados por el GCMRV

3.4.2.2. Vehículo con Torca de Gradiente de Gravedad (TGG)

El campo gravitacional experimentado por un elemento diferencial de masa dm de un vehículo en órbita alrededor de la tierra es no uniforme^[16]. Considérese un cuerpo de masa m orbitando un cuerpo (primario) de dimensiones planetarias con masa, M . (Fig. 3.21). La fuerza gravitacional experimentada por una masa puntual del cuerpo en el centro de masa es:

$$\mathbf{f} = -\frac{GMm}{r_c^2} \hat{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu m}{r_c^3} \mathbf{r}_c \quad (3.126)$$

La atracción gravitacional para un elemento diferencial de masa situado en la posición $\mathbf{r}$ respecto al primario es entonces, $d\mathbf{f} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} dm$.

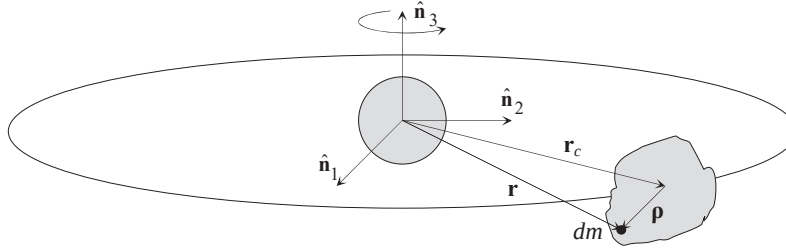


Fig. 3.21. Diagrama de masa diferencial relativa a un sistema geocéntrico

Luego, si ρ es el vector de posición de la masa diferencial dm respecto al centro de masa del cuerpo, entonces la torca alrededor del centro de masa es, $d\mathbf{M} = \rho \times d\mathbf{f}$, y por lo tanto, la torca total:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \times d\mathbf{f} = \int_V \rho \times \left(-\frac{\mu}{r^3} \right) \mathbf{r} dm = \int_V \rho \times \mathbf{g} dm \quad (3.127)$$

Como no es posible resolver la integral de forma analítica, es necesario expandir $\mathbf{g}$ empleando el teorema del binomio:

$$\mathbf{g} = -\mu \frac{\mathbf{r}_c + \rho}{|\mathbf{r}_c + \rho|^3} = -\mu \frac{(\mathbf{r}_c + \rho)}{r_c^3} \left(1 - 3 \frac{\mathbf{r}_c \cdot \rho}{r_c^2} + \dots \right) \quad (3.128)$$

donde se ha hecho el uso de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \rho$. Sustituyendo la ecuación (3.128) en la expresión (3.127) se tiene:

$$\mathbf{M} \approx - \int_V \rho \times (\mathbf{r}_c + \rho) \left(\frac{\mu}{r_c^3} \right) \left[1 - \frac{3(\mathbf{r}_c \cdot \rho)}{r_c^2} \right] dm$$

Distribuyendo el producto cruz y reconociendo que $\rho \times \rho = 0$ y $\rho \times \mathbf{r}_c = -(\mathbf{r}_c \times \rho)$ se tiene:

$$\mathbf{M} \approx \frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c \times \int_V \rho \left[1 - \frac{3(\mathbf{r}_c \cdot \rho)}{r_c^2} \right] dm \quad (3.129)$$

Ya que el origen del cuerpo está aproximadamente en el centro de masa, entonces

$\int_V \boldsymbol{\rho} dm = 0$ de modo que la ecuación (3.129) se convierte en:

$$\mathbf{M} \approx -\frac{3\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c \times \int_V \boldsymbol{\rho} \left[\frac{(\mathbf{r}_c \cdot \boldsymbol{\rho})}{r_c^3} \right] dm = -\frac{3\mu}{r_c^3} \hat{\mathbf{r}}_c \times \int_V \boldsymbol{\rho} (\boldsymbol{\rho} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c) dm \quad (3.130)$$

De la definición de momentos y productos de inercia en la ecuación (3.80), es posible emplear la ecuación (3.130) para $\boldsymbol{\rho}$:

$$\int_V \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho} dm = \left(\int_V \rho^2 dm \right) \mathbf{I} - \mathbf{J} \quad (3.131)$$

Sustituyendo la ecuación (3.131) en la ecuación (3.130) y distribuyendo el producto cruz:

$$\mathbf{M} \approx -\frac{3\mu}{r_c^3} \left[\left(\int_V \rho^2 dm \right) \hat{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c - \hat{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c \right] \quad (3.132)$$

Pero ya que, $\mathbf{r}_c \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c \times \mathbf{r}_c = 0$, se tiene finalmente:

$$\mathbf{M} \approx \frac{3\mu}{r_c^3} (\hat{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c) = 3n^2 (\hat{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c) \quad (3.133)$$

donde se ha expresado en términos del movimiento principal $n^2 = \mu/r_c^3$. Por lo tanto, esta es la expresión para la TGG con respecto al sistema inercial. Por otro lado, al ignorar los términos del segundo orden en adelante de la ecuación (3.128) y efectuando la integral de la ecuación (3.127) en términos de las componentes geocéntricas del sistema inercial

$\mathbf{r}_c = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ y del sistema relativo $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son los ejes principales de cuerpo), se tiene $\mathbf{M}_g = M_{gx}\mathbf{i} + M_{gy}\mathbf{j} + M_{gz}\mathbf{k}$, donde:

$$\begin{aligned} M_{gx} &= \frac{3\mu}{r^5} YZ (J_z - J_y) \\ M_{gy} &= \frac{3\mu}{r^5} XZ (J_x - J_y) \\ M_{gz} &= \frac{3\mu}{r^5} XY (J_y - J_x) \end{aligned} \quad (3.134)$$

Sustituyendo los componentes de la TGG, la ecuación (3.134) en las ecuaciones de Euler, (3.83):

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z &= \frac{3\mu}{r^5} YZ (J_z - J_y) \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x &= \frac{3\mu}{r^5} XZ (J_x - J_y) \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y &= \frac{3\mu}{r^5} XY (J_y - J_x) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Se deben considerar las pequeñas perturbaciones de la postura de equilibrio general representadas por los ángulos eulerianos de postura 3-2-1 de, precesión ψ , nutación θ y giro ϕ , respectivamente. Es decir, de modo que las componentes de la velocidad angular sean:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} 0 & \text{Sen } \phi & \text{Cos } \phi \\ 0 & \text{Cos } \phi \text{ Cos } \theta & -\text{Sen } \phi \text{ Cos } \theta \\ 1 & \text{Sen } \phi \text{ Sen } \theta & \text{Cos } \phi \text{ Sen } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

Para ilustrar la respuesta a la postura generada por los efectos de la TGG, considérese el siguiente tensor de inercia para la Estación Espacial Internacional^[9] (EEI):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 127908568 & 3141229 & 7709108 \\ 3141229 & 10736248 & 1345279 \\ 7709108 & 1345279 & 200432320 \end{pmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

La cual se encuentra en una órbita circular baja de 93 min^[9], en respuesta a una perturbación nutacional inicial $\dot{\phi} = 5.7296 \times 10^{-5}$. Es posible determinar bajo una transformación la cual, permite calcular los tensores principales de inercia resultado en, $J_x = 127,538,483.85 \text{ kg m}^2$, $J_y = 201,272,329.17 \text{ kg m}^2$ y $J_z = 106,892,554.98 \text{ kg m}^2$. Mediante las ecuaciones (3.135) y (3.136) y algún método de integración numérica, se obtiene la respuesta del vehículo a los efectos de la TGG, (Fig. 3.22) y (Fig. 3.23).

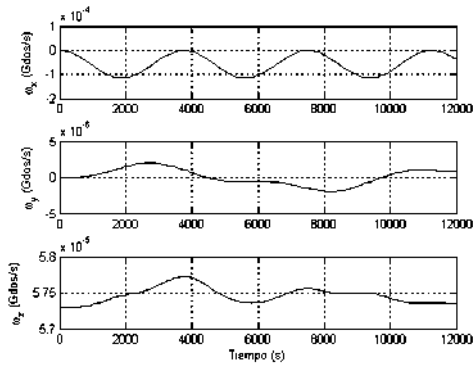


Fig. 3.22. Respuesta de razón angular para el gradiente de gravedad de la EEI

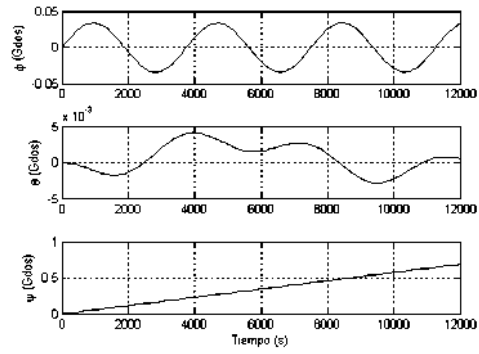


Fig. 3.23. Respuesta angular euleriana para el gradiente de gravedad de la EEI

3.4.3. Control de Postura Aerodinámica

Cuando se considera la dinámica rotacional de los vehículos aeroespaciales dentro de la atmósfera, Se deben emplear las ecuaciones de Euler (3.83), con la suposición de que éste es un cuerpo rígido, y tomando en cuenta la torca aerodinámica generada por la rotación del vehículo, así como las generadas por el piloto o bien, por algún sistema de control automático (sección posterior). Sin embargo, existen situaciones de vuelo donde el control de torca aerodinámica no es factible, tal como en el despegue vertical de aeronaves y vehículos de lanzamiento, o bien, la fase inicial de reingreso atmosférico, donde la presión dinámica no es lo suficientemente grande para crear una torca de control.

Bajo estas circunstancias, es recomendable emplear aerodinámica linealizada^[9] que resulta de la suposición de pequeñas perturbaciones en el campo de fluido (Cap 4).

Siempre que tal aproximación no pueda ser aplicada, se deben emplear otros métodos empíricos simples, o datos aerodinámicos experimentales.

3.4.3.1. Movimiento rotacional de un Vehículo de Lanzamiento

La trayectoria atmosférica de un vehículo de lanzamiento puede involucrar una apreciable torca aerodinámica debido a la presencia de algunas aletas. Es crucial para un vehículo de lanzamiento mantenerlo a un ángulo de ataque y deslice lateral cero debido a las consideraciones de carga aerodinámica.

El control de postura de los vehículos de lanzamiento involucra las torcas de control, $\mathbf{M}_c = M_{cx}\mathbf{i} + M_{cy}\mathbf{j} + M_{cz}\mathbf{k}$, producidas por la orientación del impulso. Estas habrán de controlar también, términos adicionales debidos a cuestiones aerodinámicas. Por lo tanto, Las ecuaciones de Euler para un vehículo de lanzamiento con simetría nutación-precisional ($J_y = J_z$), (Fig. 3.24) son:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= M_{cx} + qSb \frac{b}{2v} C_{l_p} \\ J_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (J_x - J_y) &= M_{cy} + qSb \left[\frac{b}{2v} (C_{m_q} \omega_y + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}) + C_{m_{\alpha}} \alpha \right] \\ J_y \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) &= M_{cz} + qSb \left[\frac{b}{2v} (C_{n_r} \omega_z + C_{n_{\dot{\beta}}} \dot{\beta}) + C_{n_{\beta}} \beta \right] \end{aligned} \quad (3.137)$$

donde, b se refiere a la máxima envergadura de la aleta, o el máximo diámetro del cuerpo en caso de no tener aletas.

El conjunto de coeficientes de la ecuación (3.137) están dados por valores constantes (Tabla 3.2) de donde, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son la perturbación vectorial de momento nutacional y precesional respectivamente^[6]. q es la presión dinámica (Cap1), S la sección de área

transversa, c la longitud característica, v^e la velocidad en un punto de equilibrio y v la velocidad adicional que se aplica al sistema de modo que $v' = v^e + v$ es la velocidad total del sistema. Los ángulos α y β corresponden a los cambios en el ángulo de trayectoria de vuelo, y en la dirección azimutal respectivamente.

$C_{l_p} = \frac{1}{qSc} \frac{2v^e}{v} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \omega_x}$	Oscilación de Giro
$C_{m_q} = \frac{1}{qSc} \frac{2v^e}{v} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \omega_y}$	Oscilación precesional
$C_{n_r} = \frac{1}{qSc} \frac{2v^e}{v} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \omega_z}$	Oscilación nutacional
$C_{m_\alpha} = \frac{1}{qSc} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha}$	Estabilidad nutacional estática
$C_{m_\alpha} = \frac{1}{qSc} \frac{2v^e}{c} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \dot{\alpha}}$	Estabilidad nutacional dinámica
$C_{n_\beta} = \frac{1}{qSb} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \beta}$	Estabilidad direccional estática
$C_{n_\beta} = \frac{1}{qSb} \frac{2v^e}{b} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{\beta}}$	Estabilidad direccional dinámica

Tabla 3.2. Coeficientes aerodinámicos

Debido a la axisimetría, las derivadas en la nutación y precesión son indistinguibles^[9] una de la otra teniendo que:

$$\begin{aligned} C_{m_\alpha} &= -C_{n_\beta} \\ C_{n_\beta} &= -C_{m_\alpha} \end{aligned}$$

El control de las torcas de momento M_{cy} y M_{cz} son creadas por pequeños ángulos deflectores de impulso, ε y μ , (Fig. 3.24):

$$\begin{aligned} M_{cy} &= l_x f_T \varepsilon \\ M_{cz} &= -l_x f_T \mu \end{aligned} \tag{3.138}$$

donde l_x es la distancia longitudinal de la boquilla al centro de masa, y f_T denota al impulso. La torca de control de giro M_{cx} puede ser generada aerodinámicamente a través de deflexiones de superficies de control δ , y estaría dada por la relación, $M_{cx} = C_{l_\delta} \delta$.

Recientemente la mayoría de los vehículos de lanzamiento emplean SCR para controlar las componentes de las torcas externas. Volviendo a la ecuación (3.119), las componentes de la torca de control $\mathbf{M}_c$ generada por impulsos individuales a la ecuación (3.137) quedarían determinadas por, $M_x(0)\delta(t)$, $M_y(0)\delta(t)$ y $M_z(0)\delta(t)$ respectivamente.

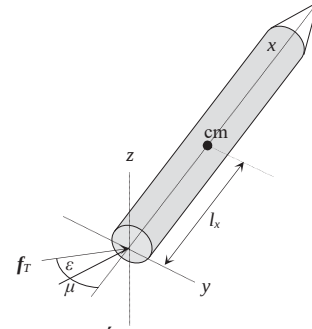


Fig. 3.24. Ángulos de deflexión.

3.4.4. Sistema Básico de Control Lineal

Cuando dicho sistema de coordenadas es asignado a un vehículo, éste debe ser capaz de mantener alguna orientación específica, o cambiarla en función del tiempo. Ya sean tripulados o no, deberán emplear un sistema de control de postura para reducir considerablemente la carga de trabajo necesario para ciertas ejecuciones.

Control es como se le llama a la ejecución necesaria para obtener un resultado deseado. El objeto (un vehículo aeroespacial) que habrá de ser controlado se le llama planta, mientras que al proceso que pone en funcionamiento al control se le llama controlador^[9]. Tanto la planta como el controlador son sistemas. Es posible representar de forma gráfica a un sistema como un bloque (Fig. 3.25), conectado por flechas llamadas entrada y salida. Tal representación es llamada, diagrama de bloques.

La relación entre la entrada y la salida, toma la forma de una ecuación diferencial en función del tiempo. La condición o estado de un sistema en un instante dado, es definido por otro conjunto de variables escalares, llamadas variables de estado. Por ejemplo, una postura puede estar descrita por un quaternion $\mathbf{q}(t) = \{q_0(t), \mathbf{q}(t)\}$ y las componentes de la velocidad angular de cuerpo referencial $\boldsymbol{\omega}(t)$. Juntos definen un vector de estado $\{\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\omega}(t)\}$. El espacio formado por un vector como este se llama espacio de estado.

Un sistema que consiste de una planta y un controlador, es llamado, un sistema de control^[9]. Este controla la planta a través de la entrada de control $u(t)$, (Fig 3.25 a). En términos físicos, ésta puede ser una torca o una fuerza aplicada al vehículo.

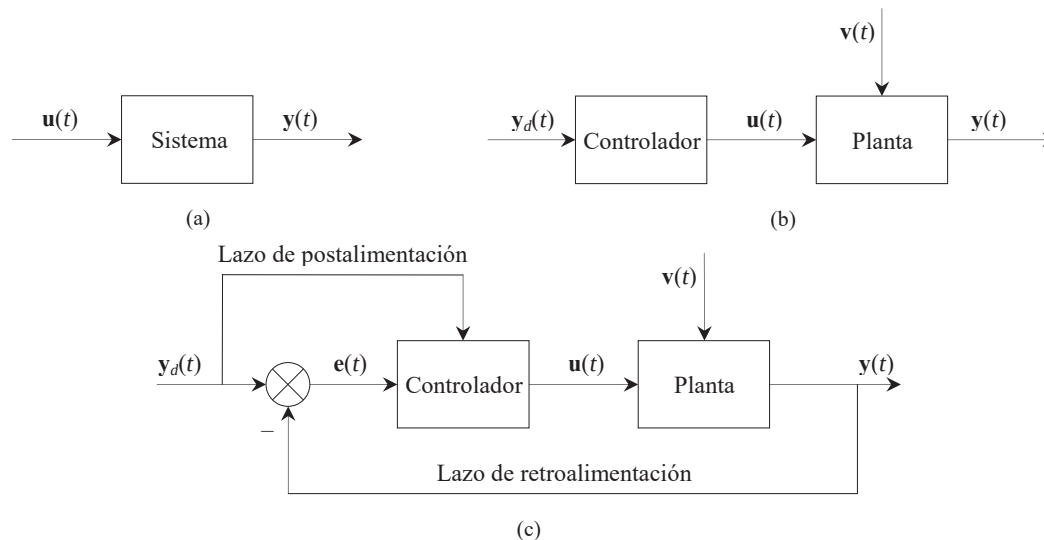


Fig. 3.25. Representación por bloques de diagramas de control, (a) simple, (b) de lazo abierto, (c) de lazo cerrado.

La tarea más común en un sistema de control, es traer a la planta, a un estado deseado $x_d(t)$, en la presencia de variables de entrada no deseadas, $v(t)$ llamadas perturbaciones. Dicha tarea puede ser llevada a cabo mediante dos tipos de sistemas de control: por lazo abierto y lazo cerrado, (Figs. 3.25 b y c) respectivamente.

En un sistema de lazo abierto, el controlador desconoce la situación de la planta, y está sujeto únicamente al modelo exacto (teórico) de la planta tomando en cuenta a su vez, dichas perturbaciones. Esta aplicación “ciega” de control tiene la desventaja de que rara vez es posible conocer estos requerimientos, haciendo que siempre hayan ciertas discrepancias en la dinámica de la planta. Por lo tanto, es más frecuente utilizar un sistema de control de lazo cerrado, en el cual, es posible conocer el estado actual de la planta (que deberá tener sensores) mediante un mecanismo de retroalimentación, y así, ajustar de forma aproximada a la entrada $u(t)$. En un sistema de salida de

retroalimentación, la salida de la planta es continuamente comparada con una salida deseada $y_d(t)$. El símbolo circular cruzado representa una unión de suma, donde las variables indicadas por flechas, son sumadas o restadas a las demás. Por ejemplo, la entrada al controlador es el vector de error definido como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t).$$

La finalidad de dicho sistema es hacer que $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. Obviamente, $\mathbf{u}(t)$ debería ser dependiente de $\mathbf{e}(t)$, y más aún, depender de forma explícita con $\mathbf{y}_d(t)$. Por lo tanto, es necesario agregar también un lazo de postalimentación.

Un actuador, es un dispositivo cuya función es la de proporcionar una fuerza sobre algún otro dispositivo mecánico, por ejemplo, el timón de las aeronaves, o bien, el ya mencionado sistema de control de reacción, SCR. En los sistemas de control modernos, los actuadores son operados a través de entradas de señales eléctricas, mientras que los sensores producen salidas de señales eléctricas. Se ha adoptado la convención de tratar actuadores y sensores dentro de la misma planta, (Fig.3.25).

En un sistema de control general, el controlador representa la relación matemática^[9] entre la salida de la planta $\mathbf{y}(t)$, el estado deseado $\mathbf{x}(t)$, la entrada de control $\mathbf{u}(t)$, y el tiempo t . Se hace referencia a estas relaciones como leyes de control, y su obtención es el principal objetivo de la teoría de control. En general, un sistema de control es aproximado por una ecuación diferencial lineal. Con esto, es posible aplicar la superposición lineal^[9], la cual permite agregar en sumas de vectores de entrada individuales a los vectores de salida, permitiendo utilizar cálculo operacional y métodos algebraicos lineales para su análisis.

3.4.4.1. Sistemas Lineales

Sean $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ la entrada salida respectivas de un sistema. Se dice que el sistema es lineal^[9] si:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{y}(t) &= c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ y $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son las entradas y salidas del sistema respectivamente, y c_1, c_2 son constantes escalares arbitrarias. Si la ecuación diferencial que gobierna al sistema no contiene productos o funciones trascendentales de variables de estado, entonces es lineal. Considérese uno descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condición inicial $\mathbf{x}_0$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.139)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado. El conjunto de estas ecuaciones se llama ecuación de estado, y su dimensión se llama orden del sistema. Las matrices coeficientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pueden ser variantes en el tiempo, y sus dimensiones dependen del orden del sistema al igual que del tamaño del vector de entrada $\mathbf{u}(t)$.

La solución general de la ecuación (3.139) es:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.140)$$

donde Φ es la matriz de transición (Cap 2). Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, dicha matriz tiene la propiedad de que $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$. Además, la ecuación de estado se convierte en una ecuación homogénea, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$. De aquí que Φ da la solución de tal ecuación de estado.

Si las matrices coeficientes varían en el tiempo (sistemas lineales de tiempo variable), la deducción de la matriz de transición es una tarea bastante complicada, al menos en cuanto a su forma analítica, ya que en la mayoría de los casos conviene recurrir a algunas técnicas de aproximación numérica como el método de Rungge-Kutta o Simpléticas.

3.4.4.2. Sistemas Lineales de Tiempo Invariante

Generalmente la escala temporal de la dinámica rotacional es pequeña, de modo tal que las matrices coeficientes pueden ser casi constantes. En tal caso, el sistema es aproximado a un sistema lineal de tiempo invariante, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices constantes. Este caso puede ser fácilmente manejando^[9] al tratar:

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \quad (3.141)$$

donde $e^{\mathbf{M}}$ es llamada matriz exponencial de la matriz cuadrada $\mathbf{M}$, y es definida por la siguiente serie infinita:

$$e^{\mathbf{M}} \doteq \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{M}^k \quad (3.142)$$

La evaluación de $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ por esta serie sería prácticamente imposible. Lo más conveniente es, retener un número finito de términos de la ecuación (3.142) y subdividir el intervalo $t - t_0$ en pequeños subintervalos. Por otro lado, para sistemas de órdenes pequeños, es posible obtener una expresión analítica usando transformadas de Laplace $\mathcal{L}$.

Considérese la transformada de Laplace de la ecuación (3.139) para un sistema de tiempo invariante sujeto a la condición inicial dada:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.143)$$

donde $\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{X}$, y $\mathcal{L}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{U}$. Para obtener la matriz de transición, se desprecia $\mathbf{U}(s)$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 \quad (3.144)$$

o bien:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.145)$$

tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (3.145):

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0$$

comparándola con $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$ y la ecuación (3.141) se tiene:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3.146)$$

Al sustituir la ecuación (3.141) en la ecuación (3.140) es posible obtener la siguiente expresión general de estado de un sistema lineal de tiempo invariante, en la presencia de una entrada de Laplace transformable arbitraria, que inicia en un instante $t = 0$ cuando el estado del sistema era $\mathbf{x}(0) = 0$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.147)$$

El primer término se le llama respuesta inicial (o transiente), el cual puede decaer a cero para un sistema asintóticamente estable. Sin embargo, bajo el mismo límite el término de la integral puede converger a un cierto valor o bien, tomar la misma forma funcional de la entrada. La solución de (3.147) puede ser obtenida mediante discretización del tiempo en pequeños intervalos, y evaluar ambos términos mediante aproximaciones numéricas apropiadas. Matlab incluye una función intrínseca, `lsim` que puede ser invocada o bien, empleada por diagramas de bloques en Simulink que es un software implícito en el mismo paquete de Matlab.

3.4.4.3. Sistemas Lineales de Postura

De acuerdo a los temas vistos anteriormente, es posible identificar las ecuaciones diferenciales que corresponden a un sistema lineal de tiempo invariante. Por ejemplo, para los cuaternios, si la matriz Q_N de la ecuación (3.46) es constante, entonces es posible escribir^[9] la solución resultante en ecuaciones lineales de tiempo invariante como:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} = e^{\frac{1}{2}Q_N^T t} \begin{Bmatrix} q_0(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{Bmatrix} = e^{\frac{1}{2}Q_N^T t} \mathbf{q}(0) \quad (3.148)$$

donde $\mathbf{q}(0)$ representa la postura inicial en $t = 0$. La matriz exponencial también se puede calcular empleando la función intrínseca `expm.m` de Matlab. Por otro lado, para el movimiento axisimétrico de un cuerpo rígido, es claro que de acuerdo a la ecuación (3.108), el vehículo está en un estado de equilibrio siempre que $\omega_1 = \omega_2 = 0$, llamado giro puro^[7], alrededor del eje de simetría. También es evidente que la última ecuación de la expresión (3.108) que $\dot{\omega}_3 = 0$, o $\omega_z = n = \text{constante}$. Supóngase que el vehículo estaba en un estado de giro puro cuando una perturbación $\omega_1(0), \omega_2(0)$, fue aplicada en un instante $t = 0$. Tratando las dos primeras de las ecuaciones de (3.108) es posible escribirlas como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

donde, $k = n \frac{(J_z - J_x)}{J_x}$. La ecuación (3.149) representa la ecuación de estado lineal de tiempo invariante, cuya solución con la condición inicial $\omega_1(0), \omega_2(0)$, en $t = 0$, es fácilmente escrita de forma analítica como:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{Bmatrix} = e^{\mathbf{K}t} \begin{Bmatrix} \omega_1(0) \\ \omega_2(0) \end{Bmatrix}$$

donde $e^{\mathbf{K}t}$ es la matriz exponencial. Usando la ecuación (3.146), es posible determinar la matriz exponencial al tomar la transformada inversa de Laplace como sigue:

$$e^{\mathbf{K}t} = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{K})^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(kt) & -\text{Sen}(kt) \\ \text{Sen}(kt) & \text{Cos}(kt) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución está dada por:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_1(0) \text{Cos}(kt) - \omega_2(0) \text{Sen}(kt) \\ \omega_2(t) &= \omega_1(0) \text{Sen}(kt) + \omega_2(0) \text{Cos}(kt) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Llegando a la misma conclusión de que el movimiento rotacional de un vehículo rígido axisimétrico perturbado de un estado de equilibrio en giro único, alrededor del eje longitudinal, por una perturbación $\omega_1(0), \omega_2(0)$, es oscilatorio en el plano oxy, también llamado plano lateral^[7]. Una característica importante de la ecuación (3.150) es que:

$$\omega_{12}^2 \doteq \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1^2(0) + \omega_2^2(0) = \text{constante}$$

que implica que la magnitud de la componente de la velocidad angular en el plano lateral es constante.

Capítulo 4

Requerimientos y Secuencias de Misión

Finalmente, para complementar la teoría matemática del vuelo aeroespacial, hago uso de un software de simulación tridimensional de alta precisión denominado Orbiter^[23] el cual, ha sido codificado en lenguaje C++, permitiéndonos situarnos en un espacio virtual tridimensional del Sistema Solar, e interactuar con modelos tridimensionales de vehículos virtuales que emplean tensores principales de inercia.

Esto lo hago con la finalidad de dar una descripción detallada acerca de cada uno de los pasos a seguir durante el vuelo espacial empleándolo de modo conjunto con Matlab y con eso, analizar los datos arrojados por el mismo, así como dar también las formulaciones matemáticas extras que sean requeridas en un instante dado para completar la aplicación de lo visto en los capítulos previos. Para esto, es necesario configurar adecuadamente el simulador, incluyendo los modelos vehiculares^[A4] adecuados de dos misiones particulares correspondientes a proyectos reales.

El primero corresponde al proyecto Constelación de la NASA, que se encuentra ya en proceso de fabricación y planeación, (Fig. 4.1). Su finalidad es la de volver a enviar seres humanos a la superficie lunar pero ahora, por estancias más prolongadas que las realizadas por la misiones Apolo. Se contempla, se lleve a cabo eventualmente dentro de las próximas 2 décadas (Ref. http://www.nasa.gov/mission_pages/constellation/main/index.html).

El segundo proyecto corresponde al propuesto por el Dr. Robert Zubrin denominado Mars Direct y cuya finalidad es la de enviar la primer misión tripulada al planeta Marte (Ref. <http://www.astronautix.com/craft/marirect.htm>).

No obstante, debido a que en este proyecto se tienen estimaciones presupuestales superiores a las permitidas, se han presentado variantes que pudieran ser más accesibles que la primera concepción. Una variante es precisamente la Mars for Less^[13] propuesta por Bonin en 2003.

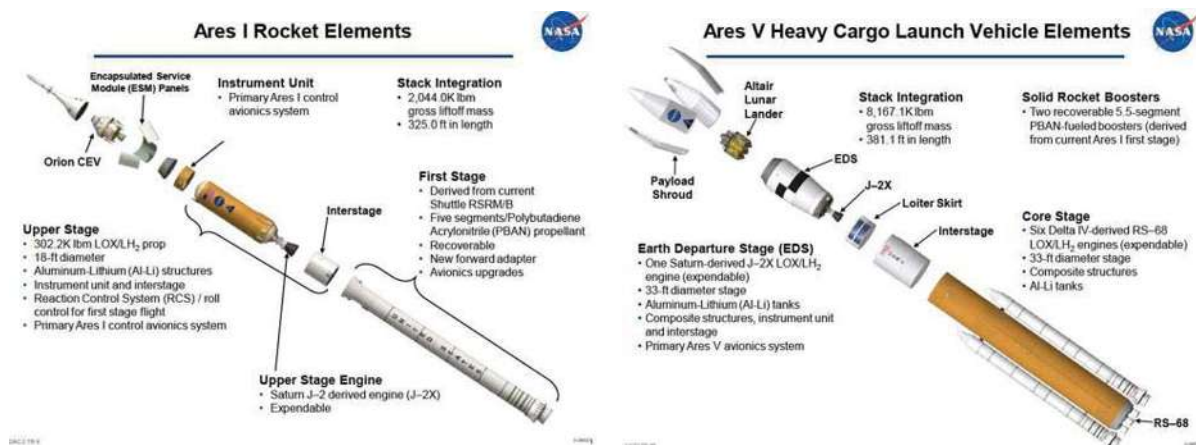


Fig. 4.1. Proyecto constelación

4.1. Requerimientos de Misión

No obstante, antes de describir ambas secuencias, serán descritos los principales requerimientos. En general estos abarcan muchos aspectos, desde el sistema de soporte vital como es el oxígeno, combustible, oxidantes, electrónica, diseño, etc. Hasta todo aquello relacionado en los materiales sujetos a prueba, faseado (ensamblado de secciones de cohete en un mismo conjunto), telecomunicaciones, propulsores, etc. Sin embargo, aquellos que juegan el papel más fundamental en las misiones espaciales son, la propulsión, faseado y reingreso.

4.1.1. Propulsión

El impulso aéreo puede ser generado de distintos modos. Por ejemplo, mediante dispositivos como: hélices, turbinas, propulsión a chorro (cohetes), o propulsión a chorro aéreo. De éstos el último, (Fig 4.2a) es un dispositivo que toma el aire con velocidad de torrente V_∞ a través de un ducto dentro del cual, se lleva a cabo un proceso de combustión y después es expulsada la mezcla caliente de aire y los productos de combustión por la parte trasera a una velocidad mucho mayor v_e . Como consecuencia, se tendrá una distribución de presión p_s alrededor del ducto así como una presión ambiental p_∞ , (Fig. 4.2b). Sea x la dirección del vuelo. Entonces, el impulso generado por el ducto será la componente x de ambas presiones integradas sobre las superficies interna y externa (asumiendo p_∞ constante):

$$T = \int (p_s dS)_x + \int (p_\infty dS)_x \quad (4.1)$$

Además, si A_i y A_e son los orificios de entrada y salida respectivamente, (Fig. 4.2d) la segunda integral vale: $p_\infty(A_i - A_e)$ mientras que, la primera en particular no es fácil de manejar. Para ello, considérese el volumen de gas acotado por la línea punteada, (Fig. 4.2b). En aerodinámica a éste se le llama, volumen de control^[1], (Fig 4.2c).

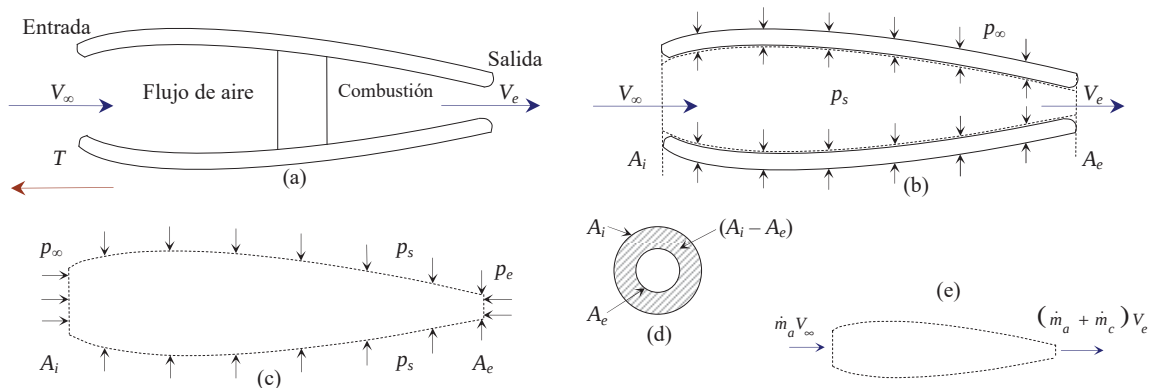


Fig. 4.2. Ilustración del principio de propulsión. (a) máquina de propulsión a chorro, (b) superficie de presión dentro y fuera del ducto, (c) Volumen de control para el flujo a través del ducto, (d) Vista frontal ilustrando las áreas de entrada y salida, (e) Cambio del momento del flujo a través de la máquina.

Como el gas está ejerciendo una presión p_s en el ducto, por la tercera ley de Newton se tiene que en el volumen de control habrá dicha presión pero opuesta, (Fig. 4.2c).

Por lo tanto, siguiendo tal esquema, la componente x de la fuerza del gas dentro del volumen de control es:

$$F = p_{\infty}A_i + \int (p_s dS)_x - p_e A_e \quad (4.2)$$

Suponiendo que la razón de masa de aire entrando es $\dot{m}_a$ entonces, su momento es $\dot{m}_a v_{\infty}$. El flujo de masa que abandona el ducto incluye ahora razón de masa de combustible $\dot{m}_c$, dando como resultado el momento $(\dot{m}_a + \dot{m}_c)V_e$, (Fig. 4.2e). La segunda ley de Newton enuncia que la fuerza es igual a la razón de cambio del momento. Por lo tanto, la fuerza en el volumen de control es:

$$F = (\dot{m}_a + \dot{m}_c)V_e - \dot{m}_a V_{\infty} \quad (4.3)$$

Igualando las ecuaciones (4.2) y (4.3), y resolviendo el término de la integral:

$$\int (p_s dS)_x = (\dot{m}_a + \dot{m}_c)V_e - \dot{m}_a V_{\infty} + p_e A_e - p_{\infty}A_i \quad (4.4)$$

Sustituyendo finalmente la ecuación (4.4) en la expresión (4.1), y simplificando se tiene la llamada ecuación fundamental de propulsión^[1]:

$$T = (\dot{m}_a + \dot{m}_c)V_e - \dot{m}_a V_{\infty} + (p_e - p_{\infty})A_e \quad (4.5)$$

A diferencia de la máquina de propulsión a chorro aéreo, la máquina de propulsión a chorro (cohetes) transporta tanto su combustible como sus oxidantes de modo que su funcionamiento es independiente de la atmósfera para su combustión, permitiendo su operabilidad en el espacio exterior.

Ambos compuestos (propulsante y oxidante) son inyectados en forma de spray en la cámara de combustión, (Fig.4.3a), donde son quemados creando una mezcla sujeta a muy altas presiones y temperaturas p_0 y T_0 respectivamente. El prototipo actualmente ya sujeto a pruebas para el proyecto constelación es la máquina J-2X, (Fig. 4.3b), cuya operabilidad básica está basada atendiendo a las mismas consideraciones ya mencionadas.

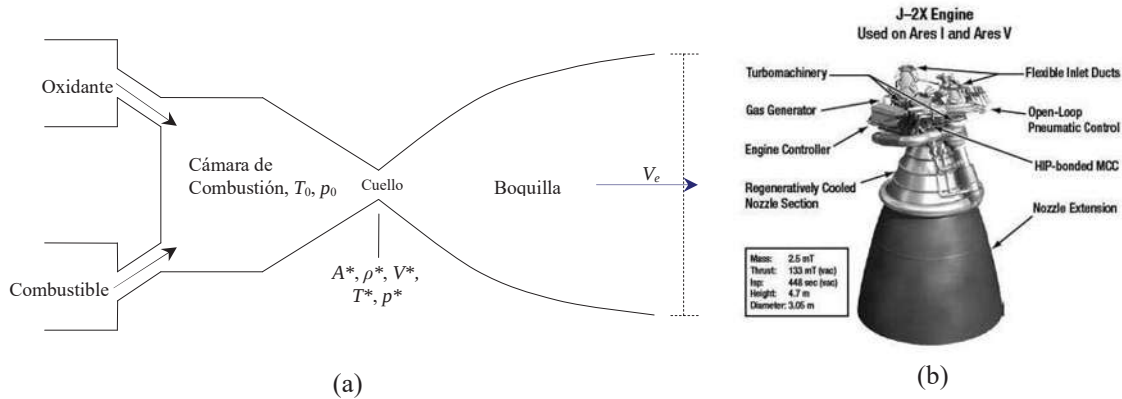


Fig. 4.3. (a) Esquematzación de una máquina cohete de propulsión, (b) Máquina J-2X

Los productos de la combustión alcanzan velocidades supersónicas a través de la boquilla (convergente-divergente del cohete), saliendo con una velocidad exhaustiva V_e . La propulsión de la máquina de cohete se obtiene de la ecuación (4.5) donde, $\dot{m}_a = 0$ y $\dot{m} = \dot{m}_c + \dot{m}_o$, es la suma de las razones de masa del combustible y del oxidante. Por lo tanto:

$$T = \dot{m}V_e + (p_e - p_\infty)A_e \quad (4.6)$$

La velocidad de salida V_e está dada por las relaciones aerodinámicas de la ecuación de energía entre la cámara de combustión y la boquilla de salida (Cap 1):

$$h_0 = h_e + \frac{V_e^2}{2}$$

$$c_p T_0 = c_p T_e + \frac{V_e^2}{2}$$

resolviendo la última para V_e^2 :

$$V_e^2 = 2c_p (T_0 - T_e) = 2c_p T_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right)$$

La expansión aerodinámica a través de la boquilla es de tipo isentrópico (Cap1). De aquí que $T_e/T_0 = (p_e/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Además:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1} = \frac{\gamma \bar{R}}{\bar{M}(\gamma-1)}$$

donde $\bar{R}$ es la constante del gas universal, y $\bar{M}$ el peso molecular. Así, V_e es:

$$V_e = \left\{ \frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

Una medición comparativa de la eficiencia entre distintas máquinas de cohetes^[1] puede ser obtenida mediante el impulso específico I_{sp} definido como el impulso por unidad de peso del flujo a nivel del mar:

$$I_{sp} \doteq \frac{T}{\dot{w}} = \frac{T}{g_0 \dot{m}} \quad (4.8)$$

Suponiendo que la presión en la salida es la misma que la presión ambiente, al combinar las ecuaciones (4.8) y (4.6) se tiene, $I_{sp} = \frac{V_e}{g_0}$ y luego, al sustituir la ecuación (4.7) en lo obtenido se tiene que:

$$I_{sp} = \frac{1}{g_0} \left\{ \frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Esta expresión indica lo necesario para tener un impulso específico grande, digamos, siendo T_0 la temperatura de combustión, ésta debe ser alta, mientras que el peso molecular $\bar{M}$ debe ser pequeño (Tabla 4.1).

La combinación de Queroseno-oxígeno fue empleada en la primera fase del Saturno V en las misiones Apolo. El LH_2/LOX lo fue para las, segunda y tercera fases del mismo. Sin embargo, la mejor combinación es la que se obtiene mediante hidrógeno-Flúor. Desafortunadamente el Flúor es altamente corrosivo por lo que jamás fue ni será empleado a futuro.

Propulsante (Combustible + Oxidante)	Temperatura de flama K	Peso molecular promedio de la combustión
Nafta + Oxígeno	3144	22
Hidrógeno + Oxígeno (LH_2/LOX)	3517	16
Hidrógeno + Flúor	4756	10
Tabla 4.1. mezclas de propulsores más comunes		

Actualmente se realizan estudios sobre una nueva clase de combustible de tipo natural elaborado a base de Metano cuyo costo puede ser hasta del 10% (Ref. www.la.dlr.de/ra/sart/publications/pdf/0095-0212prop.pdf) del total que se obtiene con hidrógeno junto con su proceso de licuefacción. Además de incluir el oxidante el cual tiene un costo aún menor (12.5% del costo total del mismo metano). Dicha combinación LOX/Metano tiene un impulso específico del 12% mayor que el de LOX/ LH_2 .

Sin embargo, dicha combinación presenta sus desventajas al considerar aspectos de diseño de máquinas las cuales, requieren de un motor y cuerpo de máquina de propulsión más grande y por lo tanto, un aumento considerable de masa y fricción. Esto da como única opción práctica la combinación de propulsores LOX/ LH_2

Volviendo al esquema de máquina de cohete, (Fig. 4.3) se tiene de acuerdo a la ecuación de continuidad (Cap1) en el cuello de la boquilla:

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^* \quad (4.10)$$

Además, la velocidad en el cuello de una boquilla supersónica convergente-divergente es sónica^[1], de modo que $M^* = 1$. Así que V^* es la velocidad del sonido:

$$V^* = \sqrt{\gamma R T^*} \quad (4.11)$$

De la ecuación de estado:

$$\rho^* = \frac{p^*}{R T^*} \quad (4.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.11) y (4.12) en la ecuación (4.10):

$$\dot{m} = \frac{p^* A^*}{\sqrt{R T^*}} \sqrt{\gamma} \quad (4.13)$$

Escribiendo las ecuaciones del flujo compresible subsónico (Cap1) entre la cámara de combustión y el cuello:

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T^*} &= 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M^{*2} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{1}{2}(\gamma + 1) \\ \frac{p_0}{p} &= \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M^{*2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = \frac{1}{2}(\gamma + 1)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sustituyendo ambas ecuaciones (4.14) en la ecuación (4.13):

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (4.15)$$

Dicha expresión enuncia que cuando el flujo sónico está presente en el cuello, éste es proporcional a p_0 y A^* e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de T_0 .

Además, para una combinación dada de propulsores, T_0 es fija, al igual que para A^* para un diseño de cuello fijo en particular. De aquí que $p_0 = (\text{const}) \dot{m}$.

4.1.2. Faseado

Considérese el caso del cuerpo de masa variante donde ahora este representa un cohete de masa $(\Delta m - m)$ expulsando cierta cantidad de propulsante Δm (Cap 3) (Fig. 4.4). Entonces (Cap 1), su ecuación es:

$$(m - \Delta m) \frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} = \mathbf{F}_E - \Delta m \frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} - \mathbf{v}_R \frac{d\Delta m}{dt} \quad (4.16)$$

donde, $\mathbf{F}_E$ podría ser la suma de otras fuerzas externas aplicadas al sistema, tales como:

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_g \text{ (Gravitacional)} + \mathbf{D} \text{ (Fricción)} + \mathbf{P}_s \text{ (Presión solar)} + \mathbf{\Phi} \text{ (Perturbativas)} \text{ etc.}$$

Luego, las fuerzas externas de fricción y gravitacional dan como fuerza neta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{D} + \mathbf{T} = -\mu m \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{1}{2} \rho v S C_D \mathbf{v} + T (\hat{\mathbf{v}} \cos \varepsilon + \hat{\mathbf{n}} \sin \varepsilon) \quad (4.17)$$

donde, R es el radio vector del centro de la Tierra al vehículo, $\mathbf{n}$ es un vector normal, ε es el ángulo formado entre los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{v}$, $\rho = \rho(\mathbf{R})$ es la densidad atmosférica dada en función del radio $\mathbf{R}$ de acuerdo al modelo atmosférico exponencial, S es la sección de área transversa del cohete y $C_D = C_D(\mathbf{R}, \mathbf{v})$ es el coeficiente de fricción, (Cap1). Suponiendo en la ecuación (4.16) que las fuerzas externas son cero y que $d\Delta m = -dm$:

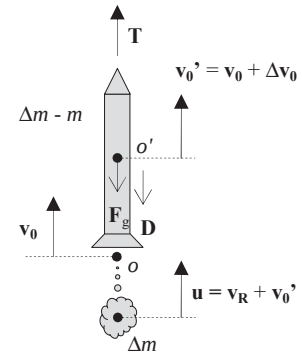


Fig. 4.4. Variación de masa

$$v_e \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad (4.18)$$

Resolviendo la ecuación (4.18) entre dos valores iniciales e instantáneos se tiene la ecuación del cohete de una fase^[9], la cual se cumple cuando se consume el combustible sin haber cambios en la masa estructural m_s del cohete entero:

$$\Delta v = v - v_0 = v_e \ln(m/m_0) \quad (4.19)$$

Así que, $m_0 = m_L + m_s + m_p$ y $m_f = m_L + m_s$ donde, m_p es la masa de propulsores, m_s la masa estructural y m_L la masa de carga transportada. Luego^[1], $m_f/m_0 = \sigma + (1-\sigma)\lambda$, donde, $\sigma = m_s/(m_s + m_p)$ es la Razón estructural y $\lambda = m_f/m_0$ es la Razón de carga transportada, por lo tanto:

$$\Delta v = v - v_0 = -v_e \ln[\sigma + (1-\sigma)\lambda] \quad (4.20)$$

El desempeño definido por la razón $\Delta v/v_e$ está limitado hasta $2.82^{[9]}$ para $\lambda = 10^{-3}$, (Fig. 4.5). Por otro lado, si el cohete entero consta a su vez de n secciones de cohete ensambladas, se dice que es de n -fases. Este valor puede llegar a ser cercano a 6, de ahí que su desempeño sea más óptimo. El incremento del desempeño es pequeño para $N > 3$, por esto, se suelen emplear en la práctica, sólo hasta 3 fases aún en vehículos grandes como el Saturno V empleado por el programa Apollo, o sus sucesores en desarrollo, Ares.

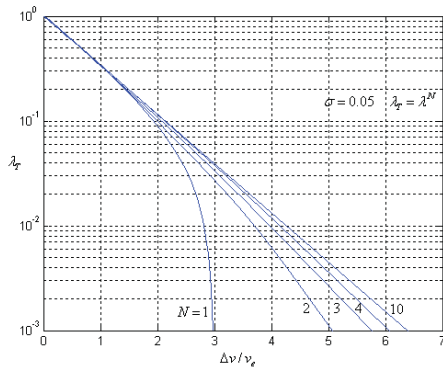


Figura 4.5. $\Delta v/v_e$ vs λ

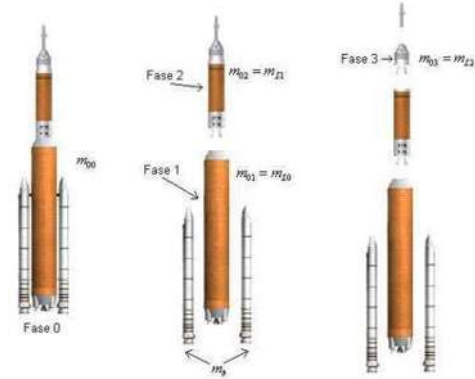


Figura 4.6. Trifase del variante Ares-IV

Otra variación es la del faseado paralelo. Esta ofrece la ventaja de liberar propulsores más rápido en su trayecto atmosférico. Es empleada en el actual sistema de transporte espacial STS, aunque existe la posibilidad de construir una variante para el proyecto constelación denominada Ares-IV, (Fig.4.6).

Cuando este faseado opera simultáneamente con el cohete principal, a todo el conjunto se le denomina fase cero. De ahí que, asumiendo un total de N -fases en la ecuación (4.20):

$$\Delta v = - \sum_{k=0}^N v_{ek} \ln \left[\sigma_k + (1 - \sigma_k) \lambda_k \right] \quad (4.21)$$

La masa inicial de una fase cualquiera, es masa de cargamento de la fase previa, así que la razón de carga del cohete completo es:

$$\lambda_T = \frac{m_L}{m_{01}} = \prod_{k=0}^N \lambda_k = \prod_{k=0}^N \frac{m_{0(k+1)}}{m_{0k}} \quad (4.22)$$

Las razones estructurales y de carga de la fase cero son respectivamente^[9]:

$$\sigma_0 = \frac{m_{sb} + m_{s1}}{m_{sb} + m_{s1} + m_{pb} + m_{p10}} \quad \lambda_0 = \frac{m_{01} - m_{p10}}{m_{00}} \quad (4.23)$$

donde, m_{sb} y m_{pb} son las masas estructural y de propulsores del paralelo respectivamente. m_{s1} es la masa estructural de la fase 1, y m_{p10} es lo consumido en operación de la fase 0. m_{01} es la masa inicial de la fase 1, y m_{00} es la masa inicial de la fase 0.

Del mismo modo para la fase 1:

$$\sigma_1 = \frac{m_{s1}}{m_{s1} + m_{p1} - m_{p10}} \quad \lambda_1 = \frac{m_{02}}{m_{01} - m_{p10}} \quad (4.24)$$

donde, m_{p1} es la masa total de propulsante y m_{02} la masa inicial de la fase 2.

Se contempla para la construcción del faseado del proyecto constelación, la implementación de equipo electrónico de alta tecnología, propulsores LH_2/LOX , así como de la máquina J-2X, (Fig. 4.7) y (Fig. 4.8).



Fig. 4.7. Fase respectiva 1 y paralela del Ares I/V

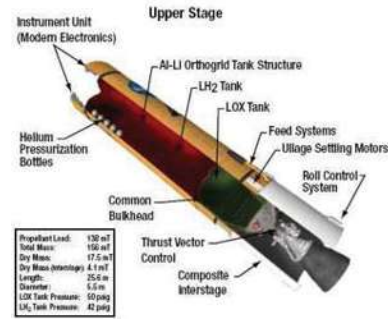


Fig.4.8. Fase 2 del Ares I

4.1.3. Cápsulas de Reingreso

En toda misión espacial, el proceso del reingreso atmosférico es quizás el más complicado y riesgoso. Esto debido al peligro inminente que se tiene una vez que el sistema de protección térmica alcanza temperaturas ionizantes las cuales, descomponen los átomos en sus partículas elementales “protones, electrones, etc.” y conducen el aire al plasma como estado de agregación que alcanza los 10^9 K (Ref. http://www.pppl.gov/Fusion_basics/pages/plasma_heating.html). Este se hace latente tanto para los tripulantes como para el equipo de instrumentación, los cuales, deben estar sujetos a ciertos valores de tolerancia que impidan algún daño fisiológico (en humanos) o técnico (en algunos instrumentos de control a bordo). Por esta razón, el análisis en el diseño de vehículos de reingreso es crucial al buscar la manera de obtener una máxima desaceleración posible de modo conjunto con una disipación de calor lo suficientemente rápida para evitar alguna contrariedad considerable.

Suponiendo que el vehículo se encuentra cerca del punto de reingreso, en el cual empieza a experimentar los efectos aerodinámicos. De acuerdo al diagrama de cuerpo libre (Fig. 4.9), las ecuaciones de las fuerzas aerodinámicas^[1] son:

$$\begin{aligned} -D + W \operatorname{Sen} \gamma &= m \dot{V}(t) \\ L - W \operatorname{Cos} \gamma &= m \frac{V^2}{r_c} \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde, D es la fricción, W el peso, V la velocidad de reingreso, L la sustentación y r_c el radio de curvatura de la trayectoria.

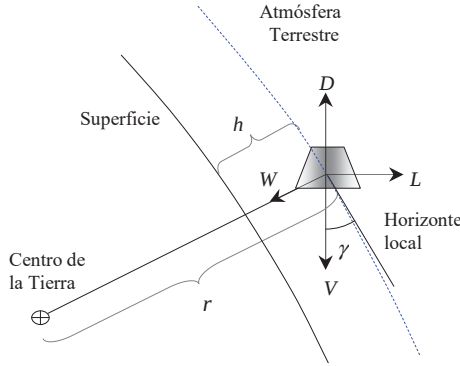


Fig. 4.9. Diagrama de reingreso atmosférico

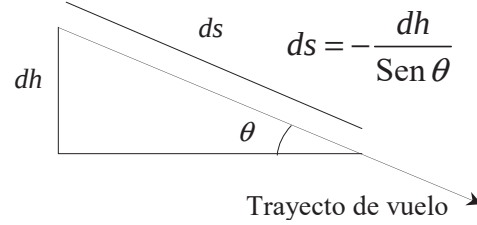


Fig. 4.10. Relación entre s y h.

Para obtener la relación funcional $V(h)$ se aplica un cambio de variable sabiendo que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds}$ y de acuerdo a la (Fig. 4.10). la primera de las ecuaciones (4.25) es:

$$-\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D + W \text{ Sen } \gamma = -\frac{1}{2} m (\text{Sen } \gamma) \frac{dV^2}{dh} \quad (4.26)$$

El modelo atmosférico exponencial (Cap1) provee para la densidad:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-g_0 h / RT} = \rho_0 e^{-Zh} \quad (4.27)$$

donde R es la constante de los gases reales y T la temperatura atmosférica a dicha altura. Con ello se tiene la relación funcional $V(\rho) = V(\rho(h))$. Tomando la derivada de la ecuación (4.27) respecto a h , sustituyendo luego en la ecuación (4.26), simplificando y reordenando términos, se llega a la ecuación diferencial para el movimiento de un vehículo de reingreso atmosférico:

$$\frac{dV^2}{d\rho} + \frac{1}{m/C_D S} \frac{V^2}{Z \text{ Sen } \gamma} = \frac{2g}{Z\rho} \quad (4.28)$$

La variación $\gamma = \gamma(h)$ también es algo que debe considerarse. Este es el papel que juega la segunda ecuación de movimiento de la ecuación (4.25).

En la práctica existen tres tipos de trayectorias de reingreso, la balística que ocurre cuando una cápsula ingresa directamente a la Tierra, la de escape en la cual la cápsula da una serie de “roces” con la atmósfera para después ingresar, y la planeada maniobrable, que se hace presente en vehículos como el del STS. Para su estudio, esta última es bastante complicada, ya que incluye todos los parámetros aerodinámicos, orbitales, de postura, y tolerancias para el sistema de protección térmica, así que por simplicidad, será considerada únicamente la que corresponde al caso balístico.

4.1.3.1. Reingreso Balístico

Si la trayectoria de reingreso es balística, entonces $L = 0$ y $D \gg W$, así al ser considerado esto con la primera ecuación de movimiento (4.25) se tiene:

$$-D = m\dot{V}(t) \quad (4.29)$$

Una vez repetido todo el proceso análogo que se hizo para obtener la ecuación (4.28) en la expresión (4.29) se llega a:

$$\frac{dV^2}{d\rho} + \frac{1}{m/C_D S} \frac{V^2}{Z \text{ Sen } \gamma} = 0 \quad (4.30)$$

Si la trayectoria es casi recta entonces $\gamma \approx \text{cte}$. Con esto, es posible integrar la ecuación (4.30):

$$V = V_E e^{-\frac{\rho}{2(m/C_D S)Z \text{ Sen } \gamma}} \quad (4.31)$$

donde ahora, V_E es la velocidad inicial de reingreso y V es la velocidad del vehículo. Por otro lado, se define la desaceleración partiendo de la ecuación (4.29) como $|\dot{V}| = D/m$. Usando la definición del coeficiente de fricción (Cap1):

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| = \frac{\rho V^2 S C_D}{2m} \quad (4.32)$$

Junto con la ecuación (4.27), es posible obtener su variación con la altura, (Fig. 4.11). la desaceleración máxima es de gran interés, ya que dicho valor para los vehículos tripulados debe permanecer por debajo de los límites de tolerancia humana de acuerdo a la Pérdida de conciencia inducida por efectos G o (G-LOC, “G-Loss of Consciousness”^[18]), (Fig. 4.12). Incluso, los vehículos no tripulados tienen limitaciones dictadas por fallas estructurales o equipo instrumental que pudieran sufrir algún daño considerable.

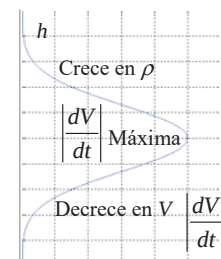


Fig. 4.11. Desaceleración vs altura

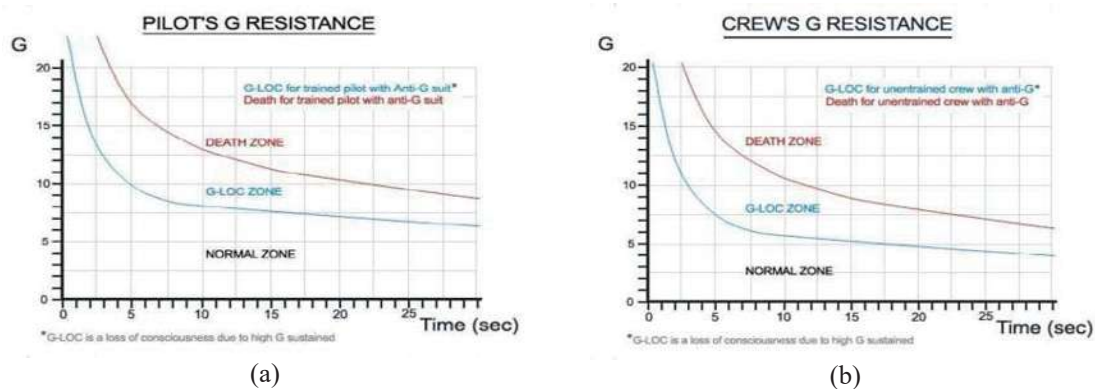


Fig. 4.12. Límites de tolerancia para, (a) pilotos entrenados y (b) tripulación estándar

Para obtener una expresión útil de la desaceleración, se toma la derivada de la ecuación (4.32) notando que tanto ρ como V varían a lo largo de la trayectoria:

$$\left| \frac{d^2V}{dt^2} \right| = \frac{SC_D}{2m} \left(2\rho V \frac{dV}{dt} + V^2 \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (4.33)$$

de la ecuación (4.29) se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} = -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 SC_D \right) \quad (4.34)$$

luego, sustituyendo la ecuación (4.34) en la expresión (4.33) y factorizando:

$$\left| \frac{d^2V}{dt^2} \right| = \frac{SC_D V^2}{2m} \left(-\frac{\rho^2 V SC_D}{m} + \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (4.35)$$

Como la máxima desaceleración está dada al igualar a cero a la ecuación (4.35) se llega a:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{m} \rho^2 V SC_D \quad (4.36)$$

Diferenciando la ecuación (4.27) con respecto al tiempo y aplicando el cambio de variable correspondiente (Fig. 4.10) se tiene:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 Z e^{-Zh} \frac{dh}{dt} = -Z \rho \frac{dh}{dt} = -Z \rho \left(-\frac{ds}{dt} \text{Sen } \gamma \right) = \rho Z V \text{Sen } \gamma \quad (4.37)$$

Igualando la ecuación (4.36) con la expresión (4.37) y resolviendo para ρ :

$$\rho = \frac{m}{SC_D} Z \text{Sen } \gamma \quad (4.38)$$

Sustituyendo la ecuación (4.38) en la ecuación (4.32) con la intención de obtener la máxima desaceleración:

$$\left| \dot{V}(t) \right|_{\max} = \frac{1}{2} V^2 Z \text{Sen } \gamma \quad (4.39)$$

La velocidad en el punto de máxima desaceleración se obtiene al sustituir (4.38) en la que se obtiene al igualar la ecuación (4.36) con la expresión (4.37) dando, $V = V_E e^{-1/2}$, que al ser sustituida en la ecuación (4.39):

$$\left| \dot{V}(t) \right|_{\max} = \frac{1}{2e} V_E^2 Z \text{ Sen } \gamma \quad (4.40)$$

Por lo tanto, la desaceleración máxima depende directamente de V_E y del ángulo de ingreso γ .

4.1.3.2. Calor aerodinámico de Reingreso

La energía total de un vehículo de reingreso, se disipa en forma de calor durante un reingreso atmosférico debido a la fricción con la atmósfera. Este calor se manifiesta tanto fuera como dentro del mismo, dejando como reto en el diseño de Sistemas de Protección Térmica (SPT), minimizar el calor que entra (de acuerdo a ciertos límites de tolerancia humana o instrumental) y maximizar el que va al aire circundante. Durante el ingreso, se genera una onda de choque, (Cap1) la cual, llega a alcanzar los 11,000 K^[1] de temperatura (más elevada que la superficie del sol), disociando el aire en gas ionizado por O⁺, N⁺ y electrones. Así pues, considérese una cantidad adimensional llamada, coeficiente de Stanton^[1]:

$$C_H = \frac{\dot{Q}(t)}{\rho_{\infty} V_{\infty} (h_0 - h_w) S} \quad (4.41)$$

donde ρ_{∞} y V_{∞} son la densidad y velocidad del flujo de torrente aéreo libre, h_0 y h_w son la entalpía total y de la superficie aerodinámica respectivamente, S el área de referencia y $\dot{Q}(t)$ es la transferencia de calor. Dada la ecuación de energía para el flujo adiabático sin fricción (Cap1), $h + V^2/2 = \text{cte}$, se tiene que la entalpía total es $h_0 = h_{\infty} + V_{\infty}^2/2$.

Las condiciones de ingreso indican que V_∞ es muy grande, y el aire detrás del vehículo es relativamente frío con respecto al del frente, de modo que $h_\infty = c_p T$ es relativamente pequeño. La constante c_p es el calor específico a presión constante. Por lo tanto $h_0 \approx V_0^2/2$. La temperatura superficial, debe permanecer por debajo de unos cuantos cientos de grados Kelvin de los límites de fundición del SPT. A su vez, está asociado con una h_0 muy grande. Así que, suponiendo $h_0 \gg h_w \approx 0$ ^[1] en la ecuación (4.41):

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^3 S C_H \quad (4.42)$$

Otro aspecto importante que debe ser considerado de modo conjunto con la ecuación (4.42) es el de la fricción superficial. Para ello se usará una analogía teórico experimental denominada Analogía de Reynold's^[1] $C_H \approx \frac{1}{2} C_f$, donde C_f es el coeficiente de fricción superficial promedio. Aplicándola a la ecuación (4.42):

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{4} \rho_\infty V_\infty^3 S C_f \quad (4.43)$$

Volviendo a la expresión del movimiento (4.34), es posible reescribir la ecuación (4.43) como:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV_\infty} \frac{dV_\infty}{dt} = \frac{dQ}{dV_\infty} \left(-\frac{1}{2m} \rho_\infty V_\infty^2 S C_D \right) \quad (4.44)$$

Igualando las ecuaciones (4.43) y (4.44):

$$dQ = -\frac{1}{4} m \frac{C_f}{C_D} dV_\infty^2 \quad (4.45)$$

Dadas las condiciones de reingreso: $0 \leq Q \leq Q_T$ y $V_E \leq V_\infty \leq 0$, e integrando la ecuación (4.45):

$$Q_T = \frac{1}{4} \frac{C_f}{C_D} m V_E^2 \quad (4.46)$$

Dos conclusiones importantes de la ecuación (4.46) son, $Q_T \propto \frac{1}{2} m V_E^2$ y $Q_T \propto C_f / C_D$. Por lo tanto, lo requerido para minimizar Q_T es, $C_f / (C_p + C_f) \ll 1$. Considerando dos casos extremos, se tiene que, para un cuerpo puntiagudo (Fig. 4.13a), $C_p \ll C_f$ entonces $C_D \approx C_f$, por lo tanto $C_f / C_D \approx 1$. Mientras que para uno abultado (Fig. 4.13b), $C_p \gg C_f$ entonces $C_D \approx C_p$, por lo tanto $C_f / C_D \ll 1$.

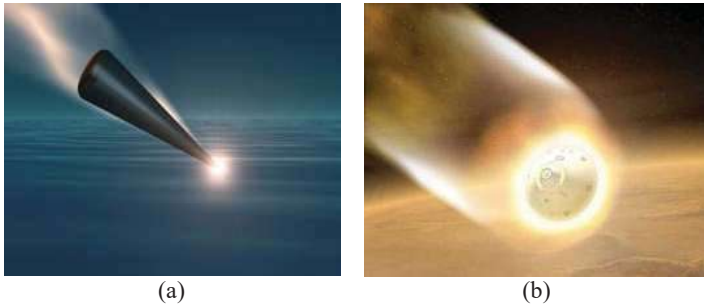


Fig. 4.13. Reingresos de cuerpos: (a) puntiagudo, (b) abultado



Fig. 4.14. Módulo de reingreso (CEV)

Así, para minimizar el calor de reingreso de un vehículo, este debe tener un frente abultado. Tal esquema corresponde a la misma configuración determinada para la cápsula del CEV-Orion la cual, va dentro del conjunto vehicular y su desacople del módulo de servicios se efectúa de modo previo al reingreso atmosférico proveniente de una misión lunar, (Fig. 4.14).

4.2. Secuencia de Misión Tierra-Luna

El objetivo del proyecto constelación es primero, colocar en órbita la Fase de Apertura Terrestre o EDS (no tripulado), junto con el módulo lunar LSAM o LM, (Fig. 4.15). Después, enviar el Vehículo de Exploración Tripulado o CEV para realizar un acoplamiento con el EDS-LM. Una vez unidos, el EDS genera el impulso translunar y, durante el trayecto, éste es liberado dejando libres al CEV-LM. En seguida, ambos entran en órbita lunar para permitir el descenso del LM. Una vez hecho esto, el Módulo de Ascenso lunar o LAM, asciende hasta acoplarse con el CEV.

Transferida la tripulación a éste último, el LAM es expulsado y finalmente el módulo de servicios libera la cápsula del CEV para permitir el reingreso de la tripulación, (Fig. 4.15). (Ref: http://www.nasa.gov/mission_pages/constellation/main/index.html).

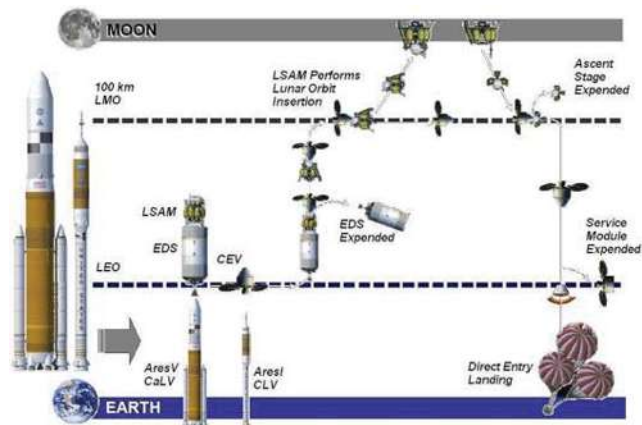


Fig.4.15. Secuencia de misión del proyecto Constellation

4.2.1. Movimiento Atmosférico y Transatmosférico

En general existen dos tipos distintos de lanzamiento. Estos son, el que debe ejecutarse para una puesta en órbita arbitraria (Hubble), y el necesario para interceptar otro vehículo que ya está en órbita (Misión tripulada del STS a la EEI). El proyecto Constellation propone un lanzamiento inicial del CaLV (Ares V) para la puesta en órbita del EDS, y después, un segundo lanzamiento del CLV (Ares I) para la puesta en órbita interceptora del CEV con el EDS (ya en órbita alrededor de la Tierra). Sin embargo, antes de describir ambos lanzamientos es conveniente proporcionar información teórica relevante que interviene en el proceso más complejo e inicial de toda misión espacial, el lanzamiento.

4.2.1.1. Movimiento Relativo a la Tierra.

Considérese un sistema geocéntrico inercial ($SXYZ$) y un cohete despegando con velocidad V partiendo del punto de lanzamiento el cual, está localizado en dicho sistema por dos ángulos, la longitud celeste λ y la latitud δ , (Fig. 4.16).

Nótese que debido a la rotación terrestre, dicho punto varía en el tiempo de acuerdo a su velocidad angular la cual es $\omega = \Omega \mathbf{K}$. La ubicación de dicho punto en el sistema inercial es:

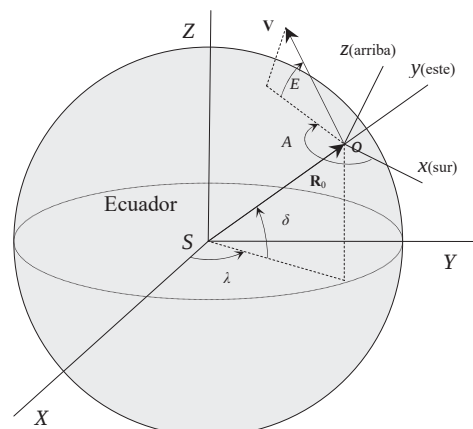


Fig. 4.16. Sistemas inercial y relativo

$$\mathbf{R}_0 = R_0 (\cos \delta \cos \lambda) \mathbf{I} + R_0 (\cos \delta \sin \lambda) \mathbf{J} + R_0 (\sin \delta) \mathbf{K} \quad (4.47)$$

La velocidad del punto es la velocidad del sistema (oxyz) relativo (también llamado topocéntrico relativo^[2]) respecto al inercial, (Cap3) de modo que:

$$\mathbf{v}_0 \doteq \dot{\mathbf{R}}_0(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_0 = \Omega R_0 (\cos \delta \cos \lambda) \mathbf{J} - R_0 (\cos \delta \sin \lambda) \mathbf{I} \quad (4.48)$$

De modo similar, la aceleración (del sistema relativo respecto al inercial, Cap3) es:

$$\mathbf{a}_0 \doteq \dot{\mathbf{v}}_0(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = -\Omega^2 R_0 (\cos \delta \cos \lambda) \mathbf{I} - \Omega^2 R_0 (\cos \delta \sin \lambda) \mathbf{J} \quad (4.49)$$

Si V es la velocidad del cohete, ésta es en el sistema relativo:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = V \left[(\cos E \cos A) \mathbf{i} + (\cos E \sin A) \mathbf{j} + (\sin E) \mathbf{k} \right] \quad (4.50)$$

donde, para el instante de lanzamiento se tendrá $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Sustituyendo las ecuaciones (4.48) y (4.50) en la ecuación general del movimiento $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (Cap3), se tiene que la velocidad total del cohete es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \Omega R_0 \left[(\cos \lambda) \mathbf{J} - (\sin \lambda) \mathbf{I} \right] \cos \delta + \\ + V \left[(\cos E \cos A) \mathbf{i} + (\cos E \sin A) \mathbf{j} + (\sin E) \mathbf{k} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Aplicando una transformación de coordenadas entre ambos sistemas mediante:

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \text{Sen } \delta \text{ Cos } \lambda & \text{Sen } \delta \text{ Sen } \lambda & -\text{Cos } \delta \\ -\text{Sen } \lambda & \text{Cos } \lambda & 0 \\ \text{Cos } \delta \text{ Cos } \lambda & \text{Cos } \delta \text{ Sen } \lambda & \text{Sen } \delta \end{pmatrix} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.52)$$

se tiene para la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \left[V (\text{Cos } E \text{ Cos } A \text{ Sen } \delta \text{ Cos } \lambda - \text{Cos } E \text{ Sen } A \text{ Sen } \lambda) \right. \\ & \left. + V (+\text{Sen } E \text{ Cos } \delta \text{ Cos } \lambda) - \Omega R_0 \text{ Sen } \delta \text{ Sen } \lambda \right] \mathbf{I} \\ & + \left[V (\text{Cos } E \text{ Cos } A \text{ Sen } \delta \text{ Sen } \lambda + \text{Cos } E \text{ Sen } A \text{ Cos } \lambda) \right. \\ & \left. + V (+\text{Sen } E \text{ Cos } \delta \text{ Sen } \lambda) - \Omega R_0 \text{ Sen } \delta \text{ Cos } \lambda \right] \mathbf{J} \\ & + V (-\text{Cos } E \text{ Cos } A \text{ Cos } \delta + \text{Sen } E \text{ Sen } \delta) \mathbf{K} \end{aligned} \quad (4.53)$$

La aceleración del cohete se deduce usando el hecho de que la velocidad angular del sistema móvil es constante y que $\mathbf{r} = 0$, lo cual da (Cap 3):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (4.54)$$

Para el primer y tercer término se disponen ya de las ecuaciones (4.49) y (4.50) respectivamente.

El segundo término se obtiene al diferenciar parcialmente la ecuación (4.50) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = & (\dot{V} \text{ Cos } E \text{ Cos } A - V\dot{E} \text{ Sen } E \text{ Cos } A - V\dot{A} \text{ Cos } E \text{ Sen } A) \mathbf{i} \\ & + (\dot{V} \text{ Cos } E \text{ Sen } A - V\dot{E} \text{ Sen } E \text{ Sen } A + V\dot{A} \text{ Cos } E \text{ Cos } A) \mathbf{j} \\ & + (\dot{V} \text{ Sen } E + V\dot{E} \text{ Cos } E) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Es posible transformar la ecuación (4.55) al sistema inercial mediante la expresión (4.52).
Luego, el último término de la ecuación (4.54) sería:

$$2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 2\Omega V \left[\cos E \cos A (\mathbf{K} \times \mathbf{i}) + \cos E \sin A (\mathbf{K} \times \mathbf{j}) + \sin E (\mathbf{K} \times \mathbf{k}) \right]$$

Usando la matriz de rotación dada por la ecuación (4.52):

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 2\Omega V \{ & \cos E \cos A \left[(\sin \delta \cos \lambda) \mathbf{J} - (\sin \delta \sin \lambda) \mathbf{I} \right] \\ & + \cos E \sin A \left[(-\sin \lambda) \mathbf{J} - (\cos \lambda) \mathbf{I} \right] \\ & + \sin E \left[(\cos \delta \cos \lambda) \mathbf{J} - (\cos \delta \sin \lambda) \mathbf{I} \right] \} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sustituyendo^[9] las ecuaciones (4.49), (4.55) y (4.56) en la expresión (4.54): y después de aplicar considerable álgebra:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left[(\dot{V} \cos E \cos A - V\dot{E} \sin E \cos A - V\dot{A} \cos E \sin A) \sin \delta \cos \lambda \right. \\ & - (\dot{V} \cos E \sin A - V\dot{E} \sin E \sin A + V\dot{A} \cos E \cos A) \sin \lambda \\ & + (\dot{V} \sin E + V\dot{E} \cos E) \cos \delta \cos \lambda - \Omega^2 R_0 \sin \delta \cos \lambda \\ & \left. - 2\Omega V (\cos E \cos A \sin \delta \sin \lambda + \cos E \sin A \cos \lambda + \sin E \cos \delta \sin \lambda) \right] \mathbf{I} \\ & + \left[(\dot{V} \cos E \cos A - V\dot{E} \sin E \cos A - V\dot{A} \cos E \sin A) \sin \delta \sin \lambda \right. \\ & + (\dot{V} \cos E \sin A - V\dot{E} \sin E \sin A + V\dot{A} \cos E \cos A) \cos \lambda \\ & + (\dot{V} \sin E + V\dot{E} \cos E) \cos \delta \sin \lambda - \Omega^2 R_0 \sin \delta \sin \lambda \\ & \left. + 2\Omega V (\cos E \cos A \sin \delta \cos \lambda - \cos E \sin A \sin \lambda + \sin E \cos \delta \cos \lambda) \right] \mathbf{J} \\ & + \left[-(\dot{V} \cos E \cos A - V\dot{E} \sin E \cos A - V\dot{A} \cos E \sin A) \cos \delta \right. \\ & \left. + (\dot{V} \sin E + V\dot{E} \cos E) \sin \delta \right] \mathbf{K} \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.2.1.2. Cinemática y Dinámica Atmosférica y Transatmosférica

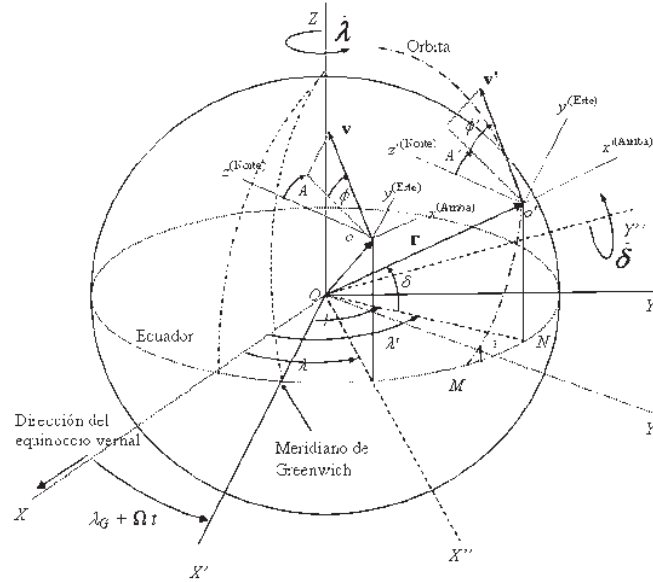


Fig. 4.17. Sistemas geocéntrico inercial y topocéntrico giratorios

Considérense el sistema geocéntrico fijo ($OXYZ$) y el horizontal local ($oxyz$), (Fig.4.17). El origen de este último va fijo al centro de masa del vehículo. Los ángulos δ y λ son la latitud (que es el mismo en el sistema ($o'x'y'z'$)) y longitud celestes que ubican el sitio de lanzamiento. Los valores ϕ y A son el ATV y el ángulo de azimut respectivamente.

En coordenadas esféricas, los vectores de posición y velocidad situados en los sistemas inercial y relativo son respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= r_x \mathbf{I} + r_y \mathbf{J} + r_z \mathbf{K} = r \mathbf{i} \\
 &= r [(\cos \delta \cos \lambda) \mathbf{I} + (\cos \delta \sin \lambda) \mathbf{J} + (\sin \delta) \mathbf{K}] \\
 \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \\
 &= v [(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi \sin A) \mathbf{j} + (\cos \phi \cos A) \mathbf{k}]
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

Por comparación:

$$\begin{aligned}
\delta &= \text{Arcsen} \frac{r_z}{r} = \text{Arcsen} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}}{r} \right) & \phi &= \text{Arcsen} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{v} \\
\lambda &= \text{Arcsen} \frac{r_y}{r \cos \delta} = \text{Arcsen} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}}{r} \right) & A &= \text{Arcsen} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}}{v \cos \phi} \right) \\
\lambda &= \text{Arccos} \frac{r_x}{r \cos \delta} = \text{Arccos} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{I}}{r} \right) & A &= \text{Arccos} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{v \cos \phi} \right)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Las ambigüedades tanto para λ como para A son evitadas usando leyes de los signos respecto al cuadrante donde se ubiquen (Cap2). También, es posible deducir dos relaciones útiles, aplicando trigonometría esférica a los arcos formados por el triángulo $o'MN$. Estas son: $\cos i = \cos \delta \sin A$ y $\tan i \sin(\lambda - \Omega) = \tan \delta$.

Considérense ahora (en el mismo marco de referencia), los sistemas geocéntrico ($O'X'Y'Z'$) y topocéntrico ($o'x'y'z'$) que se obtienen una vez que la Tierra ha girado un ángulo $\lambda' - l$, (Fig. 4.17). En el sistema topocéntrico primado, la relación entre velocidad inercial $\mathbf{v}$ y velocidad relativa $\mathbf{v}'$ a la cual giró es:

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}' + r \Omega \mathbf{K}' \times \mathbf{i}' \tag{4.60}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{K}'$ es la velocidad angular de la Tierra con respecto al sistema O' y $\mathbf{r} = r \mathbf{i}'$ está en el sistema o' .

La matriz de transformación $\mathbf{C}_L$ que relaciona el par de sistemas geocéntrico inercial con el relativo topocéntrico tal que $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}_L \hat{\mathbf{R}}$ es:

$$\mathbf{C}_L = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda & \cos \delta \sin \lambda & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \delta \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda & \cos \delta \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

de la cual es posible calcular:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{C}_L \boldsymbol{\Omega} \times r \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \Omega \text{ Sen } \delta \\ 0 \\ \Omega \text{ Cos } \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \Omega \text{ Cos } \delta \quad (4.62)$$

Combinando la segunda de las ecuaciones (4.58) con la ecuación (4.62) en la expresión (4.60):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v \left[(\text{Sen } \phi) \mathbf{i} + (\text{Cos } \phi \text{ Sen } A) \mathbf{j} + (\text{Cos } \phi \text{ Cos } A) \mathbf{k} \right] \doteq v' + (\Omega r \text{ Cos } \delta) \mathbf{j} \\ &= v' \left[(\text{Sen } \phi') \mathbf{i} + (\text{Cos } \phi' \text{ Sen } A') \mathbf{j} + (\text{Cos } \phi' \text{ Cos } A') \mathbf{k} \right] + (\Omega r \text{ Cos } \delta) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Comparando ambos miembros:

$$\begin{aligned} A' &= \text{Arctan} \left(\text{Tan } A - \frac{\Omega r \text{ Cos } \delta}{v \text{ Cos } \phi \text{ Cos } A} \right) \\ \phi' &= \text{Arctan} \left(\text{Tan } \phi \frac{\text{Cos } A'}{\text{Cos } A} \right) \\ v' &= v \frac{\text{Sen } \phi}{\text{Sen } \phi'} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dichas expresiones están dadas en términos de las variables del sistema inercial obtenidas en la ecuación (4.59). La transformación que relaciona el sistema geocéntrico primado con el no primado es $\widehat{\mathbf{R}}' = \mathbf{C}_{\text{GR}}(\lambda' - l) \widehat{\mathbf{R}}$, y de ahí que se relacione con el sistema topocéntrico inercial, $\widehat{\mathbf{r}} = \mathbf{C}_L \mathbf{C}_{\text{GR}}(\lambda' - l) \widehat{\mathbf{R}}'$, donde $\mathbf{C}_{\text{GR}}$ es simplemente una matriz de rotación positiva $\mathbf{C}_3(\lambda' - l) = \mathbf{C}_3(\lambda_G + \Omega t)$ alrededor del eje $\mathbf{K}$ (Cap2).

λ_G representa la ascensión recta del meridiano de Greenwich OX' y está dado en particular para un instante de tiempo t , el cual puede ser consultado en el AAEN. La

longitud l debe ser calculada en un instante de tiempo t de la ascensión recta dada λ' (en el Cap2 fue tomada $\lambda_G = 0$).

Para obtener la aceleración inercial, se deriva la ecuación (4.63) con respecto a t , de la cual, omitiendo la notación primada y denotando ahora la velocidad inercial como $\dot{\mathbf{v}}_I$

$$\mathbf{a}_I \doteq \dot{\mathbf{v}}_I = \dot{\mathbf{v}} + \Omega \left(\dot{r} \cos \delta - r \dot{\delta} \sin \delta \right) \mathbf{j} + \left(\Omega^2 r \cos \delta \right) \mathbf{K} \times \mathbf{j} \quad (4.65)$$

donde el último término surge de la derivada del vector unitario $\mathbf{j}$ la cual por definición es $\dot{\mathbf{e}}(t) = \Omega \times \mathbf{e}$, donde $\mathbf{e}$ es el vector unitario alrededor del cual hay una velocidad angular Ω constante.

Suponiendo que $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ es la velocidad angular relativa del sistema topocéntrico con respecto al geocéntrico, se tiene así que la velocidad relativa es:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times r \mathbf{i} = \dot{r} \mathbf{i} + r \omega_z \mathbf{j} - r \omega_y \mathbf{k} \quad (4.66)$$

Comparando los términos de la ecuación (4.66) con los de la expresión (4.58) para la velocidad:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \phi \\ \omega_y &= -\frac{v}{r} \cos \phi \cos A \\ \omega_z &= \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \end{aligned} \quad (4.67)$$

Luego, aplicando la transformación de coordenadas dada por la matriz de la ecuación (4.61):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{C}_L \dot{\lambda} \mathbf{K} - \dot{\delta} \mathbf{j} = \left(\dot{\lambda} \sin \delta \right) \mathbf{i} - \dot{\delta} \mathbf{j} + \left(\dot{\lambda} \cos \delta \right) \mathbf{k} \quad (4.68)$$

Comparando con las componentes ω_x y ω_y de la ecuación (4.67) se tiene, junto con $\dot{r}$:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v \operatorname{Sen} \phi \\
\dot{\delta} &= \frac{v}{r} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} A \\
\dot{\lambda} &= \frac{v \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sen} A}{r \operatorname{Cos} \phi}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Las expresiones (4.69) son las ecuaciones cinemáticas de movimiento relativas al planeta en movimiento rotacional. Una vez dado el vector de velocidad relativo (v, ϕ, A) es posible resolver el vector de posición inercial (r, δ, λ) de las ecuaciones cinemáticas, de ahí que sea completada la solución de la trayectoria.

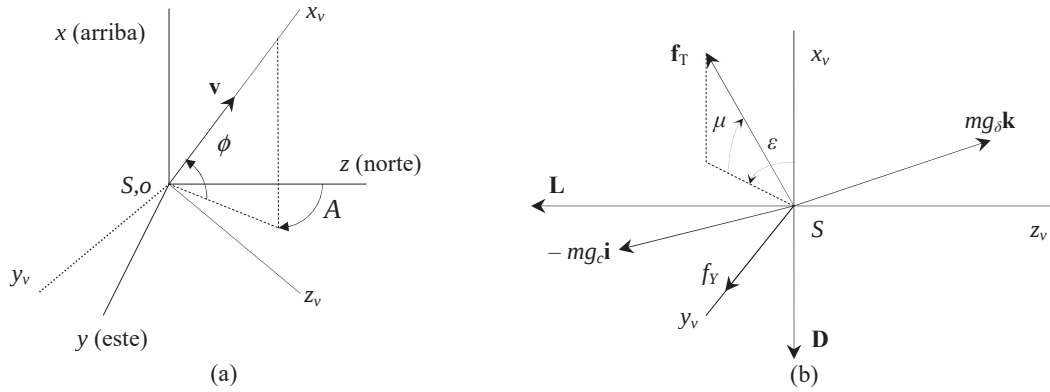


Fig. 4.18., Sistema de Ejes de viento. (a) En el sistema horizontal, (b) Fuerza resuleta en dicho sistema.

Considérese ahora un sistema denominado ejes de viento $(Sx_v y_v z_v)$ cuyo eje $Sx_v(\mathbf{i}_v)$ está a lo largo del vector de velocidad instantánea relativa $\mathbf{v}$ y el eje $Sy_v(\mathbf{j}_v)$ a lo largo de la normal al plano de simetría del vehículo, (Fig.4.18a). De modo que este sistema se relaciona con el horizontal local mediante:

$$\hat{\mathbf{r}}_v = \begin{pmatrix} \operatorname{Sen} \phi & \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sen} A & \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} A \\ 0 & \operatorname{Cos} A & -\operatorname{Sen} A \\ -\operatorname{Cos} \phi & \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Sen} A & \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Cos} A \end{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \tag{4.70}$$

Las ecuaciones dinámicas para el movimiento traslacional son obtenidas por la segunda ley de Newton $\mathbf{f} = m\mathbf{a}_{Iv} = m\dot{\mathbf{v}}_{Iv}$, donde $\mathbf{f}$ podría ser el vector de fuerza aerodinámica, $(-D\mathbf{i}_v + f_Y\mathbf{j}_v - L\mathbf{k}_v)$, (Cap1), impulso, dado por la ecuación (4.17), y fuerza gravitacional $(-mg_c\mathbf{i} + mg_\delta\mathbf{k})$.

Resueltas éstas componentes en el sistema de ejes de viento, (Fig.4.18b):

$$\begin{aligned}\mathbf{f} = & (T \cos \varepsilon \cos \mu - D - mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos \phi \cos A)\mathbf{i}_v \\ & + (T \sin \mu + f_Y - mg_\delta \sin A)\mathbf{j}_v \\ & + (-T \sin \varepsilon \cos \mu - L + mg_c \cos \phi + mg_\delta \sin \phi \cos A)\mathbf{k}_v\end{aligned}\quad (4.71)$$

La masa del vehículo m puede variar de acuerdo a lo visto en la ecuación del cohete, y $\mathbf{a}_I$ está dada por la ecuación (4.65), la cual, habrá de transformarse con respecto a los ejes de viento.

Para obtener sus componentes en el sistema horizontal, se deriva la ecuación (4.66) con respecto a t , sabiendo que ahora la velocidad angular total del sistema horizontal es $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} = & \dot{r}\mathbf{i} + r(\dot{\omega}_z\mathbf{j} - \omega_y\mathbf{k}) + r(\dot{\omega}_z\mathbf{j} - \dot{\omega}_y\mathbf{k}) + \\ & + \dot{r}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{i} + r\dot{\omega}_z(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{j} - r\dot{\omega}_y(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{k}\end{aligned}\quad (4.72)$$

Del mismo modo que en la ecuación (4.68), para $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}$ se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega} = \left[(\Omega + \dot{\lambda}) \sin \delta \right] \mathbf{i} - \dot{\delta} \mathbf{j} + \left[(\Omega + \dot{\lambda}) \cos \delta \right] \mathbf{k} \quad (4.73)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{i} &= \dot{\delta} \mathbf{k} + \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \cos \delta \right] \mathbf{j} \\
(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{j} &= \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \sin \delta \right] \mathbf{k} - \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \cos \delta \right] \mathbf{i} \\
(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{k} &= -\dot{\delta} \mathbf{i} - \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \sin \delta \right] \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.74) y (4.68) en la ecuación (4.72):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r} \mathbf{i} + \dot{r} \left[(\dot{\lambda} \cos \delta) \mathbf{j} + \dot{\delta} \mathbf{k} \right] + r \left[(\ddot{\lambda} \cos \delta - \dot{\lambda} \dot{\delta} \sin \delta) \mathbf{j} + \ddot{\delta} \mathbf{k} \right] \\
&+ \dot{r} \left\{ \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \cos \delta \right] \mathbf{j} + \dot{\delta} \mathbf{k} \right\} + r \dot{\lambda} (\dot{\lambda} + \Omega) \left[(\sin \delta) \mathbf{k} - (\cos \delta) \mathbf{i} \right] \cos \delta \\
&- r \dot{\delta} \left\{ \dot{\delta} \mathbf{i} + \left[(\dot{\lambda} + \Omega) \sin \delta \right] \mathbf{j} \right\}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

El último término de la ecuación (4.65) se expresa en el sistema horizontal local como:

$$(\Omega r \cos \delta) (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{K} \times \mathbf{j}) = \left[\Omega r (\dot{\lambda} + \Omega) \right] \left[(\sin \delta) \mathbf{k} - (\cos \delta) \mathbf{i} \right] \cos \delta \tag{4.76}$$

Al recolectar todos los términos de las ecuaciones (4.75) y (4.76) y sustituirlos en la ecuación (4.65) se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_I &= \left[\ddot{r} - r \dot{\delta}^2 - r (\dot{\lambda} + \Omega)^2 \cos^2 \delta \right] \mathbf{i} \\
&+ \left[r \ddot{\lambda} \cos \delta + 2 \dot{r} (\dot{\lambda} + \Omega) \cos \delta - 2 r \dot{\delta} (\dot{\lambda} + \Omega) \sin \delta \right] \mathbf{j} \\
&+ \left[r \ddot{\delta} + 2 \dot{r} \dot{\delta} + r (\dot{\lambda} + \Omega)^2 \sin \delta \cos \delta \right] \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Denotando como a_x , a_y , a_z las componentes de la aceleración inercial en el sistema horizontal local dadas por la ecuación (4.77) son más útiles cuando son expresadas en

términos de las componentes de velocidad relativa. Sustituyendo el conjunto de ecuaciones (4.69) en la ecuación (4.77):

$$\begin{aligned}
a_x &= \dot{v} \text{Sen } \phi + v \dot{\phi} \text{Cos } \phi - \frac{v^2}{r} \text{Cos}^2 \phi \\
&\quad - 2\Omega v \text{Cos } \phi \text{Sen } A \text{Cos } \delta - r\omega^2 \text{Cos}^2 \delta \\
a_y &= \dot{v} \text{Cos } \phi \text{Sen } A - v \left(\dot{\phi} \text{Sen } \phi \text{Sen } A - \dot{A} \text{Cos } \phi \text{Cos } A \right) \\
&\quad + 2\Omega v (\text{Sen } \phi \text{Cos } \delta - \text{Cos } \phi \text{Cos } A \text{Sen } \delta) \\
&\quad + \frac{v^2}{r} \text{Cos } \phi \text{Sen } A (\text{Sen } \phi - \text{Cos } \phi \text{Cos } A \text{Sen } \delta) \\
a_z &= \dot{v} \text{Cos } \phi \text{Cos } A - v \dot{\phi} \text{Sen } \phi \text{Cos } A - v \dot{A} \text{Cos } \phi \text{Sen } A \\
&\quad + \omega^2 r \text{Sen } \delta \text{Cos } \delta + 2\omega v \text{Cos } \phi \text{Sen } A \text{Sen } \delta \\
&\quad + \frac{v^2}{r} \text{Cos } \phi (\text{Sen } \phi \text{Cos } A + \text{Cos } \phi \text{Sen}^2 A \text{Tan } \delta)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

La transformación dada por la ecuación (4.70) junto con lo anterior, proporciona la aceleración inercial $\mathbf{a}_{Iv}$ en los ejes de viento, que combinada con la segunda ley de Newton $\mathbf{f} = m\mathbf{a}_{Iv} = m\dot{\mathbf{v}}_{Iv}$, que a su vez, al ser combinada (en los ejes de viento) tal como está dada en la ecuación (4.71), conducirá al conjunto de componentes de las denominadas, ecuaciones dinámicas de movimiento^[9]:

$$\begin{aligned}
m\dot{v} &= T \text{Cos } \varepsilon \text{Cos } \mu - D - mg_c \text{Sen } \phi + mg_\delta \text{Cos } \phi \text{Cos } A \\
&\quad - m\Omega^2 r (\text{Cos } \phi \text{Cos } A \text{Sen } \delta - \text{Sen } \phi \text{Cos } \delta) \text{Cos } \delta \\
mv\dot{A} \text{Cos } \phi &= m \frac{v^2}{r} \text{Cos}^2 \phi \text{Sen } A \text{Tan } \delta + T \text{Sen } \mu + f_Y - mg_\delta \text{Sen } A \\
&\quad + m\Omega^2 r \text{Sen } A \text{Sen } \delta \text{Cos } \delta - 2m\Omega v (\text{Sen } \phi \text{Cos } A \text{Cos } \delta - \text{Cos } \phi \text{Sen } \delta) \\
mv\dot{\phi} &= m \frac{v^2}{r} \text{Cos } \phi + T \text{Sen } \varepsilon \text{Cos } \mu + L - mg_c \text{Cos } \phi - mg_\delta \text{Sen } \phi \text{Cos } A \\
&\quad + m\Omega^2 r (\text{Sen } \phi \text{Cos } A \text{Sen } \delta + \text{Cos } \phi \text{Cos } \delta) \text{Cos } \delta + 2m\Omega v \text{Sen } A \text{Cos } \delta
\end{aligned} \tag{4.79}$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales (4.69) y (4.79) se deben satisfacer para cualquier tipo de trayectoria. Su vector solución $[r(t), \lambda(t), \delta(t), v(t), \phi(t), A(t)]$ habrá de proporcionar tanto la posición como la velocidad dadas en función del tiempo.

Debido que son ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas no lineales, es necesario un método iterativo para obtener su solución numérica, tal como el Runge-Kutta (Cap3). Además, un modelo dinámico de vuelo se hace más completo al considerar aspectos como, el modelo gravitacional axisimétrico en g_r y g_δ , principios de funcionamiento de propulsión T , así como un modelo atmosférico estándar el cual es introducido en las variables aerodinámicas L y D en base a sus coeficientes respectivos (Cap1) dados en términos de los parámetros de régimen de flujo. Para éste último, dicho coeficiente en un área de referencia^[9] $S \approx 4\text{m}^2$ es:

$$C_D = \begin{cases} C_{D_c} & Kn < 0.0146 \\ C_{D_c} + (C_{D_{fm}} - C_{D_c}) \left(\frac{1}{3} \log_{10} \frac{Kn}{\sin 30^\circ} + 0.5113 \right) & 0.0146 < Kn < 14.5 \\ C_{D_{fm}} & Kn > 14.5 \end{cases}$$

donde, C_{D_c} es el coeficiente de fricción en el medio continuo, (Fig. 4.19). $C_{D_{fm}}$ es el coeficiente de fricción en el límite del flujo molecular libre con aproximación dada por^[9]:

$$C_{D_{fm}} \approx \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2s}$$

donde $s = v/\sqrt{2RT}$ es la razón de rapidez molecular, y Kn el número de Knudsen basado en un radio de nariz promedio de $0.5\text{m}^{[1]}$.

Hay que notar que la trayectoria de ascenso vertical es la más simple. No obstante, debido a los efectos gravitacionales y de rotación planetaria, la trayectoria es modificada a una forma oblicua, dando como resultado, un efecto natural llamado cambio gravitacional el cual, es posible apreciarlo al integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento (4.69) y (4.79), (Fig. 4.20).

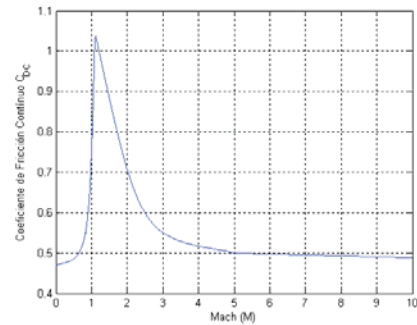
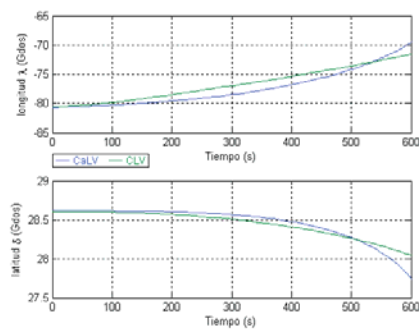
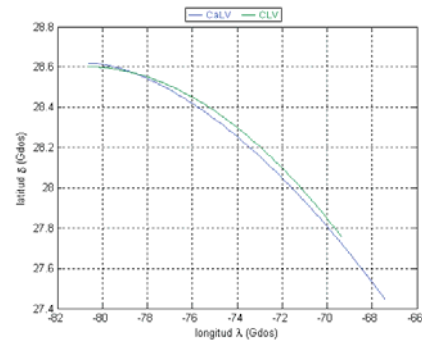


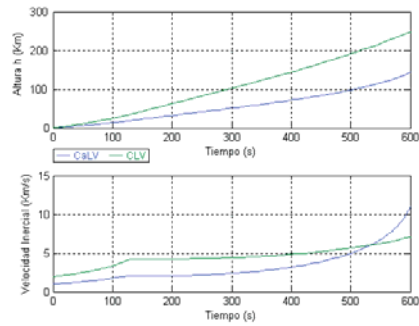
Fig. 4.19. Relación del coeficiente con el número Mach



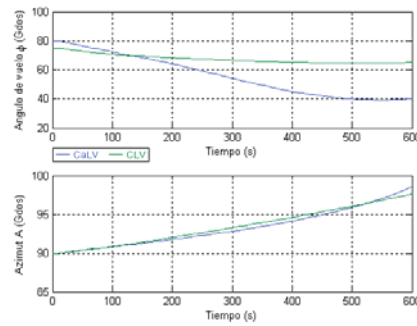
(a)



(b)



(c)



(d)

Figs. 4.20. Integración numérica de los parámetros cinemáticos y dinámicos para los dos diseños de vehículos de lanzamiento CaLV y CLV

Este tipo de curvas permiten estimar parámetros de diseño de cohetes necesarios en la generación de cambios gravitacionales determinados en función de los requerimientos cinemáticos orbitales deseados que a su vez dependen del tiempo de operabilidad de los propulsores en función éstos a su vez, del consumo de los propulsores.

Estos pueden ser, la velocidad máxima deseada para alcanzar una órbita circular (Cap2) en un instante en el cual se logre que el ángulo de trayecto sea cero (partiendo de uno muy pequeño).

Estas consideraciones están enfocadas al área de diseño de cohetes la cual, tiene la finalidad de minimizar el consumo extra de propulsante necesario para controlar la postura que determinen la velocidad vertical (al comienzo) y tangencial (una vez fuera de la atmósfera) necesarias para entrar en órbita.

4.2.1.3. Simulación Controlada de Lanzamiento

Al iniciar el escenario de lanzamiento del CaLV en el simulador (Fig. 4.21a) se presenta una ventana de lanzamiento justo cuando la RInc (Inclinación relativa del plano orbital lunar con el trazo a Tierra “TraT” hipotético del vehículo) sea $RInc = 4.71$, (Fig. 4.21a). Dicho valor se ha convenido debido a que el segundo lanzamiento (del CEV) será realizado un día después, compensado así, el efecto de regresión nodal (Cap2) del EDS puesto en órbita. El azimut de lanzamiento debe ser a 90° , pues es en esa dirección la descrita por el TraT de la órbita lunar.



Fig. 4.21. Simulación de lanzamiento. (a) CaLV a T+12s, (b) Expulsión de cohetes auxiliares a T+2m9s, (c) Expulsión fase 2 ignición fase 3 a T+9m35s, (d) Corte de propulsores y puesta en órbita a T+12m35s.

Considerando el efecto de rotación terrestre, la primera de las ecuaciones (4.64) proporciona la orientación azimutal correcta. Así pues, justo antes de que $R_{Inc} = 4.71$ el vehículo inicia el lanzamiento despegando verticalmente. Una vez librada la torre de lanzamiento de 276 m de altura^[13], hay que girar el vehículo 90° (efecto tirabuzón), haciendo que la normal opuesta al vector de velocidad sea alineada también en dirección azimutal de 90° . A los 5 km de altura, es definido el ángulo inicial, nutando a unos $+80^\circ$ mostrado en el HUD.

El efecto de cambio gravitacional de ascenso previamente preestablecido por los parámetros de diseño presentados (Figs. 4.20), quedará determinado en función de este ángulo. No obstante, las ligeras variaciones existentes, pueden ser compensadas mediante el sistema de control de reacción del vehículo.

El objetivo principal es primero, salir de la atmósfera (cohetes auxiliares) alcanzando una altura cercana a los 100 km, y después, (evitando velocidades verticales negativas en el MFD de superficie), mediante ajustes de nutación generar suficiente velocidad tangencial hasta alcanzar un valor mínimo para entrar una órbita circular ($v_c \sim 7.1$ km/s). De este modo, las condiciones de velocidad son:

$$\begin{cases} v_r > v_t > 0 & h < 100 \text{ km} \\ 0 < v_r < v_t & h > 100 \text{ km} \end{cases}$$

Esto se logra orientando adecuadamente la nutación del vehículo mediante el SCR que a su vez determina, el control de las aceleraciones vertical y horizontal.

Durante el lanzamiento es posible apreciar algunos instantes. A los 2m9s, (Fig. 4.21b), se expulsan los cohetes auxiliares. A los 9m35s, (Fig. 4.21c), se libera fase 2 e ignición de fase 3. Finalmente A los 12m35s, (Fig. 4.21 d) se corta la propulsión y se tiene al fin, una puesta en órbita. Nótese que también, el ascenso de cohetes puede ser visto como una secuencia de “elipses” de transferencia (Cap2) en la cual, inicialmente a es muy grande

con excentricidad $e \approx 1$. Conforme se gana altura el valor de a aumenta. Después este se mantiene casi constante (generando velocidad tangencial) mientras que ahora b crece gradualmente de modo que dicha elipse se “abre” hasta adquirir forma casi circular.

En el MFD de mapa 3D, (Fig. 4.21c) se aprecian dos elipses concéntricas que corresponden la más angosta, a la trayectoria de los auxiliares, mientras que la más ancha, a la de la primera fase las cuales están cayendo libremente en ese instante. Una vez que éstas se encuentren cerca del punto de impacto, iniciarán su reingreso hasta impactarse en el Océano Atlántico. A estas trayectorias se les llama de misil balístico^[2].

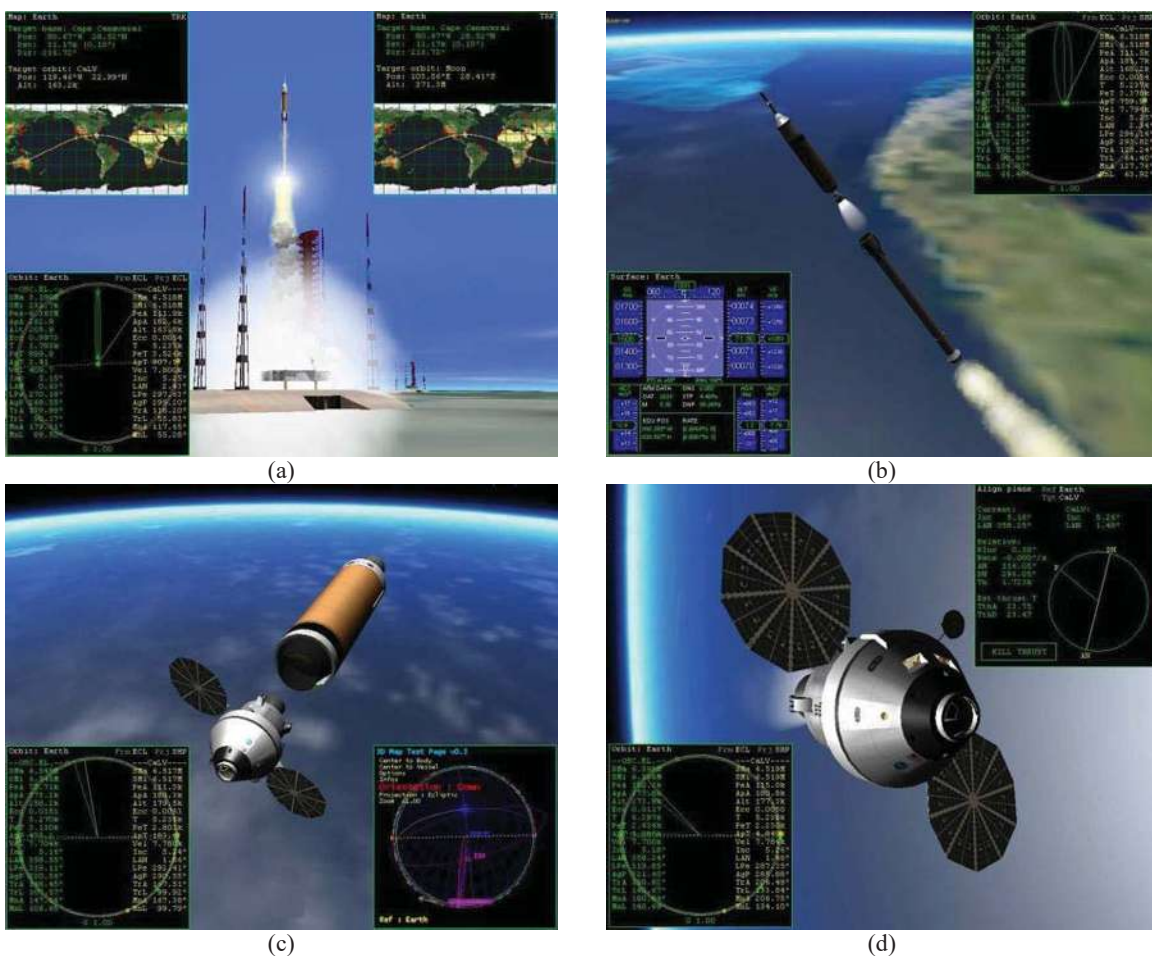


Fig. 4.22. Simulación de lanzamiento, (a) CLV a T+8s, (b) Expulsión fase 1 ignición fase 2 a T+2m3s, (c) Expulsión fase 2, liberación del CEV a T+10m54s, (d) Inserción orbital finalizada del CEV a T+19m.

Finalizada la puesta en órbita del EDS, hay que esperar un día más que, permita nuevamente la alineación del plano orbital lunar con el sitio de lanzamiento así como de la alineación simultánea del EDS determinada por la regresión nodal que actúa en el mismo, (Fig. 4.21a). Suponiendo pues que ha transcurrido ya un día, y que a éste vehículo le tomaría $(t_{0c} - t_{1c})$ de tiempo desde el despegue hasta su puesta en órbita, (Fig. 4.22), entonces el EDS recorrería un arco orbital de duración $(t_{0s} - t_{1s})$ donde, t_0 es el instante del despegue, y t_1 el de la puesta en órbita. No obstante, el CEV debe quedar por delante del EDS para la corrección de sincronía (Cap2) de modo que, es necesaria una diferencia de tiempo $\Delta t > 0$ entre ambos vehículos tal que $(t_{0c} - t_{1c}) = (t_{0s} - t_{1s}) + \Delta t$.

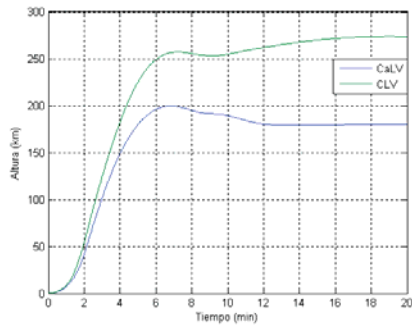
Empleando la ecuación de Kepler y resolviendo t_{0c} se determina el instante de lanzamiento para este vehículo (sabiendo que la cuenta regresiva a partir de 10 inicia en $t = t_{0c} - 10$):

$$t_{0c} = \sqrt{\frac{a_s^3}{\mu}} (E_{0s} - E_{1s}) - e (\text{Sen } E_{0s} - \text{Sen } E_{1s}) + t_{1c} + \Delta t \quad (4.80)$$

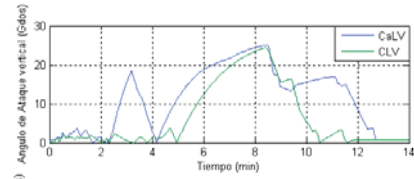
donde, t_{1c} queda determinado por la duración que le toma al CEV entrar en órbita, y $\Delta t > 0$ elegido arbitrariamente sin que sea muy grande y tampoco que sea cero, ya que para este valor, habría un alto riesgo de impacto para ambos. El subíndice S denota valores para la fase de apertura translunar EDS.

Con esto, se inicia la cuenta regresiva en $t = t_{0c} - 10s$ y comienza el lanzamiento del segundo vehículo procurando, mantener la altura del apogeo por encima de la órbita del EDS, mientras que para el perigeo, una altura ligeramente menor o igual, de modo que se intersequen ambas órbitas en dos puntos.

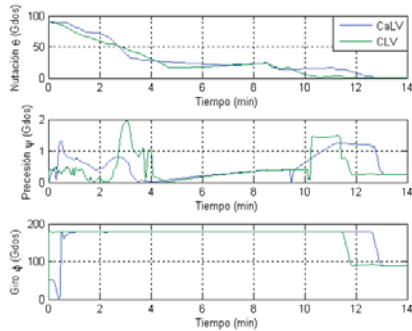
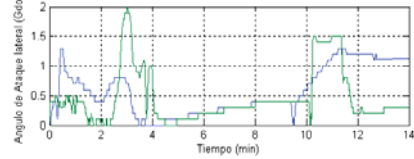
Toda la secuencia general del proceso es similar a la descrita para el primer vehículo. En este instante se asigna la fecha 19/07/2024 a las 15:31:08 hrs como el inicio de la misión tripulada. Así, partiendo de este instante: a los 2m3s, separación fase 1 ignición fase 2,



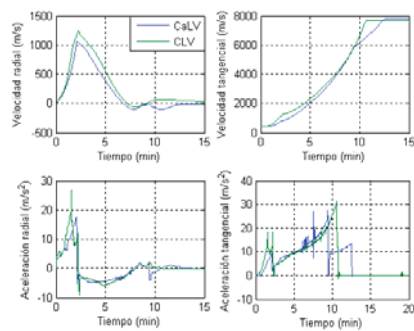
(a)



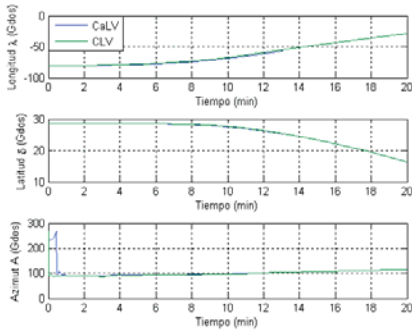
(b)



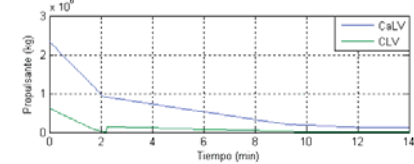
(c)



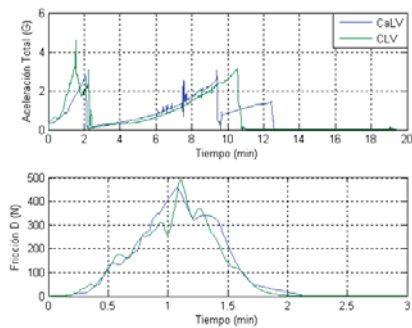
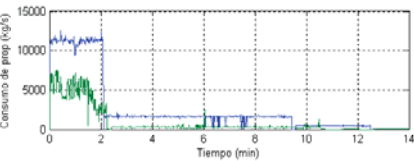
(d)



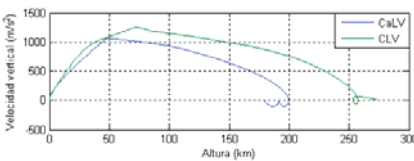
(e)



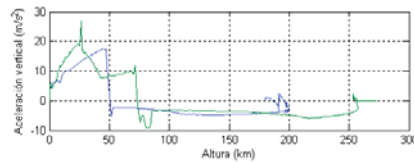
(f)



(g)



(h)



Figs. 4.23. Algunos parámetros de lanzamiento de ambos vehículos. (a) Altura, (b) Ángulos de ataque, (c) postura, (d) cinemática, (e) trazos geocéntricos, (f) propulsantes, (g) Fricción y aceleración total en G's, (h) cinemática vertical vs altura.

(Fig. 4.22a). A los 10m54s, expulsión fase 2 y liberación de carga (Vehículo tripulado CEV Orión y corte de propulsores), (Fig. 4.22b). A los 19m1s, (Fig. 4.22c), breve impulso adicional que modifica la altura del perigeo por encima de los 120 km de altura de acuerdo a la expresión, $\Delta h_p = \frac{4a^2}{\mu} v_a \Delta v_a$ (Cap2).

Finalmente el vehículo entra en órbita, no así la fase dos pues, como ésta fue liberada antes de aplicar la corrección, una vez llegando al perigeo ($h = 75.71 \text{ km} < 120 \text{ km}$) experimentará el efecto de la fricción aerodinámica que a su vez, lo conducirán a una disminución gradual de su velocidad llevándolo a un reingreso atmosférico y finalmente un impacto sobre el Océano Índico. Al igual que antes, los MFDs muestran información similar a lo mencionado anteriormente para el primer vehículo. Los datos proporcionados por el simulador permiten analizar con más detalle ambas secuencias, (Fig. 4.23a-i).

Nótese los instantes descritos anteriormente en cada uno de los parámetros correspondientes de cada vehículo. Las escalas de tiempo son una para cada vehículo, ya que el primero se lanzó un día antes, los parámetros cinemáticos dados en función del tiempo son semejantes en ambos casos, excepto quizás para el CLV el cual, justo a los 19 minutos del lanzamiento, se aprecia un pico de intensidad muy pequeño en la velocidad tangencial que corresponde al ajuste final del perigeo permitiendo la inserción orbital, (Fig. 4.23d).

En ambos casos, la componente radial (vertical) de la velocidad se hace presente primero para permitir el escape de la atmósfera, después de un cierto tiempo, se aprecia un aumento gradual de la velocidad tangencial requerida para “abrir” la elipse y entrar en órbita. Por otro lado, la aceleración vertical máxima del CEV, alcanza casi los 30 m/s^2 que equivale poco más de los 3G's, quedando dentro de los límites de tolerancia permitidos para que la tripulación no entre en G-LOC.

Las variaciones mostradas en la precesión se deben a los reajustes durante el vuelo sobre la RInc de modo que ésta tenga un valor lo más cercano a cero que sea posible

procurando que el plano de lanzamiento del tripulado esté alineado con el del objetivo, (Figs. 4.23b) y (Fig. 4.23c).

La manera en que son evitadas las velocidades verticales negativas se aprecia en 4.23.(h) así como en los ángulos de ataque verticales, (Fig. 4.23b). Esta componente de la velocidad deberá tener al final un valor cercano a cero. Los peldaños de los escalones mostrados en la razón de consumo, corresponden a cada una de las fases 0, 1 y 2 en el CaLV o bien, 1 y 2 del CLV, (Fig. 4.23f).

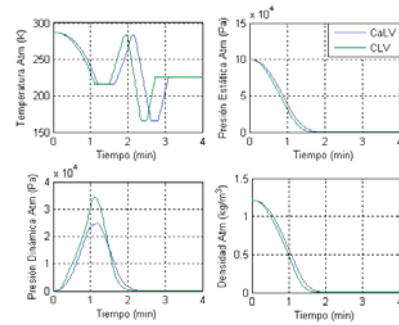


Fig. 4.23.(i). Parámetros atmosféricos

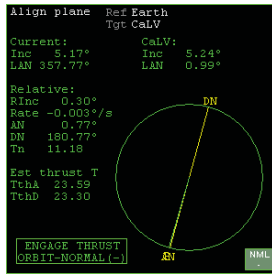
Además de lo anterior, la (Fig. 4.23i) muestra los parámetros atmosféricos en los que es posible apreciar como la temperatura obedece al modelo atmosférico estándar (Cap1) sólo hasta valores mayores a 100 km^[23]. Esto es una aproximación, ya que en la realidad, dichos efectos empiezan a hacerse notables por debajo de los 120 km^[1] y muchas de las veces hasta los 150 km dependiendo de otros factores externos.

4.2.2. Maniobras Orbitales Interceptoras CEV-EDS

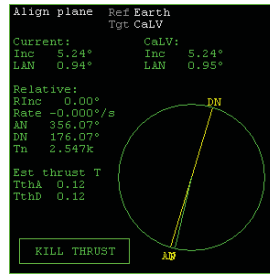
Una vez que el CEV se encuentra ya en órbita, siguiendo de la (Fig. 4.24d), es necesario esperar ahora, el tiempo indicado en el MFD de alineación de planos. Este le tomará en alcanzar al Nodo de Ascenso Relativo entre las dos órbitas (AN), un tiempo de $T_n = 1723s$. También conviene activar la modalidad de órbita del HUD. Así, los símbolos $\oplus$ y $+$ adquieren otro significado. El primero representa la dirección (hacia delante) del vector de velocidad orbital $\mathbf{v}$ mientras que el segundo, es la dirección opuesta de $\mathbf{v}$, es decir, $-\mathbf{v}$. Orientando el vehículo en dirección de estos dos símbolos se dice que está en órbita directa (OD) o indirecta “o retrógrada” (OR) respectivamente.

4.2.2.1. Ajustes de Inclinación y Sincronía

Antes de llegar al nodo, ($T_n \approx 100s$) con una inclinación relativa $RInc = 0.3^\circ$ entre los dos planos orbitales, se orienta el CEV en posición antinormal. Esto es, de acuerdo a lo visto en el Cap2, colocarlo en una posición $-\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son el radio vector respecto al centro de la Tierra, y $\mathbf{v}$ es la velocidad orbital del vehículo. El simulador presenta un sistema de postura automatizado el cual se activa presionando el botón NML(-) antinormal, y NML(+) normal. De estos se emplea el primero. Una vez en posición, se aplica un impulso breve para corregir la inclinación hasta lograr un valor exacto de $RInc=0.0^\circ$. Este impulso es, $\Delta v = 2v_i \text{ Sen } \frac{\alpha}{2}$, donde v_i es la velocidad inicial en la órbita incorrecta, y α es el ángulo de inclinación relativa, ($\alpha = 0.30^\circ$). (Figs. 4.24a-b).

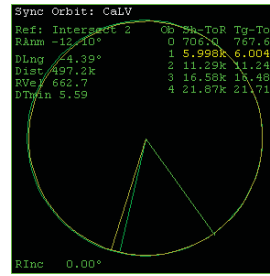


(a) T+40m24s

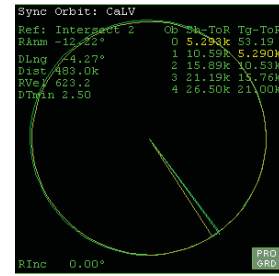


(b) T+41m3s

Fig. 4.24. Ajuste de inclinación relativa, (a) antes, (b) después.



(a) T+41m3s



(b) T+52m45s

Fig. 4.25. Ajuste de Sincronía, (a) antes, (b) después.

Luego, en T+41m3s, se ha corregido ya la inclinación relativa de los dos planos orbitales, de modo que ahora ya son coplanares. En seguida, al activar el MFD de sincronía en ese mismo instante, es posible apreciar un punto de intersección de la órbita del CEV con la del EDS, la cual ocurrirá después de dar una vuelta entera Ob(1), Sh-ToR = 5998s. Del mismo modo, el EDS pasará por ese mismo punto después de haber dado una vuelta Ob(1), la cual le tomará Tg-ToR = 6004s. Por lo tanto, la diferencia de tiempo mínimo entre ambos vehículos es, $(DTMin) \Delta t_{min} = 5.59s$.

Para que ambos vehículos se encuentren (intercepten) en dicho punto, es necesaria una segunda corrección de impulso aplicada por el CEV justo cuando éste se encuentre en ese

punto. Esta deberá ser aplicada en OD. El simulador presenta un sistema de postura automatizado el cual se activa presionando el botón PRO GRD (Fig. 4.25b). No obstante, debido al efecto de rotación apsidal, dicha corrección debe ser ligeramente distinta debido a efectos de regresión apsidal (Cap2) esto es, $\Delta t_{\min} = 0 + \varepsilon$, donde $\varepsilon \approx 2.5s$. Así, el cambio de velocidad necesario será (Cap2):

$$\Delta v_{sl} = (v_p - v_{p0}) = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left\{ \sqrt{2 - r_p \left[\frac{2\pi}{\sqrt{\mu} (\Delta t_{\min} + T)} \right]^{2/3}} - \sqrt{2 - \frac{r_p}{a_0}} \right\}$$

El subíndice p denota el punto de referencia. La corrección mencionada anteriormente $DTMin = 0.0s$ es válida en el simulador sólo cuando éste, es configurado de modo que sea ignorado cualquier efecto perturbativo gravitacional debido al achatamiento terrestre, práctico en su comprensión para usuarios amateur.

Dado que la corrección del plano orbital la velocidad orbital es constante, únicamente fue posible adquirir datos de la corrección de sincronía, (Fig. 4.26a-b), donde se aprecia la cantidad Δv así como el monitoreo de la cantidad de propulsante del CEV. Después de esto, sólo hay que esperar a que dé una vuelta alrededor de la Tierra para su encuentro con el EDS. No obstante, su paso por el perigeo presentará una perturbación debida a los efectos aerodinámicos causados por el borde exterior de la atmósfera terrestre.

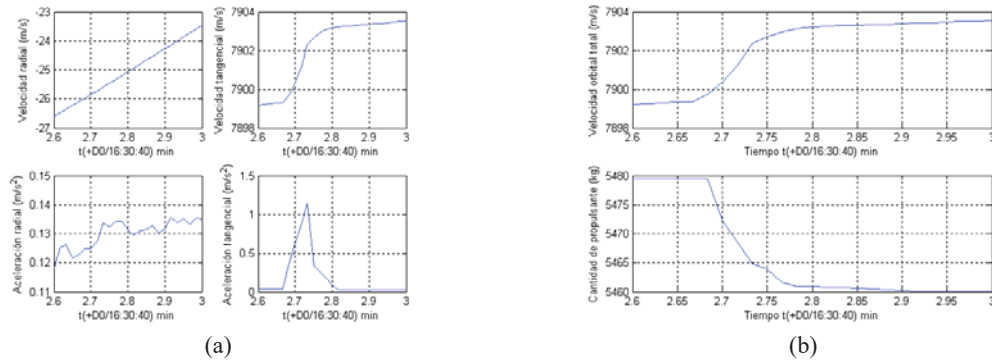


Fig. 4.26. Parámetros de la corrección de sincronía, (a) cinemáticos, (b) Δv y propulsante

4.2.2.1.1. Perturbaciones Atmosféricas

La ecuación para el movimiento que es perturbado por algún agente externo en el problema de los dos cuerpos es^[9]:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_d \quad (4.81)$$

donde $\mathbf{a}_d$ es la aceleración perturbativa que actúa sobre la masa total m del vehículo con posición relativa $\mathbf{r}$ a la masa planetaria M . De modo que $m\mathbf{a}_d$ es la fuerza perturbativa la cual puede ser conservativa o no conservativa. Esta última corresponde al caso de la fricción atmosférica.

Todo objeto en órbita baja, experimentará una fricción atmosférica significativa. Tal es el caso del

CEV en su paso por el perigeo, (Fig. 4.27). Debido a que la fricción se opone al movimiento orbital, la ecuación (4.81) adquiere la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = -q\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = -\rho \frac{C_D S}{2m} \dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} \quad (4.82)$$

Nótese su similitud con la ecuación (4.34). Para la mayoría de las formas vehiculares dentro de la suposición de flujo molecular libre, se tiene que $C_D \approx 2$ ^[9]. Debido a que esta es una fuerza no conservativa, habrá un cambio en la energía orbital $\mathcal{E} = -\mu/2a$, y por lo tanto, también del semieje mayor a .

El producto escalar de la desaceleración debida a la fricción con la velocidad relativa, da como resultado, el cambio en la energía orbital la cual es, $\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a} = -q\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -qv^3$.

Resolviendo para $\dot{a}$:

$$\dot{a} = -\frac{2a^2}{\mu} qv^3 \quad (4.83)$$

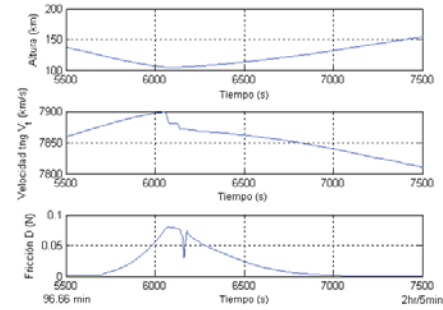


Fig. 4.27. Altitud, Velocidad tangencial y Fricción

Empleando la ecuación (4.27), es posible escribir la ecuación (4.83) en función de la altura:

$$\dot{a} = -\frac{a^2 C_D A}{m_2 \mu} \rho_0 v^3 e^{-zh} \quad (4.84)$$

Esta razón es fundamental en la determinación del periodo de vida de un satélite en órbita baja. Sin embargo, dicha predicción involucra estimaciones precisas de las propiedades atmosféricas a lo largo de periodos de tiempo muy largos (años o décadas), lo cual es raramente posible debido a las perturbaciones externas como la radiación solar o el campo geomagnético.

Tomando el producto vectorial a la desaceleración debida a la fricción con la velocidad relativa se tiene que la razón de cambio en el momento angular es

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{r} \times q \dot{\mathbf{r}} = -q \dot{\mathbf{r}} \mathbf{h} \quad (4.85)$$

Luego, notando que la derivada de $h^2 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$ es $h \dot{h} = \mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{h}}$ y que al considerar esto una vez que se toma producto punto a la ecuación (4.85) por $\mathbf{h}$ se tiene $h \dot{h} = -q \dot{\mathbf{r}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = -q \dot{\mathbf{r}} h^2$ o bien:

$$\dot{h} = -q \dot{\mathbf{r}} h \quad (4.86)$$

Debido a que $\mathbf{h} = h \mathbf{i}_h$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{h} \mathbf{i}_h + h \frac{d\mathbf{i}_h}{dt} \quad (4.87)$$

Igualando las ecuaciones (4.85) y (4.87) y sustituyendo la ecuación (4.86) se tiene que, $h \frac{d\mathbf{i}_h}{dt} = q \dot{\mathbf{r}} \mathbf{i}_h - q \dot{\mathbf{r}} \mathbf{h} = 0$, y así, $\frac{d\mathbf{i}_h}{dt} = 0$. Por lo tanto, no hay cambio en la inclinación del

plano orbital debido a la fricción atmosférica, y de aquí que los ángulos de Euler que definen el plano orbital en el espacio, se mantengan invariantes.

Así pues, es conveniente un monitoreo frecuente de la altura del perigeo de modo que se mantenga por encima de los 120 km, ya que de lo contrario, (tal como fue el caso de la segunda fase de lanzamiento del CEV, que se liberó antes de que éste entrara en órbita, quedando con una altura del perigeo inferior a los 100 km, (Fig. 4.22c)

reingresaría a la Tierra debido a la desaceleración producida por la fricción atmosférica, (Fig. 4.28). Dicha corrección debe hacerse en cada paso por el apogeo aplicando impulsos breves en OD.

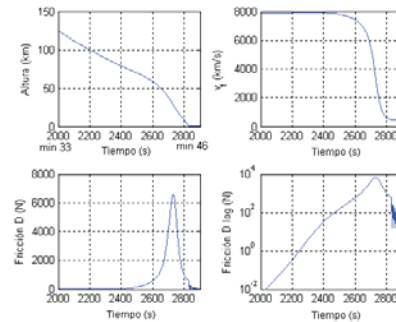


Fig. 4.28. Reingreso fase 2 del CEV

4.2.2.2. Movimiento Orbital Relativo

Considérese el vehículo maniobrable CEV (también llamado objeto), localizado por $\mathbf{R}$ en el sistema geocéntrico inercial $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, con velocidad orbital $\mathbf{V}$, (Fig. 4.29). El vehículo objetivo EDS está en una órbita definida por sus elementos orbitales o bien, por alguna condición inicial dada por sus vectores de posición y velocidad instantáneos $\mathbf{R}_T \mathbf{V}_T$.

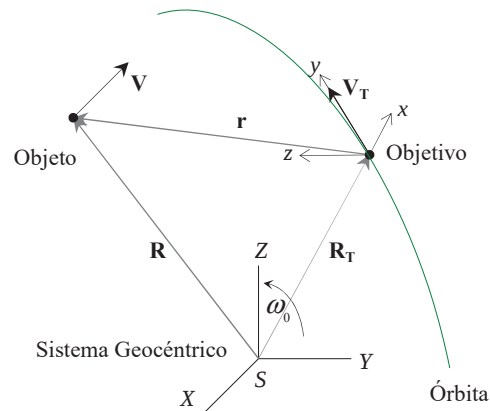


Fig. 4.29. Movimiento relativo del objetivo respecto al objeto

La posición y velocidad relativa del objeto son expresadas en el sistema horizontal local fijado en el centro de masa del objetivo (o bien, recíprocamente lo sería para el sistema relativo del objetivo respecto al objeto con un sistema local fijo en el centro de masa en el objeto) como:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &\doteq \mathbf{R} - \mathbf{R}_T = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &\doteq \mathbf{V} - \mathbf{V}_T = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}\end{aligned}\tag{4.88}$$

Asumiendo que las condiciones iniciales del objeto en un instante de tiempo inicial $t = t_0$ son conocidas y dadas por los vectores de posición y velocidad relativos $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$, es posible determinar numéricamente la propagación de ambos vectores para los dos vehículos en sus respectivas órbitas usando un método como el tratado en el Cap2 para el problema predictivo. Así para ambos vehículos:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{H,T} \\ \mathbf{V}_{H,T} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} f_{H,T} & g_{H,T} \\ \dot{f}_{H,T} & \dot{g}_{H,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{H0,T0} \\ \mathbf{V}_{H0,T0} \end{pmatrix}\tag{4.89}$$

donde, los subíndices H , y T corresponden a los vehículos objeto y objetivo, mientras que con el cero denotan sus condiciones iniciales todo de modo respectivo. Conviene tener expresados los coeficientes de Lagrange en términos de la anomalía excéntrica E :

$$\begin{aligned}f &\doteq 1 + \frac{a}{r_0} [\text{Cos}(E - E_0) - 1] \\ g &\doteq \frac{ar_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\mu} [1 - \text{Cos}(E - E_0)] + r_0 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \text{Sen}(E - E_0) \\ \dot{f} &\doteq \frac{df}{dt} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{rr_0} \text{Sen}(E - E_0) \\ \dot{g} &\doteq \frac{dg}{dt} = 1 + \frac{a}{r} [\text{Cos}(E - E_0) - 1]\end{aligned}\tag{4.90}$$

El valor de E es determinado numéricamente por la fórmula recursiva dada en el Cap2:

$$E_k = E_{k-1} - \frac{f(E_{k-1})}{f'(E_{k-1})} = \frac{e(\text{Sen } E_{k-1} - E_{k-1} \text{Cos } E_{k-1}) + M}{1 - e \text{Cos } E_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}\tag{4.91}$$

Empleando lo anterior junto con los elementos orbitales proporcionados un instante justo después de haber aplicado la corrección de sincronía orbital, (Fig. 4.27b), T+52m45s, es

posible propagar numéricamente y por lo tanto, predecir el movimiento relativo libre del CEV con el EDS que habría después de dos periodos orbitales (o dos vueltas) respecto del punto inicial de propagación para el objetivo, (Fig. 4.30).

Nótese como después de un periodo orbital respecto del EDS, las curvas de posición relativa convergen a cero, haciendo factible ahí, la intercepción o encuentro orbital del CEV con el EDS. No obstante, Las curvas de la velocidad no convergen de modo exacto debido a las irregularidades en el potencial gravitacional.

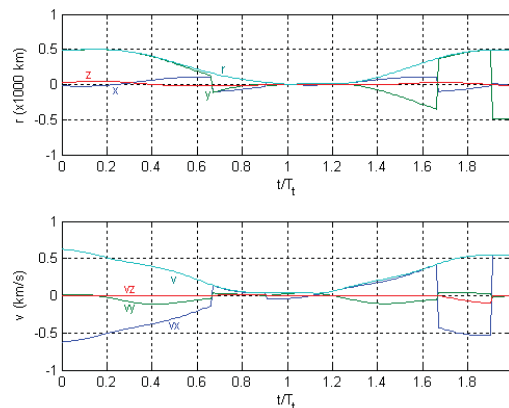


Fig. 4.30. Propagación predictiva relativa EDS y CEV

Aún así, lo más importante, es la posición, cuya aproximación debe ser lo más cercana posible. Las diferencias en velocidad pueden ser ajustadas a cero antes de llegar al 1 aplicando impulsos en el CEV en dirección opuesta al vector de velocidad relativa.



Fig. 4.31. Aproximación CEV-EDS a T+1h48m45s



Fig. 4.32. Impulso de sincronía a T+2h19m46s

En el simulador se aprecia un indicador opuesto a éste vector el cual, aparece cuando el CEV se encuentra lo suficientemente cerca del EDS (~ 30 km). Para ello, se presiona

F4 que abrirá el menú. En seguida, se oprime el botón “Object Info”. Ahí se busca el nombre del EDS que en el simulador es CaLV, y en el cuadro de diálogo inferior se mostrará un acrónimo XPDR. Este indica una señal de rango omnidireccional de alta frecuencia con valor de 131.50Hz^[23]. Dicho valor debe ser introducido en el MFD de COM/NAV y una vez ahí, se activa el MFD de acoplamiento “Docking”, (Fig. 4.32). También se activa el HUD alternando *h* hasta que aparezcan indicadores como los mostrados en las (Figs. 4.31) y (Fig. 4.32). De no mostrarse nada en el HUD, se alterna Ctrl. + R para activar el HUD definido en los rangos de frecuencia introducidos desde el COM/NAV. Ahí el indicador $\oplus$, (Fig. 4.32) representa la dirección opuesta al vector de velocidad relativo, mientras que éste a su vez estará representado por +, (Fig. 4.31).

Es conveniente monitorear el valor de velocidad de aproximación CVEL del MFD de acoplamiento. En el momento en que esté por debajo de las 10 unidades, se debe aplicar un impulso en dirección opuesta al vector de velocidad $\oplus$ hasta alcanzar un valor aproximado para que la velocidad relativa entre ambos vehículos sea casi igual a cero.

Terminado esto, el CEV podría encontrarse a una distancia aproximada de 2 km del EDS (objetivo). Ahora, empleando únicamente el sistema de control de reacción lineal, “RCS LIN”, se inicia la aproximación del CEV al EDS para su acoplamiento. A esta maniobra se le llama curso de colisión, para que después, situado a una distancia de unos 50m, inicie la maniobra final llamada curso de colisión predispuesta, que lo conduzca a su acoplamiento con el EDS.

Ambas maniobras están comprendidas dentro del llamado Esquema de direccionamiento Terminal, y viene a ser la última maniobra interceptora necesaria para que dos vehículos se acoplen en la misma órbita, tal como es el caso del shuttle (STS) a la Estación Espacial Internacional (ISS).

Esta puede ser ya sea por control manual (ejecución del simulador) o bien, por control automático. Este último comprende toda una rama de estudio asociada a sistemas de control lineal vistas en el Capítulo 3 (§ 3.4.4), por lo que la formulación para el curso de colisión la doy en una representación lineal.

4.2.2.3. Esquema de Direccionamiento Terminal

Considérese el sistema geocéntrico de la (Fig. 4.29). La ecuación diferencial general para el movimiento relativo del objeto respecto del objetivo es:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = [\ddot{\mathbf{R}}(t) - \ddot{\mathbf{R}}_t(t) + \mathbf{g}(\mathbf{R}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}_t)] \quad (4.92)$$

Considerando los términos de la gravedad para el modelo de cuerpo axisimétrico (Cap1) se tiene que:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_t) - \frac{\mu}{R_t^2} \left[\frac{\mathbf{r}}{R_t} - 3\mathbf{R}_t \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_t)}{R_t^3} \right] \quad (4.93)$$

Suponiendo que el vehículo tripulado es conducido por un sistema de direccionamiento, mientras que el objetivo no realiza maniobras impulsivas evasivas o de alguna naturaleza auxiliar, es conveniente ahora, expresar la ecuación diferencial en términos del vector de rango del objetivo con respecto al vehículo tripulado.

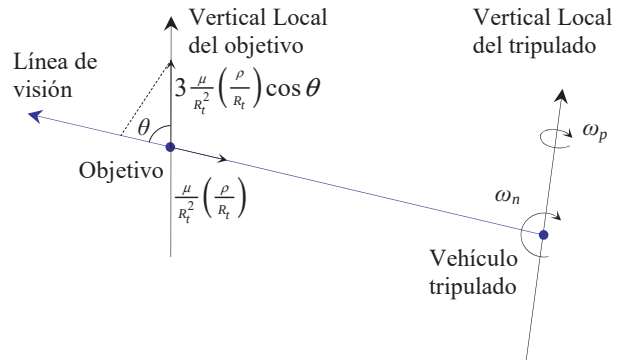


Fig. 4.33. Línea de visión (Rango) y verticales locales

Así, sustituyendo a $\mathbf{r}$ por $\mathbf{p}$ en la ecuación (4.93) donde, $\mathbf{p} = \mathbf{R}_t - \mathbf{R}$, y ya que la aceleración propulsiva del objetivo es cero, $\mathbf{a}_t = 0$, se tiene que para el movimiento relativo al tripulado:

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\mathbf{a} - \frac{\mu}{R_t^2} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}}{R_t} - 3\mathbf{R}_t \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{R}_t)}{R_t^3} \right]$$

donde, los dos últimos términos representan las componentes de la aceleración a lo largo y hacia dentro de la línea de visión así como la dirigida hacia arriba a lo largo de la vertical local del objetivo, (Fig. 4.33). Ya que $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{i}_\rho \rho$ donde $\mathbf{i}_\rho$ es el vector unitario a lo largo de la línea de visión se tiene que, $\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \mathbf{i}_\rho \dot{\rho}(t) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la razón angular de la línea de visión en el espacio inercial, es posible escribir:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \mathbf{i}_\rho [\ddot{\rho}(t) - \rho \omega^2] + [2\dot{\rho}\boldsymbol{\omega}(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{\rho}] \times \mathbf{i}_\rho$$

y así, resolver la ecuación (4.93) en sus componentes longitudinales y transversales a la línea de visión cuya ecuación de movimiento es, $\ddot{\rho}(t) - \rho \omega^2 = -a_\rho + \Delta g_\rho$. Luego, las ecuaciones del movimiento transversal son, $\dot{h}_{\omega_n}(t) = \rho(\Delta g_n - a_n)$ y $\dot{h}_{\omega_p}(t) = -\rho a_p$, donde:

$$h_{\omega_n} \doteq \rho^2 \omega_n \quad \text{y} \quad h_{\omega_p} \doteq \rho^2 \omega_p \quad (4.94)$$

son el momento angular nutacional y precesional respectivamente. Con esto, al integrarlas con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \rho^2 \omega_n &= \rho_0^2 \omega_{n_0} + \int_0^t \rho \Delta g_n dt - \int_0^t \rho a_n dt \\ \rho^2 \omega_p &= \rho_0^2 \omega_{p_0} - \int_0^t \rho a_p dt \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde las a son las aceleraciones totales nutacional y precesional. Con esto, la lógica de comando de control general transversal^[19] adquiere la forma lineal:

$$\Delta \mathbf{v}_T^* = \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}_2 \mathbf{v}_T + \mathbf{k}_3$$

donde $\Delta \mathbf{v}_T^* = (\Delta v_n^*, \Delta v_p^*)^T$ es la velocidad total deseada, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_n, \omega_p)^T$ es la velocidad angular nutacional y precesional, $\mathbf{v}_T = (v_n, v_p)^T$ es la velocidad transversal a la línea de visión con componentes horizontal v_n y vertical v_p , $\mathbf{k}_3 = (k_{3n}, k_{3p})^T$ es un término de predisposición, y además:

$$\mathbf{k}_j = \begin{pmatrix} k_{jn}^n & k_{jn}^p \\ k_{jp}^n & k_{jp}^p \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2$$

son las matrices constantes $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ con entradas escalares de las cuales, los superíndices indican los elementos por los que habrán de multiplicar a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad transversal (normal), $\mathbf{v}_T$ a la línea de visión, mientras que los subíndices indican su pertenencia al comando de velocidad para la nutación n y precesión p . Si $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3$ son cero mientras que $\mathbf{k}_1$ es el rango instantáneo del objetivo, se tendrá como resultado un curso de colisión^[19], el cual, habrá de ser propiamente dirigido al definir $\mathbf{k}_3$. A esto se le llama, navegación proporcional. Si $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_3$ son cero mientras que $\mathbf{k}_2$ es una matriz con todas sus entradas igual a -1, entonces se tiene un curso de seguimiento puro. De estos, el de interés sería el primer caso, pues una vez que el vehículo se encuentre sobre la línea de visión debidamente preparado para el acoplamiento, comenzar un avance longitudinal a lo largo de dicha línea para el enganche de los puertos de acoplamiento.

4.2.2.3.1. Curso de Colisión Predispuesta

Si los ejes del objetivo se mantienen fijos con respecto a su vertical local y a la normal del plano, el vehículo tripulado se aproximará al objetivo de forma aparentemente fija en las coordenadas del objetivo, (Fig. 4.34). Para un objetivo en órbita casi circular, la vertical local tiene una razón angular, $\omega_t^2 \approx \mu/R_t^3$.

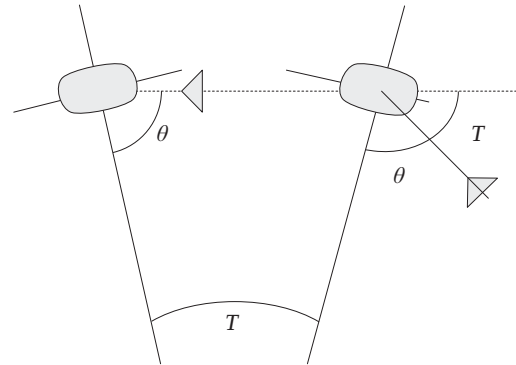


Fig. 4.34. Curso de colisión predispuesta

Asumiendo una intercepción coplanar, la razón nutacional de la línea de visión debe tener una magnitud ω_t . Si el vehículo tripulado está detrás del objetivo, el signo de ω_n debe ser negativo. Si está delante, será positivo así, $\omega_b = \pm\omega_t$. Esto se logra aplicando impulsos de propulsión discretos mediante el SCR:

$$\begin{aligned}\Delta v_n^* \delta(t) &= \rho (\omega_n - \omega_b) \delta(t) \\ \Delta v_p^* \delta(t) &= \rho \omega_p \delta(t) \\ \Delta v_g^* \delta(t) &= \rho \omega_g \delta(t)\end{aligned}$$

donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac o función impulso (Cap3). Ahora aparece ya una tercera expresión correspondiente a los ajustes de giro ω_g del vehículo con respecto al puerto de acoplamiento. De aquí que de la ecuación (4.95) para $t > 0$ las dos primeras son:

$$\begin{aligned}\rho^2 \omega_n &= \int_0^t \rho \Delta g_n dt + \rho^2 \omega_b \\ \rho^2 \omega_p &= 0\end{aligned}$$

De modo que ω_p no requiere correcciones al menos en el caso ideal. No obstante, ω_n si requiere de un conjunto de correcciones transversales las cuales son propagadas a $t = t_{t1}$, de modo que el incremento de velocidad longitudinal requerido es:

$$\Delta v_n(t_i) = \frac{1}{\rho_i} \int_0^{t_i} \rho \Delta g_n dt$$

El diferencial gravitacional requiere de correcciones subsecuenciales en la nutación. La expresión anterior puede ser usada para calcular el rango en el cual éstas habrán de ser aplicadas. Si las correcciones previas ocurrieron a $t = t_{i-1}$ cuando $\rho = \rho_{i-1}$, entonces el valor de desviación será excedido en el rango $\rho = \rho_i$ dado por:

$$\rho^2 = \frac{1}{\Omega_n} \left| \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \Delta g_n \frac{\rho d\rho}{\rho} \right| \quad (4.96)$$

Si las correcciones son hechas siempre que ω_n se desvíe de su valor inicial por Ω_n , entonces el rango en el instante de cada corrección está dado por la ecuación (4.96), y ya que $\Delta g_n = 3\rho\omega_t^2 \text{ Sen } \theta_0 \text{ Cos } \theta_0$, la ecuación (4.96) se convierte^[19] en:

$$\rho_i^2 = \frac{\omega_t^2 \text{ Sen } \theta_0 \text{ Cos } \theta_0}{\Omega_n (-\dot{\rho})_{i-1}} (\rho_{i-1}^3 - \rho_i^3)$$

donde se ha resuelto ya la integral. Por lo tanto, los incrementos totales de velocidad nutacional y precesional son, $(\Delta v_n)_{\text{Total}} = \rho_0 \Delta \omega_{n_0} + \Omega_n \sum_{i=1}^m \rho_i$, así como $(\Delta v_p)_{\text{Total}} = \rho_0 \omega_{p_0}$ respectivamente, donde m indica el número de impulsos necesarios. Incluyendo la corrección del giro, se tiene como resultado total:

$$(\Delta v_T)_{\text{Total}} = \rho_0 (\Delta \omega_{n_0} + \omega_{p_0} + \omega_{g_0}) + \Omega_n \sum_{i=1}^m \rho_i \quad (4.97)$$

Para tener una idea más clara de la diferencia que hay entre el curso de colisión y el de colisión predispuesta, se tiene que si en los ejes de cuerpo del objetivo, está siendo alineado el eje normal con su vertical local mediante el ángulo de nutación, un observador ahí notará que aparentemente se aproxima el tripulado a lo largo de una línea recta siempre y cuando el esquema de aproximación sea de colisión predispuesta. De no ser así, la aproximación será curva, (Figs. 4.35).

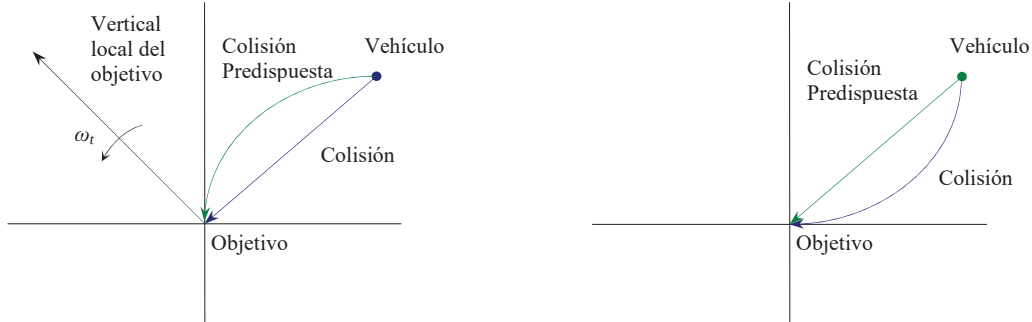


Fig. 4.35. Distintos sistemas de referencia ilustrando los dos esquemas de aproximación

Por lo tanto, el tripulado alcanzará al objetivo en un lapso de tiempo más corto a lo largo del curso de colisión. Este último tiene la desventaja de que no haya posibilidad de alinear previamente el vehículo tripulado para un eventual acoplamiento. Dejando como único recurso práctico el de colisión predispueta. La única diferencia entre ambos sistemas es simplemente por una razón nutacional ω_t . Para incluir el comienzo del avance longitudinal en dirección al puerto de acoplamiento, habría que agregar el término predispueto adicional correspondiente a la velocidad relativa del tripulado la cual no habría de exceder los 0.1m/s en escala logarítmica.

4.2.2.4. Simulación controlada de intercepción y acoplamiento

Como ya se mencionó, una vez que el vehículo ha completado un periodo orbital respecto al del objetivo, éste se encontrará a una distancia próxima de unos 2 km al mismo, (Fig. 4.30). En seguida, cuando el valor de la velocidad relativa comience a disminuir hasta alcanzar aproximadamente las 10 unidades, se deberá contrarrestar el primer impulso de sincronía, (Fig. 4.25b), con uno segundo en dirección opuesta al vector de velocidad la cual, deberá ser ajustada a un valor próximo de 10. En simulación se aplican dos impulsos de magnitud y un tercero para la corrección, (Fig. 4.36).

Nótese el consumo de combustible el cual no deberá exceder los 5000 kg, ya que se dispone de esta cantidad para el retorno a Tierra. Esta cantidad de propulsante debe estar previamente medida para cubrir cualquier expectativa de misión al igual que la contenida en el EDS.

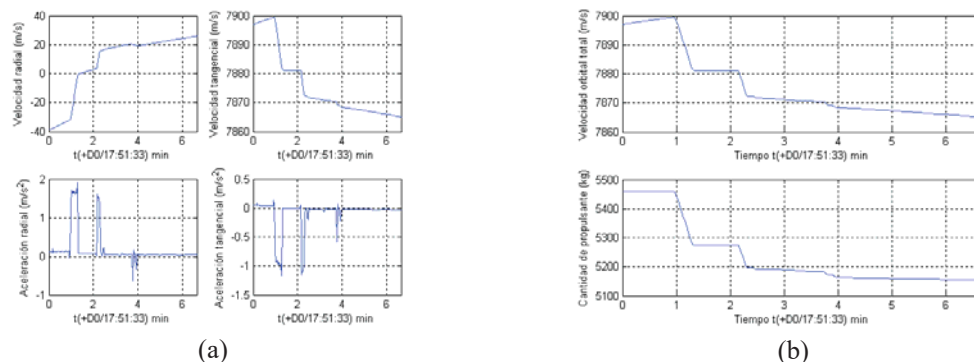


Fig. 4.36. Parámetros de la corrección de velocidad relativa a cero, (a) cinemáticos, (b) Δv y propulsante

El tiempo tomado para la corrección anterior hace que la disminución gradual en la velocidad relativa nos coloque a una distancia aproximada de 1 km al objetivo. En ese instante, se activa el encuadre auxiliar de acoplamiento, (Fig. 4.37).

Este es otra función adicional del HUD la cual, habrá de sintonizarse nuevamente en COM/NAV introduciendo los valores proporcionados para IDS en el botón Object Info del menú F4. Los modelos originales tanto para el CEV como para el CaLV no presentan valores para IDS. No obstante, éstos pueden ser asignados presionando el botón “Customs” del menú F4, y después, en “Scenario Editor”. Así, dando un valor de 108.00 MHz, se presiona el botón NAV del MFD de acoplamiento, y se presiona ctrl.+r para activar el encuadre en el HUD. Se tendrá visualizado el objetivo así como su ruta de acceso para el acoplamiento, (Fig. 4.37).



Fig. 4.37. Ruta de encuadre y MFD de acoplamiento sintonizado en curso de colisión

El siguiente paso es aplicar impulsos longitudinales utilizando únicamente el SCR lineal en dirección del encuadre de acceso del objetivo. De este modo, se tendrá un curso de colisión con respecto a la secuencia de encuadre, (Fig. 4.38).

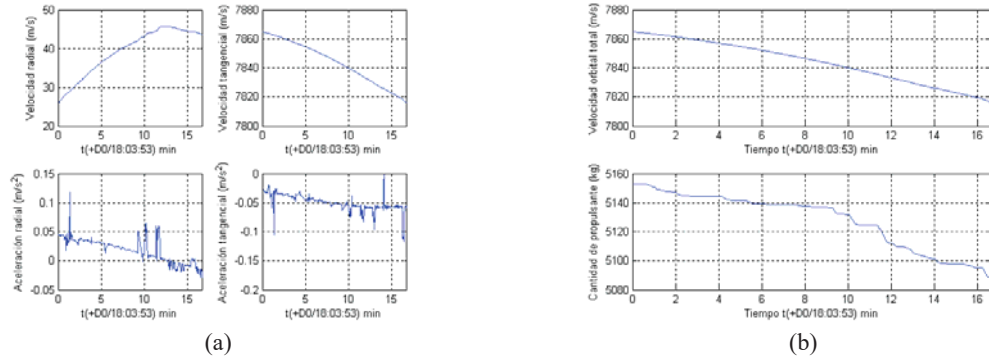


Fig. 4.38. Parámetros del Curso de Colisión (CC), (a) cinemáticos, (b) Δv y propulsante

Una vez que el vehículo ha llegado al encuadre de acceso de acoplamiento, se aplican impulsos lineales en dirección opuesta al movimiento para ajustar la velocidad relativa a un valor aproximado a cero. Ahí, el vehículo es orientado en dirección longitudinal del encuadre para iniciar el curso de colisión predispuesta, CCP, al objetivo, (Fig. 4.39a-b).

De acuerdo a los datos arrojados por el simulador, (Fig. 4.40) cada pico en la nutación representa ajustes sucesivos debido a la velocidad angular del EDS la cual es igual a ω_t , siguiendo así un esquema de CCP. Por lo tanto, la velocidad total necesaria para el curso de colisión predispuesta hasta el instante de acoplamiento para este caso fue:

$$(\Delta v_T)_{\text{Total}} = \rho_0 \left(\sum_{i=1}^7 \Delta \omega_{in_0} + \sum_{i=1}^5 \Delta \omega_{ip_0} + \omega_{g_0} \right) + \Omega_n \sum_{i=1}^{18} \rho_i$$

donde el 18 indica el número de puntos sobre la línea de visión instantánea durante la aproximación.



Fig. 4.39. (a) Curso de colisión predispuesta a T+18h20m33s, (b) Acoplamiento a T+2h53m55s

Algo importante por mencionar es que el simulador orienta los vehículos en OD de modo tal que la normal al vehículo esté en dirección $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Por lo tanto, en las gráficas mostradas para la postura, la nutación corresponde a la precesión en el sistema horizontal local y viceversa con la precesión.

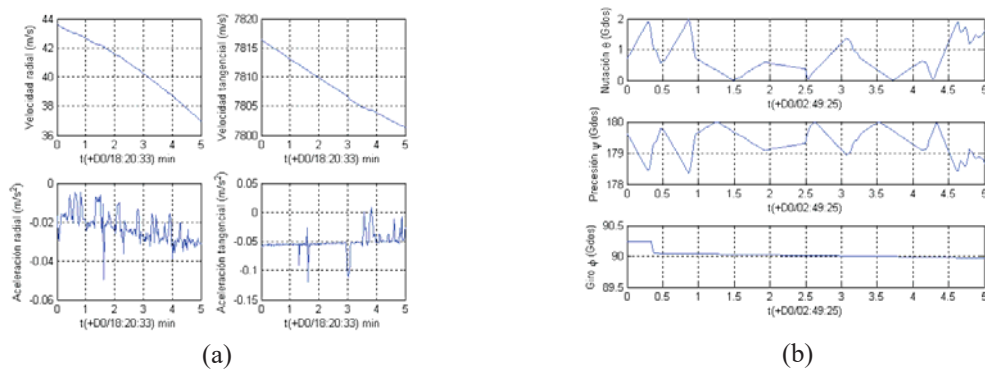


Fig. 4.40. Parámetros del Curso de Colisión Predispuesta, (a) cinemáticos, (b) de postura

Pasos similares son efectuados por el STS a al ISS, salvo que en este caso, el punto de referencia para la sincronía es el perigeo del STS el cual es ajustado a la altura de la ISS en ese mismo instante. Esto sin olvidar que cada paso por algún nodo y por el punto de referencia de sincronía deberán ser ajustados continuamente debido a las variaciones existentes que son resultado de los efectos perturbativos presentes más notables.

4.2.2.5. Problema de Lambert

La maniobra interceptora anterior también se le conoce como, transferencia de plano intermedio^[18]. Esto debido a que la órbita inicial, corresponde al del paso intermedio entre el lanzamiento y el ajuste de sincronía en los periodos. A pesar de ello, existe otro método alternativo para lograr una intercepción de dos vehículos espaciales situados en órbita.

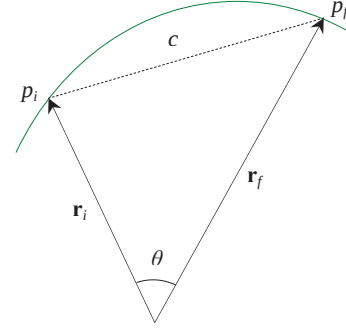


Fig. 4.41. problema de Lambert

Este método es de plano directo en el cual, solo se aplican dos impulsos en la órbita inicial y otra en la objetivo. También se le conoce como Problema de Lambert^{[2][9][18]}, y por cierto el cual, atrajo la atención de los grandes matemáticos como Euler, Gauss y Lagrange, (Fig.4.41).

Así pues, se tienen dos posiciones inicial y final p_i y p_f determinadas por r_i y r_f , así como el ángulo de transferencia θ cuya duración es $\Delta t = t_f - t_i$. Además, las posiciones quedan determinadas de manera única por las anomalías verdaderas respectivas θ_i y θ_f .

Una solución al problema de Lambert fue presentada por Gauss en su Theoria Motus (1801). No obstante, se dará un desarrollo utilizando variables universales definidas por Battin^[2] al deducir un algoritmo general para el problema de Lambert, que es aplicable a trayectorias elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Dichas variables quedan definidas como:

$$x \doteq \Delta E \sqrt{a} \text{ y } z \doteq \frac{x^2}{a}$$

donde, $\Delta E = E_f - E_i$ es la diferencia entre las anomalías excéntricas final e inicial, y a es el semieje mayor de la órbita de transferencia. De este modo, los coeficientes de Lagrange (Cap2) son^[9]:

$$\begin{aligned}
f &= 1 + \frac{r_f}{p} [\cos \Delta \theta - 1] = 1 - \frac{x^2}{r_i} C(z) \\
g &= \frac{r_i r_f}{\sqrt{\mu p}} \sin \Delta \theta = \Delta t - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}} S(z) \\
\dot{f} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{(1 - \cos \Delta \theta)}{\sin \Delta \theta} \left(\frac{1 - \cos \Delta \theta}{p} - \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) = \frac{\sqrt{\mu}}{r_i r_f} x [z S(z) - 1] \\
\dot{g} &= 1 - \frac{r_i}{p} [1 - \cos \Delta \theta] = 1 - \frac{x^2}{r_f} C(z)
\end{aligned} \tag{4.98}$$

donde $C(z)$ y $S(z)$ son llamadas funciones de Stumpff^[2], cuyas convergencias son para órbitas elípticas ($z > 0$):

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(2k+2)} = \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} \quad S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(2k+3)!} = \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}^3} \tag{4.99}$$

mientras que para órbitas hiperbólicas^[9] ($z < 0$):

$$C(z) = \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} \quad S(z) = \frac{-\sqrt{-z} + \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}^3}$$

Obviamente el caso parabólico, $z = 0$, tiene $C(0) = 1/2$, $S(0) = 1/6$. Resolviendo x de la ecuación (4.98) para f y luego sustituyendo en la segunda para $\dot{f}$ y cancelando $\sqrt{\mu p}$:

$$\frac{1 - \cos \Delta \theta}{\sin \Delta \theta} \left(\frac{1 - \cos \Delta \theta}{p} - \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) = - \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta \theta}{r_i r_f}} \frac{(1 - z S)}{\sqrt{C}}$$

Reacomodando dicha expresión multiplicando ambos lados por $r_i r_f$ se tiene:

$$\frac{r_i r_f (1 - \cos \Delta \theta)}{p} = r_i + r_f - \frac{\sqrt{r_i r_f} \sin \Delta \theta (1 - z S)}{\sqrt{1 - \cos \Delta \theta}} \frac{1}{\sqrt{C}} \tag{4.100}$$

Es posible expresar esta ecuación de modo más compacto si se define una constante:

$$A = \frac{\sqrt{r_i r_f} \text{ Sen } \Delta\theta}{\sqrt{1 - \text{Cos } \Delta\theta}} \quad (4.101)$$

así como otra variable auxiliar más, y tal que, $yp = r_i r_f (1 - \text{Cos } \Delta\theta)$. Usando estas definiciones para A y y , es posible escribir la ecuación (4.100) de manera más compacta:

$$y = r_i + r_f - A \frac{(1 - zS)}{\sqrt{C}}$$

De ahí que, $x = \sqrt{\frac{y}{C}}$. Resolviendo Δt de la ecuación (4.98) para g , y usando las definiciones de A y y :

$$\sqrt{\mu} \Delta t = x^3 S + A \sqrt{y} \quad (4.102)$$

Empleando todo lo anterior en tres de los coeficientes de Lagrange, éstos quedan determinados de modo más simple:

$$f = 1 - y/r_i \quad g = A \sqrt{y/\mu} \quad \dot{g} = 1 - y/r_f \quad (4.103)$$

mientras que el cuarto se obtiene fácilmente por la propiedad $f\dot{g} - g\dot{f} = 1$. Finalmente, ya que $\mathbf{r}_f = f\mathbf{r}_i + g\mathbf{v}_i$ (Cap2) es posible calcular:

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{g} (\mathbf{r}_f - f\mathbf{r}_i) \quad (4.104)$$

Luego, la velocidad final es $\mathbf{v}_f = \dot{f}\mathbf{r}_i + \dot{g}\mathbf{v}_i$. Sustituyendo esto para $\mathbf{v}_i$ y usando la identidad $f\dot{g} - g\dot{f} = 1$:

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{g}(\dot{g}\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i) \quad (4.105)$$

Por lo tanto se tienen expresiones para la velocidad inicial y final requeridas para la transferencia orbital de un punto a otro.

El siguiente algoritmo basado en la formulación anterior, puede ser desarrollado para la solución del problema de Lambert^[9]. (1) Dados los vectores de posición inicial y final, se determina el ángulo de transferencia el cual para órbitas directas ($i < 90^\circ$) el cual está dado por:

$$\gamma = \begin{cases} \text{Arccos}\left(\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_f}{r_i r_f}\right), & (\alpha > 0) \text{ órbita directa} \\ 2\pi - \text{Arccos}\left(\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_f}{r_i r_f}\right), & (\alpha < 0) \text{ órbita indirecta} \end{cases}$$

donde, $\pm\alpha \doteq \mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_f)$. (2) Calcular A usando la ecuación (4.101). (3) Asumir un valor pequeño y positivo estimado para z digamos $z = \Delta E$. (4) Calcular las funciones de Stumpff (4.99). (5) Calcular las variables auxiliares χ y y así como el tiempo de transferencia mediante la ecuación (4.102). (6) Si el tiempo de transferencia es cercano a un valor deseado dentro de alguna tolerancia específica, entonces ir al paso (8). (7) Estimar un nuevo valor de z por el método de Newton (Cap2) sin tomar en cuenta la dependencia de las funciones de Stumpff en z y volver al paso (4). (8) La solución z ha convergido dentro de la tolerancia especificada. Ahora se calculan los coeficientes de Lagrange a través de las ecuaciones (4.103) así como las velocidades inicial y final dadas por las ecuaciones (4.104) y (4.105).

Volviendo a la (Fig. 4.22d), si justo después de haberse hecho la corrección del perigeo, se desea modificar la trayectoria de modo tal que intercepte directamente en posición y tiempo al objetivo en ese instante, es posible emplear el problema de Lambert

para ello se toman los elementos orbitales de ambos vehículos en ese instante ($t_i = 0$). Después, se asigna arbitrariamente la duración que se desee tener para la transferencia de un punto al otro.

Este valor puede ser minimizado con la intención de consumir la menor cantidad de propulsores. Así pues, tomando $t_f - t_i = 500\text{s}$, se propaga la órbita del objetivo mediante el problema de predicción (Cap2) durante ese tiempo para obtener la posición (la cual también es la posición final de la transferencia de Lambert) y velocidad final del objetivo.

Empleando posición inicial del vehículo y posición final (que deberá tener el vehículo después de 500s segundos) del objetivo después de ese instante, se aplica el problema de Lambert para generar la trayectoria de transferencia así como los incrementos de velocidad necesarios en cada punto, (Fig.

4.42).

Estos a su vez proporcionan también, los ángulos de direccionamiento φ_i y φ_f (cuyos valores son calculados análogamente como en el Cap2) de los incrementos de velocidad. Estos son, $\Delta v_i = 1.4727 \text{ km/s}$ y $\Delta v_f = 1.6604 \text{ km/s}$ con ángulos direccionales respectivos, $\varphi_i = 26.2002^\circ$ y $\varphi_f = 35.0353^\circ$. Nótese que ambos incrementos en total suman casi 3 km/s lo cual implica un desgaste importante de propulsores.

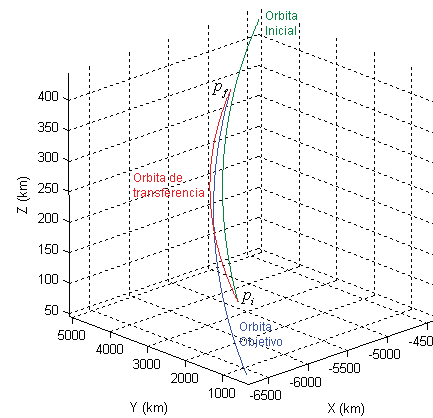


Fig. 4.42. Transferencia de Lambert CEV al EDS

Esto debido a los dos cambios en las inclinaciones orbitales incluidas durante la transferencia. Por esta razón, dicho problema es aplicado más frecuentemente en la predicción y determinación de instantes de impulsos que permitan la intercepción orbital en vuelos interplanetarios, debido a la poca diferencia en las inclinaciones de los planos

orbitales planetarios con respecto a la eclíptica solar. Dicha transferencia fue mencionada ya en el Cap2 con el nombre de transferencia de plano distante.

El lado recto de la elipse generada por la transferencia de Lambert, está dada por la expresión^[9]:

$$\sqrt{\mu}(t_f - t_i) = 2a^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(E_f - E_i) - e \cos \left[\frac{1}{2}(E_i + E_f) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(E_f - E_i) \right] \right\} \quad (4.106)$$

la cual es posible deducir a partir del llamado Teorema de Lambert^[19] cuyo enunciado y demostración son dados en el Apéndice^[A3].

Por conveniencia, al momento de determinar el tiempo mínimo requerido para el problema de Lambert, se define un semiparametro^[9], $s \doteq \frac{1}{2}(r_i + r_f + c)$, notando que para $\theta = \pi$ se tiene $c = r_i + r_f$, o bien, $s = c$. Existe cierto interés en la energía de transferencia mínima la cual corresponde al mínimo valor de la energía orbital $E_{\min} = -\mu/2a_{\min}$. Por lo tanto, es posible mostrar por geometría que $a_{\min} = s/2$, proporcionando así, un significado físico para s en términos de la energía mínima de transferencia, y a su vez, reemplazando $a_{\min}$ en la ecuación (4.106), para obtener el tiempo necesario para la transferencia.

4.2.3. Transición Cónica, Descenso y Ascenso lunar

Una vez acoplados los dos vehículos CEV-EDS en órbita, el siguiente paso es la expulsión translunar la cual deberá aplicarse en un instante adecuado de la órbita establecida para este conjunto vehicular, recordando que la Luna (y por lo tanto su esfera de influencia EIL), está dentro de la esfera de influencia de la Tierra, EIT.

Por lo tanto, dicha transferencia lucirá como una del tipo Hohmann (Cap2) en la cual, el perigeo será el punto donde es aplicado el impulso, y el apogeo quedará situado en una posición virtual en la cual, la Luna se encontraría después de recorrer un arco de distancia mayor al radio de su esfera de influencia, (Fig. 4.43).

4.2.3.1. Impulso Translunar

El impulso necesario para generar una órbita elíptica de transferencia (Cap2) de la Tierra a la Luna es:

$$\Delta v_{TL} = v_f - v_i = \sqrt{2\mu} \left[\sqrt{\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + d_{TL} + r_{pL}}} - \sqrt{\frac{1}{2r_i}} \right]$$

donde se ha hecho la suposición para el radio inicial $r_i \approx a_i$ (órbita casi circular), (Fig. 4.43) órbitas coplanares, d_{TL} = distancia instantánea de la Tierra a la Luna medida (respecto a sus centros geométricos en el instante de la transferencia), y r_{pL} el radio perilunar. Dado que los otros valores son casi constantes en el instante del impulso, éste último puede ser fijado a un valor deseado para la hipérbola de arribo lunar. Usualmente $r_{pL} \approx R_{Luna} + 60 \text{ km}^{[23]}$.

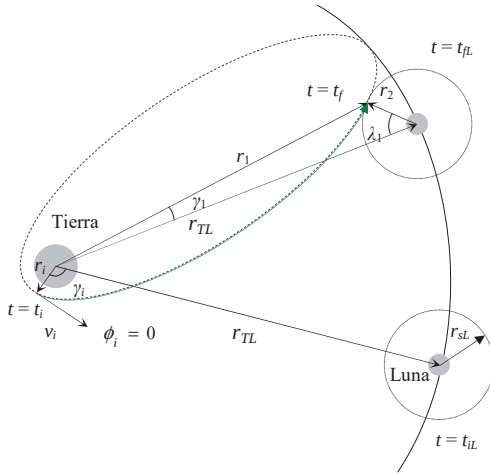


Fig. 4.43. Elipse de transferencia

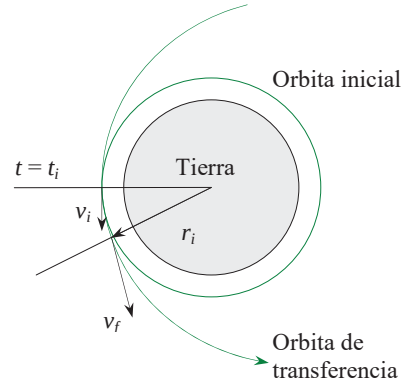


Fig. 4.44. Punto de impulso translunar

Por otro lado, el instante de impulso translunar debe ser establecido por las leyes de tiempo de vuelo orbital de Kepler. Esto es, si la duración del recorrido del vehículo de la Tierra a la EIL es $\Delta t_{TL} = t_f - t_i$, este deberá ser igual al tiempo que la Luna tarda en recorrer en su propia órbita un tiempo $\Delta t_L = t_{fL} - t_{iL}$. Igualando y despejando t_i , se tiene

que el instante en el cual debe ser aplicado el impulso translunar es, $t_i = t_f - \Delta t_L$. Por lo tanto, para un instante $t_i = 0$, es necesario determinar en el AAEN, el instante $\Delta t_L = t_f$ necesario, donde t_f es la duración del viaje, y una vez de ahí, t_{iL} que es el instante inicial que tenía la Luna en el momento de aplicarse el impulso translunar.

Es importante tener en cuenta que con la finalidad de que sea generada dicha elipse de transferencia, una vez pasado el punto de impulso translunar t_i , el vehículo deberá permanecer tangencial a la órbita durante todo el tiempo en el que esta sea generada, (Fig. 4.44).

También, basta con que la elipse de transferencia haga contacto con la frontera de la esfera de influencia lunar por delante del movimiento orbital del satélite (Fig. 4.43) o bien, por detrás. En realidad ambas son permitidas. La única diferencia entre una y otra es que el vehículo llegaría a la Luna ya sea en OR o en OD respectivamente.

Una vez terminado el impulso Δv_{TL} aplicado en el instante t_i , con ángulo de trayectoria de vuelo igual a cero, el siguiente paso es esperar a que el vehículo transite por toda la elipse de transferencia. No obstante, debido a la influencia gravitacional de la Luna y la Tierra juntas, la transición orbital no será del todo ideal al tratarla dentro de un problema de dos cuerpos (Tierra y Vehículo), ya que la masa lunar es considerablemente grande (comparada con la del vehículo) se tendrán fuerzas gravitacionales tanto de la Luna como de la Tierra actuando sobre el vehículo (de masa despreciable).

Es por eso, que dicho problema se turna ahora a un problema de Tres cuerpos, en el cual, la elipse de transferencia estará siendo ligeramente alterada y modificada durante todo el tiempo de vuelo debido a ambos cuerpos celestes, y alterando de este modo, la trayectoria inicial preestablecida en el instante t_i .

Esta deberá estar siendo ajustada periódicamente aplicando impulsos breves en algunos puntos adecuados como pueden ser, en alguno situado a medio curso donde los

efectos gravitacionales tanto de la Tierra como de la Luna son casi iguales. De este modo, se tendrá una configuración más compleja para un par de masas de grandes en proporciones.

4.2.3.2. Problema de los Tres Cuerpos

La ecuación del movimiento de los tres cuerpos usando las ecuaciones de los n cuerpos (Cap1) es:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i(t) = G \sum_{j \neq i}^3 \frac{m_j}{R_{ij}^3} (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

donde G es la constante de gravitación universal, $\mathbf{R}_i$ denota la posición inercial del centro de masa del i -ésimo cuerpo, y $R_{ij} \doteq |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|$ es la separación relativa de los centros de masa de los cuerpos i, j . También se tiene que:

$$\mathbf{f}_i = Gm_i \sum_{j \neq i}^3 \frac{m_j}{R_{ij}^3} (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.107)$$

es la fuerza experimentada por la masa m_i debido a las otras dos.

A pesar de que no existe un método analítico para la resolución de la ecuación de los tres cuerpos (al menos empleando técnicas numéricas), existen sin embargo algunos aspectos importantes por analizar en cuanto a la naturaleza de dicho sistema.

4.2.3.2.1. Solución particular de Lagrange

La solución particular de Lagrange^[9] está confinada en un movimiento coplanar de los tres cuerpos. Supóngase un sistema de coordenadas fijo $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ en el centro de masas. Luego, si $\theta(t)$ es el ángulo formado por otro sistema giratorio $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ con respecto al fijo $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, entonces la transformación de coordenadas entre ambos sistemas está dada por $R_\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = R_\omega(t) \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix}$$

Luego, la ubicación de la masa m_i en el instante t está dada por:

$$\mathbf{R}_i(t) = a(t)\mathbf{R}_i(0) \quad (4.108)$$

donde $\mathbf{R}_i(0)$ es la ubicación inicial de la masa m_i en el instante $t = 0$. Sustituyendo la ecuación (4.108) en la expresión (4.107):

$$\mathbf{f}_i(t) = \frac{1}{a^2} \mathbf{f}_i(0) \quad (4.109)$$

La matriz simétrica-oblicua $\mathbf{S}(\omega)$ de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ del sistema es:

$$\mathbf{S}(\omega) \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} = \mathbf{J} \dot{\theta}$$

de modo que la aceleración neta de m_i expresada en el sistema giratorio es (Cap3):

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = R_\omega(t) \left[\frac{\partial^2 \mathbf{R}_i}{\partial t^2} + 2\mathbf{S}(\omega) \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{S}}(\omega) \mathbf{R}_i + \mathbf{S}^2(\omega) \mathbf{R}_i \right] \quad (4.110)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.108) y (4.109) en la ecuación (4.110):

$$m_i \left[\left(\frac{d^2 a}{dt^2} - a\dot{\theta}^2 \right) \mathbf{I} + \frac{1}{a} \frac{d(a^2 \dot{\theta})}{dt} \mathbf{J} \right] \mathbf{R}_i(0) = \frac{\mathbf{f}_i(0)}{a^2} \quad (4.111)$$

Ya que la fuerza experimentada por m_i está dirigida hacia el centro de masa común, es posible expresar la fuerza como $\mathbf{f}_i(t) = -m_i b^2 \mathbf{R}_i(t)$ donde b es una constante. En un movimiento dentro del mismo plano con aceleración radial es posible tener $R_i^2 \dot{\theta} = \text{constante}$, o bien, $\frac{d}{dt}(a^2 \dot{\theta}) = 0$. Por lo tanto, se sigue de la ecuación (4.111) que:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - a \dot{\theta}^2 = -\frac{b}{a^2}$$

La cual representa una sección cónica en coordenadas polares para el movimiento relativo de los dos cuerpos. Por lo tanto, cada masa en el problema coplanar de los tres cuerpos, traza una sección cónica en su trayectoria alrededor del centro de masa común al sistema.

De la solución coplanar general, pueden ser obtenidas las soluciones estacionarias en términos de las posiciones de las masas en el sistema giratorio. Para una de ese tipo se requiere de un valor constante^[9] $a = 1$ el cual, por conservación del momento angular, conduce a una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$. Empleando la ecuación (4.111) con $a = 1$ y sustituyéndola en la ecuación (4.107), las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{G} - \frac{m_2}{R_{12}^3} - \frac{m_3}{R_{13}^3} \right) \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{R_{12}^3} \mathbf{R}_2 + \frac{m_3}{R_{13}^3} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \frac{m_1}{R_{12}^3} \mathbf{R}_1 + \left(\frac{\omega^2}{G} - \frac{m_1}{R_{12}^3} - \frac{m_3}{R_{23}^3} \right) \mathbf{R}_2 + \frac{m_3}{R_{23}^3} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones de equilibrio particular incluye la configuración de masas en los vértices de un triángulo equilátero de modo que están a la misma distancia de su centro de masa, teniendo así $R_{12} = R_{13} = R_{23} = \rho$. La última de dichas ecuaciones indica que el centro de masa está en reposo, por lo que la velocidad angular es:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{G}{\rho} \sum_{i=1}^3 m_i \quad (4.112)$$

Otro conjunto de puntos de equilibrio^[10] son los contenidos dentro de las soluciones colineales, donde las tres masas dividen a una línea recta. Asumiendo que esta línea es el eje de las abscisas y considerando las tres masas ordenadas de izquierda a derecha como m_3, m_2, m_1 , se tendrán otras dos configuraciones más que son obtenidas de estas por una permutación de las masas.

Así, teniendo que $\mathbf{R}_1 = (r_1, 0)$, $\mathbf{R}_2 = (r_2, 0)$ y $\mathbf{R}_3 = (r_3, 0)$, se introducen nuevas variables ρ y a tales que, $a = r_2 - r_3$ y $a(\rho + 1) = r_1 - r_3$. Entonces, $a\rho = r_1 - r_2$, (Fig. 4.45). De este modo, aplicando este cambio de variables al conjunto de las tres ecuaciones:

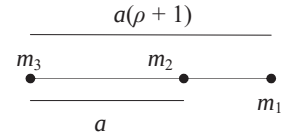


Fig. 4.45. Cambio de variables

$$-\mathbf{R}_i = \sum_{j \neq i}^3 m_j \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{R_{ij}^3} \quad i = 1, 2, 3$$

se tienen:

$$r_1 = \frac{m_2}{a^2 \rho^2} + \frac{m_3}{a^2 (\rho + 1)^2}, \quad r_2 = -\frac{m_1}{a^2 \rho^2} + \frac{m_3}{a^2}, \quad r_3 = -\frac{m_1}{a^2 (\rho + 1)^2} - \frac{m_2}{a^2}$$

Restando $r_2 - r_3 (=a)$ y resolviendo para a :

$$a^3 = -\frac{m_1}{\rho^2} - \frac{m_1}{(\rho + 1)^2} + m_2 + m_3 \quad (4.113)$$

luego, restando $r_1 - r_2 (=a\rho)$, e igualando lo obtenido en la ecuación (4.113) para a , se tiene una vez simplificando términos, la llamada ecuación quintic de Euler:

$$\begin{aligned} &\rho^5(m_2 + m_3) + \rho^4(2m_2 + 3m_3) + \rho^3(m_2 + 3m_3) \\ &- \rho^2(3m_1 + m_2) - \rho(3m_1 + 2m_2) - (m_1 + m_2) = 0 \end{aligned}$$

Mediante la regla de los signos de Descartés, se aprecia que sólo existe una solución positiva $\rho > 0$ la cual habrá de obtenerse numéricamente.

Nótese también que la variable ρ puede ser vista como la razón de distancia entre las masas tal que, $\rho = R_{23}/R_{12}$. Así, para cada configuración específica de las tres masas colineales, el valor positivo para ρ será distinto.

4.2.3.2.2. Problema Restringido de los Tres Cuerpos (PRTC)

Considérese a una de las tres masas digamos m_3 como despreciable en comparación con los otros dos cuerpos (llamados primarios) de modo que se tendrá una simplificación del problema al ignorar el tirón gravitacional de m_3 .

De este modo, suponiendo^[22] sin pérdida de generalidad que $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ además de que tanto $\mathbf{R}_1$ como $\mathbf{R}_2$ están en movimiento circular alrededor de su centro de masa, se pretende únicamente considerar la evolución del tercer cuerpo la cual es gobernada por:

$$\ddot{\mathbf{R}}_3 = G \left(\frac{m_1}{|\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_3|^3} [\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_3] + \frac{m_2}{|\mathbf{R}_2(t) - \mathbf{R}_3|^3} [\mathbf{R}_2(t) - \mathbf{R}_3] \right) \quad (4.114)$$

Defínase una nueva variable $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ como:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \doteq R_\omega(t) \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = R_\omega(t) \mathbf{R}_3$$

donde ahora, las posiciones de los primarios son fijas. Con esto, nótese que $\mathbf{R}_3 = R_\omega(t)^{-1} \mathbf{p}$, de ahí que la ecuación inercial del movimiento del tercer cuerpo es $\dot{\mathbf{R}}_3 = \dot{R}_\omega^{-1}(t) \mathbf{p} + R_\omega^{-1}(t) \dot{\mathbf{p}}$ y de esta se tiene:

$$\ddot{\mathbf{R}}_3 = R_\omega^{-1}(t) \ddot{\mathbf{p}} + 2\dot{R}_\omega^{-1}(t) \dot{\mathbf{p}} + R_\omega^{-1}(t) \ddot{\mathbf{p}} \quad (4.115)$$

Para poder manejar el lado derecho de la ecuación, la matriz $R_\omega(t)$ y su inversa son ambas rotaciones y de aquí que preservan áreas y longitudes. Por lo tanto, es posible ver que $|\mathbf{R}_{ij}| = |\mathbf{p}_{ij}|$. Sustituyendo $\mathbf{R}_3 = R_\omega(t)^{-1} \mathbf{p}$ en el lado derecho de la ecuación (4.114) sabiendo que $R_\omega(t)^T = R_\omega(t)^{-1}$:

$$G \left(\frac{m_1}{R_{31}^3} \mathbf{R}_{31} + \frac{m_2}{R_{32}^3} \mathbf{R}_{32} \right) = G R_\omega(t)^{-1} \left(\frac{m_1}{p_{31}^3} \mathbf{p}_{31} + \frac{m_2}{p_{32}^3} \mathbf{p}_{32} \right) \quad (4.116)$$

luego, sustituyendo las ecuaciones (4.115) y (4.116) en la ecuación (4.114):

$$\ddot{R}_\omega^{-1}(t) \mathbf{p} + 2\dot{R}_\omega^{-1}(t) \dot{\mathbf{p}} + R_\omega^{-1}(t) \ddot{\mathbf{p}} = G R_\omega(t)^{-1} \left(\frac{m_1}{p_{31}^3} \mathbf{p}_{31} + \frac{m_2}{p_{32}^3} \mathbf{p}_{32} \right) \quad (4.117)$$

donde $\mathbf{p}_{31} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$, y $\mathbf{p}_{32} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}$. Los subíndices 1 y 2 denotan los cuerpos primarios. Multiplicando ambos lados de la ecuación (4.117) por $R_\omega(t)$ y resolviendo para $\ddot{\mathbf{p}}$:

$$\ddot{\mathbf{p}} = -R_\omega(t) \ddot{R}_\omega^{-1}(t) \mathbf{p} - 2R_\omega(t) \dot{R}_\omega^{-1}(t) \dot{\mathbf{p}} + G \left(\frac{m_1}{p_{31}^3} \mathbf{p}_{31} + \frac{m_2}{p_{32}^3} \mathbf{p}_{32} \right)$$

Teniendo que $\theta(t) = \omega t$, es posible mostrar que $R_\omega(t) \ddot{R}_\omega^{-1}(t) = -\omega^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$, donde $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de 3×3 . Similarmente, $R_\omega(t) \dot{R}_\omega^{-1}(t) = \mathbf{S}(\omega)$. Si m_1 se localiza en $-x_1$ y m_2 en x_2 es posible emplear las notaciones:

$$\mathbf{p}_{31} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 + x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_{32} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x - x_2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Usando todo lo anterior, es posible expresar las ecuaciones del movimiento de forma compacta como:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \omega^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{p} + 2\mathbf{S}(\omega) \dot{\mathbf{p}} - G \left(\frac{m_1}{r_{31}^3} \mathbf{p}_{31} + \frac{m_2}{r_{32}^3} \mathbf{p}_{32} \right)$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{cases} \omega^2 x + 2\omega \dot{y} - G \left[\frac{m_1}{r_1^3} (x + x_1) + \frac{m_2}{r_2^3} (x - x_2) \right] \\ \omega^2 y - 2\omega \dot{x} - G \left(\frac{m_1}{r_1^3} y + \frac{m_2}{r_2^3} y \right) \\ -G \left(\frac{m_1}{r_1^3} z + \frac{m_2}{r_2^3} z \right) \end{cases} \quad (4.118)$$

donde, se han definido $r_1 \doteq [(x + x_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ y $r_2 \doteq [(x - x_2)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$.

Otro conjunto de reducciones pueden ser hechas si se hace otro cambio de coordenadas a uno adimensional^[22]. Hay que recordar que se hizo la suposición de que los primarios se mueven en órbitas circulares. Entonces, el movimiento en el plano xy está dado por la ecuación (4.112) con $m_3 = 0$, y $\rho = R_{12}$ que es la distancia entre los dos cuerpos. Si el centro de masa de los dos cuerpos está en el origen del sistema, el cuerpo de masa mayor m_1 está a una distancia x_1 del centro de masa a la izquierda, mientras que el menor m_2 está a la derecha una distancia x_2 .

En estas coordenadas, por conservación del momento angular se tiene que $-m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$, lo cual implica que $x_1 = m_2 x_2 / m_1$. La distancia entre los primarios es $R_{12} = x_2 - (-x_1) = x_2 + x_1$. Entonces, $x_2 = R_{12} - x_1$. Así, para x_1 se tiene:

$$x_1 = \mu R_{12}$$

de modo similar para x_2 :

$$x_2 = (1 - \mu) R_{12}$$

donde, se ha definido el parámetro $\mu \doteq m_2 / (m_1 + m_2)$. Ya que $m_1 \geq m_2$, $0 < \mu < 1/2$, conforme m_2 se hace igual a m_1 , $\mu = 1/2$.

Definanse ahora, una distancia unitaria (du) tal que los primarios estén a una distancia $R_{12} \doteq 1du$ uno del otro, una masa unitaria $m_1 + m_2 \doteq 1mu$, y la revolución unitaria $1rad/tu = \omega = [G(1mu)/(1du)^3]^{1/2}$.

Finalmente, por definición de μ y de sus valores unitarios $m_1 + m_2 = 1$ se tendrá que $m_2 = \mu$. Usando la misma relación, resolviendo para m_1 se tiene que $m_1 = 1 - \mu$. Recordando que $-x_1 = -\mu$, $x_2 = 1 - \mu$ y que $G = \omega = 1$, es posible expresar la ecuación (4.118) en términos de estas unidades adimensionales:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2\dot{y} - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x - 1 + \mu) \\ y - 2\dot{x} - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y \\ -\frac{1-\mu}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

donde ahora $r_1 = [(x + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ y $r_2 = [(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$.

4.2.3.2.3. Puntos de Lagrange y su estabilidad

Los puntos de equilibrio para el problema restringido son llamados puntos de Lagrange^{[9][22][22]} (o puntos de libración) y pueden ser obtenidos igualando a cero las derivadas temporales de la ecuación (4.119), resultando en las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) + \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu) \\
y &= \frac{1-\mu}{r_1^3}y + \frac{\mu}{r_2^3}y \\
0 &= \frac{1-\mu}{r_1^3}z + \frac{\mu}{r_2^3}z
\end{aligned}$$

Para la última se tiene el resultado $z = 0$. Por lo tanto, todos los puntos de equilibrio siempre estarán en el plano de movimiento de los primarios.

Considérense primero los puntos colineales. Para estos se tiene que $y = z = 0$ quedando únicamente:

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-(1-\mu)|^3} = 0 \quad (4.120)$$

Los puntos de libración colineales están a lo largo del eje x con las masas las cuales están localizadas en $-\mu$ y $1-\mu$.

Entonces, estos puntos están linealmente ordenados, y se deben considerar los tres casos posibles, $x < -\mu < 1-\mu$, $-\mu < x < 1-\mu$ y $-\mu < 1-\mu < x$.

En el primer caso, se denotará el punto de equilibrio por $x = L_3$, en el segundo, $x = L_2$ y en el tercero, $x = L_1$. Para el primer caso, $|L+\mu| = -(L+\mu)$ y $|L-(1-\mu)| = -[L-(1-\mu)]$. Como $L < -\mu$ y $L < 1-\mu$, entonces $L+\mu < 0$ y $L-(1-\mu) < 0$. Por lo tanto, la ecuación (4.120) se convierte en:

$$L - \frac{(1-\mu)(L+\mu)}{(-1)(L+\mu)^3} - \frac{\mu(L-1+\mu)}{(-1)[L-(1-\mu)]^3} = 0$$

o bien:

$$\frac{L(L+\mu)^2[L-(1-\mu)]^2 + (1-\mu)[L-(1-\mu)]^2 + \mu(L+\mu)^2}{(L+\mu)^2[L-(1-\mu)]^2} = 0$$

El lado izquierdo es cero si y solo si, L es una raíz del numerador. Expandiéndolo^[22]:

$$L^5 + aL^4 + bL^3 + cL^2 + dL + e = 0 \quad (4.121)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= 2(2\mu - 1) \\ b &= (1-\mu)^2 - 4\mu(1-\mu) + \mu^2 \\ c &= 2\mu(1-\mu)(1-2\mu) + 1 \\ d &= \mu^2(1-\mu)^2 + 2[\mu^2 - (1-\mu)^2] \\ e &= (1-\mu)^3 + \mu^3 \end{aligned}$$

El polinomio es de quinto orden en L tal como la ecuación quintic^[9]. Así, al trabajar con el sistema Tierra-Luna, μ es conocido y es posible resolver la ecuación numéricamente. Por lo tanto, para el punto $L_3 \approx -1.00511551160689$.

De modo similar para los dos casos mas L_1 y L_2 a satisfacer la ecuación (4.121) con:

$$\begin{array}{ll} a = 2(2\mu - 1) & a = 2(2\mu - 1) \\ b = (1-\mu)^2 - 4\mu(1-\mu) + \mu^2 & b = (1-\mu)^2 - 4\mu(1-\mu) + \mu^2 \\ c = 2\mu(1-\mu)(1-2\mu) + 1 & y \quad c = 2\mu(1-\mu)(1-2\mu) - 1 \\ d = \mu^2(1-\mu)^2 + 2[\mu^2 + (1-\mu)^2] & d = \mu^2(1-\mu)^2 + 2[\mu^2 - (1-\mu)^2] \\ e = (1-\mu)^3 - \mu^3 & e = -(1-\mu)^3 - \mu^3 \end{array}$$

respectivamente. Las soluciones numéricas para estas ecuaciones son, $L_1 \approx 0.8362925908$, y $L_2 \approx 1.15616816590553$. La localización de los puntos de libración triangular (equilateral) son mucho más fácil de calcular, ya que deben estar en el vértice de un

triángulo equilátero cuya base es la línea entre los primarios, y ya que esta longitud vale 1, la distancia de los primarios a L_4 o L_5 debe ser 1. Geométricamente es posible ver que, $y = \pm\sqrt{3}/2$, mientras que en la abscisa debe ser $x = -\mu + 1/2$.

Por lo tanto, usando el valor de μ para el sistema Tierra-Luna, los puntos no colineales son: $L_4 \approx (0.487722529, 0.86602540378)$ y $L_5 \approx (0.487722529, -0.86602540378)$, (Fig. 4.46).

Nótese como tres de estos puntos se sitúan también, justo en la órbita del secundario. Con la finalidad de investigar la estabilidad de los cinco puntos, considérense los siguientes desplazamientos infinitesimales $(\delta x, \delta y, \delta z)$ de cada posición de equilibrio, $(x_0, y_0, 0)$, de modo que $x = x_0 + \delta x, y = y_0 + \delta y, z = \delta z$. Sustituyendo esto en la ecuación (4.119) para el movimiento fuera del plano:

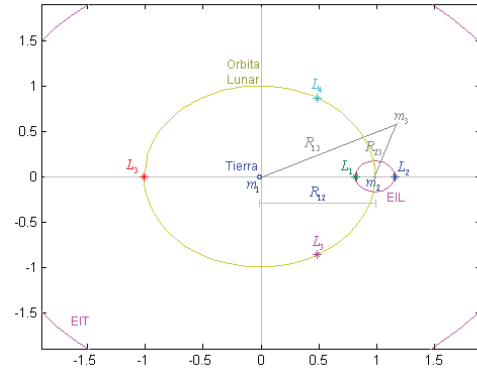


Fig. 4.46. Puntos de Lagrange del sistema Tierra Luna

$$\delta \ddot{z} + \left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] \delta z = 0 \quad (4.122)$$

Para desplazamientos pequeños, los denominadores se aproximan mediante la expansión binomial^[9]:

$$\begin{aligned} r_1^{-3} &\approx \left[(x_0 - \mu)^2 + y_0^2 \right]^{-\frac{3}{2}} - 3r_{10}^{-5} [(x_0 - \mu)\delta x + y_0\delta y] \\ r_2^{-3} &\approx \left[(x_0 + 1 - \mu)^2 + y_0^2 \right]^{-\frac{3}{2}} - 3r_{20}^{-5} [(x_0 + 1 - \mu)\delta x + y_0\delta y] \end{aligned} \quad (4.123)$$

Donde, r_{1_0} y r_{2_0} son los valores de equilibrio de r_1 y r_2 respectivamente. Sustituyendo la ecuación (4.123) en la expresión (4.122):

$$\delta\ddot{z} + c\delta z = 0 \quad (4.124)$$

donde $c \doteq (1-\mu)[(x_0 - \mu)^2 + y_0^2]^{-3/2} + \mu[(x_0 + 1 - \mu)^2 + y_0^2]^{-3/2}$ es una constante. La solución general de la ecuación (4.124) es:

$$\delta z = \delta z_0 e^{\sqrt{-c}t}$$

la cual representa un movimiento estable (oscilación de amplitud constante) siempre que $c \geq 0$. De aquí que la perturbación fuera del plano es incondicionalmente estable y por lo tanto, puede ser ignorada en un análisis posterior.

Para pequeños desplazamientos $\delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y)^T$ en el movimiento coplanar alrededor de los puntos de Lagrange partiendo de un desplazamiento inicial $\delta \mathbf{r}_0 = (\delta x_0, \delta y_0)^T$, y dado que es un sistema lineal de tiempo invariante^[9] (Cap3), es posible describirlo mediante (Cap3), $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 e^{\lambda t}$, donde λ es el eigenvalor de las matrices^[22]:

$$D_x f_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+2\alpha & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\alpha & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad D_x f_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

y de las cuales los subíndices de f denotan los casos de los puntos colineales y triangulares de estabilidad. Así para los primeros:

$$\alpha = \frac{1-\mu}{|L_i + \mu|^3} + \frac{\mu}{|L_i - (1-\mu)|^3}, \quad i = 1, 2, 3$$

Las matrices de las ecuaciones (4.125) representan la dinámica en el plano, deducibles mediante un proceso de linealización de los campos vectoriales alrededor de los puntos de libración. En el Apéndice^[A5] se describe tal proceso y se deducen las matrices de la dinámica para el problema de los tres cuerpos en tres dimensiones. Las ecuaciones características para las matrices de los puntos colineales $D_{\mathbf{x}}f_c$ y triangulares $D_{\mathbf{x}}f_t$ son respectivamente^[9]:

$$\lambda^4 + [4 + (\alpha - 1) - (1 + 2\alpha)]\lambda^2 - (1 + 2\alpha)(\alpha - 1) = 0$$

y

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0$$

De esta última se tienen las raíces:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} - 1 \right] \quad (4.126)$$

Para la estabilidad en los puntos triangulares, los valores de λ deben ser puramente imaginarios, representando así, una oscilación armónica alrededor del punto de equilibrio. Dicha condición se satisface en la ecuación (4.126) haciendo $1 - 27\mu(1 - \mu) = 0$ de aquí que sea requerido $\mu \leq 0.0385209$ o bien, $\mu \geq 0.9614791$, lo cual siempre se cumple en el sistema solar. Así, estos definen las posiciones estables para los cuerpos pequeños en el sistema solar.

Tal es el caso de los Asteroides Troyanos los cuales “siguen” en su trayecto orbital a Júpiter justo por detrás y delante de su órbita que interseca estos puntos de Lagrange. Sin embargo, para el sistema Tierra Luna, dichos puntos son influenciados considerablemente debido al apreciable potencial gravitacional solar, de modo que en éste caso, dichos puntos son prácticamente inexistentes^[9].

Por otro lado, al analizar los eigenvalores para los puntos colineales, se tendrá al menos un eigenvalor con parte real positiva, de aquí que el sistema es incondicionalmente inestable. Sin embargo, dichos puntos pueden ser aprovechados para ser orbitados exitosamente con poca cantidad de energía. Dichas órbitas son llamadas halos orbitales, y son útiles en el monitoreo de esas zonas interplanetarias. Algunos ejemplos de vehículos puestos en halos orbitales son el ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer) o el MAP (Microwave Anisotropy Probe).

4.2.3.2.4. Solución Numérica del PRTC

El problema restringido de los tres cuerpos resulta insoluble al menos analíticamente. Incluso, fue demostrada su insolubilidad por Poincaré^[9] usando superficies de espacio fase. El problema también está dentro de un grupo selecto de los sistemas dinámicos el cual es llamado Sistemas Caóticos. Estos son bastante difíciles de modelar y su comportamiento es estudiado por una rama especial de la física.

De este modo, empleando algún método de integración numérica tal como el de Runge-Kutta (Cap3), es posible simular el comportamiento de las trayectorias partiendo de condiciones iniciales en la posición y velocidad, e integrando numéricamente el sistema dado por la ecuación (4.119) empleando variables normalizadas.

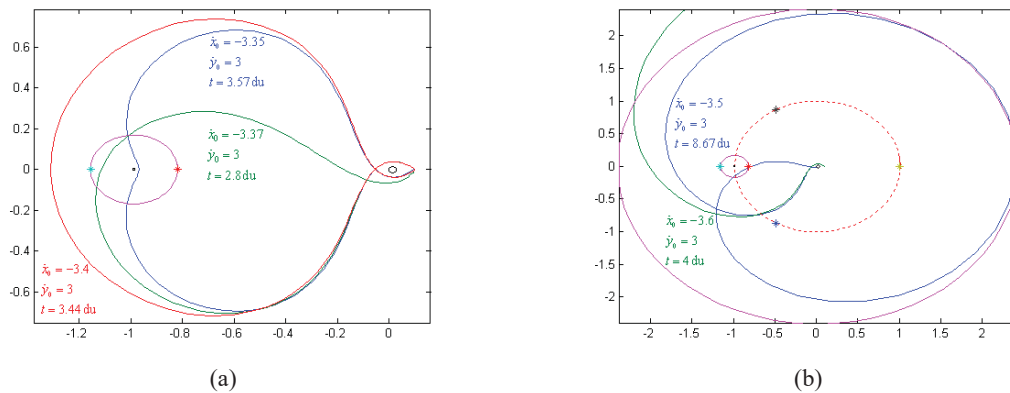


Fig. 4.47. Solución numérica al PRTC.

(a) Tres trayectorias de retorno libre, (b) dos trayectorias de retorno y una de escape.

En las (Figs. 4.47a-b), se muestran tres posibles casos de trayectorias de retorno libre (los círculos o puntos negros representan a la Luna o a la Tierra). Estas pueden ser empleadas para la exploración lunar (no tripulada) sin necesidad de transportar combustible para el retorno a Tierra. La duración para cada una se muestra en unidades de tiempo normalizado t_u , donde $1t_u = 30$ días para el sistema Tierra-Luna. El segundo caso, muestra dos trayectorias más, una de las cuales, cruza la esfera de influencia terrestre, mientras que la otra, se sitúa en la frontera para después interceptar nuevamente la Tierra. Ambos casos parten de la posición (0.1,0) del centro de masa.

4.2.3.2.5. Integral de Energía y Constante de Jacobi

Considérese la siguiente función dada en términos de las posiciones y velocidades:

$$E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y)$$

donde, $\bar{U}(x, y)$ es el potencial efectivo^[22] el cual está dado por:

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y) \\ &= -\frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}\end{aligned}$$

y donde r_1 y r_2 están dados como en la ecuación (4.119). También hay que notar que $\mu_1 = 1 - \mu$ y $\mu_2 = \mu$. Físicamente la posición y velocidad de la partícula determinan la energía asociada a la misma. En las comunidades astrodinámicas y astronómicas suele emplearse una notación para $-2E$ llamada integral de Jacobi^{[9][22]} la cual está dada como $C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\bar{U}$.

Sea ahora $\mathcal{M}$ la cubierta de Energía o superficie de energía dada al hacer igual a una constante e , a la integral de la energía es decir:

$$\mathcal{M}(\mu, e) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = e\}$$

Esta puede ser vista como una superficie en un espacio de dimensión cuatro. La proyección de esta superficie en el espacio de posiciones del sistema giratorio, plano xy , define la llamada región de Hill o región de posible movimiento^[22]. Sea $M(\mu, e)$ la proyección, entonces:

$$M(\mu, e) = \{(x, y) \mid \bar{U}(x, y) \leq e\}.$$

La desigualdad indica que la partícula es capaz de moverse sólo en el lado de esta curva para la cual la energía cinética es positiva. En el otro lado el movimiento no es posible y se conoce como Región prohibida. La frontera ∂M de M , se llama curva de velocidad cero, y juega un papel importante al asignar cotas de movimiento a la partícula. Estas se localizan en puntos del plano xy donde la velocidad $v = [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2}$ se anula, es decir, donde $v^2(x, y)/2 = e - \bar{U}(x, y) = 0$.

Recuérdese que al fijar E a una constante e , es como fijar la altura de la gráfica del potencial efectivo $\bar{U}$, (Figs. 4.48a-b).

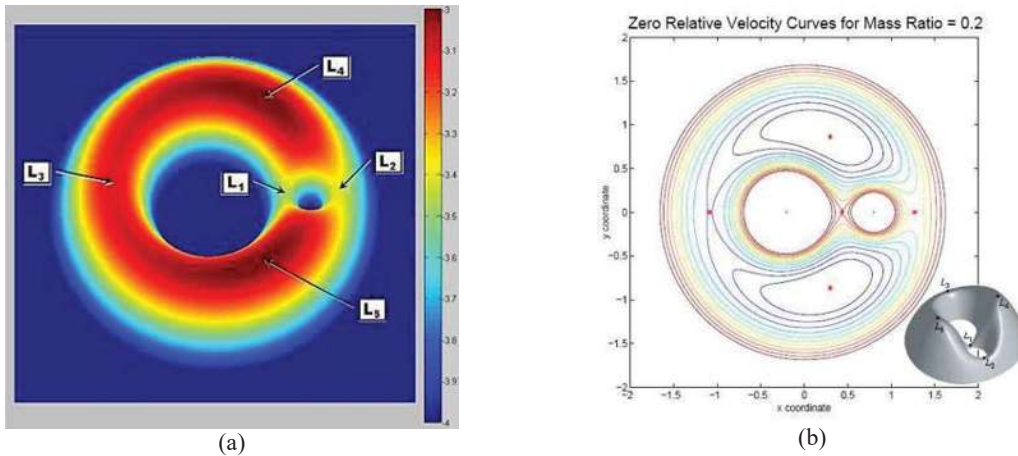


Fig. 4.48. Potencial Efectivo (a) Gradiente de Energía, (b) curvas de velocidad relativa cero.

Cerca de m_1 y m_2 se tiene un pozo de potencial. Lejos de m_1 y m_2 , el primer término de $\bar{U}$ es tal que, $|\frac{1}{2}(x^2 + y^2)| / |\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}| \gg 1$, es decir, la fuerza centrífuga es dominante, y de este modo se tendrá otro pozo de potencial (cuyo declive forma un semiparaboloide).

Mediante simple cálculo es posible determinar tres puntos silla a lo largo del eje x y dos puntos simétricos fuera del mismo. Sean E_i la energía de una partícula en reposo en el punto lagrangiano L_i , $i = 1, \dots, 5$. Entonces, $E_5 = E_4 > E_3 > E_2 > E_1$.

Para un μ dado, hay cinco configuraciones básicas en las regiones de Hill^[22]. El primer caso indica que si la energía de la partícula está por debajo de E_1 , ésta no puede moverse entre las regiones alrededor de m_1 y m_2 . Para el segundo caso, se abre un “cuello” entre las regiones alrededor de las masas, permitiendo que la partícula se pueda mover entre las dos regiones (Energía adquirida por el impulso translunar). El punto L_1 está situado en este cuello. El caso tres indica que la partícula puede moverse entre las vecindades de las masas así como hacia el exterior a través del cuello alrededor de L_2 . Para el cuarto caso, la partícula puede pasar directamente desde la vecindad de m_1 hacia la región exterior a través del cuello alrededor de L_3 . Finalmente, para un último caso en que $E > -3/2$, la región prohibida desaparece, y la partícula es libre de moverse completamente en todo el plano xy (Energía requerida para un impulso transplanetario), (Figs. 4.49a-d).

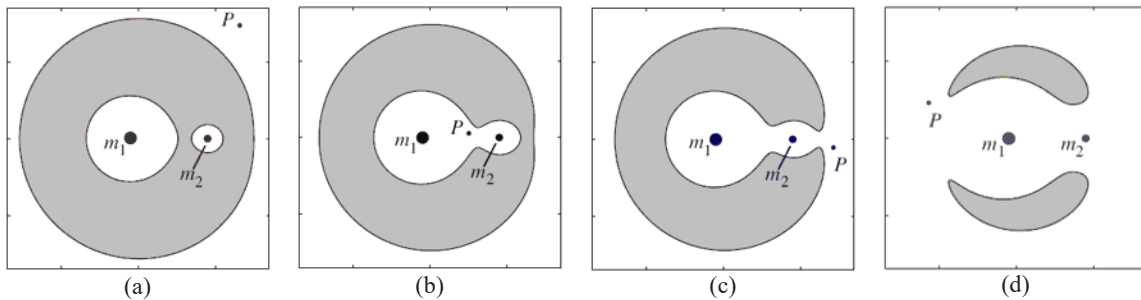


Fig. 4.49. Casos en las regiones de Hill. (a), $E < E_1$, (b) $E_1 < E < E_2$, (c) $E_2 < E < E_3$, (d) $E_3 < E < E_4 = E_5$. Las regiones prohibidas se muestran en color gris.

4.2.3.3. Simulación Controlada de Impulso Translunar

Siguiendo la secuencia de simulación, es configurado el MFD de transferencia presionando el botón (HTO) de órbita hipotética.

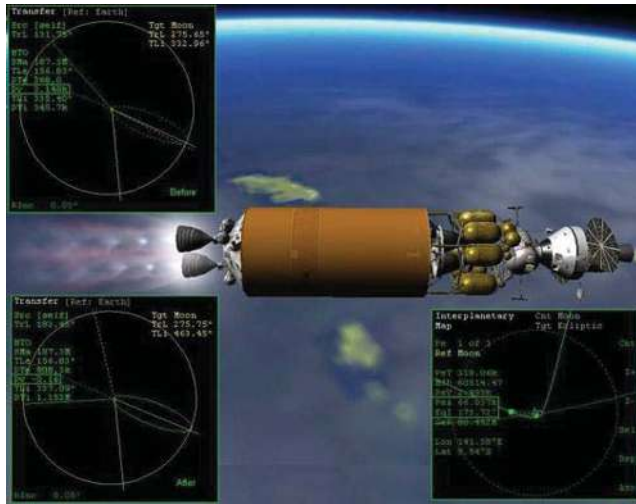


Fig. 4.50. Impulso translunar a T+3h17m18s



Fig. 4.51. Liberación del EDS a T>3h17m18s

Después se ajusta el incremento de velocidad necesario para adquirir una transferencia elíptica así como el instante de impulso translunar. Para esto se conviene el valor $DV = \Delta v_{TL} = 3.148 \text{ km/s}$, (Fig. 4.50). En seguida el conjunto vehicular EDS habrá de esperar la llegada al punto del impulso translunar en el cual, 30s antes de pasar por él, se encienden los propulsores. Justo cuando se encuentre en el instante del punto de la expulsión, debe activarse el botón de nulidad de rotación “Kill rot”, para empezar a generar la elipse de transferencia.

Una vez terminado el impulso translunar, será posible apreciar la hipérbola de arribo lunar mencionada anteriormente en un sistema referencial en la Luna. Ahí, la altura del punto perilunar puede ser preestablecido digamos a 60 km aproximadamente. No obstante, debido a las perturbaciones existentes, éste volverá a ser reajustado posteriormente. De igual modo, nótese en el MFD que la inclinación orbital respecto a la Luna al momento de la llegada será de 173.72° (órbita retrógrada). Esta también puede ser reajustada al valor de la latitud lunar del punto de descenso deseado. Sin embargo, esta

corrección debe hacerse del mismo modo que antes para cambiar la inclinación de planos orbitales, es decir, en dirección normal o antinormal según sea el caso. Como ya se vio, conviene que sea en algún punto cercano al apogeo, es decir, en la frontera de la EIL.

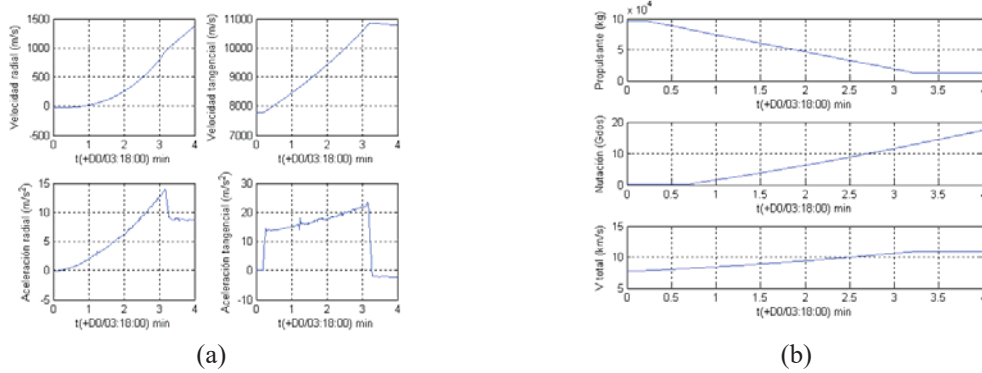


Fig. 4.52. Parámetros del impulso translunar, (a) cinemáticos, (b) propulsante, nutación y Δv_{TL} .

Después, el siguiente paso es simplemente liberar la fase de impulso translunar EDS y esperar el arribo lunar de los vehículos, (Fig. 4.51). Nótese que con este nivel de energía es posible transitar libremente por la región de Hill para el caso dos. El tránsito será a través del cuello situado en L_1 . Por lo tanto, al liberar la fase EDS en cualquier instante durante la elipse de transferencia, ésta quedará vagando únicamente en dicha región. Para esto se requiere de un proceso de simulación que permita indicar el punto en el cual debería ser liberado para que después de un largo periodo de tiempo (meses), ésta fase se impacte de preferencia en la Luna.

4.2.3.4. Arribo, Inserción Orbital y Descenso Lunar

El punto de contacto entre la elipse de transferencia geocéntrica y la EIL, (Fig. 4.35), determina la velocidad y trayectoria del vehículo dentro de la misma. Esta habrá de ser una hipérbola, que es la cónica descrita para el movimiento relativo del vehículo con respecto a un observador en la Luna. No obstante, debido a la aproximación de enlace cónico, habrán ciertas diferencias de velocidad vistas desde un sistema inercial. Tal efecto se denomina Tirón Gravitacional, y es posible sacar ventaja de dicho efecto también en numerosas misiones no tripuladas de larga duración.

4.2.3.4.1. Diagramas de velocidades

En general considérese dos planetas A y B , el segundo orbitando al primero. Con esto, en la hipérbola de arribo de B , (Fig. 4.53) se tendrá que $e > 1$, $a < 0$, y $v_{\infty}^{B+}, v_{\infty}^{B-}$ que son las velocidades de exceso hiperbólico de arribo y escape respectivamente.

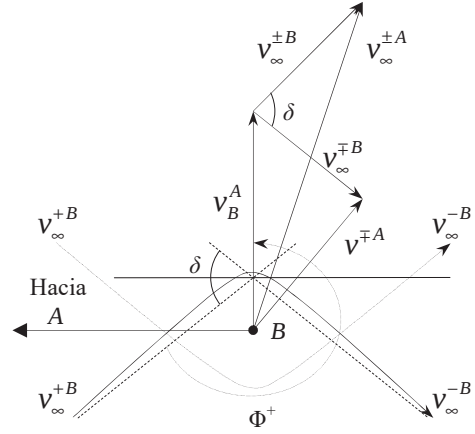


Fig. 4.53. Diagrama de velocidades

En general (Cap2):

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_{\infty}^2}{2} = -\frac{\mu}{2a} = \text{constante} \quad (4.127)$$

de modo que con respecto a B , $v_{\infty}^{B+} = v_{\infty}^{B-}$ [16]. Empleando la ecuación $r_p = a(1 - e)$, y dados v_{∞} y r_p es posible calcular la excentricidad de la hipérbola mediante la ecuación (4.127). El ángulo de deflexión queda determinado por $\delta_{\infty} = \text{Arccos}(-1/e)$. Sin embargo, la velocidad relativa v_{∞} únicamente es constante antes y después de pasar por las asíntotas con respecto a B , no así como velocidad inercial v^A con respecto al cuerpo A .

Nótese que cuando el vehículo pasa por el frente de movimiento de velocidad v_B^A del planeta B con respecto a A , éste hará que pierda velocidad de exceso, mientras que si pasa por detrás, hará que la gane. En caso de pasar por un lado, la velocidad de exceso permanece igual en magnitud, y únicamente cambia en dirección.

El segundo caso (ganancia en v_{∞}), sería lo presenciado en caso de que la elipse de transferencia si ésta hiciera contacto con la EIL por detrás de la misma en la (Fig. 4.43). Este es empleado en algunas pruebas interplanetarias en su paso por alguna esfera de influencia las cuales proporcionan tirones gravitacionales que generan un aumento en su velocidad sin necesidad de combustible. Tal es el caso de la prueba espacial enviada a

Plutón (New Horizons) que aprovechó la esfera de influencia gravitacional de Júpiter para aumentar su velocidad rumbo a la zona transneptuniana.

4.2.3.4.2. Impulso de Inserción Orbital

Una vez que el vehículo ha recorrido el trayecto de transferencia, y se encuentra ya muy próximo a la EIL en $t = t_f$, es necesario realizar los últimos ajustes para adquirir una altura perilunar, $h_p^L = 60 \text{ km}$.

Después, hay que esperar un tiempo Δt_H que es la duración del trayecto hiperbólico desde la frontera de la EIL hasta un punto cercano al radio perilunar r_p^L donde será aplicado un impulso en OR y generar así, una órbita casi circular alrededor de la Luna (inserción orbital lunar) cuya velocidad habría de ser v_c^L .

Suponiendo que v_{Hp}^L es la velocidad hiperbólica del vehículo en el punto perilunar entonces, el impulso necesario para la inserción orbital lunar es:

$$\Delta v_{iL} = v_c^L - v_{Hp}^L < 0 \quad (4.128)$$

Sin embargo, de acuerdo al Cap2, $v_{Hp}^L = [(v_\infty^{L+})^2 + (v_{esc}^L)^2]^{1/2}$, cuyos términos del radical son la velocidad de escape lunar v_{esc}^L , y la velocidad de exceso hiperbólico:

$$v_\infty^{+L} = \sqrt{(v_{tf}^T)^2 + (v_L^T)^2 - v_{tf}^T v_L^T \cos(\Phi^+ + \frac{\delta}{2})} \quad (4.129)$$

la cual es obtenida de acuerdo al diagrama de velocidades, (Fig. 4.53). Además, v_L^T es la velocidad orbital lunar alrededor de la Tierra, y v_{tf}^T es la velocidad orbital geocéntrica orbital de transferencia del vehículo en el instante $t = t_f$ dada por:

$$v_{tf}^T = \sqrt{2\mu_T \left(\frac{1}{r_{tf}} - \frac{1}{r_i + d_{TL} + r_p^L} \right)} \quad (4.130)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (4.130) en la expresión (4.129) y luego en la ecuación (4.128) se tiene el impulso necesario que habrá de aplicarse en el punto perilunar para la inserción orbital el cual por ser negativo, indica una disminución de velocidad:

$$\Delta v_{iL} = v_c^L - \sqrt{(v_{tf}^T)^2 + (v_L^T)^2 + (v_{esc}^L)^2 - 2v_{tf}^T v_L^T \cos(\Phi^+ + \frac{\delta}{2})} < 0 \quad (4.131)$$

4.2.3.5. Simulación Controlada de la Inserción orbital y el descenso

Después de liberar la fase de impulso translunar EDS (Fig. 4.51), habrían transcurrido hasta entonces 3 días, 1 hora, 7 minutos y 43 segundos, $t(+D3/01:07:43)$. A partir de este momento, las correcciones se hacen únicamente mediante impulsos generados por el Módulo lunar LM. Estos habrán de ser los que se aplican cuando los vehículos CEV-LM llegan a un punto previo antes de ingresar a la EIL realizando las últimas correcciones de la altura perilunar (~60 km) aplicando impulsos breves en OD, así como de la inclinación ecuatorial lunar de la órbita (~172°) en postura normal, (Fig. 4.54a). No obstante, la corrección de una, desajustará el valor de la otra y viceversa debido a la geometría esférica del satélite, por lo que en OD conviene aplicar de forma alternada, impulsos en las tres direcciones vertical, lateral y longitudinal hasta lograr que ambos parámetros sean ajustados al máximo.

Para refinarlos, se orienta el vehículo en OD pero ahora respecto a la Luna. Para ello se presiona ctrl.+R para activar el referencial deseado en el HUD. Dichas correcciones determinan el flanco de arribo o parámetro de impacto. Por lo tanto, para cualquier arribo a algún cuerpo celeste de un vehículo espacial, éste deberá hacer siempre dos correcciones simultáneas que son, el ajuste del periapsis y la latitud de arribo.

(a)

(b)

Adquirida la velocidad v_c^L para entrar en órbita circular alrededor de la Luna, se corta la propulsión y se desacopla el módulo lunar (LM) Altair, del CEV, antes de llegar al punto deseado de descenso, (Fig. 4.55a).

263

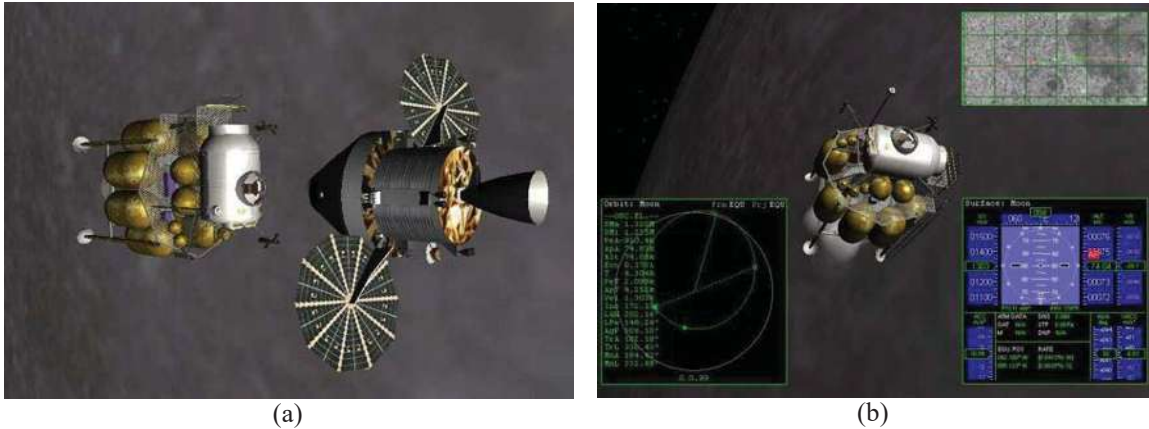


Fig. 4.55. (a) Desacople del LM a T+D4/15:06:46, (b) Deorbitación lunar del LM a D4/T+15:11:45.

Esto se logra dirigiendo los propulsores a un ángulo de ataque de 180° , lo cual puede ser efectuado mediante el MFD de superficie. Una vez hecho esto, el LM descenderá en línea casi vertical bajo los efectos únicamente de la gravedad lunar.

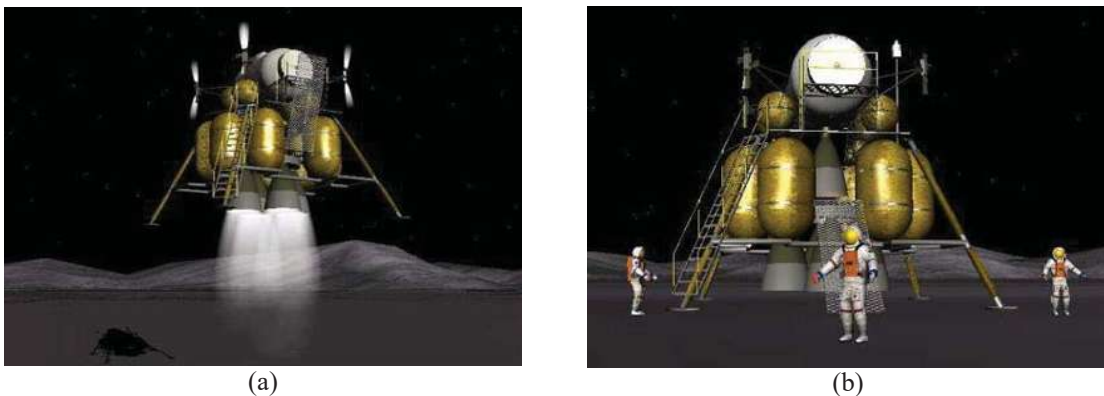


Fig. 4.56. Descenso lunar, (a) en T+D4/15:19:35, y (b) Alunizaje en T+D4/15:30:46

Dicho descenso es bastante simple de controlar, ya que aplicando impulsos verticales, se debe monitorear únicamente la velocidad y aceleración vertical de modo que antes de tocar la superficie lunar, estos sean valores pequeños para lograr un descenso suave.

Aún así, es posible predecir cada instante de la trayectoria mediante la formulación para el problema de predicción. De este modo, mientras esto se efectúa, se despliegan los cuatro soportes de descenso, (Fig. 4.56a), y finalmente, alunizar el Día 4 a las 15hrs 19min 46seg, (Fig 4.56b).

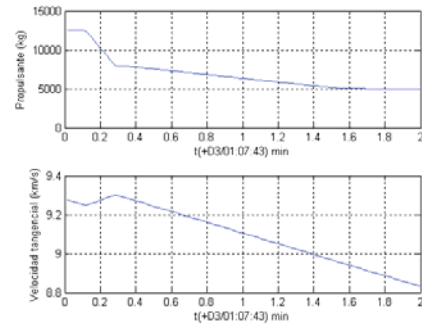


Fig. 4.57. Corrección de la altura Perilunar llegando a la EDIL

Los datos proporcionados por el simulador permiten hacer un análisis más detallado respecto a cada instante en que se aplicaron impulsos para modificar todos los parámetros cinemáticos antes mencionados.

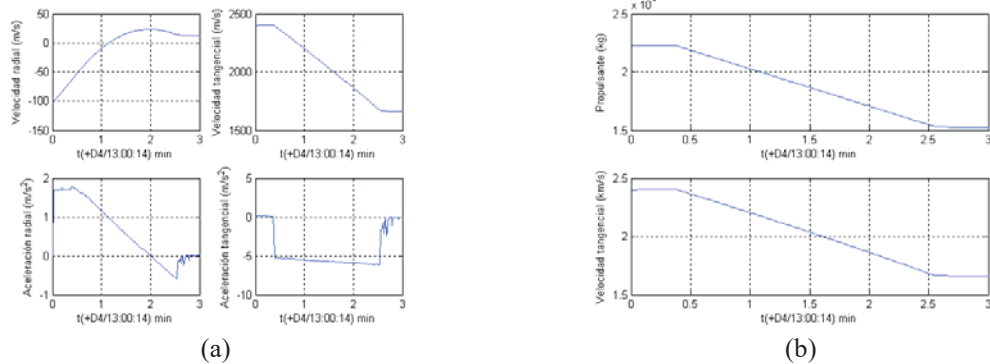


Fig. 4.58. Parámetros de la inserción orbital lunar, (a) cinemáticos, (b) Δv_{iL} y propulsantes

Se puede apreciar un ligero aumento de la velocidad orbital debido a que este se aplica en dirección del vector de velocidad para efectuar la corrección de la altura perilunar (Fig. 4.57). Después, en la inserción orbital lunar, es posible apreciar como la velocidad tangencial a la órbita (Fig. 4.58), disminuye considerablemente. Esto debido a que el impulso Δv_{iL} habría sido aplicado en dirección opuesta al movimiento, es decir en OR.

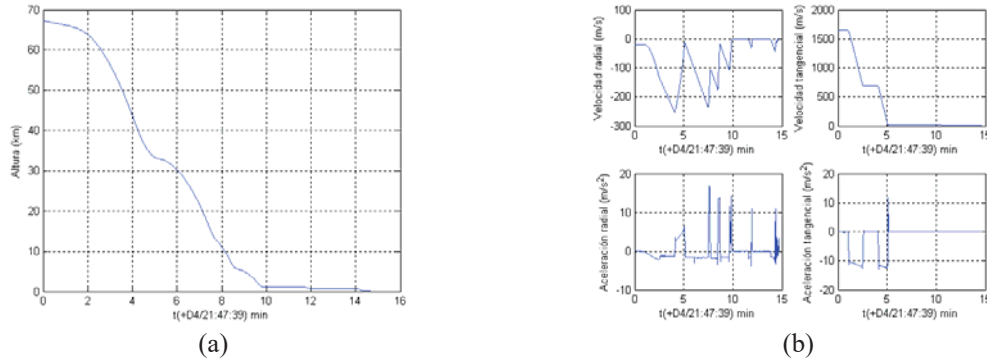


Fig. 4.59. Parámetros del descenso a la superficie lunar, (a) Altura vs tiempo, (b) cinemáticos.

El descenso del LM es bastante simple. Nótese como a los 5 minutos aplicando impulsos a un ángulo de ataque de 180° , (Fig. 4.60) la velocidad tangencial ha sido reducida a cero, (Fig. 4.59b) dejando como único parámetro a controlar, la velocidad vertical la cual casi tocando la superficie, debe nivelarse a valores pequeños, que permitan un descenso suave sobre el suelo lunar.

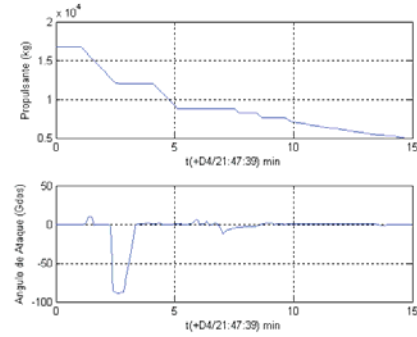


Fig. 4.60. Propulsantes y ángulo de ataque durante el descenso

4.2.4. Retorno a Tierra y Reingreso

4.2.4.1. Ascenso lunar

Un ascenso lunar es un caso análogo al del lanzamiento de cohetes con la diferencia de que éste es más simple, debido a la ausencia de atmósfera en la Luna. Además de que el cambio gravitacional generado por la Luna es prácticamente despreciable (un día lunar dura 30 días terrestres), éste debe efectuarse simplemente controlando el ángulo de postura nutacional. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento se simplifican de la siguiente manera:

$$\dot{r} = v \text{ Sen } \phi$$

$$\dot{\delta} = \frac{v}{r} \text{ Cos } \phi \text{ Cos } A$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{r \text{ Cos } \delta} v \text{ Cos } \phi \text{ Sen } A$$

$$\dot{v} = \frac{T}{m} \text{ Cos } \varepsilon \text{ Cos } \mu - g_c \text{ Sen } \phi + g_\delta \text{ Cos } \phi \text{ Cos } A$$

$$v \dot{A} \text{ Cos } \phi = \frac{v^2}{r} \text{ Cos}^2 \phi \text{ Sen } A \text{ Tan } \delta + \frac{T}{m} \text{ Sen } \mu - g_\delta \text{ Sen } A$$

$$v \dot{\phi} = \frac{v^2}{r} \text{ Cos } \phi + \frac{T}{m} \text{ Sen } \varepsilon \text{ Cos } \mu - g_c \text{ Cos } \phi - g_\delta \text{ Sen } \phi \text{ Cos } A$$

Las ecuaciones anteriores estarían dadas en función del ángulo de postura nutacional θ del vehículo que a su vez determina la forma y dirección de la órbita.

4.2.4.2. Simulación controlada del ascenso interceptor lunar

Antes del asenso, es desenganchado el Módulo Lunar de Ascenso LAM del módulo Lunar LM. Después, tal como se hizo para el lanzamiento interceptor del CEV al EDS, se determina un instante de asenso mediante (4.80). Una vez conocido, inicia la cuenta regresiva y comienza el lanzamiento del LAM el cual, habrá de seguir una secuencia muy similar a la que se hizo en el lanzamiento del CEV para interceptar al EDS, salvo que ahora éste, habrá de dirigirse hacia el CEV que se encuentra orbitando la Luna.

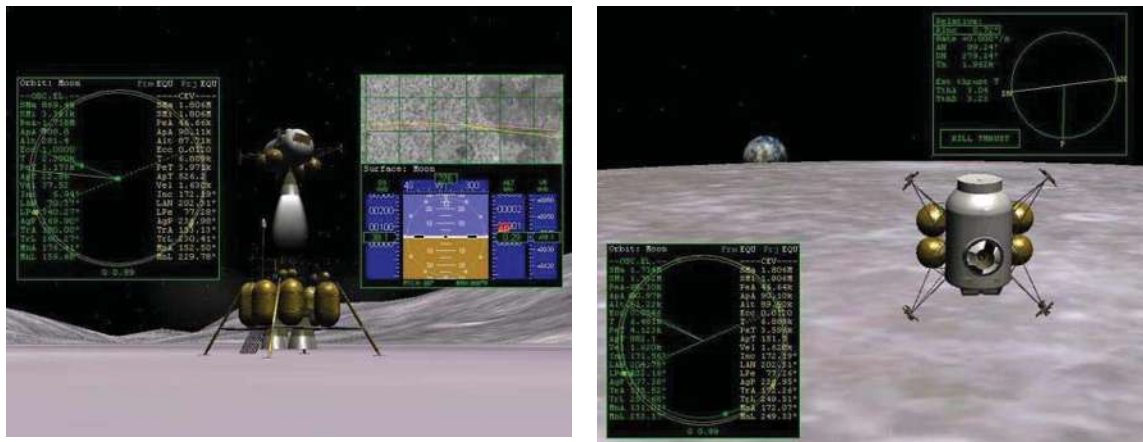


Fig. 4.61. (a) Ascenso lunar del LAM a T+D11/10:11:14 (casi justo una semana después de haber descendido), (b) Esperando el instante para el levantamiento del punto perilunar para iniciar las maniobras interceptoras de acoplamiento con el CEV a T+D11/10:19:14.

Inicialmente se efectúa un ascenso vertical. Después, se orienta la normal (o su opuesta) al vector de velocidad en dirección del azimuth necesario para que intercepte a la órbita objetivo (Tal como se hizo en el lanzamiento de cohetes), (Fig. 4.61a).

No obstante, a diferencia de lanzamiento de los cohetes que se realizó orientando los vehículos un azimuth de 90° , debido a que la órbita del CEV está inclinada 172.19° (ver MFD izquierdo de la (Fig. 4.61a),

el azimut al que deberá ser orientado el LAM estaría determinado por la primera ecuación de (4.64), la cual habrá de interpretarse de la siguiente manera^[18]:

$$A_{\text{real}} = \text{Arctan} \left[\text{Tan} \left(\text{Arcsen} \frac{\text{Cos } i_t}{\text{Cos } \delta} \right) - \frac{v_I}{v_t \text{Cos} \left(\text{Arcsen} \frac{\text{Cos } i_t}{\text{Cos } \delta} \right)} \right]$$

donde, i_t es la inclinación orbital del objetivo ($= 172.19^\circ$), δ es la latitud del sitio de lanzamiento ($= 5.94^\circ$), v_I es la velocidad inercial del vehículo con respecto al cuerpo celeste en el que se encuentra en ese momento ($= 37.52 \text{ m/s}$) y v_t es la velocidad orbital del objetivo ($= 1.630 \text{ km/s}$). Hay que tener en cuenta que si el objetivo está en órbita retrograda y por ende la inclinación $i_t > 90^\circ$, se debe restar la cantidad obtenida de la expresión anterior a 360° , dando como resultado, $A_{\text{real}} \approx 276^\circ$ dirección Noroeste.



Fig. 4.62. Acoplamiento del LAM con el CEV

En seguida, (cuando se alcanza una velocidad vertical de 200 m/s aproximadamente) se gira el vehículo a un ángulo de nutación cercano a los -90° , (Fig. 4.61b). Se mantiene así hasta hacer que la altura del punto perilunar interseque la órbita objetivo. Una vez logrado eso se apagan los propulsores y se espera el paso por el punto apolunar.

Ahí se efectúa la maniobra de levantamiento perilunar y se prosigue de la misma manera que antes para realizar las maniobras interceptoras que son, ajuste en la inclinación relativa así como los ajustes de sincronía, seguidos del curso de colisión y después el curso de colisión predispuesta. Finalmente, una vez acoplados el CEV y el LAM (Fig. 4.62) y transferida la tripulación del segundo al primero, es liberado el LAM del puerto de acoplamiento del CEV.

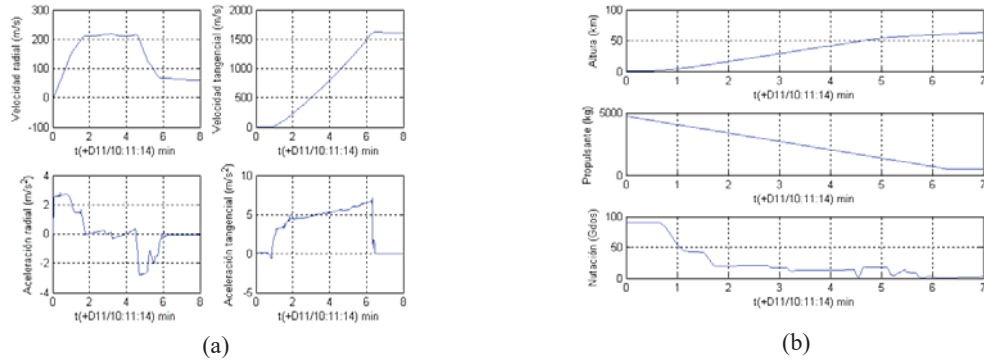


Fig. 4.63. Parámetros del ascenso lunar, (a) cinemáticos, (b) Altura, propulsante y nutación

Entre el minuto 2 y 3 de la (Fig. 4.63a), se aprecia una cresta en la velocidad vertical la cual, una vez que alcanza un valor de +200m/s, el vehículo ha sido nutado hasta llegar a los 0°, (Fig. 4.63b), esto para ganar suficiente velocidad tangencial, (Fig. 4.54a), y así, poder entrar en órbita. La poca cantidad de propulsante restante del LAM, (Fig. 4.63b), debe ser suficiente para realizar las maniobras interceptoras con el CEV.

4.2.4.3. Impulso Transtierra

Un impulso translunar en general no es único. De hecho, existen cuatro posibles casos para una órbita retrógrada tal como es el caso que se presenta. Antes que nada, se debe generar suficiente energía para hacer que el vehículo transite por el cuello de la región de Hill, teniendo en cuenta que entre más ancho sea, más rápido será el retorno a Tierra. Este bien podría ser el caso (c) de dichas regiones.

Para ello, supóngase que el vehículo se encuentra orbitando la Luna en dirección retrógrada, (Fig. 4.64a). Para este se disponen de cuatro puntos i en los cuales, se podría aplicar el impulso para generar la hipérbola de escape cuya velocidad sería $\mathbf{v}_{\infty(i)}^{-L}$. De estos, al considerar la velocidad orbital lunar, $\mathbf{v}_L^T$ la suma vectorial de dichas velocidades da como resultado la velocidad geocéntrica de transferencia de la Luna a la Tierra (Esto es

parte fundamental en la aproximación del enlace cónico así como lo tratado en el diagrama de velocidades, (Fig. 4.53).

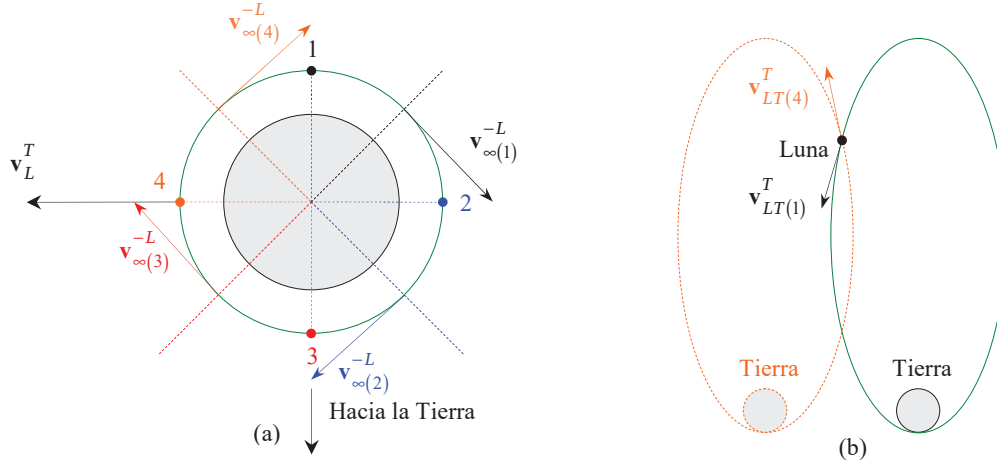


Fig. 4.64. Vectores de velocidades para los casos posibles en generación de hipérbolas de escape. (a) Los cuatro casos en órbita retrograda, (b) dos casos permitidos también análogos a otros dos en OD.

Por lo tanto, las velocidades generadas fuera de la EIL con respecto a la Tierra son:

$$\mathbf{v}_{LT(i)}^T = \mathbf{v}_L^T + \mathbf{v}_{\infty(i)}^{-L}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

De estas las únicas que son permitidas para una transferencia Luna Tierra son las que se dan para los casos $i = 1$ y 4 únicamente, (Fig. 4.64b). Esto debido a que las otras dos, tienen componentes positivas en dirección al vector de velocidad orbital lunar, lo cual indicaría un aumento y por lo tanto una órbita de escape planetario. No obstante, el caso 4 genera una elipse de transferencia en la cual el vehículo tendría que transitar una gran parte de la cónica para llegar al perigeo, de modo que este también es descartado, quedando como única alternativa el caso 1.

El razonamiento para una órbita directa alrededor de la Luna aplica de forma similar, descartando los casos cuyas componentes sean paralelas a $\mathbf{v}_L^T$ así como el caso de larga

duración. Por lo tanto, el único caso posible en OD es en el punto 4, que es análogo al caso 1 en órbita retrograda, (Fig. 4.64b). Este último fue empleado en las misiones Apolo, donde, estando en órbita directa, se aplicó un impulso justo cuando la Tierra comienza a ser visible en el horizonte lunar.

Así pues, debido a que la órbita inicial es circular, una vez aplicado el impulso, éste generará una órbita hiperbólica de escape la cual, enlazada con la cónica referencial a la Tierra, definirá la elipse de retorno mencionada anteriormente. De modo análogo al diagrama de velocidades, y a la expresión (4.131), el impulso necesario para la transferencia en el punto 1 es:

$$\Delta v_{LT} = \sqrt{\left(v_{ti}^T\right)^2 + \left(v_L^T\right)^2 + \left(v_{esc}^L\right)^2 - 2v_{ti}^T v_L^T \cos\left(\Phi^- + \frac{\delta_{ti}}{2}\right)} - v_c^L > 0 \quad (4.132)$$

donde ahora, $\left(v_{ti}^T\right)^2 = 2\mu_T(1/r_{ti}^T - 1/2a_{tr}^T)$, y de la cual, el subíndice ti indica los parámetros para una transferencia de retorno a la Tierra definidos inicialmente justo fuera de la frontera de la EIL.

El semilado mayor de la elipse de transferencia a_{tr} queda definido en función de la energía necesaria para hacer que dicha elipse interseque en el perigeo, justo por debajo de la atmósfera terrestre, una altura aproximada de 30 km. En este punto se define ya el corredor de reingreso necesario el cual, será estudiado en base a los aspectos tratados posteriormente.

Una forma precisa para determinar el instante del impulso transtierra es tomar por referencia el periodo lunar el cual, partiendo del instante en el que la Tierra se encuentre en el Zenit (arriba de la bóveda celeste) del CEV, esperar justo la mitad de ese tiempo para aplicar dicho impulso.

4.2.4.4. Simulación Controlada del impulso transtierra

Una vez liberado el LAM del CEV en órbita retrograda, éste debe esperar el tiempo necesario que le tome situarse en el punto 1 del la (Fig. 4.64a). Afortunadamente en la simulación, esto no tomó demasiado tiempo. Así pues, el día 11, 14h40m22s, se aplicó el impulso transtierra definido por la ecuación (4.132). Terminado esto, es posible apreciar en los MFD's las trayectorias vistas con respecto a la Luna y a la Tierra, (Fig. 4.65).

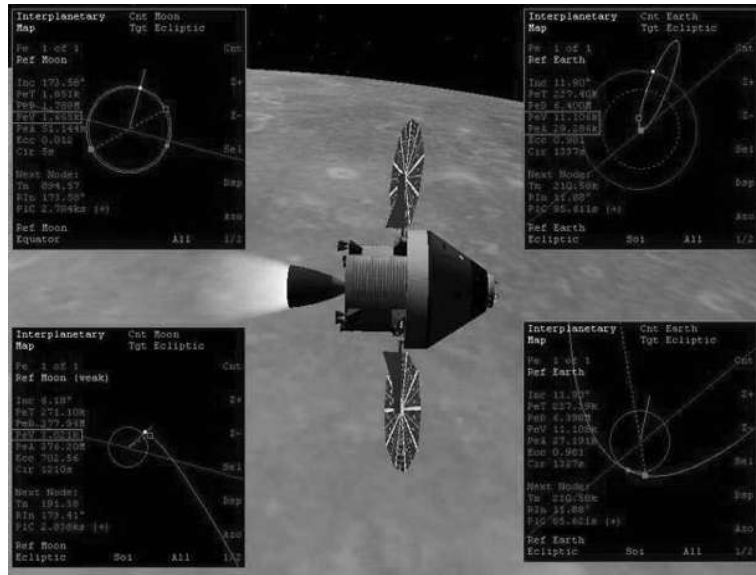


Fig. 4.65. Impulso transtierra del CEV a T+D11/14:40:22

Nótese como al igual que en el impulso translunar, el ángulo de nutación fue eliminado entre el minuto 1 y 2 que es donde se inicia el impulso transtierra, (Fig. 4.66b).

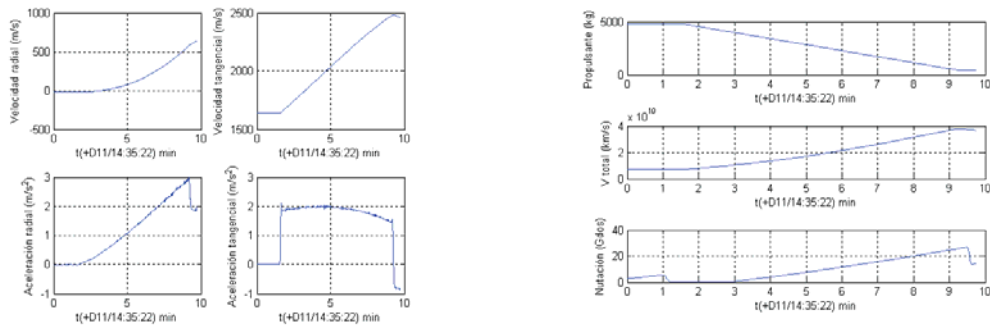


Fig. 4.66. Parámetros del impulso transtierra, (a) cinemáticos, (b) propulsante, Δv_{LT} y Nutación.

Ahí mismo, la poca cantidad restante de propulsante debe ser empleada para hacer los últimos reajustes del corredor de reingreso.

4.2.4.5. Ingreso a Tierra

Un retorno a Tierra puede ser de dos tipos, por deorbitación elíptica o hiperbólica. La primera es la que sucede cuando se está orbitando inicialmente la Tierra y se aplica un impulso en OR, tal como se hizo en el descenso lunar, con la diferencia de que en este caso, basta con que el perigeo quede dentro de la atmósfera terrestre que a su vez, debido a los efectos de fricción de la misma hará que ingrese a la Tierra (§ 4.3.2.1.1) para el retorno de la segunda fase de lanzamiento del CEV).

También éste es empleado por el sistema de transporte espacial STS. El segundo tipo de retorno es el de una hipérbola de arribo interplanetario que es análogo a la hipérbola de arribo lunar, con la excepción de que ahora, es necesario hacer un roce inicial en un punto que deberá situarse ligeramente por debajo de la atmósfera planetaria para reducir la velocidad lo suficiente para que la hipérbola sea degenerada automáticamente a una elipse sin necesidad de algún impulso. A esta maniobra se le llama Aerocaptura Asistida, y viene a suplir la maniobra de inserción orbital (que se emplea en cuerpos sin atmósfera como la Luna).

No obstante, nótese que a pesar de que la Luna está muy distante de la Tierra, y que la EIL está dentro de la EIT, un retorno a Tierra partiendo de la Luna es uno del tipo elíptico, donde, el perigeo de la elipse de transferencia deberá hacer contacto con la atmósfera para permitir el reingreso. Una vez ahí, las ecuaciones que habrían de regir el reingreso son las mismas que las tratadas para el lanzamiento, salvo que ahora habrían de ignorarse los términos que incluyan tanto sustentación L como propulsión T , estas son:

$$\begin{aligned}
m\dot{v} &= -D - mg_c \text{ Sen } \phi + mg_\delta \text{ Cos } \phi \text{ Cos } A \\
&\quad - m\Omega^2 r (\text{Cos } \phi \text{ Cos } A \text{ Sen } \delta - \text{Sen } \phi \text{ Cos } \delta) \text{ Cos } \delta \\
\dot{r} &= v \text{ Sen } \phi \\
\dot{\delta} &= \frac{v}{r} \text{ Cos } \phi \text{ Cos } A \\
&\quad - mg_\delta \text{ Sen } A + m\Omega^2 r \text{ Sen } A \text{ Sen } \delta \text{ Cos } \delta \\
&\quad - 2m\Omega v (\text{Sen } \phi \text{ Cos } A \text{ Cos } \delta - \text{Cos } \phi \text{ Sen } \delta) \\
\dot{\lambda} &= \frac{v \text{ Cos } \phi \text{ Sen } A}{r \text{ Cos } \delta} \\
m v \dot{A} \text{ Cos } \phi &= m \frac{v^2}{r} \text{ Cos}^2 \phi \text{ Sen } A \text{ Tan } \delta + f_y \\
&\quad + m\Omega^2 r (\text{Sen } \phi \text{ Cos } A \text{ Sen } \delta + \text{Cos } \phi \text{ Cos } \delta) \text{ Cos } \delta \\
&\quad + 2m\Omega v \text{ Sen } A \text{ Cos } \delta
\end{aligned} \tag{4.133}$$

Esto al menos en el caso del ingreso balístico (cápsulas), ya que para el caso de ingresos maniobrables (STS), es importante tratarlas en función de los ángulos de ataque y banqueo, lo cual conduciría a un gran conjunto de consideraciones de postura que implicarían tratar dicho problema de manera mucho más compleja.

A pesar de ello, una de las más grandes ventajas del reingreso maniobrable es que ofrece un control aerodinámico durante el reingreso, cosa que es totalmente imposibilitada por las cápsulas. Esto conllevaría a hacer un cálculo minucioso atendiendo las fechas y horarios antes del impulso transtierra para que así, quede determinado (sin control) el punto de impacto sobre la misma.

4.2.4.5.1. Corredor de Reingreso

Además de la fecha indicada para el impulso transtierra, el requisito más importante es el que se refiere a la asignación de la altura del perigeo o punto de contacto con la atmósfera terrestre, este deberá cumplir dos cosas: (1) que al momento del reingreso la carga axial (Fuerza G experimentada por el piloto) sea tolerable para la tripulación restringida dentro de los límites del G-LOC y (2), que al momento de llegar a la atmósfera planetaria, el vehículo haga (al menos) un roce inicial con la misma para reducir la velocidad y después poder ingresar inmediatamente.

Dichas consideraciones pueden ser atendidas mediante un proceso de optimización el cual asigna dos funciones sanción^[14] a las ya establecidas en las ecuaciones (4.133) que habrán de restringir para un conjunto de trayectorias dadas, aquellas que cumplan dichas funciones. Esto da como resultado, un conjunto de trayectorias muy estrechas entre sí de las cuales, la máxima y mínima permitidas definirán el corredor de reingreso aceptable para la cápsula.

En la práctica, un parámetro que ayuda bastante a la determinación de éste conjunto de trayectorias es el ajuste del perigeo antes de llegar a la Tierra, (Fig. 4.67). Suponiendo que r_{ref} es un radio de referencia de la cónica de arribo que es el instante en el cual habrán de ser determinados los parámetros iniciales de ingreso γ_0 , r_0 , v_0 de forma predictiva de modo que después de dicho punto, ya no se haga más uso de impulsos breves de corrección se tendrá que el ángulo de trayectoria de vuelo en ese instante es:

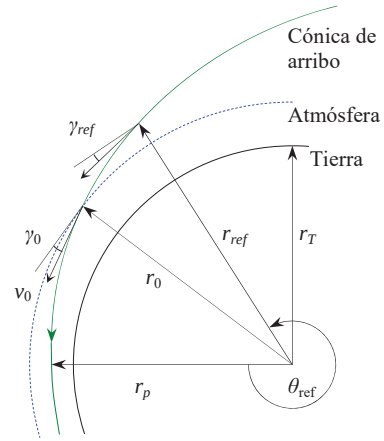


Fig. 4.67. Parámetros de aproximación al corredor de reingreso

$$\gamma_{ref} = \text{Arccos} \left[\frac{r_p}{(r_T + h_{ref})} \sqrt{\frac{r_p (a_{tr} - r_{ref})}{r_{ref} (a_{tr} - r_p)}} \right]$$

donde a_{tr} es el semilado mayor de la elipse de transferencia determinada por el impulso transtierra dado por la ecuación (4.132), y $h_{ref} = r_{ref} - r_T$ es una altura de referencia que es definida en base al proceso de optimización pues, justo después del radio atmosférico $r_A = r_0$, ya no corresponde propiamente a lo mostrado en la figura. Así pues, a partir de ese punto, la trayectoria determinada habrá de ser la descrita por las ecuaciones de movimiento (4.133) sujetas las dos restricciones mencionadas anteriormente.

4.2.4.5.1.1. Funciones de Sanción Piloto y de Altura

Suponiendo que $h_{ref} \approx 150$ km y $h_A = r_A - r_T \approx 125$ km, se tienen cuatro posibles casos para el arribo de una cápsula, (Fig. 4.68). En el caso *A* la trayectoria no tiene segmento exoatmosférico, por lo que su optimización se remite únicamente a las ecuaciones del movimiento (4.133). No obstante, los casos *B* y *C* tienen segmentos exoatmosféricos los cuales, habrán de ser optimizados empleando los principios de la mecánica orbital.

Finalmente, el caso *D* es una trayectoria de roce atmosférico la cual habrá de ser evitada totalmente. Así, el caso *C* viene a ser un límite.

Con esto, y junto con las ecuaciones (4.133), se define otra función adicional de restricción llamada, función Altura de sanción *A*:

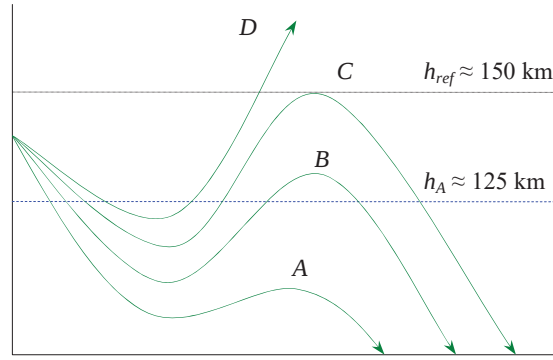


Fig. 4.68. Trayectorias de ingreso y escape

$$A(h) \doteq \int_0^T \left(\frac{\Delta h_{ref}}{h_{ref}} \right)^2 u(\Delta h_{ref}) dt$$

donde, $\Delta h_{ref} = h_{ref} - h$ es la celda de altitud, y u es la función escalón dada por:

$$u(r) \doteq \begin{cases} 0 & \text{para } r < 0 \\ 1 & \text{para } r \geq 0 \end{cases}$$

de modo que dicha restricción se habrá de satisfacer solo sí, $A(h) = 0$ ^[14].

Por otro lado, debido a que se está tratando con un vehículo tripulado, es necesario definir otra ecuación que permita restringir los valores de carga axial dentro de la región permitida del G-LOC, (Fig. 4.12). Esto es, la habilidad del piloto de permanecer usualmente consciente es una función tanto de las aceleraciones aerodinámicas que experimenta como de sus duraciones. A esta se le llama función Piloto de resistencia y está dada de forma aproximada^[18] por:

$$\tau_P(a_x) \approx \frac{67767}{10} \left(\frac{a_x}{mg_0} \right)^{-\frac{15241}{5000}}$$

donde, a_x es la aceleración adimensional experimentada por el piloto (también llamada factor de carga axial^[6]), m es la masa del vehículo y g_0 es la aceleración de la gravedad a nivel del mar. Así pues, agregando la ecuación, $\dot{P}(t) = \tau^{-1}(a_x)$ a las del movimiento, se dispone ya de las dosis de aceleración restringidas por la función G-Piloto de sanción:

$$P = \int_0^T \frac{1}{\tau(a_x)} dt$$

donde T es la duración del reingreso. Para esta, la restricción a la carga axial del piloto es que $P \leq 1$ ^[14].

4.2.4.5.1.2. Reingreso Balístico de Allen

Además de las ecuaciones del movimiento (4.133), H. Julian Allen^[6], desarrolló un conjunto muy útil de soluciones aproximadas para los vehículos balísticos con velocidad inicial y coeficientes balísticos muy elevados. Para ello se hacen las siguientes suposiciones, (1) Angulo de Ataque cero, (2) Coeficiente balístico $C_D = m/S_{ref} C_A$ constante, donde, C_A es el coeficiente de fuerza axial, (3) Gravedad cero, (4) Atmósfera homogénea con perfil exponencial (Cap1), (4) Tierra no giratoria.

Es importante mencionar que cuando la cápsula se encuentra a una altura comprendida entre $h_A = 125 \text{ km}$ y 65 km ^[6], dicha etapa se le llama incidencia inicial. En ésta, (debido a la gran velocidad del vehículo) es posible emplear la ecuación de la cónica elíptica (4.82) sujeta a efectos de perturbaciones aerodinámicas. Luego, en el lapso de entre 65 km y 15 km , ésta se encuentra en la fase de desaceleración. En esta, la fuerza de fricción es considerablemente mayor que el peso del vehículo. Finalmente por debajo de los 15 km es simplemente caída libre. Las aproximaciones de Allen se aplican a partir de la fase de desaceleración ($h < 65 \text{ km}$).

Las suposiciones (3) y (5) implican una trayectoria rectilínea y por lo tanto, ángulo de trayectoria de vuelo γ constante. Luego, la (1), (2), (3) y (5) implican dos ecuaciones:

$$\dot{v}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\rho v^2}{C_D} \quad \text{y} \quad \dot{z}(t) = -v \text{ Sen } \gamma$$

donde z es la altura geométrica y por convención $\gamma > 0$ ^[6]. Así pues, con la finalidad de resolver dicho sistema, se hace el cambio de variable:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = (-v \text{ Sen } \gamma) \frac{dv}{dz} \Rightarrow \frac{dv}{dz} = \frac{\rho v}{2C_D \text{ Sen } \gamma}$$

Al considerar la suposición (4), se asigna a la densidad ρ como una nueva variable independiente:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{H_g} \frac{dv}{d\rho} \Rightarrow \frac{1}{v} \frac{dv}{d\rho} = -K = -\frac{H_g}{2C_D \text{ Sen } \gamma}$$

donde H_g es la altura de escala que ajusta el modelo atmosférico (Cap1). Para la atmósfera terrestre, $H_g \approx 7 \text{ km}$ ^[6]. Integrando lo anterior se tiene una expresión de la velocidad en términos de la densidad del aire:

$$v(\rho) = v_0 e^{-K(\rho-\rho_0)} \approx v_0 e^{-K\rho}$$

Un parámetro adicional a la velocidad es la determinación del factor de carga axial (longitudinal) el cual es:

$$a_x = \frac{1}{2} \rho \frac{v^2}{C_D g} = \frac{v_0^2}{2C_D g} \rho e^{-2K\rho}$$

de modo que el máximo está dado por $\frac{d}{d\rho}(a_x) = 0$. Lo cual se cumple sólo si $\rho = 1/2K$, o bien, $z = H_g \ln(2K\rho_s)$ por lo tanto:

$$a_{x,\max} = \frac{v_0^2}{2gH_g} \frac{\text{Sen } \gamma_0}{e}$$

Al igual que antes, este valor debe estar comprendido por debajo de la gráfica de valores frontera al G-LOC, (Fig.4.12). Finalmente, la duración del reingreso en función de la altura se puede calcular si se conoce la velocidad vertical instantánea. Esto es, partiendo de:

$$dt = \frac{dr}{vr} = -\frac{dr}{v \text{ Sen } \gamma_0}$$

o bien:

$$\Delta t = t - t_0 = -\int_{z_0}^z \frac{dz}{v \text{ Sen } \gamma_0} = -\frac{1}{v_0 \text{ Sen } \gamma_0} \int_{z_0}^z e^{K\rho} dz$$

Empleando una atmósfera exponencial y la variable ρ en vez de z es posible tener $dz = -H_g \frac{d\rho}{\rho}$. De modo que el tiempo pueda ser escrito como:

$$\Delta t \approx \frac{H_g}{v_0 \text{ Sen } \gamma_0} \int_{K\rho_0}^{K\rho} \frac{e^{K\rho} d(K\rho)}{K\rho}$$

Notando que $x = K\rho$, la integral anterior puede ser aproximada mediante serie:

$$I(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{e^x dx}{x} \approx \left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + \dots \right]$$

es decir:

$$\Delta t \approx \frac{H_g}{v_0 \text{ Sen } \gamma_0} \left[\frac{z_0 - z}{H_g} + K\rho \left(1 + \frac{K\rho}{4} + \frac{(K\rho)^2}{18} + \frac{(K\rho)^3}{96} \right) \right]$$

4.2.4.5.2. Calor de Reingreso

Además de las funciones de sanción piloto y de altura, la otra restricción en cuestiones de diseño de cápsulas es el de atender al calor generado durante el reingreso. Como ya se mencionó antes, la mayor parte de éste deberá ser transferido al aire circundante minimizando la otra parte al que habría de transferirse convectivamente a la cápsula. Esto impone un reto en la fabricación de materiales suficientemente capaces de soportar muy altas temperaturas sin llegar al punto de fundición. Estos constituyen el Sistema de protección térmica (TPS) compuesto por un conjunto de losetas propiamente dispuestas en la cara frontal de la cápsula (en el STS se ubican en la parte inferior del vehículo).

La razón de transferencia de calor del medio externo al interior de la cápsula está dada por la ecuación (4.43):

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{4} \rho v^3 S C_f$$

mientras que el flujo de calor convectivo en el punto de estagnación (flujo laminar) está dado por^[6], $\Phi = C \sqrt{\rho/R_N} v^3$, o bien en términos de la razón de transferencia de calor:

$$\Phi = C \sqrt{\frac{2}{\rho R_N}} \frac{\dot{Q}(t)}{S C_f}$$

donde R_N es el radio de curvatura del escudo térmico y C es una constante que depende de la composición atmosférica planetaria ($C_{\text{Tierra}} = 1.83 \times 10^{-4} \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-1} [6]$). Así pues, el flujo máximo de calor es alcanzado cuando:

$$\frac{d}{d\rho}(\sqrt{\rho}e^{-3K\rho}) = 0$$

Lo cual se cumple sólo si $\rho = 1/6K$ o bien, $z = H_R \ln(6K\rho_s)$. Por lo tanto, el valor máximo correspondiente es:

$$\Phi_{\max} = C \frac{v_0^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{C_D \text{ Sen } \gamma_0}{3eH_g}}$$

Nótese que el flujo de calor máximo no solo es una función de la velocidad inicial y del ángulo de trayectoria de vuelo, sino también del coeficiente balístico y del radio del frente de nariz. Así, los vehículos con altos coeficientes balísticos y con radios de nariz pequeños conllevan a flujos de calor considerables, tal como fue mostrado en las primeras secciones. Por lo tanto, la relación entre la temperatura de radiación y el flujo de calor máximo es:

$$T_{\max}^r = \sqrt[4]{\frac{\Phi_{\max}}{e_m \sigma}}$$

donde σ es la constante de Stefan Boltzman y $e_m (\approx 1)$ la emisividad. Por otro lado, la temperatura superficial debida al calor de convección en las losetas habrá de estar dado en función de la constante de conductividad térmica del material con el cual han sido fabricadas:

$$T_{\max} - T_{\min} = \delta T = C_{f_c} \frac{\Phi_{\max} \delta x}{k} \sqrt{\frac{\rho R_N}{2}}$$

donde $C_{f_c} = C_f / C$ y δx es el espesor de las losetas térmicas.

Suponiendo que la diferencia inicial de temperaturas conductivas de las losetas es $\delta T_i = 0^\circ \text{C}$, entonces, la temperatura máxima de conducción en la superficie externa estará dada en términos del flujo máximo $\Phi_{\max}$ en el instante en el cual ocurre y por lo tanto, la última restricción para un reingreso favorable es que durante la fase de desaceleración, se tenga $T_{\max}^c \ll T_{\text{fundición}}^c$ [6].

Esta última temperatura obviamente dependerá del valor de fundición del material con el cual han sido fabricadas las losetas térmicas. Usualmente éstas son elaboradas a base de carbono reforzado, materiales cerámicos entre otros.

4.2.4.6. Simulación Controlada del reingreso a Tierra

La cantidad de propulsores restante puede ser empleado para realizar los últimos ajustes del corredor de reingreso y del flanco de latitud de arribo terrestre. Una vez adquirida la información de los procesos de reingreso atendiendo a las restricciones tratadas anteriormente, se llega a la conclusión de que éste deberá estar dado para un perigeo de reingreso de 31.5 km de altura con una altura de referencia de 150 km.

Así pues, antes de llegar a esta posición (~ 600 km de altura), es liberada la cápsula de reingreso del módulo de servicios, con la altura del perigeo ya ajustada previamente, (Fig. 4.69a). No obstante, debido a que el modelo de la cápsula de reingreso original presentaba irregularidades en su tensor de inercia durante el reingreso, hice uso (únicamente durante el reingreso) del modelo propuesto por la Agencia Espacial Europea denominado “pegasuss” el cual puede ser descargado gratuitamente de la web.

Así pues, la cápsula es orientada a un ángulo de ataque cero (escudo térmico en dirección a la velocidad), y basta esperar a que dicho vehículo ingrese sujeto a los cálculos previamente predcidos por el método de optimización hasta culminar con un descenso suave y amarizaje sobre el océano pacífico, (Fig. 4.69b-d).

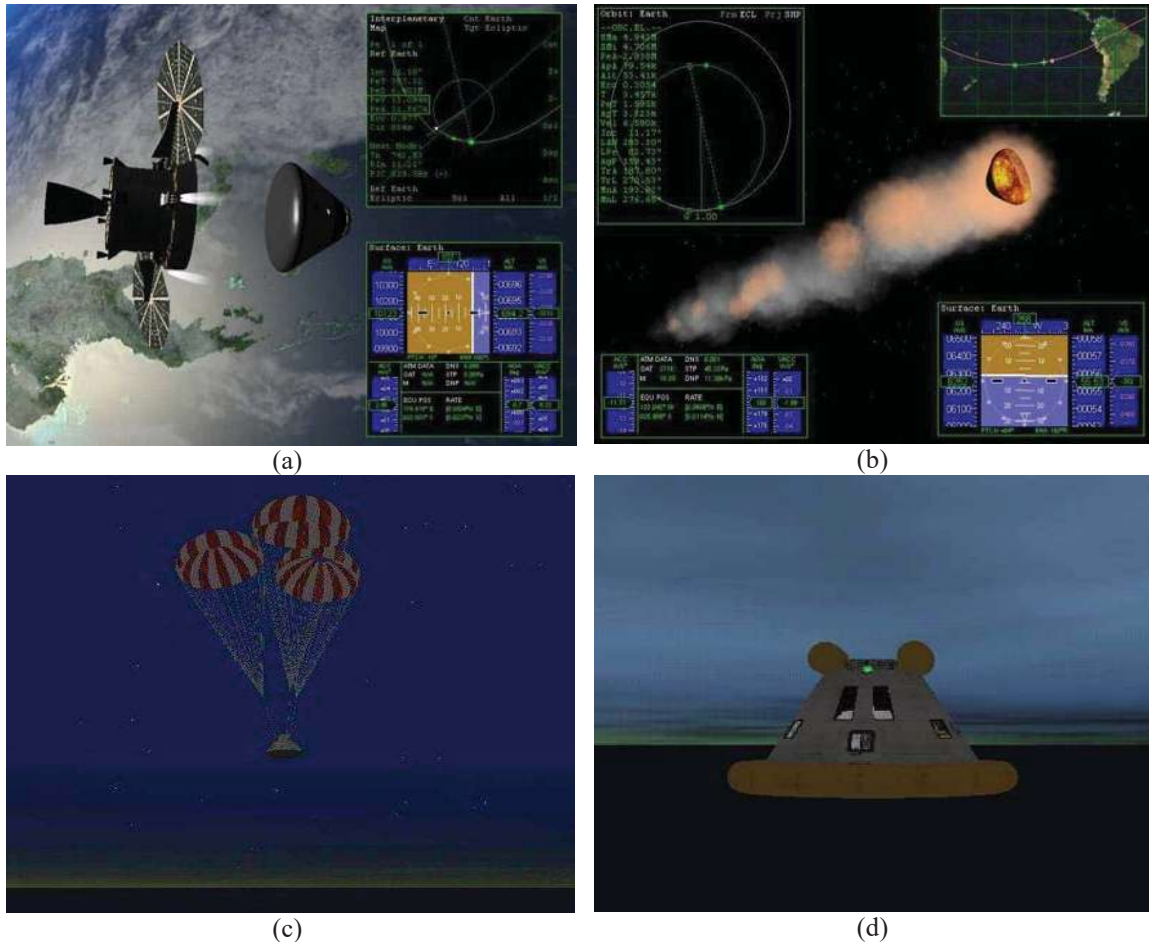


Fig. 4.69. (a) Liberación de Cápsula a T+D14/02:32:11, (b) Reingreso a T+D14/02:48:23, (c) Paracaídas a T+D14/02:53:09, (d) Amarizaje del CEV a T+D14/02:58:49

Como es posible ver, éste ingreso no tiene segmento exoatmosférico, por lo que es del tipo A, (Fig. 4.70a). El primer pico en la fricción representa un roce con la atmósfera y por lo tanto, una desaceleración considerable. El segundo es el ingreso definitivo a la atmósfera y los dos últimos, son de los paracaídas. Una cápsula promedio está diseñada

para soportar valores: $\Phi_{\max} \approx 2150 \text{ kW/m}^2$ y $T_{r,\max} \approx 507 \text{ }^\circ\text{C}$ (Ref. European Space Exploration Programme, ESA. *Crew Transfer Vehicle Pegasse*, 9 pp. 2007).

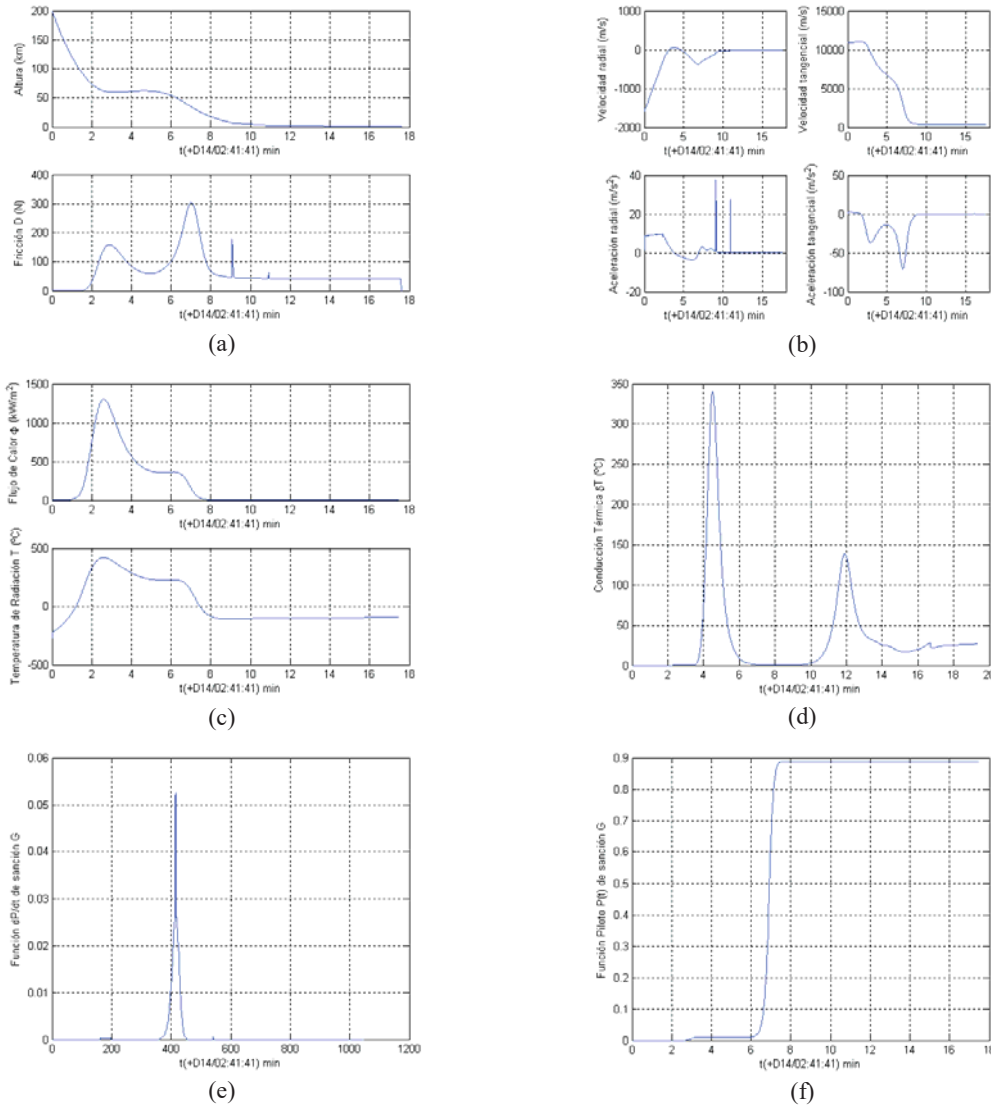


Fig. 4.70. Parámetros de reingreso balístico, (a) Altura y Fricción, (b) Cinemáticas, (c) Flujo de calor y temperatura, (d) Conducción térmica, (e) Función Piloto dP/dt y (f) Función Piloto P de sanción G .

Con eso en mente, es posible apreciar mediante los datos generados por el simulador los cuales permanecen por debajo de dichos valores, (Fig. 4.70c). Del mismo modo, el integrando de la función de sanción piloto dP/dt cuya integral P (área bajo la curva), debe

ser $P \leq 1$ lo cual también se cumple, (Fig. 4.70e-f), alcanzando un valor aproximado de $P \approx 0.889$ mientras que A siempre es cero en todo valor para h .

4.3. Generalización Interplanetaria.

Todos los principios previos aplicados a la transferencia orbital de la Tierra a la Luna que corresponden a las leyes de la Mecánica orbital y optimización de trayectorias en transiciones atmosféricas y transatmosféricas, pueden ser generalizados a transferencias interplanetarias salvo que ahora, las órbitas de transferencia habrían de ser Heliocéntricas (con referencia al Sol), las cuales pueden ser de dos tipos, superiores o inferiores. Las primeras están dadas en transferencias de una órbita de un radio menor a uno mayor (ejemplo, Tierra a Marte, Júpiter, etc.), y las segundas de modo recíproco.

4.3.1. Descripción del proyecto MFL

El propósito de este proyecto es el de enviar la primer misión tripulada a Marte la cual fue propuesta por Grant Bonin^[13] en 2003 como una variante de su progenitora “Mars Direct” propuesta por el Dr. Robert Zubrin cuya finalidad es la de minimizar el costo de ésta misma. Ambos casos contemplan la idea principal de enviar un primer vehículo ERV no tripulado a la superficie marciana que habría de permanecer alrededor de dos años procesando el CO_2 del planeta para generar oxígeno y combustible en una planta química dentro del mismo vehículo. Después de dos años, se envía un segundo vehículo MTSV tripulado por 4 astronautas. Durante su recorrido, éste vehículo junto con la última fase comenzarían a girar con la ayuda de una atadura para generar gravedad artificial durante el recorrido. Una vez llegando a su destino, el MTSV libera la atadura para ingresar a Marte. Después, para el regreso, los astronautas abordarían el primer vehículo ERV que se envió primero el cual habría de tener ya, suficiente oxígeno procesado para el regreso a Tierra.

A pesar de la simplicidad del problema, existen otras restricciones que imposibilitan una misión de tal magnitud. Unas de ellas son los efectos psicológicos al que la tripulación habría de someterse al permanecer por periodos prolongados dentro de en un

vehículo estrecho durante el viaje a la vez que debería contar con aislamientos suficientemente capaces de proteger a la tripulación de los rayos cósmicos así como de las radiaciones debidas al viento solar. No obstante, en seguida se da una extensión para un análisis del proceso despreciando tales efectos con la finalidad de proporcionar las herramientas teóricas para comprender la generalización de los principios de la mecánica orbital en transferencias interplanetarias.

4.3.2. Transferencia orbital Tierra-Marte

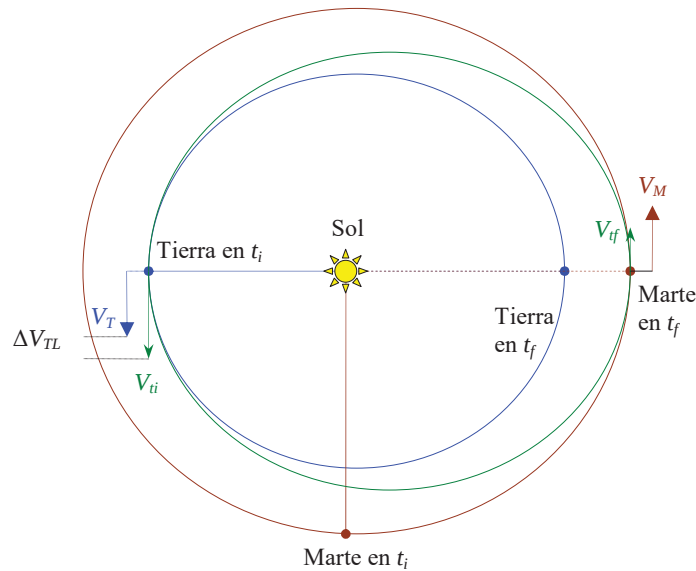


Fig. 4.71. Transferencia Interplanetaria Tierra a Marte

Al igual que en la transferencia Tierra-Luna, el caso de la transferencia de la Tierra a Marte resulta análoga en el sentido de que se pretende generar una órbita elíptica de transferencia heliocéntrica interplanetaria de la Tierra a Marte del tipo Hohmann, (Fig. 4.71). Esto es válido siempre y cuando se haga la suposición de que las órbitas de ambos planetas sean coplanares lo cual como primera aproximación es válido, (Apéndice^[A6]). Así pues, (denotando con mayúsculas las cantidades relativas al sol, “heliocéntricas” y las minúsculas relativas a los planetas, “planetocéntricas”), el impulso necesario ΔV_{TM} que debe ser aplicado en el perihelio de transferencia heliocéntrica es^[21]:

$$\Delta V_{TM} = V_{t_i} - V_T \quad (4.134)$$

donde, V_T es la velocidad heliocéntrica orbital de la Tierra con respecto al Sol, y V_t es la velocidad de la órbita de transferencia la cual es:

$$V_{t_i} = \sqrt{\frac{2\mu_S}{R_{T_i}} \left(\frac{R_{M_f}}{R_{T_i} + R_{M_f}} \right)} \quad (4.135)$$

y cuyos índices indican a que cuerpo planetario pertenecen, Tierra o Marte así como los instantes inicial y final. Además, μ_S es la constante gravitacional solar.

El hecho de tratar con instantes t_i y t_f es debido a las órbitas planetarias las cuales, no son exactamente circulares. Es por eso que mediante el uso del AAEN se buscan fechas favorables para una transferencia de este tipo con un ΔV_{TM} mínimo, esto es, de modo que ambos planetas se sitúen muy cerca de sus perihelios respectivos. Esto ocurre aproximadamente cada dos años terrestres (un año marciano). Así que la duración del recorrido sería de alrededor de 6 meses.

No obstante, debido a que dicha transferencia es de una esfera de influencia a otra separadas por una gran distancia, (Tierra y Marte), la aproximación de enlazado cónico aplica de forma análoga a la tratada para los impulsos transtierra y arribo lunar pero ahora para el impulso transmarte y el arribo en sistemas de referencia situados en la Tierra y Marte respectivamente. Así que en los extremos de la elipse de transferencia que hacen contacto con los planetas, en realidad, se disponen de trayectorias hiperbólicas de escape y arribo planetario respectivamente.

4.3.2.1. Hipérbolas de escape Terrestre y arribo a Marte

Supóngase que inicialmente se orbita circularmente a la Tierra con una velocidad v_c^T en OD. Ahí, se debe generar una hipérbola deflectada asintóticamente paralela al vector de velocidad de la Tierra^[21]. Para esto hay dos casos (al menos en el mismo plano orbital inicial), el otro corresponde al de una OR, (Fig. 4.72a).

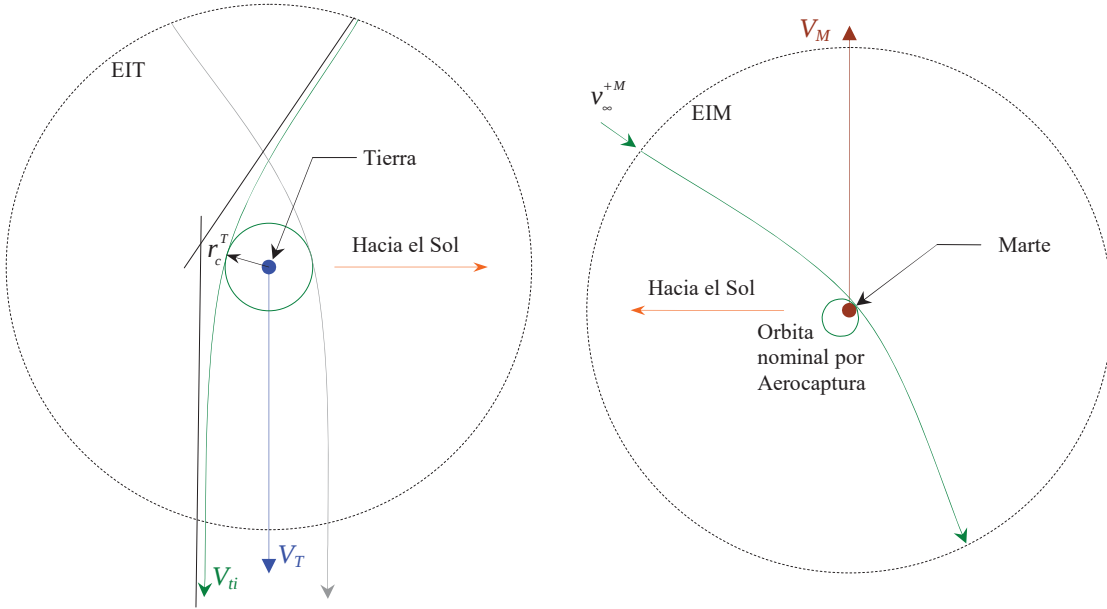


Fig. 4.72. Trayectorias hiperbólicas de, (a) Escape Terrestre y (b) Llegada a Marte

Luego, la velocidad de exceso hiperbólico debería ser, $v_{\infty}^{-T} = \Delta V_{TM}$. Por otro lado, para generarla, es necesario que en el perigeo de la hipérbola haya una velocidad:

$$\left(v_{Hp}^T\right)^2 = \left(v_{\infty}^{-T}\right)^2 + \left(v_{esc}^T\right)^2$$

donde v_{esc} la velocidad de escape. Por lo tanto, la cantidad de velocidad que debe aplicarse para una transferencia interplanetaria de la Tierra a Marte desde el sistema geocéntrico es:

$$\Delta v_{TM}^T = v_{Hp}^T - v_c^T = \sqrt{(V_{t_i} - V_T)^2 + (v_{esc}^T)^2} - v_c^T \quad (4.136)$$

donde, V_{t_i} está dada por la ecuación (4.135). Nótese que esta expresión es análoga a la ecuación (4.132), salvo que ahora el ángulo formado por los vectores en el diagrama velocidades es cero.

Además, debido a que la inclinación relativa de los planos orbitales heliocéntricos de la Tierra y Marte es casi cero (están casi en el mismo plano de la eclíptica solar), es conveniente utilizar el problema de Lambert de modo conjunto con el AAEN, para determinar el instante más adecuado que favorezca al impulso transplanetario dado por la ecuación (4.136) en una órbita de plano distante (Cap2). Por otro lado, la hipérbola de escape en realidad, puede ser generada a partir de cualquier inclinación geocéntrica, ya que en tres dimensiones esto en realidad es una Envolvente Hiperbólica de Apertura (Cap2), no obstante, aquí se tratará dentro de un mismo plano.

Después que el vehículo haya recorrido casi toda la elipse de transferencia heliocéntrica generada por la ecuación (4.136), (Fig. 4.71) éste se aproximará a la EIM, (Fig.4.72b) después de su recorrido. Suponiendo ya hechas (de modo similar que para el arribo lunar), las dos correcciones de la altura perimarte y del flanco latitudinal de arribo, el diagrama de velocidades nuevamente aplica para éste caso, de modo que la velocidad hiperbólica de arribo a Marte es:

$$v_{\infty}^{+M} = \sqrt{V_M^2 + V_{t_f}^2 - 2V_M V_{t_f} \cos\left(\frac{\delta_M^+}{2} + \Phi_M^+\right)}$$

donde:

$$V_{t_f} = \sqrt{2\mu_s \left[R_{t_f}^{-1} - \left(R_{t_i} + R_{M_f} \right)^{-1} \right]}$$

Al igual que antes, la velocidad que llevaría en el punto perimarte es:

$$v_{Hp}^M \approx \sqrt{\left(v_{\infty}^{+M}\right)^2 + \left(v_{esc}^M\right)^2}$$

la cual ciertamente sería solo una aproximación pues, se pretende situar el punto perimarte por debajo de la frontera atmosférica para aprovechar la fricción de la misma y reducir la velocidad hasta alcanzar una órbita con un semilado mayor nominal a_n .

Disponiendo de información suficientemente detallada sobre un modelo atmosférico de Marte, se aplica un proceso de optimización de trayectorias utilizando la ecuación (4.133), de forma análoga como lo fue para el reingreso atmosférico a Tierra, pero para predecir en éste caso, un llamado corredor de inserción orbital que permita determinar una vez finalizada la aerocaptura, la órbita nominal deseada v_n^M donde la única restricción ahora es que la cantidad, $2a_n = r_p^M + r_a^M$ sea tal que $r_a^M > r_A^M$, mientras que $r_p^M \approx r_A^M$ o r_M . Por lo tanto, la cantidad de velocidad que debe ser reducida durante la aerocaptura es:

$$\Delta v_{Ac}^M = v_n^M - v_{Hp}^M \approx v_n^M - \sqrt{V_M^2 + V_{t_f}^2 - 2V_M V_{t_f} \cos\left(\frac{\delta_M^+}{2} + \Phi_M^+\right) + \left(v_{esc}^M\right)^2} < 0$$

donde:

$$v_n^M = \sqrt{2\mu \left[\left(r_A^M\right)^{-1} - \left(2a_n\right)^{-1} \right]}$$

es la velocidad nominal del vehículo justo en el instante en el cual cruza la frontera atmosférica de radio r_A^M después de la aerocaptura. Dependiendo del diseño del vehículo, el disponer de una sección de área transversal grande del escudo de ingreso, facilita la aerocaptura al menos con un solo paso por la altura perimarte. De no ser así, es necesario

transitar varias veces por dicho punto para degenerar la cónica gradualmente hasta lograr la forma deseada. Dicha maniobra fue realizada por la sonda espacial, Mars Odyssey en 2001. Después de la aerocaptura, el vehículo se encontrará en una posición orbital $r^M < r_a^M$, por lo que ahora basta esperar su paso por el apomarte para generar un levantamiento perimarte mediante un impulso breve (utilizando únicamente el sistema de postura lineal) para tener un $r_p^M > r_A^M$ y finalizar así, la inserción orbital.

Análogamente, un impulso de retorno a Tierra o impulso transtierra, es similar al impulso transmarte, con la excepción de que ahora la asíntota hiperbólica de velocidad de escape marciano debe ser opuesta al vector de velocidad de Marte, esto debido a que la transferencia interplanetaria es inferior. Así pues, partiendo de una órbita casi circular alrededor de Marte con velocidad v_c^M , se tiene que la cantidad de velocidad necesaria para la transferencia es:

$$\Delta v_{MT}^M = v_{Hp}^M - v_c^M = \sqrt{(V_M - V_{\tau_i})^2 + (v_{esc}^M)^2} - v_c^M \quad (4.137)$$

donde ahora, V_{τ_i} es la velocidad inicial en el afelio de la elipse de transferencia la cual es:

$$V_{\tau_i} = \sqrt{\frac{2\mu_s}{R_{M_i}} \left(\frac{R_{T_i}}{R_{M_i} + R_{T_f}} \right)}$$

4.3.2.2. Optimización de Trayectorias Interplanetarias

Después de aplicar un impulso de transferencia interplanetaria (Fig. 4.60), el vehículo se encontrará relativamente cerca del cuerpo que orbitaba inicialmente. Como resultado, una vez aplicados los impulsos dados por las ecuaciones (4.136) o (4.137), y después de transcurrido un tiempo prolongado t , la trayectoria de transferencia sería ligeramente desviada de la inicial en el sistema heliocéntrico, no así en el sistema planetocéntrico de arriba (Marte), en el cual, dicha desviación sería enorme así como muy sensible a

cualquier desviación, de modo que si no se hicieran correcciones posteriores durante ese tiempo t , la trayectoria cruzaría al menos por la esfera de influencia del planeta objetivo, pero desviada del mismo por una gran distancia, lo cual imposibilitaría una eventual aerocaptura asistida.

Para evitar esto, debe aplicarse alguna optimización a la trayectoria interplanetaria. La más común es la que trata un problema de dos cuerpos perturbado uno de ellos por un tercero. De este modo, el Sol sería el cuerpo primario, el vehículo el secundario y la Tierra el tercer cuerpo que perturba la trayectoria del secundario (vehículo).

4.3.2.2.1. Perturbación del Tercer Cuerpo

Dado que esta trayectoria es una cónica perturbada, es posible emplear la ecuación (4.81) donde ahora, $\mathbf{a}_d$ es la aceleración perturbadora sobre la masa m_2 . Dicha expresión habrá de ser integrada numéricamente por algún método apropiado.

Los más comunes son dos, el método de Cowell y el de Encke. El primero consiste simplemente en integrar numéricamente el siguiente par de ecuaciones diferenciales^[2], $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}$ y $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{a}_d - \mu_S \dot{\mathbf{R}}/R^3$, donde $\mathbf{R}$ y $\mathbf{V}$ son el radio vector y la velocidad del secundario con respecto al Sol. Considerando a la Tierra como el cuerpo perturbativo se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} &= -\frac{\mu_S}{R_v^3} \dot{\mathbf{R}}_v - \mu_T \left[\frac{\mathbf{r}_v}{r_v^3} - \frac{\mathbf{R}_T}{R_T^3} \right]\end{aligned}$$

donde, los subíndices v , T y S denotan los tres cuerpos respectivos a los que se hace referencia como vehículo, Tierra y Sol respectivamente, sin olvidar que, las mayúsculas denotan el sistema heliocéntrico mientras que las minúsculas el geocéntrico. La ventaja de éste método es su simplicidad. Sin embargo, cuando el movimiento del vehículo se da en las cercanías de un cuerpo masivo, los incrementos de integración deben ser tomados con

mucho cuidado, debido a ciertos errores que se acumulan durante la integración, lo cual implica que éste método no sea muy recomendable.

El otro método (de Encke), es mucho más eficiente y rápido que el de Cowell. En este, se parte del hecho de disponer inicialmente de una órbita osculante u órbita ideal^[2] la cual se obtiene de suponer la ausencia total de cualquier cuerpo perturbador, es decir, $\mathbf{a}_d = 0$. Luego, ésta trayectoria es aceptable hasta que la órbita real se desvía considerablemente de ella.

Entonces debe aplicarse un proceso de rectificación para continuar con la integración, lo cual implica que, se dispondrá de una posición y velocidad actualizadas que definirán a su vez, una órbita osculante nueva, y se sigue así de forma iterativa, hasta llegar al objetivo (Marte). Con esto, sean $\mathbf{R}$ y $\mathcal{R}$ los radios vectores de las órbitas real y osculante respectivamente en un instante en particular $\Delta t = t - t_0$. Entonces, sus ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu_S}{R^3} \mathbf{R} &= \mathbf{a}_p \\ \ddot{\mathcal{R}} + \frac{\mu_S}{\mathcal{R}^3} \mathcal{R} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.138}$$

Nótese que en $t_0 = 0$, $\mathbf{R}(t_0) = \mathcal{R}(t_0)$ y $\mathbf{V}(t_0) = \dot{\mathcal{R}}(t_0)$. Sea ahora $\delta\mathbf{R}$ la desviación de la órbita osculante (Fig. 4.73), definida como:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R} &= \mathbf{R} - \mathcal{R} \\ \delta\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathcal{R}}\end{aligned}\tag{4.139}$$

Sustituyendo la ecuación (4.138) en la ecuación (4.139):

$$\delta\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_p + \left(\frac{\mu}{\mathcal{R}^3} \mathcal{R} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{R} \right) = \mathbf{a}_p + \frac{\mu}{\mathcal{R}^3} \left[\left(1 - \frac{\mathcal{R}^3}{R^3} \right) \mathbf{R} - \delta\mathbf{R} \right]\tag{4.140}$$

Para un conjunto de condiciones iniciales dadas, es posible calcular numéricamente la desviación $\delta \mathbf{R}(t_0 + \Delta t)$. Por otro lado, $\mathcal{R}$ es una función conocida del tiempo, así que $\mathbf{R}$ puede ser obtenida de $\delta \mathbf{R}$ y $\mathcal{R}$. Nótese que el término $(1 - \mathcal{R}^3/R^3)$, es una diferencia de cantidades casi iguales, por lo que se requiere de una gran cantidad de dígitos extra para la precisión. Un método estándar para tratar dicha diferencia es definir, $2q \doteq q - R^2/\mathcal{R}^2$ de la cual:

$$R^2/\mathcal{R}^2 = 1 - 2q \quad (4.141)$$

que al ser sustituida en la ecuación (4.140):

$$\delta \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_d + \frac{\mu_s}{\mathcal{R}^3} \left\{ \left[1 - (1 - 2q)^{-3/2} \right] \mathbf{R} - \delta \mathbf{R} \right\}$$

Luego:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (\mathcal{R}_X + \delta X)^2 + (\mathcal{R}_Y + \delta Y)^2 + (\mathcal{R}_Z + \delta Z)^2$$

Expandiendo lo anterior, dividiendo entre $\mathcal{R}^2$, y sustituyendo la ecuación (4.141) se tiene:

$$q = -\frac{1}{\mathcal{R}^2} \left[\delta X \left(\mathcal{R}_X + \frac{1}{2} \delta X \right) + \delta Y \left(\mathcal{R}_Y + \frac{1}{2} \delta Y \right) + \delta Z \left(\mathcal{R}_Z + \frac{1}{2} \delta Z \right) \right] \quad (4.142)$$

De modo que una vez conocidas $\mathcal{R}$ y $\delta \mathbf{R}$, es posible calcular q . Sin embargo, aún existe el problema de diferencias muy pequeñas, por lo que una forma conveniente es la expansión del término $(1 - 2q)^{-3/2}$ en una serie binomial^[2]:

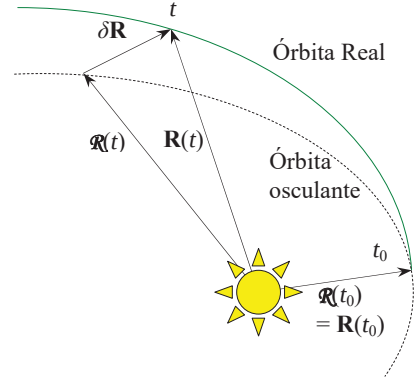


Fig. 4.73. Desviación orbital

$$1 - (1 - 2q)^{-3/2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{q^n}{n!} \prod_{k=1}^n (2k+1) \quad (4.143)$$

Finalmente, el algoritmo para el método de Encke es^{[2][9]}: (1) Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}(t_0)$ y $\mathbf{V}(t_0) = \dot{\mathbf{R}}(t_0)$, definir la órbita osculante, $\delta\mathbf{R} = 0$ y $\delta\mathbf{R} = 0$ en ese punto. (2) Para un incremento Δt de integración, conociendo $\mathbf{R}(t_0)$, $\mathbf{R}(t_0)$, $q(t_0) = 0$, calcular la desviación $\delta\mathbf{R}(t_0 + \Delta t)$. (3) Con la desviación anterior, calcular, $\mathbf{R}(t_0 + \Delta t)$, $q(t_0 + \Delta t)$ mediante (4.142) y con este, el término de la expresión (4.143). (4) Integrar otro Δt para conseguir un $\delta\mathbf{R}(t_0 + \Delta t)$. (5) si $\delta R/\mathcal{R} >$ una constante específica, rectificar e ir al paso (1). De otro modo continuar. (6) Calcular $\mathbf{R} = \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}$ y $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} + \delta\dot{\mathbf{R}}$. (7) Ir al paso (3) sustituyendo Δt por $k\Delta t$ donde k es el número del incremento.

4.3.2.3. Simulación Controlada de una transferencia Tierra-Marte

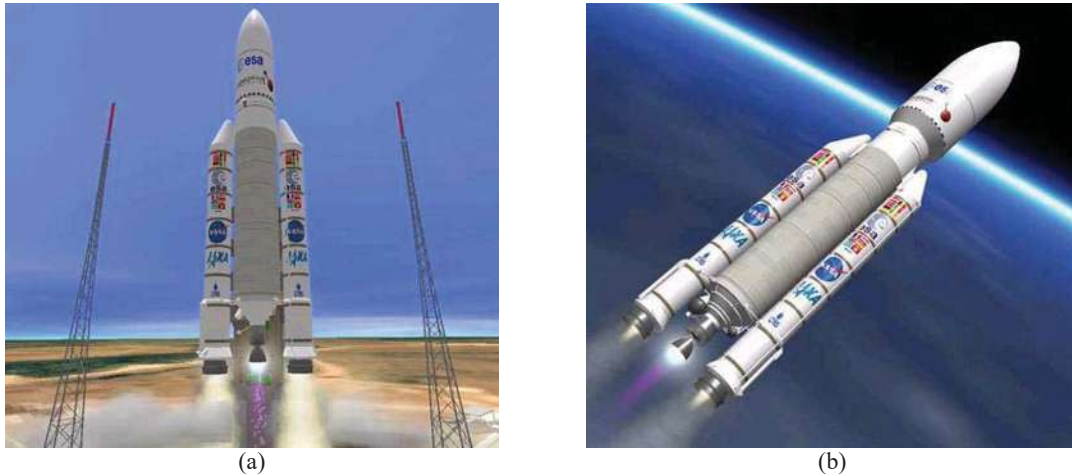


Fig. 4.74. Lanzamientos del (a) Ariane 5 y (b) variante del Ariane 5

El principal objetivo del proyecto MFL es primero, realizar una serie de lanzamientos desde el centro espacial Kourou de la Guyana francesa utilizando sistemas de transporte espacial como el Ariane 5 reuniendo colaboración de todas las agencias espaciales del mundo entero, (Fig. 4.74).

la EIT tiene un radio bastante grande, y esta idea representa una opción económica en cuanto al propulsante requerido. Por lo tanto, el impulso transmarte es fraccionado como:

$$\Delta v_{TM}^T = \sum_{n=1}^4 \Delta v_n = \sum_{n=1}^4 v_n - v_{n-1}$$

donde $v_0 = \sqrt{\mu/r_p}$ es la velocidad inicial en la órbita circular, y $v_4 = v_{Hp}^T$ la velocidad hiperbólica de apertura interplanetaria.

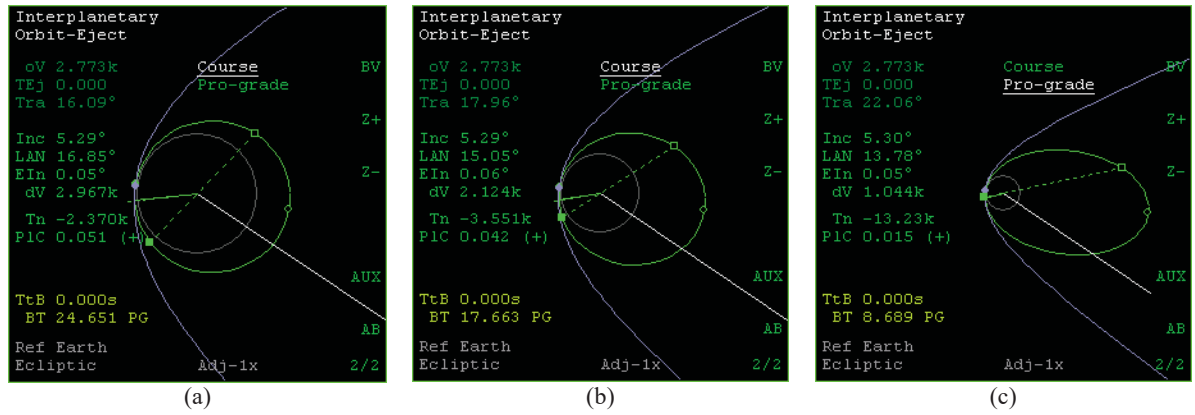


Fig. 4.76. Incrementos de velocidad aplicados por (a) la etapa 1 en el instante t_1 , (b) la etapa 2 en el instante t_2 y (c) la etapa 3 en el instante t_3

Estos impulsos son aplicados en los instantes $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, que corresponden a los cuatro pasos por el perigeo. Así, aplicados los tres primeros impulsos, (Fig. 4.76a-c), el cuarto será definitivo para el impulso transmarte, (Fig. 4.77a).

No obstante, éste no podrá ser ajustado apropiadamente debido a la alta sensibilidad que hay por la perturbación de la Tierra, por lo que es conveniente dejarlo a un valor aproximado. Después, el par de vehículos (ya sin impulso) transitan hasta los confines de la EIT. Una vez fuera de ahí, se hacen las correcciones atendiendo a la optimización de trayectorias para su perturbación del tercer cuerpo tal como se vio para el método de Encke.



Fig. 4.77. (a) Impulso Transmarte de la etapa 4 en el instante t_4 ,
(b) rotación del MTSV con la etapa 4 para generar G artificial

Estas deberán contemplar también el flanco latitudinal de arribo marciano el cual, considerando que en la región de Marte donde está el ERV es en Vallis Dao cuya latitud es 32.94° S, y se desea entrar en OR, entonces el indicador EqI del MFD deberá ajustarse a un valor más acercado de $(180^\circ - 32.94^\circ =) 147.06$. Del mismo modo, la altura perimarte, para una aerocaptura deberá ser aproximadamente de unos 41.1 km.

Terminado lo anterior, llega el momento de desenvolver una atadura de la etapa 4 de propulsión la cual, permitirá que ambos vehículos giren y así, generar G artificial para la tripulación, (Fig. 4.77b). La duración del viaje se estima es de unos 6 meses, por lo que una vez transcurrido este tiempo, antes de ingresar a la EIM, el MTSV se libera de la atadura que lo une con la fase 4 y se vuelven a realizar los dos ajustes de arribo.

Una vez dentro de ella, se hace un refinamiento de los valores (Fig. 4.78a), y se extiende el escudo térmico. Este permitirá junto con los efectos aerodinámicos de Marte, una degeneración de la hipérbola de arribo a una órbita nominal (Fig. 4.78b). Después, en su paso por el apomarte se hace un ajuste de altura perimarte por encima de la atmósfera marciana ($h_p \approx 100$ km).

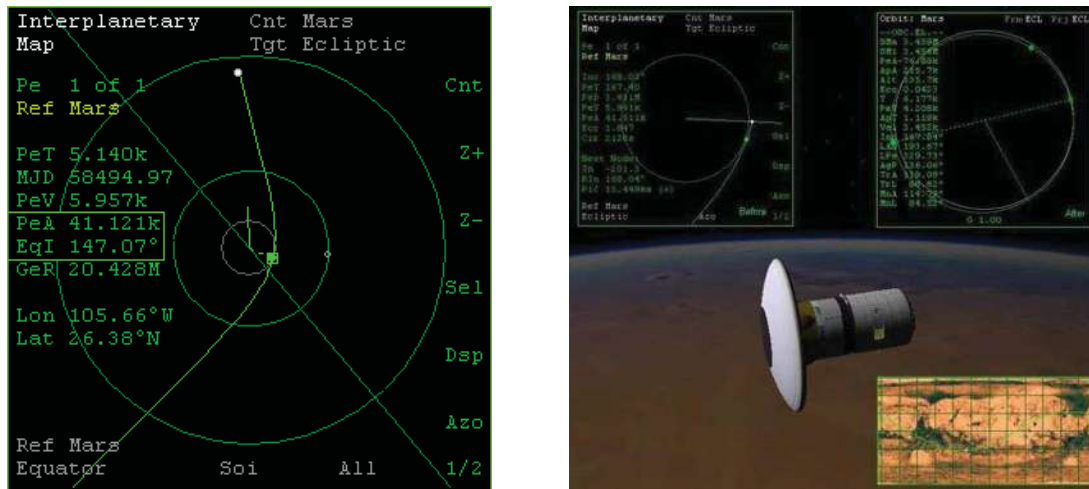


Fig. 4.78. (a) Ajuste de altura perimarte e Inclinación ecuatorial de Marte, (b) Aerocaptura

En ese momento el MTSV se encuentra ya en órbita marciana. Nótese como la inclinación orbital permite un descenso a su paso por Vallis Dao (Circulo inferior de la figura 4.78b), de modo que en el instante en que el MTSV se encuentre en un punto cuyo lado opuesto de su órbita esté muy cerca (por encima) del punto de descenso, entonces, éste deberá aplicar un impulso en OR para la deorbitación. Sin embargo, una vez llegando cerca del punto de ingreso, debido a que la densidad atmosférica de Marte no lo es tanto como la de la Tierra, el descenso habrá de combinar parte de los dos tratados para la Luna y para la Tierra simultáneamente.

Así pues, conforme el MTSV se aproxima al punto de descenso, la velocidad tangencial disminuye considerablemente debido a la fricción generada por el gran escudo térmico, (Fig. 4.79a). En seguida, a 50 km de altura, con paracaídas de 15m de diámetro, continúa la reducción de velocidad tangencial, pues, éste cae a un ángulo de ataque de 45°, (Fig. 4.79b). A 10 km de altura, se extiende un segundo paracaídas de 20m para continuar la reducción de la velocidad tangencial pero ahora a una razón mayor que la anterior, (Fig. 4.79c). Después, ya muy cerca de la superficie, éste es liberado y se inicia una ignición vertical para controlar un descenso suave, (Fig. 4.79d) y finalmente, un amortizaje (Fig. 4.79e).

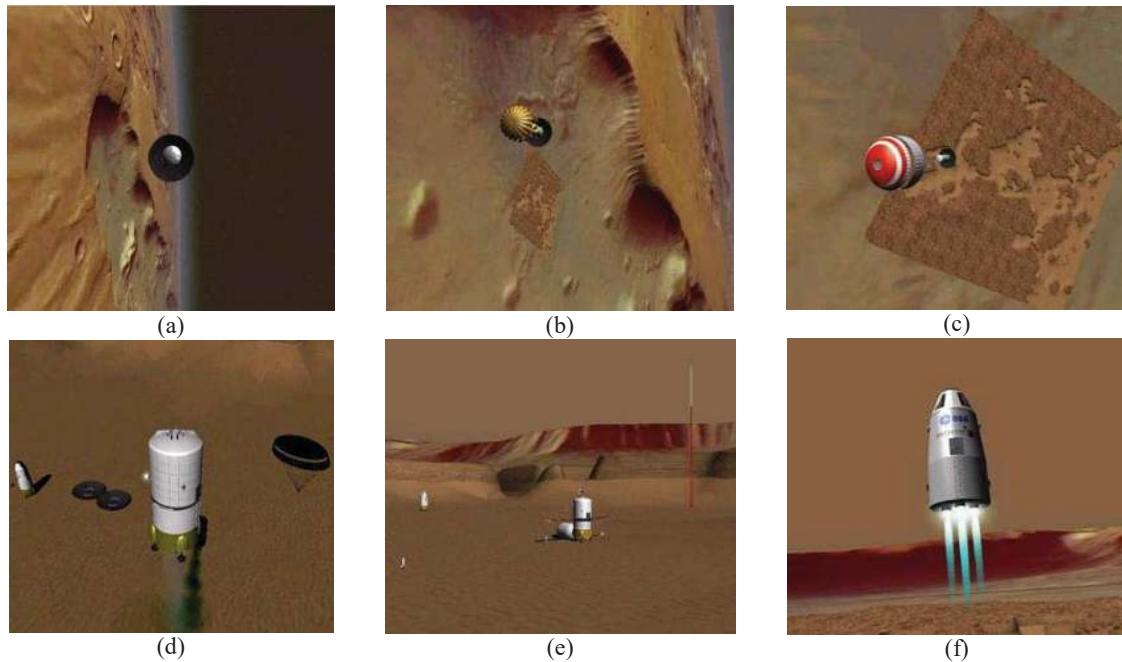


Fig. 4.79. (a) Descenso del MTSV, (b) Paracaídas de 15m de diam. (c) Paracaídas de 20m de diam. (d) paracaídas liberados e ignición vertical para el descenso, (e) Hombres en Marte. Nótese la presencia del ERV, (f) Ascenso del ERV para el retorno a Tierra.

Hasta aquí, toda la secuencia anterior habría sido ya aplicada de forma similar para el ERV, (Fig. 4.75a) dos años antes. Sin embargo, debido a que el ERV habría llegado a Marte junto con su fase 4 de expulsión, ésta última habría quedado en órbita, por lo que podría ser aprovechada posteriormente por el MTSV para generar rotación artificial así como para disponer de alguna parte residual de su combustible.



Fig. 4.80. Impulso Transierra del ERV

De este modo, estimando que la tripulación permanezca en Marte durante año y medio, aprovechando nuevamente la cercanía orbital entre la Tierra y Marte, una vez

transcurrido ese tiempo, la tripulación aborda el ERV e inicia un ascenso para entrar en órbita, (Fig. 4.79f). Éste ascenso interceptaría a la fase 4 del ERV con la cual una vez acoplado, comenzaría el retorno a Tierra de forma análoga que para el impulso transmarte, (Fig. 4.80). La única diferencia entre este y el que fue necesario para el impulso transmarte, es que éste requiere de una cantidad de energía menor, pues el radio de la EIM es mucho menor que el de la EIT. Terminado el impulso, y saliendo de la EIM, el ERV repite la misma secuencia realizada por el MTSV para generar G artificial para permanecer así durante el regreso, (Fig. 4.81a). Finalmente, cerca de la EIT, el ERV se libera de la atadura que lo une con al fase 4 y comienza a dar varios roces con la atmósfera hasta ingresar a la superficie terrestre, (Fig. 4.81b).

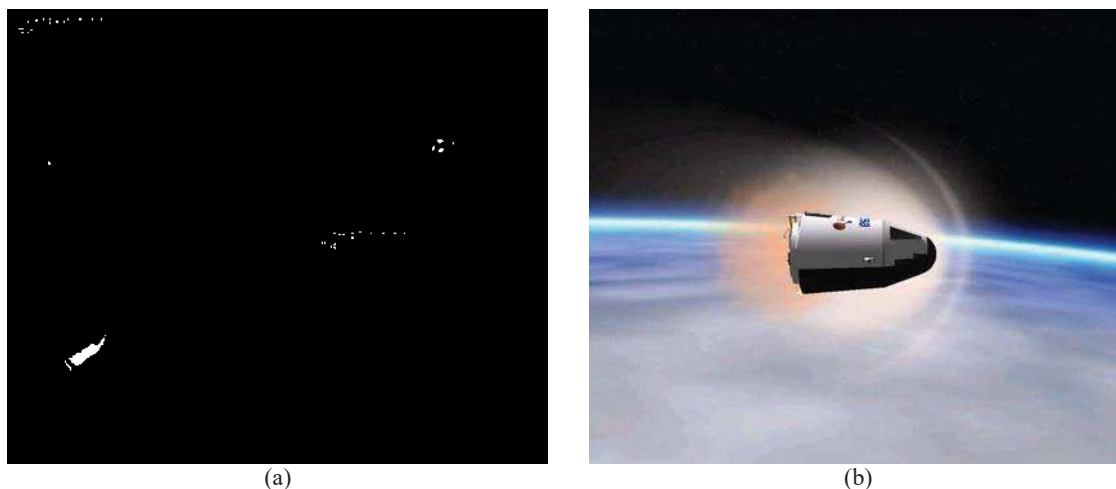


Fig. 4.81. (a) Rotación del ERV para generar G artificial, (b) Reingreso atmosférico del ERV

La razón por la que se pretende disponer de éste tipo de ingreso se aprecia en el diseño vehicular, pues es de suponer que la tripulación llegue a la Tierra sin “entrenamiento” alguno para resistir los efectos G, por lo que un ingreso súbito violaría la restricción de la función piloto de sanción, repercutiendo así, en la salud de la tripulación.

Nótese como la cantidad de propulsante no es consumida en su totalidad, (Fig. 4.82d) por lo que esta parte residual es utilizada para las correcciones.

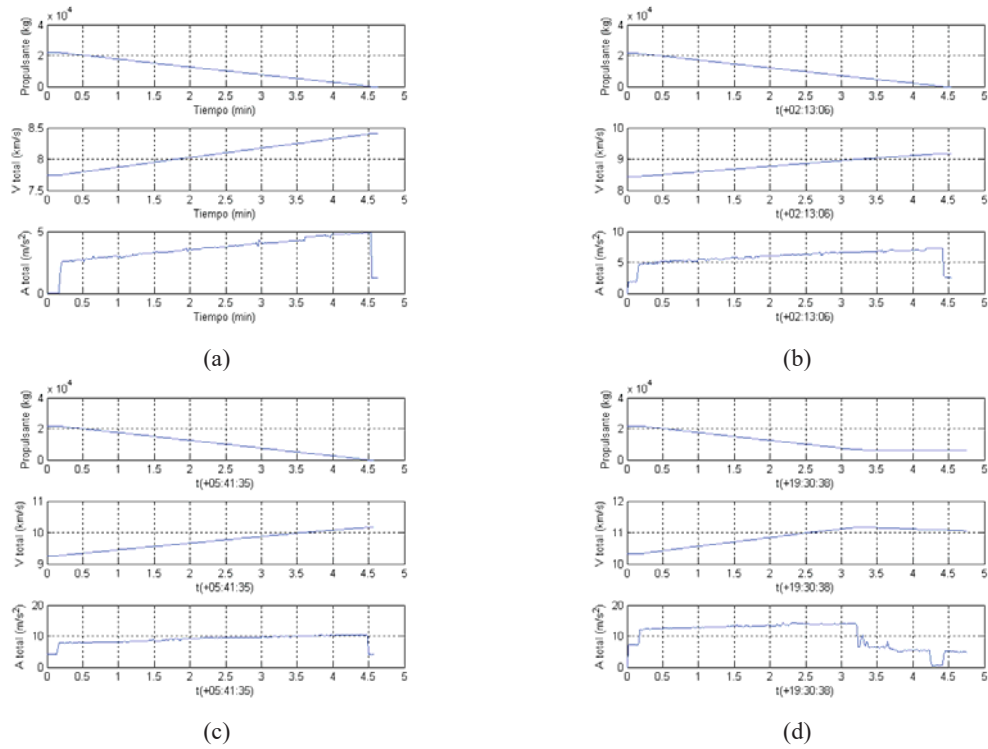


Fig. 4.82. Parámetros cinemáticos y de propulsión de las fases, (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4 para el impulso transmart

Durante la aerocaptura, es posible apreciar como es reducida la velocidad por una desaceleración tangencial, (Fig. 4.83a). Esto se disipa en forma de calor el cual por cierto, habrá de tener valores pequeños, (Fig. 4.83b).

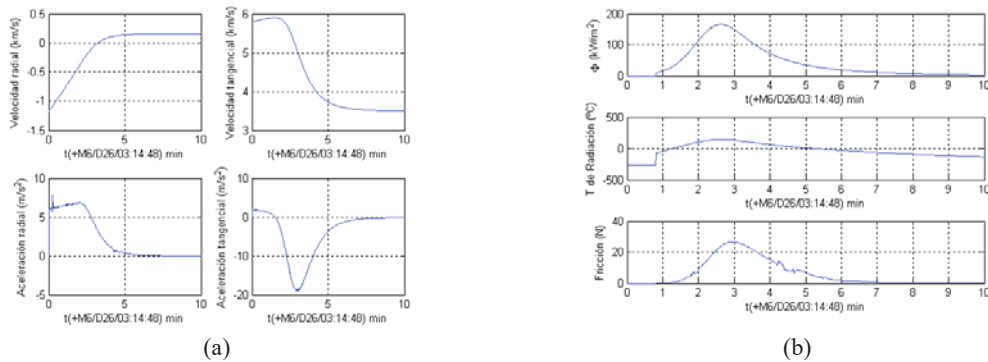


Fig. 4.83. Parámetros de Aerocaptura marciana, (a) cinemáticos y (b) Calor, temperatura y fricción

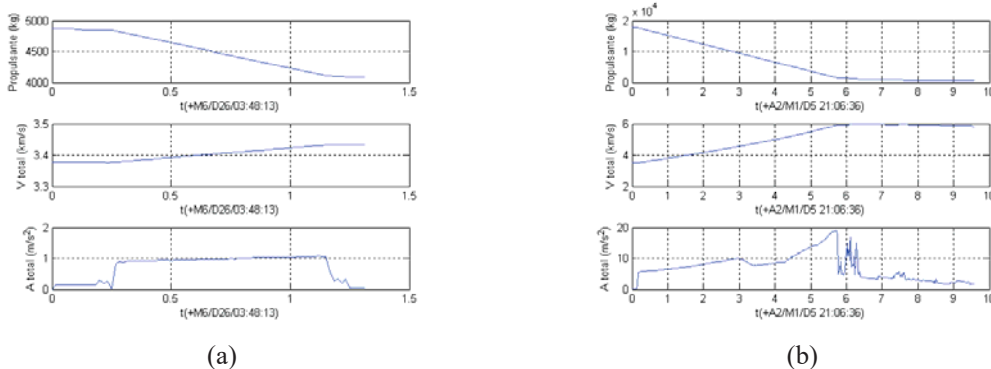


Fig. 4.84. Parámetros cinemáticos de, (a) impulso de levantamiento perimarte y (b) impulso transtierra

Finalmente, después de la aerocaptura, la inserción orbital es finalizada con la corrección de altura perimarte la cual habría de consumir poca cantidad de propulsantes, (Fig. 4.84a). Para regresar a la Tierra, el impulso transtierra es aplicado de modo análogo que el de transmarte del cual sólo se requiere de un impulso, (Fig. 4.84b).

4.3.3. Casos Interplanetarios Restantes

Partiendo de una órbita terrestre, el retorno a la Tierra de Marte resulta análogo para una transferencia a la órbita de Venus o a la de Mercurio. La desventaja de éste último es que carece de atmósfera, por lo que resulta muy costoso en términos de combustible, una inserción orbital alrededor del mismo. De modo similar, la transferencia de la Tierra a Marte puede ser generalizada a una transferencia a Júpiter, Saturno, Urano o Neptuno. Un ejemplo de ello es el caso de la sonda espacial Cassini-Huygens la cual, sacó ventaja de los tirones gravitacionales al sobrevolar por Venus un par de veces, luego por la Tierra y finalmente por Júpiter. Este último le dio el impulso definitivo para llegar a Saturno. Una vez ahí, aprovecho la densa atmósfera y fuerza gravitacional de Saturno para degenerar la hipérbola de arribo a una elipse saturnocéntrica. Después aplicó un breve impulso en un punto aposaturno para el levantamiento de la altura perisaturno. Finalmente, en sincronía con sus Lunas, su trayectoria fue optimizada lo suficiente para culminar así, con intercepción con la Luna Titán y con ello, la liberación de “huygens” que ingresó exitosamente a dicho satélite en 2005, (Fig. 4.85a-b).

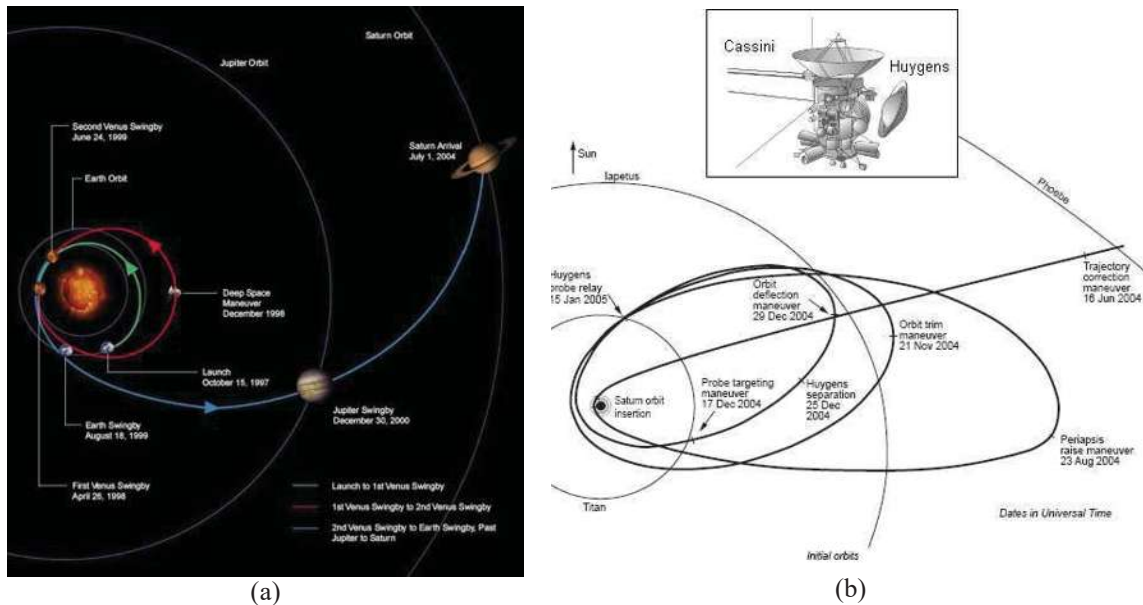


Fig. 4.85. Misión Cassini-Huygens. (a) Transferencia interplanetaria, (b) Captura gravitacional en el sistema Saturno

Un ejemplo más que vale la pena mencionar es el de la sonda espacial Nuevos Horizontes cuya finalidad es cartografiar por primera vez en la historia de la humanidad, la superficie de Plutón, para después continuar con su trayecto al cinturón

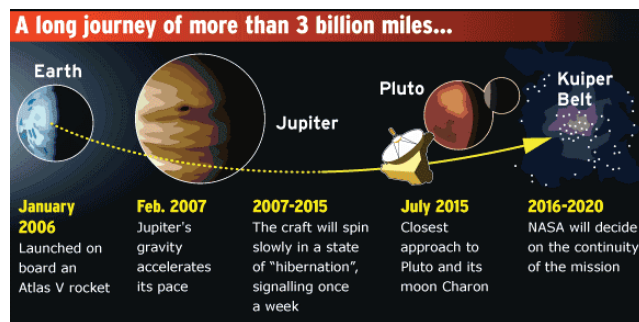


Fig. 4.86. Trayectoria de la sonda New Horizons

de Kuiper. Cabe mencionar que dicha prueba aprovecho también el tirón gravitacional de Júpiter el cual, le proporcionó el impulso adicional para llegar a su objetivo. Esta es al primera misión no tripulada funcional que el hombre ha enviado más lejos del sistema Tierra Luna, (Fig. 4.86. Ref. http://www.msnbc.msn.com/id/10892063/ns/technology_and_science-space)

Apéndice

A1. Trigonometría Esférica

A.1.1. Leyes de Cosenos

Considérese un triángulo dibujado en la superficie de una esfera de radio R , centrada en el punto $O = (0,0,0)$ con vértices A, B y C , los cuales denotarán a su vez, los ángulos dihedrales del triángulo. Es decir, el ángulo A está comprendido entre los planos AOB y AOC y de igual modo para B y C . Fig. A.1.

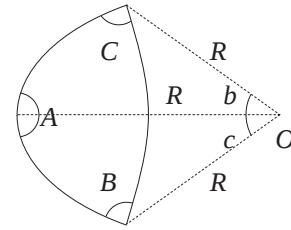


Fig. A.1. Triángulo Esférico

Defínanse los vectores de O a los vértices como $\mathbf{a} \doteq \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} \doteq \overrightarrow{OB}$ y $\mathbf{c} \doteq \overrightarrow{OC}$. Luego, los ángulos de los lados del triángulo (en radianes) son $a' \doteq \angle BOC$, $b' \doteq \angle COA$ y $c' \doteq \angle AOB$, con longitudes de arco $a = Ra'$, $b = Rb'$ y $c = Rc'$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= R^2 \cos c' = R^2 \cos(c/R) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= R^2 \cos b' = R^2 \cos(b/R) \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= R^2 \cos a' = R^2 \cos(a/R) \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

El ángulo dihedral A se obtiene calculando el producto punto entre los vectores normales a los planos mencionados anteriormente, los cuales a su vez, se obtienen aplicando producto cruz a los vectores de los vértices, de modo que:

$$(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{c}}) = (|\hat{\mathbf{a}}| |\hat{\mathbf{b}}| \sin c) (|\hat{\mathbf{a}}| |\hat{\mathbf{c}}| \sin b) \cos A = \sin b \sin c \cos A \quad (\text{A1.2})$$

sin embargo, al usar la identidad vectorial se tiene:

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{c}}) &= \hat{\mathbf{a}} \cdot [\hat{\mathbf{b}} \times (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{c}})] = \hat{\mathbf{a}} \cdot [\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}) - \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}})] \\
&= (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}) - (\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = \cos a - \cos c \cos b
\end{aligned} \tag{A1.3}$$

Igualando las expresiones (A1.2) y (A1.3) se obtiene una ley de cosenos. Finalmente y de manera análoga se obtiene los demás casos que en total son:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C
\end{aligned} \tag{A1.4}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c
\end{aligned} \tag{A1.5}$$

A.1.2. Leyes de Senos

Se obtienen partiendo de la identidad vectorial, $(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \times (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{c}}) = |\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}| |\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{c}}| \sin A$.

De este modo:

$$\sin A = -\frac{|\hat{\mathbf{a}}[\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}] + \hat{\mathbf{b}}[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}]|}{\sin b \sin c} = \frac{[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}]}{\sin b \sin c} \tag{A1.6}$$

donde $[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}]$ es el triple producto escalar. Dividiendo la expresión anterior entre $\sin a$, y teniendo en cuenta que el último miembro se obtiene de igual modo para los demás casos, se llega a la ley de senos:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}]}{\sin a \sin b \sin c} \tag{A1.7}$$

A.1.3. Formulas de Bessel

Se obtienen sustituyendo algún coseno en otro. Así, al sustituir el coseno de la tercera en la primera se llega a una expresión de un seno por un coseno:

$$\begin{aligned}
\text{Sen } c \text{ Sen } a \text{ Cos } B &= \text{Cos } b - \text{Cos } a \text{ Cos } c \\
&= \text{Cos } b - \text{Cos } a (\text{Cos } a \text{ Cos } b + \text{Sen } a \text{ Sen } b \text{ Cos } C) \\
&= \text{Cos } b \text{ Sen } a - \text{Cos } a \text{ Sen } a \text{ Sen } b \text{ Cos } C
\end{aligned} \tag{A1.8}$$

dividiendo todo por $\text{Sen } a$ se tiene:

$$\text{Sen } c \text{ Cos } B = \text{Cos } b \text{ Sen } a - \text{Cos } a \text{ Sen } b \text{ Cos } C$$

Análogamente se obtienen las demás, que en total son:

$$\begin{aligned}
\text{Sen } c \text{ Cos } B &= \text{Cos } b \text{ Sen } a - \text{Cos } a \text{ Sen } b \text{ Cos } C \\
\text{Sen } c \text{ Cos } A &= \text{Cos } a \text{ Sen } b - \text{Cos } b \text{ Sen } a \text{ Cos } C \\
\text{Sen } b \text{ Cos } A &= \text{Cos } a \text{ Sen } c - \text{Cos } c \text{ Sen } a \text{ Cos } B \\
\text{Sen } b \text{ Cos } C &= \text{Cos } c \text{ Sen } a - \text{Cos } a \text{ Sen } c \text{ Cos } B \\
\text{Sen } a \text{ Cos } B &= \text{Cos } b \text{ Sen } c - \text{Cos } c \text{ Sen } b \text{ Cos } A \\
\text{Sen } a \text{ Cos } C &= \text{Cos } c \text{ Sen } b - \text{Cos } b \text{ Sen } c \text{ Cos } A
\end{aligned} \tag{A1.9}$$

A.1.4. Formulas de Cotangentes

Se obtienen combinando las formulas de Bessel con las de los senos. Tomando la primera de las Ecs. (A1.4), dividiendo entre $\text{Sen } B$ y resolviendo para $\text{Cot } B$:

$$\text{Cot } B = \frac{1}{\text{Sen } c \text{ Sen } B} (\text{Cos } b \text{ Sen } a - \text{Cos } a \text{ Sen } b \text{ Cos } C) \tag{A1.10}$$

Empleando la relación de senos de B y C , resolviendo para $\text{Sen } B$, sustituyendo en la Ec. (A1.10), multiplicando por $\text{Sen } C$ y despejando, $\text{Sen } a \text{ Cot } b = \text{Sen } C \text{ Cot } B + \text{Cos } a \text{ Cos } C$.

De modo análogo se tienen las demás expresiones. En total son:

$$\begin{aligned}
\text{Sen } c \text{ Cot } b &= \text{Sen } A \text{ Cot } B + \text{Cos } c \text{ Cos } A \\
\text{Sen } c \text{ Cot } a &= \text{Sen } B \text{ Cot } A + \text{Cos } c \text{ Cos } B \\
\text{Sen } b \text{ Cot } a &= \text{Sen } C \text{ Cot } A + \text{Cos } b \text{ Cos } C
\end{aligned} \tag{A1.11}$$

$$\text{Sen } b \cot c = \text{Sen } A \cot C + \text{Cos } b \cos A$$

$$\text{Sen } a \cot b = \text{Sen } C \cot B + \text{Cos } a \cos C$$

$$\text{Sen } a \cot c = \text{Sen } B \cot C + \text{Cos } a \cos B$$

A2. Álgebra de Cuaternios

Dados dos cuaternios, $\mathbf{p} = (p_0, \mathbf{p})$ y $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q})$, el álgebra básica de cuaternios tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1 (Conversión a Vector). El vector $\mathbf{p}$ puede ser expresado como cuaternio mediante:

$$\mathbf{p} = (0, \mathbf{p}) = 0 + \mathbf{p}.$$

Propiedad 2 (Conjugado).

$$\mathbf{p} = p_0 - p_1\mathbf{i} - p_2\mathbf{j} - p_3\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathbf{pq}} = \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{p}}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{pq}}} = \mathbf{q} \bar{\mathbf{p}}$$

Propiedad 3 (l_2 -norma).

$$\|\mathbf{p}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 p_i^2} = \sqrt{\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}}$$

Propiedad 4 (Negativo).

$$-\mathbf{p} = -p_0 - p_1\mathbf{i} - p_2\mathbf{j} - p_3\mathbf{k}$$

Propiedad 5 (Adición).

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}$$

Propiedad 6 (Multiplicación). La cual no es conmutativa.

$$\mathbf{pq} = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})$$

Propiedad 7 (Inverso).

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}\|_2^2}$$

A3. Teorema de Lambert

Este enuncia lo siguiente: El tiempo de transferencia es una función del semieje mayor a , de la orbita, la suma $r_1 + r_2$, al igual que de la cuerda $C = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ que une los dos puntos P_1 y P_2 . Fig. A.2.

Sean $2G = E_2 + E_1$ y $2g = E_2 - E_1$. Entonces la cuerda C que une los dos puntos expresándola en términos de G y g es:

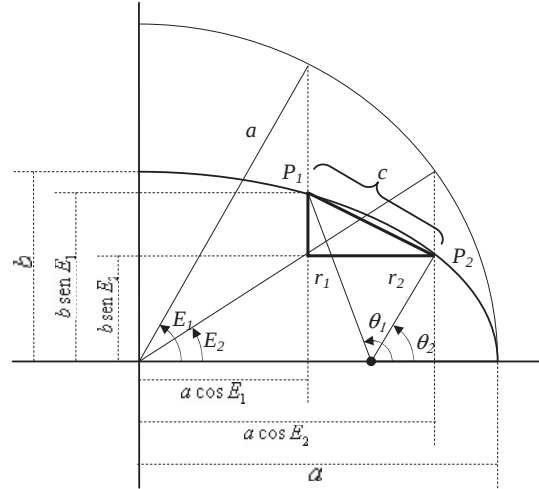


Fig. A.2. Esquema del Teorema de Lambert

$$\begin{aligned} C^2 &= (a \cos E_2 - a \cos E_1)^2 + (b \sin E_2 - b \sin E_1)^2 \\ &= a^2 (\cos(G+g) - \cos(G-g))^2 + b^2 (\sin(G+g) - \sin(G-g))^2 \quad (A3.1) \\ &= 4a^2 \sin^2 G \sin^2 g + 4a^2 (1-e^2) \cos^2 G \sin^2 g \end{aligned}$$

En el segundo término se ha eliminado b mediante el primer y tercer miembro de la ecuación $b^2 = a^2(1-e^2)$. Luego, definiendo $\cos h = e \cos G$ y simplificando (A3.1):

$$C = 2a \sin g \sin h \quad (A3.2)$$

Además, $r_{1,2} = a(1 - e \cos E_{1,2})$. Al sumar ambos radios se tiene:

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - e \cos G \cos g) = 2a(1 - \cos g \cos h) \quad (A3.3)$$

Introduciendo dos nuevas variables, $\varepsilon = h + g$ y $\delta = h - g$ y sumando (A3.2) con (A3.3) y luego haciendo lo mismo pero con resta:

$$\begin{aligned}
 r_1 + r_2 + C &= 2a - 2a \cos g \cos h + 2a \sin g \sin h \\
 &= 2a[1 - \cos(g + h)] = 4a \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \\
 r_1 + r_2 - C &= 2a - 2a \cos g \cos h - 2a \sin g \sin h \\
 &= 2a[1 - \cos(h - g)] = 4a \sin^2 \frac{\delta}{2}
 \end{aligned} \tag{A3.4}$$

Nótese que, $E_2 - E_1 = 2g = \varepsilon - \delta$ y, por identidades de trigonometría plana:

$$\begin{aligned}
 e(\sin E_2 - \sin E_1) &= e(\sin(G + g) - \sin(G - g)) \\
 &= 2 \sin g \cos h = 2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) \\
 &= \sin \varepsilon - \sin \delta
 \end{aligned}$$

Por lo tanto para los dos puntos, la ecuación de Kepler es:

$$\begin{aligned}
 n(\Delta t) &= E_2 - E_1 - e \sin(E_2 - E_1) \\
 &= \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)
 \end{aligned} \tag{A3.5}$$

Así, resolviendo para ε y δ de (A3.4), y sustituyendo en (A3.5), se demuestra el teorema.

A4. Software de Simulación Virtual “Orbiter”.

El software de simulación orbiter has sido editado y compilado en lenguaje C++, usando DirectX para su funcionamiento en 3D, Por el Dr. Martin Schweiger de la UCL (University College London), y puede ser descargado desde, www.orbitersim.com (El complemento de ambientación sonora es OrbiterSound35.exe el cual está disponible en <http://orbiter.dansteph.com>). Su espacio tridimensional está limitado a las cercanías del sistema solar. Este software ha sido creado con fines académicos al procurar un acercamiento más realista con el vuelo aeroespacial atendiendo principios basados en mecánica newtoniana. Se darán por entendidos todos los fundamentos teóricos previos, y

serán proporcionados algunos bosquejos teóricos adicionales conforme vayan siendo requeridos en cada secuencia.

A4.1. Configuración inicial

Una vez que se ejecuta el programa, se abrirá una ventana de lanzamiento (Launchpad), Fig.A.3, que permite seleccionar el escenario deseado e iniciarlo (Launch orbiter). A su vez, las pestañas mostradas permiten su configuración inicial. Algunas de estas son:

Parámetros.

El más importante es el de Realismo que a su vez incluye: Modelo de vuelo complejo, Simulación de Falla y daño, Combustible limitado, Fuentes Gravitacionales no esféricas (Cap1) y Torca de Gradiente de Gravedad (Cap3).

Los otros son: Estrellas, Enfoque de seguimiento al mouse e instrumentos, los cuales contemplan al igual que las pestañas de Efectos visuales y Video, ajustes de tipo únicamente visual que son activados al gusto por el usuario.

La selección de una mayor cantidad de opciones implica una leve reducción en la precisión de la ejecución del mismo. Antes de iniciar su ejecución, en la pestaña de Video, se debe ser activada la casilla “Always enumerate devices”, y checar que el dispositivo 3D “3D device” sea el adecuado, ya que la mayoría de las PC tienen por defecto al “RGB Emulation”, el cual es totalmente deficiente en el manejo de gráficos 3D.

Módulos.

Permite activar archivos ejecutables adicionales o módulos de forma independiente. Algunos ya están incluidos, pero es posible agregar otros previamente programados, (por ejemplo, el software OrbiterSound). Conviene activar el “ScnEditor”, que permite el ajuste de: elementos orbitales, postura, velocidad angular, fecha, posición en el espacio,



Fig. A.3. Launchpad

eliminar o agregar vehículos o modelos adicionales, etc. Estas aplicaciones solo pueden ser apreciadas una vez que se esté ejecutando una sesión de simulación.

Extra .

El simulador está adaptado para actualizar posiciones y velocidades del vehículo de un instante a otro. Estos contemplan dos tipos de propagadores que son:

Lineales.- Corresponden a los vectores de estado de posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\mathbf{v}$ de un vehículo. Así, siendo $\mathbf{r}_n$ y $\mathbf{v}_n$ dichos vectores de estado en un instante t_n y asumiendo que la aceleración gravitacional $\mathbf{a}_g$ puede ser calculada en un instante entre $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, así como aceptar la presencia de cualquier aceleración constante $\mathbf{a}_a$ debida a alguna fuerza externa entonces la aceleración propagada es:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_g(t, \mathbf{r}(t)) + \mathbf{a}_0 \doteq \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \ddot{\mathbf{r}} \quad t \in \Delta t_n$$

donde $\mathbf{A}$ es el operador de la llamada de función que provee las fuerzas actuantes sobre el vehículo. Dicha expresión es resuelta numéricamente empleando algunos de los métodos de integración disponibles, Fig. A.4.(a).

Angulares.- Estos son una extensión de la propagación de los vectores de estado lineales $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ anteriores, a los vectores de estado de orientación angular y velocidad angular $\mathbf{p}$ y $\mathbf{\omega}$. En analogía con el caso lineal, éstos requieren de la propagación de los mismos de un instante t_n a otro t_{n+1} , dados por una torca dependiente del tiempo $\boldsymbol{\tau}(t)$.

Las ecuaciones del movimiento en este caso son dos, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{\omega}$ y $\dot{\mathbf{\omega}} = \mathbf{E}^{-1}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\omega})$, donde $\mathbf{J}^{-1}$ formalmente denota la solución de las ecuaciones de Euler para el movimiento del cuerpo rígido (Cap3):

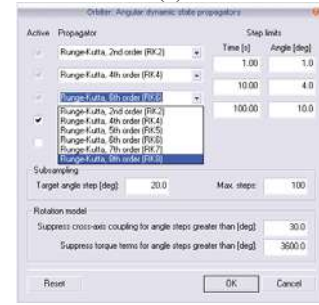
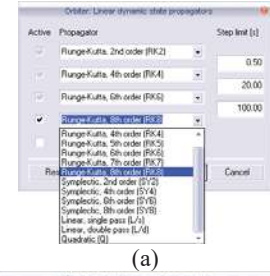


Fig. A.4. Integradores (a) lineales y (b) angulares

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \doteq \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{L}$ es el momento angular medido en el sistema de referencia de un cuerpo giratorio, e (I_1, I_2, I_3) son los momentos principales de inercia del cuerpo (asumiendo que el sistema de referencia es el sistema de ejes principales, con un tensor de inercia diagonal).

Ahora, considérese $\boldsymbol{\tau}(t)$ compuesto por una componente gradiente gravitacional $\boldsymbol{\tau}_g$ (Distribución de masa vehicular en el simulador) y un término $\boldsymbol{\tau}_0$ que contiene otras componentes de torca el cual es constante en el intervalo Δt_n , entonces:

$$\boldsymbol{\tau}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}_g(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\tau}_0 \doteq \mathbf{T}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) \quad t \in \Delta t_n$$

Nótese la dependencia de la torca con la posición. De hecho, el sistema que en realidad debe ser resuelto es el conjunto de cuatro ecuaciones simultáneas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{E}^{-1}[\mathbf{T}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\omega}]$$

que son resueltas numéricamente por el método elegido, Fig. A.4. (b).

A4.2. Modelos Adicionales

Existe una gran variedad de modelos tridimensionales (o “addons”) de vehículos extra, utilerías de edición y diseño, así como MFD’s que pueden ser agregados en la carpeta /Modules/Plugin y activados en Modulos del launchpad.

Para analizar la secuencia de la misión tripulada de la Tierra a la Luna, así como la secuencia parcial de una concepción de misión tripulada de la Tierra a Marte. Requiere ésta primera, de los Addons mostrados en la Tabla A4.1, que pueden ser descargados

gratuitamente desde el sitio www.orbithangar.com. Estos son variantes de proyectos reales actualmente sujetos a investigación.

Tabla A4.1. Archivos necesarios para la misión Tierra-Luna

Objetos	Nombre del comprimido y autor	Descripción
CaLV & LM	CEV-E-02.zip <i>Francisdrake</i>	<i>Cargo Launch Vehicle & Lunar Module "Altair"</i> . También incluye al CEV el cual es reemplazado por otro.
Ares I & CEV	CEV-Orion-0i.zip <i>Francisdrake</i>	Sustituto del CEV (<i>Crew Exploration Vehicle</i>). Es una versión más actualizada.
Paquete genérico de modelos múltiples	NASA_VSE_SC_v2.0dev-MFL20060614.zip <i>Antonio Maia</i>	Conjunto de paquetes que permiten la interacción entre varios modelos tridimensionales. Incluye lanzaderas.
EVA en CEV	UniversalMmu_070524.exe <i>Daniel Polli</i>	Incluye tripulantes al CEV atendiendo parámetros fisiológicos humanos.
Visor Interplanetario	IMFD51.zip <i>Jarmo Nikkamen</i>	Permite visualizar transferencias interplanetarias.
Visor Girocompas	LaunchCompassMFD.zip <i>Agentgonz</i>	Permite visualizar la orientación en despegues verticales.
Recolector de datos	FlightDataRec-02042005.zip <i>Dr. Martin Schweiger</i>	Generación de datos durante la simulación almacenados en un archivo para su análisis

A pesar de que los primeros dos contienen ya sus respectivos escenarios de modo independiente uno del otro, se recomienda modificar al menos uno de ellos editando las secciones “Ships” y “Environment” de modo que contenga los dos vehículos de lanzamiento con sus respectivos módulos de carga permitiendo su uso en una misma sesión, Tabla A4.2.

Se recomienda la fecha, 18 de Julio de 2024 en la cual, se presenta una ventana de lanzamiento para enviar pruebas lunares. En este instante el plano orbital lunar proyectado sobre la superficie terrestre está a punto de cruzar justo por el centro espacial Kennedy (punto de partida de la misión). Estas fechas permitidas pueden ser consultarlas en el Almanaque Americano de Efemérides Náuticas, AAEN.

Por otro lado, para la misión Tierra-Marte se necesitan únicamente los modelos propuestos por la Mars Society Conference. El comprimido es MFL.zip (Mars For Less) descargable también desde [orbithangar](http://www.aovi93.dsl.pipex.com/mars_for_less.htm) el cual cuenta ya con archivos de escenarios listos para usarse. Para más información: http://www.aovi93.dsl.pipex.com/mars_for_less.htm.

```

BEGIN_ENVIRONMENT
    System NASA_VSE_SC_MFL\System\Sol
    Date MJD 60509.6700429281 % 18 de Julio de 2024 a las 16 hrs
END_ENVIRONMENT

BEGIN_SHIPS
CEV:CEV-Orion\CEV-Orion % Vehículo Orion
    STATUS Landed Earth
    BASE Cape Canaveral:11
    POS -80.6066640 28.6013010
    HEADING 270.06
    PRPLEVEL 0:1.000
    IDS 1:584 100
    NAVFREQ 0 0
    XPDR 468
    MODE 10
    SOLAR 0
    LAS 1
    SMFUEL 0.600
    UMMUCREW Capt-Tony_Nelson-41-65-74
    UMMUCREW Eng-Roger_Healy-27-67-55
    UMMUCREW Doc-Dr_Bellows-64-70-45
    UMMUCREW -Albert_Jr_Falcon-15-70-45
END % Plataformas de lanzamiento
MLP-1:NASA_VSE_SC_MFL\System\03_Earth\Base\Facilities\MLP-LUT
    STATUS Landed Earth
    POS -80.6066610 28.6013860
    HEADING 2.01
END
MLP-2:NASA_VSE_SC_MFL\System\03_Earth\Base\Facilities\MLP-LUT
    STATUS Landed Earth
    POS -80.6232450 28.6198290
    HEADING 2.00
END
CaLV:CEV-E\CaLV %Módulo lunar y EDS
    STATUS Landed Earth
    BASE Cape Canaveral:12
    POS -80.6232500 28.6197440
    HEADING 181.78
    PRPLEVEL 0:1.000 1:1.000 2:1.000
    IDS 0:488 100
    NAVFREQ 0 0
    XPDR 470
    PAYLOAD CEV-LM CEV-E\CEV-E-LMlaunch CEV-E\CEV-E-LM 0.00 0.00 38.25 44000.00
0.00 1.00
    CONFIGURATION 0
    FAIRING 1
    PAF 1
END
END_SHIPS

```

Tabla A4.2. Modificación parcial de un archivo de escenario. (.scn)

A5. Linealización del PCRTC en los puntos de libración

Recordando las ecuaciones del movimiento para dicho problema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x + 2\dot{y} - (1-\mu) \frac{x+\mu}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \mu \frac{x-(1-\mu)}{((x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ y - 2\dot{x} - (1-\mu) \frac{y}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \mu \frac{y}{((x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -(1-\mu) \frac{y}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \mu \frac{y}{((x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 2\dot{y} + D_x U \\ -2\dot{x} + D_y U \\ D_z U \end{bmatrix}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ y U es la función definida como:

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}}$$

Si se denota una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ para ser el vector de estado $\mathbf{x} = (x, y, z, u, v, w)$, y $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 2\dot{y} + D_x U \\ -2\dot{x} + D_y U \\ D_z U \end{pmatrix}$$

Entonces los puntos de libración $L_i, i=1,2,3,4,5$, son ceros de f . La linealización alrededor de estos puntos es, $\dot{\mathbf{x}} = D_{L_i} \mathbf{x}$ donde D_{L_i} es la derivada de f evaluada en el punto de libración L_i . Para calcular esta derivada sean:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2 + z^2}$$

De acuerdo a esto, sea x_i la i -ésima componente de $\mathbf{x} = (x, y, z, u, v, w)$. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r_j = \begin{cases} (x + \mu)/r_1 & i = j = 1 \\ (x - (1 - \mu))/r_2 & i = 1, j = 2 \\ x_i/r_j & i = 2, 3, j = 1, 2 \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r_j} = \begin{cases} -(x + \mu)/r_1^3 & i = j = 1 \\ -(x - (1 - \mu))/r_2^3 & i = 1, j = 2 \\ -x_i/r_j^3 & i = 2, 3, j = 1, 2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r_j^3} = \begin{cases} -3(x + \mu)/r_1^5 & i = j = 1 \\ -3(x - (1 - \mu))/r_2^5 & i = 1, j = 2 \\ -3x_i/r_j^5 & i = 2, 3, j = 1, 2 \end{cases}$$

donde para $i = 4, 5, 6$ y $j = 1, 2$, las tres expresiones son cero. Usando lo anterior, es posible calcular las derivadas parciales de las componentes del campo vectorial f . La parte más involucrada son las derivadas parciales de la función potencial U que son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 1 - (1 - \mu) \left[\frac{1}{r_1^3} - 3 \frac{(x + \mu)^2}{r_1^5} \right] - \mu \left[\frac{1}{r_2^3} - 3 \frac{(x - (1 - \mu))^2}{r_2^5} \right] \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 1 - (1 - \mu) \left[\frac{1}{r_1^3} - 3 \frac{y^2}{r_1^5} \right] - \mu \left[\frac{1}{r_2^3} - 3 \frac{y^2}{r_2^5} \right] \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -(1 - \mu) \left[\frac{1}{r_1^3} - 3 \frac{z^2}{r_1^5} \right] - \mu \left[\frac{1}{r_2^3} - 3 \frac{z^2}{r_2^5} \right] \end{aligned}$$

De igual modo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 3(1 - \mu) y \frac{x + \mu}{r_1^5} + 3\mu y \frac{x - (1 - \mu)}{r_2^5} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= 3(1 - \mu) z \frac{x + \mu}{r_1^5} + 3\mu z \frac{x - (1 - \mu)}{r_2^5} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= 3(1 - \mu) y \frac{z}{r_1^5} + 3\mu y \frac{z}{r_2^5} \end{aligned}$$

Ahora, para evaluar los nueve términos en los puntos colineales de libración, L_i , $i = 1, 2, 3$, se tiene que $z = y = 0$. Entonces para estos valores, $r_1 = [(L_i + \mu)^2 + 0^2 + 0^2]^{1/2} = L_i + \mu$ y $r_2 = L_i - (1 - \mu)$. Evaluando estas dos expresiones en L_i y con un poco de álgebra:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{L_i} = 1 + 2\alpha, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{L_i} = 1 - \alpha, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right|_{L_i} = -\alpha$$

donde:

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{|L_i + \mu|^3} + \frac{\mu}{|L_i - (1 - \mu)|^3}$$

y ya que todas las parciales mixtas son cero, ($y = z = 0$), es posible tener calcular la derivada de:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x + 2\dot{y} + D_x U \\ y - 2\dot{x} + D_y U \\ D_z U \end{bmatrix}$$

de modo que se tiene:

$$D_x f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right)_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ D_x^2 U & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es la submatriz de 3×3 de las derivadas parciales de u, v, w con respecto a las variables x, y, z . Como éstas son cero, $\mathbf{A}$ es una matriz de ceros. $\mathbf{B}$ es la submatriz de 3×3 de las derivadas parciales de los mismos términos (x, y, z) pero respecto a ellos mismos. Debido a que $\partial x_i / \partial x_i = 1$ para cualquier i se tiene que $\mathbf{B}$ es simplemente la matriz identidad.

Luego, $\mathbf{C}$ es la submatriz de 3×3 cuyas entradas con las parciales de f_4 , f_5 y f_6 con respecto a las variables de velocidad (u, v, w) . Como f_6 depende sólo de x, y, z , el último renglón de $\mathbf{C}$ es cero, mientras que los otros tienen dependencias lineales. Así que $\mathbf{C}$ es una matriz constante. Finalmente, la última submatriz es la derivada Hessiana de U . Explícitamente, la diferencial $D_x f$ que gobierna el flujo lineal cerca de los puntos colineales de libración es:

$$D_x f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+2\alpha & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En los puntos de libración triangulares equiláteros, la matriz anterior es modificada ligeramente. En estos puntos se tiene que $r_1 = r_2 = 1$. De modo que estas coordenadas de equilibrio son $(-\mu + 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$. Usando estos datos para L_i , $i = 4, 5$:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{L_i} = \frac{3}{4} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{L_i} = \frac{9}{4} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right|_{L_i} = -1 \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_{L_i} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right|_{L_i} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

mientras que todas las demás derivadas parciales son cero. Así que la dinámica linealizada en los puntos de libración triangulares equiláteros es:

$$D_x f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A6. Principales datos del Sistema Solar

Tabla A6.1.

Parámetros necesarios para realizar transferencias Hohmann Interplanetarias partiendo de la Tierra

Planeta	$\Delta V_{\text{Transferencia}}$ (km/s)	$\Delta t_{\text{transferencia}}$ (d-días, a-años)	ω_t (rad/seg)	Periodo Sinódico (años)
Mercurio	22.28	105.5 d	26.071	0.32
Venus	27.28	146.1 d	10.217	1.60
Marte	32.73	258.9 d	3.340	2.13
Júpiter	38.57	2.74 a	0.530	1.09
Saturno	40.05	6.04 a	0.213	1.04
Urano	41.07	16.16 a	0.075	1.01
Neptuno	41.42	30.78 a	0.038	1.01
Plutón*	41.60	46.03 a	0.025	1.00

Las cantidades en ΔV están dadas en el sistema heliocéntrico.

Tabla A6.2. Elementos Orbitales Planetarios

Planeta	a (UA)	e	i (Gdos)	Ω (Gdos)	ω (Gdos)	L (Gdos)
Mercurio	0.387098	0.205630	7.00487	48.33167	77.45645	252.2508
Venus	0.723331	0.006773	3.39471	76.68069	131.5329	181.9797
Tierra	1.000000	0.016710	0.00001	-11.2606	102.9472	100.4643
Marte	1.523662	0.093412	1.85061	49.57854	336.0408	355.4533
Júpiter	5.203363	0.048393	1.30530	100.5561	14.75385	34.40438
Saturno	9.537070	0.054150	2.48446	113.7150	92.43194	49.94432
Urano	19.19126	0.047168	0.76986	74.22988	170.9642	313.2322
Neptuno	30.06896	0.008585	1.76917	131.7217	44.97135	304.8800
Plutón	39.48168	0.248807	17.1417	110.3034	224.0667	238.9288

En lugar del paso por el periapsis se da información del Argumento del paso por el periapsis L .

Tabla A6.3. Características físicas del Sol y los Planetas

Planeta	Periodo (Años)	Distancia media (10^6 km)	Velocidad orbital (km/s)	Masas Terrestres	Gravedad Ecuatorial (m/s ²)	μ (km ³ /s ³)	Radio Ecuatorial (km)	Inclinación ecuatorial (Gdos)
Sol	--	--	--	333432	--	1.327×10^{11}	696000	7° 15'
Mercurio	0.241	57.9	47.87	0.056	3.701	2.232×10^4	2487	?
Venus	0.615	108.1	35.04	0.817	8.870	3.257×10^5	6187	32°
Tierra	1.000	149.5	29.79	1.000	9.780327	3.986×10^5	6378	23° 27'
Marte	1.881	227.8	24.14	0.108	3.69	4.305×10^4	3380	23° 59'
Júpiter	11.86	778	13.06	318.0	23.1 ± 0.01	1.268×10^8	71370	3° 04'
Saturno	29.46	1426	9.65	95.2	8.96 ± 0.01	3.795×10^7	60400	26° 44'
Urano	84.01	2868	6.80	14.6	8.69 ± 0.01	5.820×10^6	23530	97° 53'
Neptuno	164.8	449.4	5.49	17.3	11.0 ± 0.05	6.896×10^6	22320	28° 48'
Plutón	247.7	5896	4.74	0.9?	0.655	$3.587 \times 10^5?$	7016?	?

La inclinación ecuatorial está dada con respecto al plano orbital del planeta respectivo.

Resultados y Discusión

La teoría del vuelo aeroespacial está regida principalmente por el conjunto de ecuaciones diferenciales del vuelo atmosférico y transatmosférico, éstas constituyen la primera etapa de lanzamiento de la nave. Además, lo es también la ecuación polar de las cónicas que es resultado de un problema de dos cuerpos, útil en órbitas alrededor de la Tierra. Así como de las ecuaciones normalizadas del problema restringido de los tres cuerpos cuya aplicación se extiende a los vuelos interplanetarios.

Una forma práctica y útil para comprender el Problema Restringido de los Tres Cuerpos (por ejemplo el sistema: Tierra, Luna y Vehículo) es mediante la aproximación de enlace cónico la cual, trata al vehículo y al planeta como un problema de dos cuerpos al menos cuando éste primero está dentro de un dominio esférico que constituye la esfera de influencia planetaria. Una vez fuera de ella, el problema de dos cuerpos se turna al del vehículo y en el caso del sistema solar, al Sol.

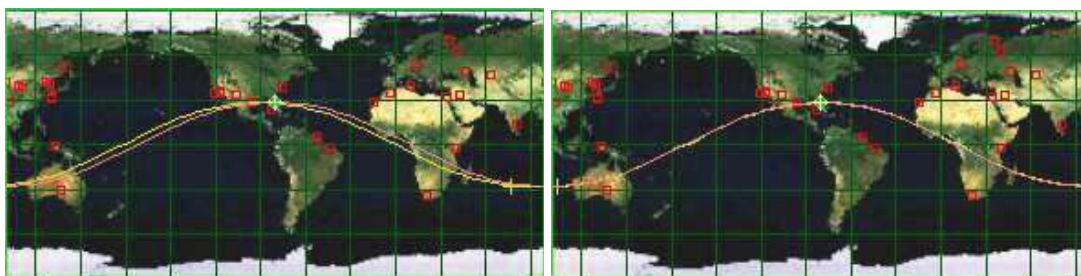
Las aportaciones que hemos dado yo y mi asesor en la tesis es introducir al lector a estas disciplinas así como el mostrar gráficamente, mediante simulación virtual las partes clave de una misión espacial de la Tierra a la Luna utilizando la secuencia del proyecto Constelación. Escogí este proyecto debido a que comprende todos los aspectos más importantes de cualquier misión espacial, es decir, primero es la puesta en órbita de la Fase de Apertura Lunar (EDS), aplicación que se extiende a cualquier satélite. Después es el lanzamiento interceptor del Vehículo Tripulado (CEV) al no tripulado (EDS) el cual es análogo al lanzamiento interceptor del Sistema de Transporte Espacial de la NASA (STS) a la Estación Espacial Internacional (ISS) o bien, del STS al Hubble, etc. Después, el impulso translunar corresponde a una aplicación inmediata de la aproximación de enlace

cónico la cual, puede extenderse turnando la Tierra por el Sol, y la Luna por cualquier planeta del sistema solar (por ejemplo Marte), además de incluir también a la Tierra, se tendría ya, una aplicación análoga para enviar pruebas interplanetarias no solo de la Tierra a Marte, sino a cualquier planeta del sistema solar sacando ventaja de que la mayoría tiene atmósfera, es posible utilizarla para degenerar la trayectoria hiperbólica de llegada a una forma elíptica orbital (Aerocaptura), o bien, sacar ventaja de la aproximación de enlace cónico cuya condición en la conservación de energía específica, nos lleva a utilizarla para generar tirones gravitacionales y con esto, el ahorro de combustible.

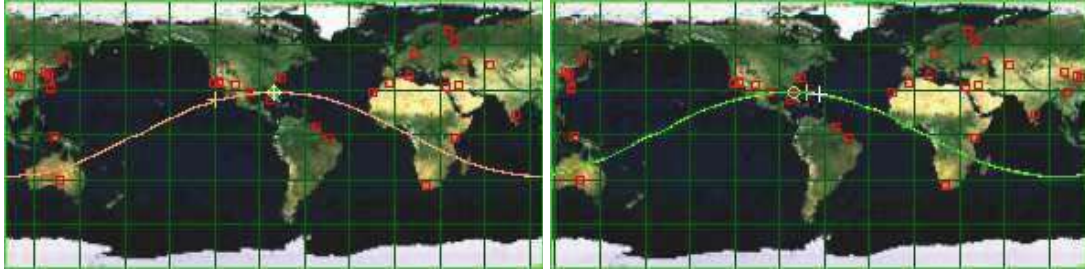
Así pues, partiendo del lanzamiento de un objeto con la finalidad de situarlo en órbita es necesaria la restricción de control manual dada por el siguiente par de condiciones en las componentes de la velocidad (radial y tangencial):

$$R1: \begin{cases} v_r \geq v_t > 0 & h < 100 \text{ km} \\ 0 < v_r < v_t & h > 100 \text{ km} \end{cases}$$

La orientación que debe tener la curva de ascenso que a su vez me definirá el plano orbital deberá ser en dirección Este, es decir: Azimut $A = 90^\circ$ lo cual implica $i = 28^\circ$ (máximo en la inclinación orbital de la Luna vista desde la Tierra que ocurrirá un día después).



Trazos a Tierra del plano orbital lunar (amarillo) los días: 1 (lanzamiento del EDS) y 2.



Trazo a Tierra del EDS (amarillo) y del CEV antes y después del lanzamiento el mismo día 2

Así, si el primer lanzamiento (EDS) se realiza el día 1 y se pretende que después al día 2 (24 hrs después del día 1) el vehículo tripulado (CEV) intercepte en una órbita que sea coplanar tanto al EDS como al plano orbital de la Luna juntos, es necesario que el primer lanzamiento sea efectuado con una diferencia $\Delta\Omega$ y cuyo valor está dado por la ecuación de la regresión nodal para la perturbación orbital secular producida en un día y de este modo compensarlo al día 2 y lograr así ambas alineaciones.

Luego, si se pretende que haya una intercepción con otro vehículo que ya orbita la Tierra entonces las restricciones son ahora (incluyendo R1):

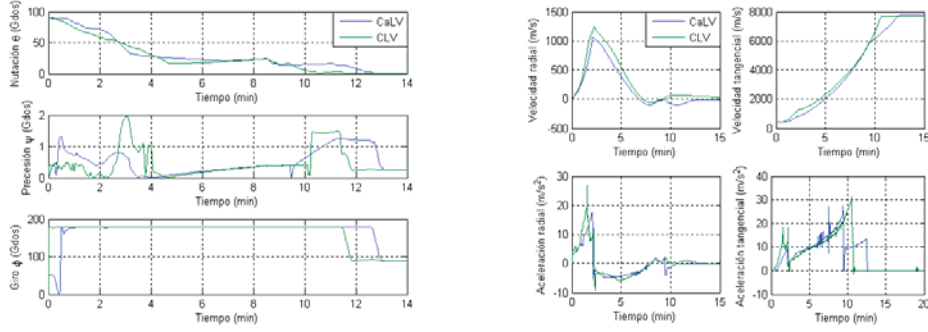
$$t_{0c} = \sqrt{\frac{a_s^3}{\mu}} (E_{0s} - E_{1s}) - e (\text{Sen } E_{0s} - \text{Sen } E_{1s}) + t_{1c} + \Delta t$$

$$A = \text{Arctan} \left\{ \text{Tan} \left(\text{Arcsen} \frac{\text{Cos } i_o}{\text{Cos } \delta} \right) - \frac{v_I}{v_o} \text{Sec} \left[\text{Arcsen} \left(\frac{\text{Cos } i_o}{\text{Cos } \delta} \right) \right] \right\}$$

$$r_a > r_o \quad y \quad r_p < r_o \quad \forall r_o$$

donde t_{0c} es el instante de lanzamiento. La cantidad Δt que agregué es la diferencia de tiempo que necesito para quedar por delante del objetivo y con esto poder realizar la corrección de sincronía. Las otras cantidades: r_a y r_p son el radio del perigeo y apogeo respectivos del vehículo que se está lanzando y r_o es el radio del objetivo que se encuentra en órbita. La orientación adecuada para dirigir un vehículo de lanzamiento está dada por la tercera expresión para un azimut A donde, i_o es la inclinación orbital del objetivo, v_o la

velocidad orbital del objetivo, v_I la velocidad inercial del vehículo en la superficie respecto al sistema geocéntrico inercial y δ es la latitud del lanzamiento.



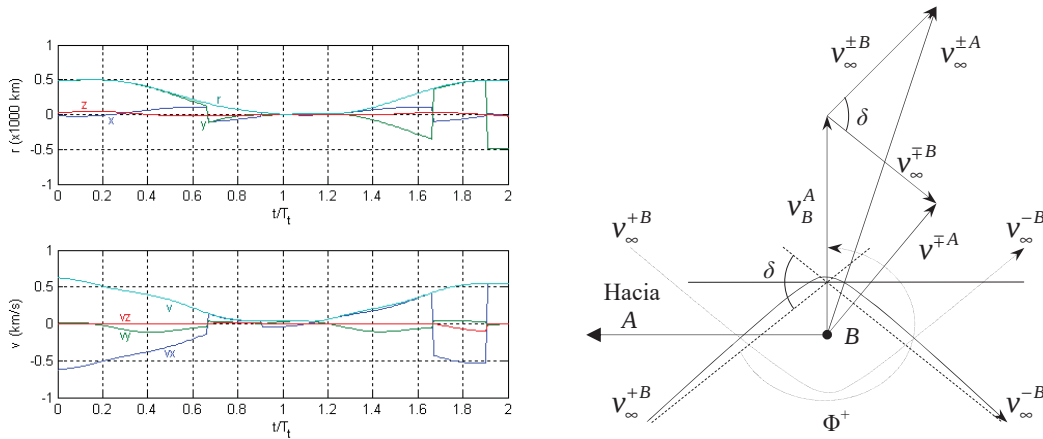
Estas restricciones se pueden apreciar en la simulación para el ángulo de nutación el cual varía en el tiempo como: $\pi/2 \leq \theta(t) \leq 0$. Nótese además el pico que aparece en la Figura de la derecha para la velocidad radial el cual indica para esta componente de velocidad que debe ser reducida una vez que el vehículo ha salido de la atmósfera ($h > 100$ km) mientras que la componente tangencial debe permanecer siempre aumentando y permitir así la inserción orbital, (restricción R1).

Ahora, suponiendo que ambos vehículos están en órbitas ya coplanares, la corrección de la sincronía debe ser la que está dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta v_{s1} = (v_p - v_{p0}) = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left\{ \sqrt{2 - r_p \left[\frac{2\pi}{\sqrt{\mu} (\Delta t_{\min} + T)} \right]^{2/3}} - \sqrt{2 - \frac{r_p}{a_0}} \right\}$$

donde ahora $\Delta t_{\min} = 0 + \varepsilon$. Esto indica que una vez hecha la corrección de diferencia mínima a cero (órbita osculante), es necesario agregar una pequeña cantidad adicional ε que nos permita compensar el efecto de rotación apsidal y cuyo valor está dado por las expresiones de los efectos perturbativos seculares. Así, hecha esta corrección y usando los elementos orbitales mostrados en el simulador para un instante inicial t_0 los propagué

mediante el problema de recursividad predictiva orbital para apreciar, como el vector de posición relativo converge a cero y luego diverge. No así para la velocidad la cual para hacer que converja totalmente a cero al igual que la velocidad después de un periodo, se emplea un esquema de direccionamiento terminal que nos permita a su vez, culminar dicha maniobra en un acoplamiento.



Una vez acoplados y aplicando la aproximación de enlace cónico se determinan los cambios de velocidad necesarios para realizar una Transferencia e inserción orbital en la Luna:

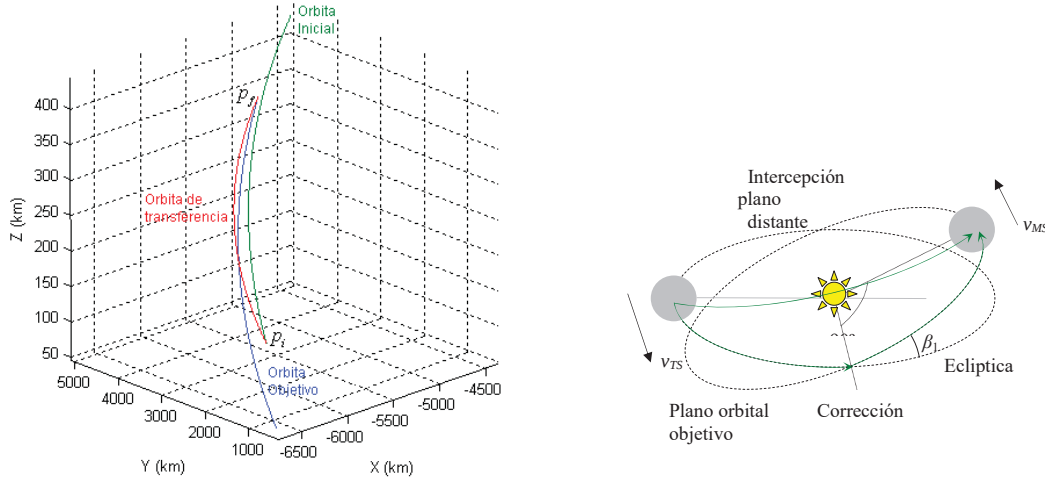
$$\Delta v_{TL} = v_f - v_i = \sqrt{2\mu} \left[\sqrt{\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + d_{TL} + r_{pL}}} - \sqrt{\frac{1}{2r_i}} \right] \approx 3.158 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{iL} = v_c^L - \sqrt{(v_{tf}^T)^2 + (v_L^T)^2 + (v_{esc}^L)^2 - 2v_{tf}^T v_L^T \cos(\Phi^+ + \frac{\delta}{2})} < 0$$

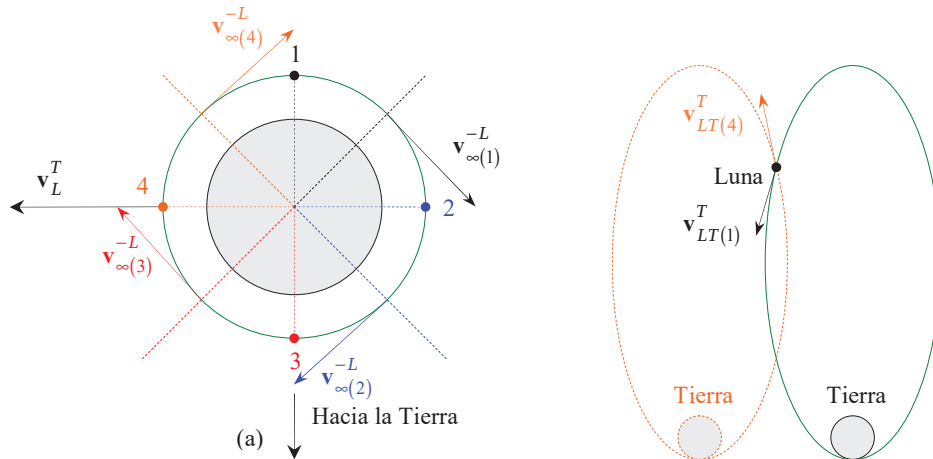
Esto se hace suponiendo siempre que los planos orbitales del vehículo y del objetivo son coplanares. En caso de que se desee una transferencia directa de un plano a otro, se aplica el problema de Lambert:

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{g}(\mathbf{r}_f - f\mathbf{r}_i) \quad \mathbf{v}_f = \frac{1}{g}(\dot{g}\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i)$$

Para ello utilicé un instante inicial en el cual los dos vehículos EDS y CEV (antes de acoplarse) se encontraban en órbita, y utilizando un valor de duración de transferencia $t = 500$ s propagué mediante el problema predictivo orbital, la cantidad de velocidad así como el ángulo de dirección necesarios para una transferencia directa.



Estos son: $\Delta v_i = 1.4727$ km/s y $\Delta v_f = 1.6604$ km/s con ángulos direccionales respectivos, $\varphi_i = 26.2002^\circ$ y $\varphi_f = 35.0353^\circ$. Ahora, suponiendo que se orbita la Luna en dirección retrógrada ($i = 180^\circ$) aplicando el razonamiento de enlace cónico podemos identificar únicamente dos puntos de impulso de retorno, el 1 y el 4.

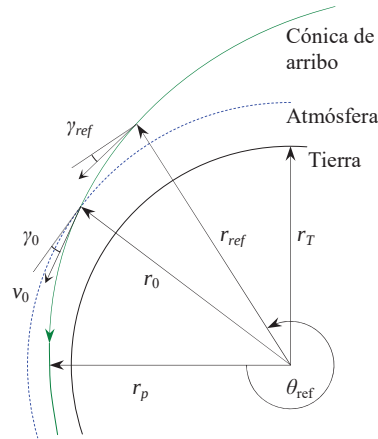


De estos el más conveniente sería el 1 por lo que la cantidad de velocidad necesaria para regresar a la Tierra es:

$$\Delta v_{LT} = \sqrt{\left(v_{ti}^T\right)^2 + \left(v_L^T\right)^2 + \left(v_{esc}^L\right)^2 - 2v_{ti}^T v_L^T \cos\left(\Phi^- + \frac{\delta_{ti}}{2}\right)} - v_c^L > 0$$

El caso es análogo en una órbita directa salvo que ahora los puntos permitidos son 4 y 3, y de estos el más adecuado es el 4.

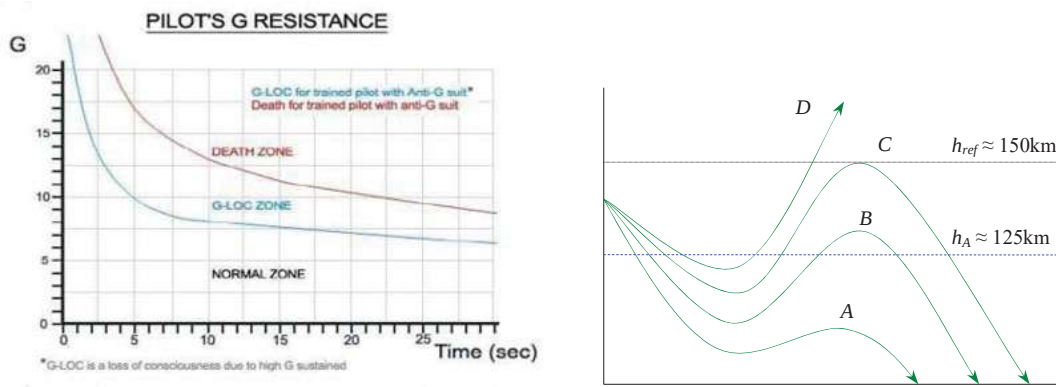
Una vez hecho esto, el siguiente paso es la determinación de un corredor de reingreso tripulado el cual debe incluir además de las ecuaciones del movimiento atmosférico, tres restricciones adicionales. Estas son: que nos permitan entrar a la Tierra con al menos dos roces con la atmósfera a la vez que las fuerzas axiales que experimente el piloto no excedan los valores permitidos y conduzcan al mismo a un estado inconsciente (G-LOC) y para el Sistema de Protección Térmica (SPT), un valor en la temperatura de radiación que quede muy por debajo de los límites de fundición del material con el cual fue construido.



Para ello y dado que las ecuaciones del ingreso atmosférico usualmente están dadas en términos del ángulo de trayectoria de ingreso, doy una expresión que lo determina en función de un parámetro accesible que es el radio del perigeo:

$$\gamma_{ref} = \text{Arccos} \left[\frac{r_p}{(r_T + h_{ref})} \sqrt{\frac{r_p (a_{tr} - r_{ref})}{r_{ref} (a_{tr} - r_p)}} \right]$$

Así, un problema abierto sería el siguiente: para un conjunto de valores de r_p obtener un conjunto de γ_{ref} y con estas es aplicar la recursividad predictiva hasta γ_0 donde ahora, las ecuaciones del movimiento atmosférico se hacen presentes hasta el momento en que la cápsula se impacta en la superficie. Con esto, el conjunto de valores iniciales γ_0, v_0, r_0 se utilizan para resolver las ecuaciones del vuelo atmosférico que sujetas a las restricciones de celda de altitud A , función piloto P de resistencia axial de gravedad y Temperatura de radiación T_{rad} (para un valor fijo determinado por el diseño del SPT) se obtiene un conjunto de trayectorias (dentro de un límite muy estrecho) que definen el corredor de reingreso.



$$A(h) \doteq \int_0^T \left(\frac{\Delta h_{ref}}{h_{ref}} \right)^2 u(\Delta h_{ref}) dt = 0$$

$$u(r) \doteq \begin{cases} 0 & \text{para } r < 0 \\ 1 & \text{para } r \geq 0 \end{cases}$$

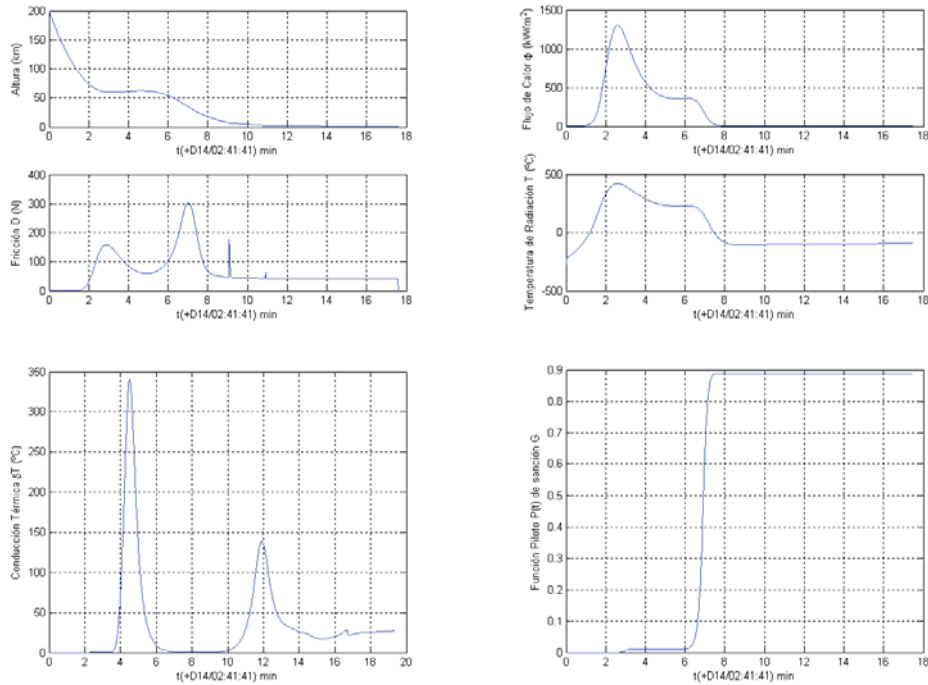
$$P(a_x) = \int_0^T \frac{1}{\tau(a_x)} dt \leq 1$$

$$\tau_P(a_x) \approx \frac{67767}{10} \left(\frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{mg_0} \right)^{-\frac{15241}{5000}}$$

Lo que hice yo fue determinar sólo un número que me permita cumplir dichas condiciones el cual fue $h_p = 31.5$ km. Este valor lo ajuste en la simulación para el reingreso de una cápsula espacial. No obstante, debido a que el modelo original del CEV-Orion incluía irregularidades en su tensor de inercia al momento del reingreso, utilicé para ello un modelo virtual creado por la Agencia Espacial Europea (ESA) denominado “Pegasus” (únicamente en la fase del reingreso). Este maneja como valores máximos: $\Phi_{\max} \approx 2150 \text{ kW/m}^2$ y $T_{r,\max} \approx 507 \text{ }^\circ\text{C}$.

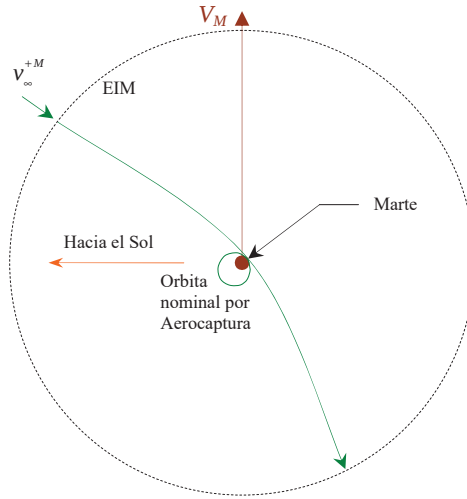


Así pues sujeto a estas restricciones las cuales se cumplen para el SPT propuesto por la ESA así como la función piloto de sanción G que se encuentra por debajo del 1 obtuve las restricciones satisfechas tanto para $A = 0$ como para $P \leq 1$ ($P \approx 0.889$).

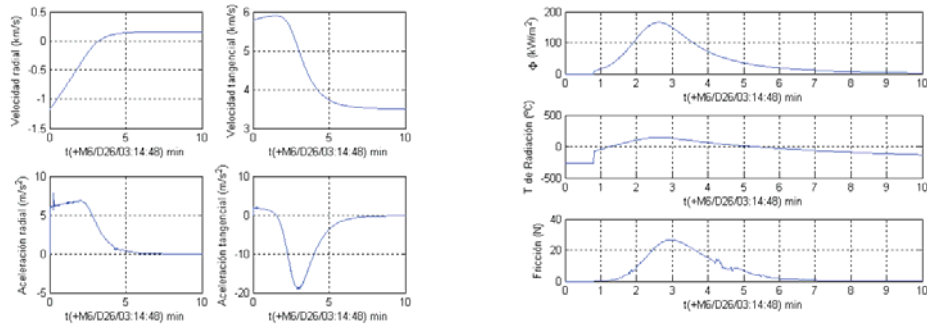


Por último, mediante la extensión de la aproximación de enlace cónico a problemas que van más allá del sistema Tierra-Luna, deduje la cantidad de velocidad necesaria para degenerar una hipérbola de arriba a una órbita nominal por aerocaptura asistida.

$$\Delta v_{Ac}^M = v_n^M - v_{Hp}^M \approx v_n^M - \sqrt{V_M^2 + V_{t_f}^2 - 2V_M V_{t_f} \cos\left(\frac{\delta_M^+}{2} + \Phi_M^+\right) + (v_{esc}^M)^2} < 0$$



Las condiciones necesarias para lograrla se obtienen de modo similar a la determinación del ángulo de referencia que nos lleva a definir el corredor de reingreso salvo que ahora las dos restricciones A y P son removidas y en su lugar se impone la restricción para el radio del apoapsis nominal: $r_a > R_M + h_{atm} = \text{Radio de Marte} + \text{Altura de la atmósfera de Marte}$.



La cantidad de temas abiertos para tesis dentro de esta área es desbordante. Tan solo por mencionar algunos, estos podrían ser:

- Ecuaciones de la Aproximación de Enlace cónico sujetas al problema de Gauss
- Propagación numérica de trayectorias dentro de las regiones de Hill
- Si se trata de Marte, determinación de regiones de Hill para un problema de 4 cuerpos
- Sistema de Control para el Esquema de Direccionamiento Terminal Automático que incluya el acople con la EEI.
- Determinación de los corredores de reingreso y de aerocaptura
- Análisis de Materiales y aleaciones para la construcción del SPT
- Simulación numérica de la regresión nodal y rotación apsidal sujetas a las anomalías gravitacionales empleando modelado del sistema NAVSTAR
- Simulación del MEF del SPT de algún vehículo en particular durante su etapa de reingreso
- Sistemas de Propulsión alternos para realizar vuelos suborbitales (interacción atmósfera y espacio exterior)
- Propagación numérica para determinar corredores de reingreso y de aerocapturas partiendo de la condición inicial y de referencia r_p .

Conclusiones

Primero di la deducción de las ecuaciones que rigen el movimiento de cualquier vehículo aeroespacial así como el tipo de trayectorias que deben ser definidas para poder realizar vuelos espaciales incluyendo lo necesario para maniobrar en ellas. También hice los códigos en Matlab necesarios para la obtención de la mayoría de las gráficas.

Después, para dar una aproximación a las torcas de control manual que se hacen presentes en las ecuaciones de Euler, mediante lecturas de datos del Orbiter que exporté a Matlab, obtuve gráficas que nos permitan apreciar cada uno de los pasos a seguir durante un vuelo tripulado de la Tierra a la Luna así como su generalización a cualquier cuerpo en el sistema solar. Además, estos datos (todos en forma matricial) los incorporé en algoritmos que programé en códigos de Matlab que se relacionan con: Las ecuaciones del movimiento atmosférico y transatmosférico, el problema de Lambert, el movimiento orbital relativo y los requisitos necesarios para definir un corredor de reingreso para una cápsula espacial proveniente de una órbita lunar baja. Estas gráficas ilustran el proceso desde el punto de vista didáctico que, para ser estudiadas más a fondo, sería necesario adentrarnos ya a la teoría de Control de postura en función del tiempo y con ello, darle continuidad a un tema abierto de tesis que nos proporcione entre varias cosas (para el caso atmosférico únicamente): un algoritmo computacional en que sean dadas todas las posibles trayectorias para realizar (atendiendo distintos parámetros de diseño) lanzamientos y reingresos. Una vez hecho eso se podría incorporar dicho código, en la creación de Sistemas de Control Automático que nos lleven a crear la aviónica adecuada (microprocesadores programados) para poder realizar lanzamientos autodirigidos en vehículos de lanzamiento reales.

Referencias

- [1] Anderson Jr J. D. *Introduction to Flight*. Second Edition. McGraw-Hill, Book Company (1985). 438 pp. Maryland, USA.
- [2] Bate R. R, Mueller D. & White J. *Fundamentals of Astrodynamics*. Department of Astronautics and Computer Science of the United States Air Force Academy. Dover Publications (1971), 448 pp. New York, USA.
- [3] Born. H. G., Notes: *Design of an interplanetary mission* using patch conics and a Hohmann transfer orbit, (2005), 4 pp.
- [4] Britting K. R. *Inertial Navigation Systems Analysis*. Wiley Interscience, Somerset, (1971), New Jersey, USA.
- [5] China C. S. Notas: *Las formulas de la trigonometría esférica*. (2002), pp 19. Marchena, España.
- [6] Gallais P. *Atmospheric Re-entry Vehicle Mechanics*. Springer – Verlag (2007). 353 pp. Berlin, Germany.
- [7] Goldstein H., Poole C & Safko J. *Classical Mechanics*. Third Edition. Addison Wesley (2000), 646 pp. New York USA.
- [8] White F. M. *Mecánica de Fluidos*. Mc. Graw Hill. Inc. (1979). Versión traducida al español (1983), 757 pp. Rhode Island, USA.

- [9] Tewari A. *Atmospheric and Space Flight Dynamics*. Modelling and Simulation with MATLAB and simulink. Birkhauser Edition (2007), 556 pp. Boston USA.
- [10] James M. Celestial Mechanics Notes P.4: *The Circular Restricted Three Body Problem*. (2006), pp. 65.
- [11] Jensen J., Townsend G., Kraft D., Barclay E. & Magnus J. *Orbital Flight Handbook* 1. Volume I, Part I. Basic Techniques and Data. Prepared for the Marshall Space Flight Center (1963), 340 pp. Huntsville Alabama, USA.
- [12] Jensen J., Townsend G. Kraft D. Barclay E. & Magnus J. *Orbital Flight Handbook* 2. Volume I, Part II. Mission Sequencing Problems. Prepared for the Marshall Space Flight Center (1963), 438 pp. Huntsville Alabama, USA.
- [13] McSorley A., Paton M. & Irving B. *Mars for Less*. Add-on Package for Orbiter space flight simulator (2008), 12 pp.
- [14] Muzyka A. & Elmore B. H. *Optimum Earth Re-entry Corridors*. Raytheon Comp. Prepared for the George C. Marshall Space Flight Center, NASA (1966), 108 pp. Washington D.C. USA.
- [15] Nakamura S. *Métodos numéricos Aplicados con Software*. Pearson Education. (1992), 563 pp. México
- [16] Nerem S. *Spaceflight Dynamics*. Interplanetary Navigation. University of Colorado. Notes: ASEN 5050, (2004), pp 13, Boulder Colorado, USA.

- [17] Nima. *World Geodetic System 84*. National Imagery and Mapping Agency. Technical Report. Department of Defense. Third Edition. USA.
- [18] Polli D. DeltaGliderIV. Software and user Manual. (2003, 2007), pp. 26. Vulbens France.
- [19] Regan, F. J. *A Simplified Variation of Parameters Solution for The Motion of an Arbitrary Torqued Mass Asymmetric Rigid Body*. University of Cincinnati (2000). 115 pp. Cincinnati, USA.
- [20] Regan, F. J., *Dynamics of Atmospheric Reentry*. AIAA Education Series (1993), Washington D. C. USA.
- [21] Reppert T. R. Notes: *Extending the Patched-Conic Approximation to the RFBP*. Department of Aerospace and Ocean Inst. Virginia Polytechnic and State University (2006), 14 pp. Blacksburg, Vandenberg, USA.
- [22] Ross S. D. *Cylindrical Manifolds and Tube Dynamics, in the restricted TBP*. California Institute of Technology (2004), 157 pp. Pasadena Cal. EU.
- [23] Schweiger M., ORBITER. *Space Flight Simulator P1 Edition*. Software user Manual and technical information, UCL (2006), pp. 123. London UK.
- [24] Suárez, A. M.C., Notas del Curso de Temas Selectos de Física – *Mecánica del Sólido Rígido*. Facultad de Ciencias UMSNH (2004), 87 pp. Morelia Mich, México.
- [25] Suárez, A. M.C., Notas del Curso de *Mecánica Teórica*. Facultad de Ciencias UMSNH (2006), 45 pp. Morelia Mich, México.

- [26] Suárez, A. M.C., Notas del Curso de Calculo Complejo - *Quaternios*. Facultad de Ciencias UMSNH (2008, 2009), 45 pp. Morelia Mich, México.
- [27] Young J.B. Notes: *Molecular Thermodynamics*. Cambridge University Engineering Department, (1999, 2000), 186 pp. USA.

Agradecimientos

A mi madre Margarita Herrejón, cuya atención y apoyo moral son invaluable para mí y que el agradecimiento que le debo es infinitamente superior a las simples palabras de gratitud que pudiera darle en toda mi vida. Además de que fue ella quien durante mi infancia encendió un peculiar interés en mí con tan solo mostrarme de un libro de texto de educación básica, unas imágenes de las misiones espaciales de los años 60's.

A los Drs. Mario Cesa Suárez Arriaga, Francisco Domínguez Mota y José Gerardo Tinoco Ruiz por su amabilidad, atención y apoyo que me brindaron durante el tiempo que trabajé en la elaboración de esta tesis que sin duda, habrá de ser de utilidad y fuente de inspiración para las actuales y futuras generaciones de nuestra amada Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. También agradezco a todos y cada uno de mis profesores de esta facultad que hicieron posible un logro importante más en mi vida al enseñarme a imponerme disciplina y retos para alcanzar la excelencia académica que debe definir propiamente a cada estudiante de la Facultad.

A mi abuelita Antonia que ha sido para mí, una ayuda insustituible al preocuparse día con día en mi superación personal. A mis tíos Estanislao, Gloria, Ma. de los Ángeles por su apoyo. A mi hermano Ricardo Sánchez por enseñarme a enfocar las cosas de la vida desde un criterio más humano, al igual que el resto de mis otros familiares que han contribuido directa o indirectamente con mi porvenir.

A mis compañeros Carmen Eridani, Miguel Ángel, Esmeralda que de alguna manera, el destino quiso que nos encontráramos para ayudarnos mutuamente en esta ardua y digna labor de ser estudiantes de la Facultad de Físico matemáticas así como otros más que conocí recientemente y que fueron para mí, fuente de motivación al notar en ellos el mismo sueño que ahora he plasmado en estas hojas.