Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Espacios irresolubles numerables e invariantes cardinales del continuo.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Jonathan Cancino Manríquez

Director: Dr. David Meza Alcántara

Morelia, Michoacán - agosto de 2013.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Un espacio topológico (X, τ) sin puntos aislados es *resoluble* si existen dos subconjuntos densos ajenos, y en otro caso se dice que es *irresoluble*. El espacio de los números racionales es un ejemplo de espacio resoluble. En general, es fácil ver que cualquier espacio sin puntos aislados con π-peso numerable es resoluble. Por lo tanto un espacio irresoluble necesariamente tiene π-peso no numerable.

Un espacio topológico (X, τ) sin puntos aislados, numerable, regular e irresoluble será llamado un espacio RNI. Usando sólamente los axiomas de ZFC, no es difícil construir un espacio RNI (ver observación 3.1.3, por ejemplo). Claramente CH implica que todo espacio RNI tiene π-peso $\mathfrak{c}$, y de hecho MA también implica que todos los espacios RNI tienen π-peso $\mathfrak{c}$. M. Scheepers observa en [10] que el mínimo π-peso posible para un espacio RNI tiene por cotas inferior y superior a los invariantes $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{i}$, respectivamente, y pregunta si es el caso que el mínimo π-peso posible para un RNI coincide con el invariante $\mathfrak{r}$. En el Capítulo 2 probaremos que la desigualdad estricta entre $\mathfrak{r}$ y el π-peso de un espacio RNI es consistente con ZFC, lo cual contesta en forma negativa la pregunta de Scheepers.

El contenido del presente documento se encuentra dividido de la siguiente manera: el el Capítulo 1 se presentan algunos conceptos básicos y se definen los invariantes cardinales que se encuentran en relación con aquellos descritos en los párrafos precedentes, y por último se prueban algunas relaciones entre ellos. El objeto de estudio del Capítulo 2 es principalmente el invariante cardinal $\mathfrak{irr}$, para para lo cual introducimos el invariante cardinal $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ y probamos las desigualdades $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} \leq \mathfrak{irr}$. Haciendo uso de estos resultados concluimos que en el modelo de Miller es cierta la desigualdad $\mathfrak{r} < \mathfrak{irr}$. Después probamos que el principio de adivinanza $\diamondsuit(\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}})$ implica $\mathfrak{irr} = \omega_1$. Por último, probamos la consistencia de $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$.

Suponemos al lector familiarizado con los conceptos básicos referentes a invariantes cardinales y con los resultados más comunmente conocidos respecto a la técnica del forcing.

Capítulo 2

Algunos invariantes cardinales del continuo.

En la literatura existe una amplia cantidad de invariantes cardinales que han sido estudiados a lo largo de muchos años. En [3], A. Blass hace un estudio detallado y exhaustivo de los invariantes cardinales que son usualmente conocidos. Nosotros presentamos aquí sólo aquellos que nos resultarán de interés.

2.1. Los invariantes $\mathfrak{d}$ y $\mathsf{cof}(\mathcal{M})$.

Recordemos algunas definiciones. Un conjunto *preordenado* es un par ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ donde $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva sobre $\mathbb{P}$. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ es cofinal en $(\mathbb{P}, \leq)$, si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in \mathcal{F}$ tal que $p \leq q$. Si $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto preordenado, definimos su *cofinalidad* $\mathsf{cof}(\mathbb{P})$ como la mínima cardinalidad de una familia cofinal, es decir,

$$\mathsf{cof}(\mathbb{P}) = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : (\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}) \wedge (\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in \mathcal{F})(p \leq q)\}$$

Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal* si satisface lo siguiente:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$
2. Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.
3. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

Decimos que $\mathcal{I}$ es *propio* si $[X]^{<\aleph_0} \subseteq \mathcal{I}$, y es σ-ideal si es cerrado bajo uniones numerables.

Consideraremos a los ideales como conjuntos preordenados en los cuales la relación de orden es la contención, es decir, para todo $A, B \in \mathcal{I}$, $A \leq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es *nunca denso* si su cerradura $\overline{Y}$ tiene interior vacío, y es llamado *magro* si es unión numerable de conjuntos nunca densos. Denotaremos por $\mathsf{nwd}(X)$ a la colección de subconjuntos nunca densos de X, y por $\mathcal{M}(X)$ a la familia de subconjuntos magros de X. Notemos que si X es un espacio métrico completo, entonces $\mathsf{nwd}(X)$ es un ideal propio, y $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal propio, gracias al Teorema de Categoría de Baire. Si $X = 2^\omega$, dotado de la topología producto, escribimos simplemente $\mathcal{M}$ para $\mathcal{M}(2^\omega)$, mientras que mantendremos el uso de $\mathsf{nwd}(2^\omega)$ para denotar al ideal de subconjuntos nunca densos de 2^ω, y reservamos el uso de nwd para denotar al ideal de subconjuntos nunca densos de los racionales.

Denotaremos por ω^ω al conjunto de todas las funciones que tienen por dominio y contradominio al conjunto de los números naturales. Es común definir la siguiente relación de preorden sobre ω^ω:

$$g \leq^* f \iff (\exists n \in \omega)(\forall k \geq n)(g(k) \leq f(k))$$

Una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ es dominante si para cada $g \in \omega^\omega$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$. Si $g(n) \leq f(n)$ para todo número natural, escribimos simplemente $g \leq f$. Notemos que la noción de familia dominante coincide en este caso con la noción de familia cofinal. La cofinalidad de $(\omega^\omega, \leq^*)$ es comúnmente conocida como el número de dominación y es denotado por $\mathfrak{d}$, es decir,

$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : (\forall g \in \omega^\omega)(\exists f \in \mathcal{F})(g \leq^* f)\} = \mathsf{cof}(\omega^\omega, \leq^*)$$

Recordemos que una función $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es una función de Tukey entre dos preórdenes $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ si existe otra función $\varphi^* : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$ tal que para todo $a \in \mathbb{P}$ y $b \in \mathbb{Q}$, si $\varphi(a) \leq b$ entonces $a \leq \varphi^*(b)$. Recordemos también que si $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es una función de Tukey, entonces $\mathsf{cof}(\mathbb{P}) \leq \mathsf{cof}(\mathbb{Q})$.

Teorema 2.1.1. ([2]) $\mathfrak{d} \leq \mathsf{cof}(\mathcal{M})$.

Demostración. Definimos una función $\varphi : \omega^\omega \to \mathcal{M}$ como sigue: dada $f \in \omega^\omega$, sea $\tilde{f}$ una función creciente tal que $f \leq \tilde{f}$. Definimos $\varphi(f) = \{g \in$

$\omega^\omega : g \leq^* \tilde{f}\}$. Afirmamos que φ es una función de Tukey entre $(\omega^\omega, \leq^*)$ y $\mathcal{M}$. Claramente $\varphi(f) \in \mathcal{M}$. Definiremos φ^* únicamente sobre los conjuntos magros F_σ, y haciendo uso del Axioma de Elección podemos extenderla a todo el ideal $\mathcal{M}$. Sea $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ un conjunto magro F_σ, donde $\{F_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente de cerrados nunca densos. Recursivamente definimos una sucesión creciente de números naturales k_n y de sucesiones finitas s_n de la siguiente manera: para $n = 0$ hacemos $k_0 = 0$ y $s_0 = \emptyset$. Suponiendo definidos k_n y s_n, definimos k_{n+1} como sigue:

$$k_{n+1} = k_n + |s_n| + \text{máx}(\{s_n(i) : i < |s_n|\} \cup \{0\}) + 1$$

y tomamos s_{n+1} de forma que para todo $t \in k_{n+1}^{\leq k_{n+1}}$ $\langle t^\frown s_{n+1}\rangle \cap F_n = \emptyset$. Ahora definimos $\varphi^*(F)(n) = \text{máx}\{s_n(i) : i \leq |s_n|\} + 1$. Veamos que φ^* testifica que φ es una función de Tukey, es decir, $f \leq^* \varphi^*(F)$ siempre que $\varphi(f) \subseteq F$. Probaremos la contrapositiva. Sean $f \in \omega^\omega$ y F conjunto magro F_σ tales que $f \not\leq^* \varphi^*(F)$. Entonces $X = \{i \in \omega : \varphi^*(F)(i) < f(i)\} = \{i_n : n \in \omega\}$ es infinito. Definamos la siguiente función:

$$h = \underbrace{0^\frown 0^\frown \ldots ^\frown 0}_{k_{i_0} veces} {}^\frown s_{i_0}^\frown \underbrace{0^\frown 0^\frown \ldots ^\frown 0}_{k_{i_1} - k_{i_0} - |s_{i_0}| veces} {}^\frown s_{i_1}^\frown \ldots$$

Es claro que $h \notin F_{i_l}$ para una infinidad de $l \in \omega$, por lo que $h \notin F$. Veamos que $h \in \varphi(f)$. Solo hay que verificar que $h(j) \leq \tilde{f}(j)$ para todos los $j \in \omega$ tales que $h(j) \neq 0$. Sea j tal que $h(j) \neq 0$. Entonces existen l y m tales que $h(j) = s_{i_m}(l)$, por lo que tenemos $h(j) = s_{i_m}(l) \leq \text{máx}\{s_{i_m}(i) : i < |s_{i_m}|\} < \varphi^*(i_m) < f(i_m)$. Por lo tanto $h \in \varphi(f) \setminus F$. $\square$

2.2. Los invariantes $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{r}_\mathbb{Q}$.

Definición 2.2.1. Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, para $F, G \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ ajenos, $F \neq \emptyset$, definimos la combinación booleana del par (F, G) como $B(F, G) = \bigcap F \setminus \bigcup G$. Notemos que por lo general $B(F, G) \neq B(G, F)$. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ es independiente si para cualesquiera $F, G \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ajenos no vacíos, se tiene $B(F, G)$ es infinito, y es independiente maximal si es maximal respecto a la contención. El número de independencia $\mathfrak{i}$ es la mínima cardinalidad de una familia independiente maximal.

En la siguiente definición $Dense(\mathbb{Q})$ denota a la familia de todos los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$ ordenado por contención, es decir, $A \leq B$ si y solo si

$A \subseteq B$.

Definición 2.2.2. ([1]) Una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ es $Dense(\mathbb{Q})$-reaping si para cualquier $A \in Dense(\mathbb{Q})$ existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $R \setminus A \notin Dense(\mathbb{Q})$ ó $A \cap R \notin Dense(\mathbb{Q})$. El número $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ es la mínima cardinalidad de una familia $Dense(\mathbb{Q})$-reaping.

Proposición 2.2.3. ([1]) $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}$

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia independiente maximal de mínima cardinalidad. Tomemos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ numerable, y consideremos $\mathcal{B} = \{B(F, G) : F, G \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \wedge \ F \cap G = \emptyset\}$ como base de cerrado-abiertos para una topología τ. En caso de ser necesario, podemos hacer cambios finitos a los elementos de $\mathcal{C}$ para que τ sea T_2. Nótese que el hecho de que $\mathcal{C}$ es independiente implica que la topología τ no tiene puntos aislados. Dado que la base $\mathcal{B}$ está formada por conjuntos cerrado-abiertos, la topología τ es 0-dimensional. Por lo tanto, debido al teorema de Sierpiński, (ω, τ) es homeomorfo al conjunto de los números racionales con la topología usual. Afirmamos que la familia $\mathcal{R} = \{B(G, H) : G, H \in [\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}]^{<\omega} \wedge G \neq \emptyset \wedge H \cap G = \emptyset\}$ es una familia $Dense(\mathbb{Q})$-reaping. Dado que $\mathcal{F}$ es independiente, para cualesquiera $F, G \in [\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}]^{<\omega}$ ajenos no vacíos, tenemos que $B(F, G)$ es un conjunto denso, por lo que $\mathcal{D} \in Dense(\mathbb{Q})$. Para $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$, sean $F_0 = \mathcal{C} \cap F$, y $F_1 = F \setminus \mathcal{C}$. Sea $X \in Dense(\mathbb{Q})$. Si $X \in \mathcal{F}$, no hay nada que hacer. Si $X \notin \mathcal{F}$, entonces existen $G, H \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ ajenos no vacíos tales que $X \cap B(G, H) = \emptyset$, o bien, $B(G, H) \setminus X = \emptyset$. Notemos que podemos suponer $G \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Como $B(G, H) = B(G_0, H_0) \cap B(G_1, H_1)$, siendo $B(G_0, H_0) \in \mathcal{B}$, concluimos que en el primer caso $X \cap B(G_1, H_1)$ no es denso y en el segundo caso $B(G_1, H_1) \setminus X$ no es denso. Claramente $B(G_1, H_1) \in \mathcal{R}$, por lo que $\mathcal{R}$ es una familia $Dense(\mathbb{Q})$-reaping. $\square$

Lema 2.2.4. ([1]) *Para cada conjunto $X \in \mathcal{M}$, existe un conjunto nunca denso Y tal que $X \subseteq \{f \in 2^\omega : (\exists g \in Y)(f =^* g)\}$.*

Demostración. Sea X un conjunto magro y $\{F_n : n \in \omega\}$ sucesión de conjuntos cerrados nunca densos que cubren a X. Sea $\{s_n : n \in \omega\}$una anticadena infinita en $(2^{<\omega}, \subseteq)$, y consideremos los conjuntos $G_n = \{[f \setminus (f \upharpoonright |s_n|)] \cup s_n : f \in F_n\}$. Entonces $Y = \bigcup_{n\in\omega} G_n$ es nunca denso por ser la unión de conjuntos nunca densos separados por abiertos ajenos (ya que$F_n \subseteq \langle s_n \rangle$ para todo n, y $\{s_n : n \in \omega\}$ es anticadena). Claramente, si $f \in F_n$ existe $g \in G_n$ tal que $f =^* g$, por lo que tenemos $X \subseteq \{f \in 2^\omega : (\exists g \in Y)(f =^* g)\}$. $\square$

Lema 2.2.5. ([1]) $\mathsf{cof}(\mathsf{nwd}(2^\omega)) = \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})$.

Demostración. La desigualdad $\mathsf{cof}(\mathsf{nwd}(2^\omega)) \geq \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})$ es clara: si $\{F_\alpha : \alpha \in \lambda\} \subseteq \mathsf{nwd}(2^\omega)$ es una familia cofinal, entonces $\{\mathbb{Q} \cap F_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ es una familia cofinal en nwd. Sea ahora $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{nwd}$ una familia cofinal, afirmamos que $\{\bar{F} : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia cofinal en $\mathsf{nwd}(2^\omega)$. En efecto, dado $X \in \mathsf{nwd}(2^\omega)$ construimos una sucesión decreciente de abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ y una sucesión de conjuntos finitos $\{F_n : n \in \omega\}$ como sigue:

a) Sea $V_0, \ldots, V_k$ una cubierta de $\overline{X}$ por abiertos, donde cada V_i tiene diámetro menor que $1/2$. Hacemos $U_0 = V_0 \cup \ldots \cup V_n$ y $F_0 \subseteq U_0 \cap \mathbb{Q}$ finito tal que $F_0 \cap V_i \neq \emptyset$ para cada i.

b) Supongamos definidos U_i y F_i para cada $i \leq n$. Sea $V_0, \ldots, V_k$ cubierta de $\overline{X}$ por abiertos con diámetro menor que $1/n$, y además $\overline{V_0 \cup \ldots \cup V_k} \cap \bigcup_{i \leq n} F_n = \emptyset$. Hacemos $U_{n+1} = V_0 \cup \ldots \cup V_k$, y $F_{n+1} \subseteq U_{n+1} \cap \mathbb{Q}$ finito tal que para cada $i \leq k$, $F_{n+1} \cap V_i \neq \emptyset$.

La construcción nos asegura que $F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ es nunca denso (de hecho es discreto) y también $\overline{X} = \overline{F}$. Como $\mathcal{F}$ es cofinal, existe $H \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq H$, y por lo tanto $X \subseteq \bar{F} \subseteq \bar{H}$, por lo que la familia $\{\bar{H} : H \in \mathcal{F}\}$ es un familia cofinal en $\mathsf{nwd}(2^\omega)$. $\square$

Definimos provisionalmente el invariante μ como la mínima cardinalidad de una familia $\mathcal{D}$ de conjuntos densos en $\mathbb{Q}$ tales que para todo $X \subseteq \mathbb{Q}$ nunca denso, existe $D \in \mathcal{D}$ ajeno con X, es decir,

$$\mu = \text{mín}\{|\mathcal{D}| : (\mathcal{D} \subseteq Dense(\mathbb{Q}))(\forall X \in \mathsf{nwd})(\exists Y \in \mathcal{D})(X \cap Y = \emptyset)\}$$

Lema 2.2.6. ([1]) $\mathfrak{d} \leq \mu$.

Demostración. Sean $\kappa < \mathfrak{d}$, $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos en $\mathbb{Q}$, $\{q_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$ y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos ajenos dos a dos. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos una función f_α como $f_\alpha(n) = \text{mín}\{k : q_k \in D_\alpha \cap U_n\}$. Como $\kappa < \mathfrak{d}$, existe $g \in \omega^\omega$ que no es acotada por $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea $X = \bigcup_{n \in \omega}\{q_k : q_k \in U_n \wedge k \leq g(n)\}$. Entonces X es un conjunto discreto, por ser unión de conjuntos discretos separados por abiertos ajenos, e intersecta infinitamente a cada D_α, ya que si $f_\alpha(n) < g(n)$ entonces $\{q_k : q_k \in U_n \wedge k \leq g(n)\} \cap D_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Lema 2.2.7. ([1]) $\mathsf{cof}(\mathsf{nwd}) = \mu$.

Demostración. Es fácil ver que $\mu \leq \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})$, ya que si $\{X_\alpha : \alpha \in \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})\}$ es cofinal entonces $\{\mathbb{Q}\setminus X_\alpha : \alpha \in \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})\}$ testifica $\mu \leq \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})$. Probemos ahora la desigualdad $\mathsf{cof}(\mathsf{nwd}) \leq \mu$. Sea $\{D_\alpha : \alpha < \mu\}$ una familia de densos en $\mathbb{Q}$ que testifica la minimalidad de μ, y $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ una familia $\leq$-dominante. Para cada α, sea $\{d_{\alpha,n} : n \in \omega\}$ una enumeración de D_α. Para cada $(\alpha, \beta) \in \mu \times \mathfrak{d}$, Definimos $F_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbb{Q}$ como:

$$F_{\alpha,\beta} = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\in\omega} B\left(d_{\alpha,n}, \frac{1}{f_\beta(n)}\right)$$

□

Entonces $F_{\alpha,\beta}$ es cerrado nunca denso, y como $\mathfrak{d} \leq \mu$, la familia $\{F_{\alpha,\beta} : (\alpha, \beta) \in \mu \times \mathfrak{d}\}$ tiene cardinalidad μ. Afirmamos que $\{F_{\alpha,\beta} : (\alpha, \beta) \in \mu \times \mathfrak{d}\}$ es una familia cofinal en nwd. Sea $N \in \mathsf{nwd}$. Entonces existe $\alpha \in \mu$ tal que $\overline{N} \cap D_\alpha = \emptyset$. Definimos $g \in \omega^\omega$ de forma que para cada $n \in \omega$, $\frac{1}{g(n)} < d(\overline{N}, d_{\alpha,n})$. Sea $\beta \in \mathfrak{d}$ tal que $g \leq f_\beta$. Entonces $\overline{N} \subseteq F_{\alpha,\beta}$, ya que para cada $n \in \omega$, $B\left(d_{\alpha,n}, \frac{1}{f_\beta(n)}\right) \subseteq B\left(d_{\alpha,n}, \frac{1}{g(n)}\right)$ y $B\left(d_{\alpha,n}, \frac{1}{g(n)}\right) \cap \overline{N} = \emptyset$.

Lema 2.2.8. ([1]) $\mu \leq \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$.

Demostración. Fijemos $\kappa < \mu$ y $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familia de densos en $\mathbb{Q}$. Basta probar que existen conjuntos A, B densos ajenos cada uno de los cuales tiene intersección densa con cada D_α. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una enumeración de una base para $\mathbb{Q}$. Recursivamente construimos dos sucesiones $\{F_n : n \in \omega\}$ y $\{G_n : n \in \omega\}$ de conjuntos nunca densos que satisfagan lo siguiente:

1. Para todo $n \in \omega$, $F_n, G_n \subseteq U_n$.
2. Para todo $n \in \omega$ y para todo $\alpha \in \kappa$, $D_\alpha \cap F_n \neq \emptyset$.
3. Para todo $n \in \omega$, $\bigcup_{i\leq n} F_i \cap \bigcup_{i\leq n} G_i = \emptyset$.
4. Para todo $n \in \omega$, $F_n, G_n \in \mathsf{nwd}$.

La construcción la llevamos a cabo de la siguiente manera: supongamos construidos F_i, G_i para cada $i \leq n$. Tomemos $V_{n+1} = U_n \setminus \left(\bigcup_{i\leq n} \overline{F}_i \cup \bigcup_{i\leq n} \overline{G}_i\right)$. Entonces V_{n+1} es abierto y para todo α el conjunto $V_{n+1} \cap D_\alpha$ es denso en V_{n+1}. Como $\kappa < \mu$, existe $X \subseteq V_{n+1}$nunca denso que intersecta todos los $V_{n+1} \cap D_\alpha$. Definimos $F_{n+1} = X$. Para definir a G_{n+1} aplicamos el mismo argumento pero esta vez con $V'_{n+1} = U_n \setminus \left(\bigcup_{i\leq n+1} \overline{F}_i \cup \bigcup_{i\leq n} \overline{F}_i\right)$.

Una vez construidas las dos sucesiones, sean $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y $B = \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Entonces A y B son ajenos y densos en $\mathbb{Q}$, y además para todo $\alpha \in \kappa$, $D_\alpha \cap A$ y $D_\alpha \cap B$ son densos. □

Corolario 2.2.9. ([1])$\mathsf{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}$.

Demostración. De Lema 2.2.4 se sigue que $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathsf{cof}(\mathsf{nwd}(2^\omega))$, y junto con Lema 2.2.5 tenemos $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathsf{cof}(\mathsf{nwd})$. De los Lemas 2.2.7 y 2.2.8 tenemos que $\mathsf{cof}(\mathsf{nwd}) \leq \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$. Por la Proposición 2.2.3 tenemos $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}$. Juntando todo obtenemos $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{i}$. $\square$

Capítulo 3

Irresolubilidad en espacios numerables.

En [10], M. Scheepers define el número de irresolubilidad, que denotaremos por $\mathfrak{irr}$, como el mínimo π-peso[1] posible para un espacio RNI (un espacio RNI es un espacio topológico sin puntos aislados, numerable, regular e irresoluble), es decir,

$$\mathfrak{irr} = \text{mín}\{\pi w(\omega, \tau) : \tau \subseteq \mathcal{P}(\omega) \wedge (\omega, \tau) \textit{ es un espacio RNI}\}$$

donde $\pi w(X)$ es el π-peso del espacio topológico X. Scheepers observa que $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{irr} \leq \mathfrak{i}$, y pregunta si es el caso que $\mathfrak{irr}$ y $\mathfrak{r}$ sean iguales. En este capítulo respondemos negativamente a la pregunta anterior. Definimos el invariante $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ y probamos que $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} \leq \mathfrak{irr}$. Dado que en el modelo de Miller se cumple la desigualdad $\mathfrak{r} < \mathfrak{d}$, tenemos como consecuencia la consistencia de la desigualdad $\mathfrak{r} < \mathfrak{irr}$. Después probaremos que el principio de adivinanza $\diamondsuit(\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}})$ implica la igualdad $\mathfrak{irr} = \omega_1$. Por último probaremos que es relativamente consistente con ZFC la desigualdad $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$.

3.1. El número $\mathfrak{irr}$.

Probaremos primero la observación de Scheepers mencionada anteriormente.

[1] Recordemos que el π-*peso* de un espacio topológico (X, τ) es la mínima cardinalidad de una familia de abiertos $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que para todo $V \in \tau$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$, mientras que el *peso* es la mínima cardinalidad de una base para la topología.

Proposición 3.1.1. $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{irr} \leq \mathfrak{i}$.

Demostración. Probemos la desigualdad $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{irr}$. Sea τ una topología regular e irresoluble sobre ω, y $\mathcal{B}$ una π-base de mínima cardinalidad para τ. Sea $X \subseteq \omega$ arbitrario. Si X no es denso, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap X = \emptyset$. Si X es denso, entonces $int_\tau(X) \neq \emptyset$, y por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq X$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una familia reaping. La desigualdad $\mathfrak{irr} \leq \mathfrak{i}$ se sigue de la siguiente proposición. □

Proposición 3.1.2. ([5]) *$\mathfrak{i}$ es igual al mínimo cardinal κ para el cual existe $X \subseteq 2^\kappa$ que es un espacio RNI con la topología de subespacio.*

Demostración. Sea $\lambda = \text{mín}\{\kappa : (\exists X \subseteq 2^\kappa)|X| = \aleph_0 \wedge X \textit{ es un espacio RNI}\}$. Veamos la desigualdad $\lambda \leq \mathfrak{i}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia independiente maximal de cardinalidad mínima. Buscamos un conjunto $X \subseteq 2^\mathcal{F}$ denso, numerable e irresoluble. Definimos $X = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq 2^\mathcal{F}$ donde $x_n(A) = 1$ si y sólo si $n \in A$. Veamos que X es denso y es irresoluble con la topología de subespacio. Sea $h \in Fn(\mathcal{F}, 2)$ y $U_h = \{g \in 2^\mathcal{F} : h \subseteq g\}$ el abierto básico definido por h. Tomemos $G = \{A \in \mathcal{F} : h(A) = 1\}$ y $H = dom(h) \setminus G$. Notemos que podemos suponer que G es no vacío. Como $\mathcal{F}$ es idependiente, existe $n \in B(G, H)$, y por la definición de x_n tenemos $x_n \in U_h$ por lo que X es denso. Sea $Z \subseteq X$ denso, veamos que $X \setminus Z$ no es denso. Sea $\tilde{Z} = \{n \in \omega : x_n \in Z\}$. Podemos suponer que $\tilde{Z} \notin \mathcal{F}$. Por lo tanto existen $G, H \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ ajenos, $G \neq \emptyset$, tales que $B(G, H) \subseteq \tilde{Z}$ o bien $B(G, H) \subseteq \omega \setminus \tilde{Z}$. Notemos que el último caso es imposible, ya que si definimos f tal que $dom(f) = G \cup H$ y $f(A) = 1$ si y sólo si $A \in G$, entonces el abierto básico U_f es ajeno con Z lo que contradice que Z era denso. Por lo tanto debe ser $B(G, H) \subseteq \tilde{Z}$, y así $X \cap U_f \subseteq Z$, lo cual implica que $X \setminus Z$ no es denso.

Probemos ahora la desigualdad $\mathfrak{i} \leq \lambda$. Sea κ mínimo tal que existe $X \subseteq 2^\kappa$ RNI denso, y sea $\{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración de X. Definimos $F_\alpha = \{n \in \omega : x_n(\alpha) = 1\}$. Afirmamos que $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia independiente maximal. Verifiquemos la independencia de $\mathcal{F}$. Sean $H, G \in [\kappa]^{<\omega}$ ajenos no vacíos. Sea $f \in Fn(\kappa, 2)$ definida como $dom(f) = G \cup H$ y $f(\alpha) = 1$ si y sólo si $\alpha \in G$. Entonces $X \cap U_f \neq \emptyset$, y para cada $x_m \in X \cap U_f$ tenemos $m \in \bigcap_{\alpha \in H} F_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in G} F_\beta$. Veamos que $\mathcal{F}$ es maximal. Sea $Z \subseteq \omega$, y tomemos $\tilde{Z} = \{x_n : n \in Z\}$. Como X es irresoluble, entonces $int(\tilde{Z}) \neq \emptyset$ o $int(X \setminus \tilde{Z}) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos $int(\tilde{Z}) \neq \emptyset$. Sea $f \in Fn(\kappa, 2)$ tal que $U_f \subseteq \tilde{Z}$. Definimos $H = \{\alpha \in dom(f) : f(\alpha) = 1\}$, y $G = dom(f) \setminus H$. Entonces $\bigcap_{\alpha \in H} F_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in G} F_\beta \subseteq Z$. □

Observación 3.1.3. De hecho la primer parte de la proposición anterior nos dice que siempre que tenemos una familia independiente maximal $\mathcal{F}$, podemos construir un espacio RNI de peso a lo más $|\mathcal{F}|$. Dado que en ZFC se puede probar que existen familias independientes de cardinalidad $\mathfrak{c}$, tenemos que ZFC prueba que existen espacios RNI de peso a lo más $\mathfrak{c}$.

La siguiente proposición nos dice que el papel que juega el π-peso en la definición de $\mathfrak{irr}$ no es del todo esencial, ya que podemos sustituirlo por el peso y seguir obteniendo el mismo invariante.

Proposición 3.1.4. *El número de irresolubilidad es igual al mínimo peso de un espacio topológico RNI.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{irr}$ es igual o menor al mínimo peso de un espacio topológico RNI, dado que el π-peso está acotado superiormente por el peso. Consideremos una topología τ sobre ω que testifica la minimalidad de $\mathfrak{irr}$. Veamos que existe una topología τ' y un conjunto $X \subseteq \omega$ de forma que (X, τ') es un espacio RNI y tiene peso a lo más $\mathfrak{irr}$. Sea $\mathcal{B}$ una π-base de cardinalidad mínima. Tomemos $X = \bigcup \mathcal{B}$. Para cada $U \in \mathcal{B}$, y cada par de puntos distintos $x, y \in U$, sean $W_y(U, x, y), W_x(U, x, y)$ cerrado-abiertos ajenos de manera que $x \in W_x(U, x, y), y \in W_y(U, x, y)$, y además $W_y(U, x, y), W_x(U, x, y) \subseteq U$. Consideremos la siguiente familia:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' = \{W_y(U,x,y), W_x(U,x,y) : U \in \mathcal{B} \wedge x, y \in U, x \neq y\} \cup \\ \{X \setminus W_y(U,x,y), X \setminus W_x(U,x,y) : U \in \mathcal{B} \wedge x, y \in U, x \neq y\}\end{aligned}$$

Declaremos $\mathcal{B}'$ como subbase para una topología τ' sobre X. Afirmamos que (X, τ') es RNI y tiene peso a lo más $\mathfrak{irr}$. Claramente (X, τ') tiene peso a lo más $\mathfrak{irr}$. También es claro que (X, τ') es regular, ya que la subbase $\mathcal{B}'$ está formada por cerrado-abiertos. Veamos que (X, τ') es irresoluble. Sea $Z \subseteq X$ denso. Para cualquier $V \in \tau$ existe $U \in \mathcal{B}$ contenido en V. Como U es abierto en (X, τ'), $U \cap Z \neq \emptyset$, lo que implica que $Z \cap V \neq \emptyset$. Pero $U \in \tau$ fue un abierto arbitrario por lo que tenemos que Z es denso en (ω, τ), y por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ que está contenido en Z. Como B es abierto en (X, τ') el interior de Z es no vacío en (X, τ'), y por lo tanto $X \setminus Z$ no es denso. $\square$

Observación 3.1.5. Cabe notar en la proposición anterior que aunque siempre existe un espacio RNI de peso $\mathfrak{irr}$, es posible que existan espacios en los cuales el peso y el π-peso no coinciden. De hecho, si $\mathfrak{irr} < \mathfrak{c}$ existe un espacio RNI con π-peso $\mathfrak{irr}$ y peso $\mathfrak{c}$. En efecto, sea (ω, τ) un espacio RNI π-peso mínimo, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω de caracter $\mathfrak{c}$. Sea $\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \tau$ una partición de ω en cerrado-abiertos. Extendemos la topología τ a una topología τ' sobre $\omega \cup \{\omega\}$ definiendo una base local de cerrado-abiertos para ω como $\mathcal{N}_\omega = \{\bigcup_{n \in A} V_n : A \in \mathcal{U}\}$. Entonces $(\omega \cup \{\omega\}, \tau')$ es RNI, tiene π-peso $\mathfrak{irr}$, pero su peso es $\mathfrak{c}$.

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{Q}$ es *scattered* si es vacío o todo subconjunto no vacío tiene al menos un punto aislado. Un conjunto que no tiene puntos aislados es llamado crowded. De la definición de conjunto scattered se sigue que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que son scattered forman un ideal propio, al cual denotaremos por scat. La familia de conjuntos positivos respecto a scat lo denotaremos por scat^+. Notemos que para cualquier $A \in \mathsf{scat}^+$, existe $B \subseteq A$ que es crowded.

Una familia $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{scat}^+$ es una familia *scattered-reaping* si para cada $X \in \mathsf{scat}^+$ existe $Y \in \mathcal{R}$ tal que $Y \cap X = \emptyset$ ó $Y \subseteq X$. El *número scattered-reaping* es definido como la mínima cardinalidad de una familia scattered-reaping, es decir,

$$\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} = \text{mín}\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \subseteq \mathsf{scat}^+ \wedge (\forall X \in \mathsf{scat}^+)(\exists Y \in \mathcal{R})(Y \cap X = \emptyset \vee Y \subseteq X)\}$$

Proposición 3.1.6. $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} \leq \mathfrak{irr}$.

Demostración. Sean τ una topología irresoluble sobre ω, $\mathcal{B}$ una π-base de mínima cardinalidad, y $\mathcal{M} \preccurlyeq H(\theta)$ un submodelo elemental numerable tal que $\tau \in \mathcal{M}$. Tomemos $\mathcal{B}' = \tau \cap \mathcal{M}$. La topología τ' generada por $\mathcal{B}'$ homeomorfa a la topología usual sobre $\mathbb{Q}$, así que podemos suponer que $\mathsf{scat} = \mathsf{scat}_{(\omega,\tau')}$. Observemos que $\mathcal{B}$ es una familia de conjuntos positivos respecto a scat. Veamos que $\mathcal{B}$ es una familia scattered-reaping. Sea $X \in \mathsf{scat}^+$. Dado que (ω, τ) es irresoluble, X tiene interior no vacío o $\omega \setminus X$ tiene interior no vacío. Si $int_\tau(X) \neq \emptyset$, entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq X$. Si $int_\tau(\omega \setminus X) \neq \emptyset$, entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \cap \omega \setminus X = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una familia scattered-reaping. $\square$

Proposición 3.1.7. $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} \leq \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$.

Demostración. Sea $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}\}$ una familia $Dense(\mathbb{Q})$-reaping y $\mathcal{B}$ una base numerable para la topología. Tomemos $\mathcal{R} = \{D_\alpha \cap B : \alpha < \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \wedge B \in \mathcal{B}\}$. Veamos que $\mathcal{R}$ es una familia scattered-reaping. Tomemos $X \in \mathsf{scat}^+$ arbitrario. Si X no es denso existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap X = \emptyset$, por lo que para cualquier $\alpha \in \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ tenemos $X \cap D_\alpha \cap B = \emptyset$. Si X es denso, existe α tal que

$X \cap D_\alpha$ no es denso ó $D_\alpha \setminus X$ no es denso. Si $X \cap D_\alpha$ no es denso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $X \cap D_\alpha \cap B$ es vacío. Si $D_\alpha \setminus X$ no es denso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $(B \cap D_\alpha) \setminus X$ es vacío. $\square$

Lema 3.1.8. *Para cada conjunto $A \in \mathsf{scat}^+$ existe un conjunto F cerrado nunca denso y sin puntos aislados contenido en A.*

Demostración. Sea $A \in \mathsf{scat}^+$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es crowded. Para cada $n \in \omega$, sea $\{B_{n,m} : m \in \omega\}$ una base local en n de cerrado-abiertos. Recursivamente construimos una sucesión $\{F_n : n \in \omega\}$ de conjuntos finitos y una sucesión creciente de cerrado-abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ que satisfacen lo siguiente:

a) Para todo $n \in \omega$ hay algún $m \in \omega$ tal que $n \in F_m$ o $n \in U_m$.

b) Para todo $n \in \omega$ $F_n \cap U_n = \emptyset$.

c) Para todo $n \in \omega$, $k \in F_n$ y $i > n$, $B_{k,i} \cap F_i \setminus \{k\} \neq \emptyset$.

Supongamos que las dos sucesiones han sido construidas. Tomemos $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. El inciso c) nos asegura que F es un conjunto crowded, mientras que los incisos a) y b) nos aseguran que F es cerrado. Como cada F_n es subconjunto de A, tenemos $F \subseteq A$. Si F tiene interior no vacío, basta reemplazarlo por algún subconjunto cerrado nunca denso crowded y con interior vacío. Si F tiene interior vacío hemos terminado.

La construcción la llevamos a cabo de la siguiente manera: sea $k_0 = \text{mín}(A)$, y hacemos $F_0 = \{k_0\}$. Escogemos U_0 cerrado-abierto tal que $\{i : i < k_0\} \subseteq U_0$ y $k_0 \notin U_0$. Supongamos que F_m y U_m han sido definidos. Entonces $F_m \subseteq A \setminus U_m$ y $A \setminus U_m$ es crowded. Para cada $k \in F_m$ sea $n_k \in B_{k,m+1} \cap A \setminus U_m$, y definamos $F_{m+1} = F_m \cup \{n_k : k \in F_m\}$. Finalmente, tomemos $j = \text{mín}(A \setminus (F_{m+1} \cup U_m))$ y V un cerrado-abierto tal que $j \in V$ y $V \cap F_{m+1} = \emptyset$, y definamos $U_{m+1} = U_m \cup V$. Es claro de la construcción que las sucesiones $\{F_n : n \in \omega\}$ y $\{U_n : n \in \omega\}$ satisfacen los requerimentos a), b) y c). $\square$

Proposición 3.1.9. $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{scat}^+$ una colección de conjuntos crowded de cardinalidad estrictamente menor a $\mathfrak{d}$. Encontraremos dos subconjuntos ajenos $A, B \in \mathsf{scat}^+$ tal que para todo $X \in \mathcal{F}$, tanto $X \cap A$ como $X \cap B$ son conjuntos infinitos. Por el Lema 3.1.8, podemos suponer que cada $X \in \mathcal{F}$ es un conjunto cerrado nunca denso y crowded. También podemos suponer que $\mathcal{F}$ contiene una base numerable para la topología. Para cada $n \in \omega$, sea

C_n el conjunto de todos los $X \in \mathcal{F}$ tales que $n \in X$. Observemos que C_n tiene tamaño estrictamente menor que $\mathfrak{d}$. Recursivamente construimos dos sucesiones $\{A_n : n \in \omega\}$, $\{B_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de ω tales que:

i) $A_0 = B_0 = \emptyset$.

ii) Para todo n, $A_n \cap B_n = \emptyset$.

iii) Para todo n, $A_n, B_n \in \mathsf{scat}$.

iv) Para todo n, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$.

v) Para todo n, $n \in \overline{A}_{n+1} \cap \overline{B}_{n+1}$.

vi) Para todo n y para todo $X \in C_n$, $A_{n+1} \cap X$ y $B_{n+1} \cap X$ son infinitos.

Es claro de la construcción que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ son conjuntos ajenos y densos (por incisos ii) y v), respectivamente), y vi) implica que para todo $X \in \mathcal{F}$, $A \cap X$ y $X \cap B$ son ambos infinitos.

Supongamos que A_n, B_n han sido definidos. Si $n \in \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$, pongamos $A_{n+1} = A_n$ and $B_{n+1} = B_n$. Si $n \notin \overline{A}_n$, sea $\{W_m : m \in \omega\}$ una partición de $\omega \setminus (\overline{A}_n \cup \overline{B}_n \cup \{n\})$ en cerrado-abiertos. Observemos que ninguno de los W_m tiene a n en su cerradura, así que para todo $X \in C_n$ todo $k \in \omega$, $X \nsubseteq W_k$. Más aún, para una infinidad de $k \in \omega$, $W_k \cap X$ es infinito (ya que cada $X \in \mathcal{F}$ es un conjunto crowded). Para cada $X \in C_n$, definimos una función $\tilde{X} : \omega \to \omega$, como $\tilde{X}(k)$ es el mínimo $i \geq k$ tal que $X \cap W_i \neq \emptyset$. Ahora definimos la siguiente función:

$$f_X(i) = \text{mín}(X \cap W_{\tilde{X}(i)}) + 1$$

Dado que $|C_n| < \mathfrak{d}$, hay una función creciente f que no es dominada por $\{f_X : X :\in C_n\}$. Fijemos una de tales funciones f, y sea

$A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{k\in\omega} W_k \cap f(k)$

Ahora consideremos $W'_k = W_k \setminus A_{n+1}$. Notemos que para todo $X \in C_n$ existe una infinidad de $k \in \omega$ tales que $X \cap W'_k$ es infinito. Para cada $X \in \mathcal{F}$ y $k \in \omega$, sea $\tilde{X}'(k)$ el mínimo $i \geq k$ tal que $X \cap W'_i \neq \emptyset$. Definimos una familia de funciones $\{g_X : X \in C_n\}$ como sigue:

$$g_X(i) = \text{mín}(X \cap W'_{\tilde{X}'(i)}) + 1$$

Sea $g : \omega \to \omega$ una función creciente que no es dominada por $\{g_X : X \in C_n\}$ y definamos

$$B_{n+1} = B_n \cup \bigcup_{k\in\omega} W'_k \cap g(k)$$

Es claro a partir de la construcción que A_{n+1} y B_{n+1} satisfacen los requrimentos i) - vi). $\square$

Corolario 3.1.10. $\max\{\mathfrak{r}, \mathfrak{d}\} \leq \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} \leq \mathfrak{irr}$. □

Ahora tenemos suficiente información para responder la pergunta hecha por M. Scheepers: es bien conocido que en el modelo de Miller (ver [8, 2]) $\mathfrak{r} < \mathfrak{d}$, por lo que $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} = \mathfrak{irr}$ es verdadero en este modelo.

Corolario 3.1.11. *La desigualdad* $\mathfrak{r} < \mathfrak{irr}$ *es relativamente consistente con* ZFC. □

3.2. Una aplicación de diamantes parametrizados.

Definición 3.2.1. Una terna ordenada (A, B, C) es un *invariante* si satisface las siguientes propiedades:

- A y B son conjuntos de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$.
- $C \subseteq A \times B$.
- Para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in C$.
- Para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $(a, b) \notin C$.

La evaluación $\langle A, B, C\rangle$ de un invariante (A, B, C) es definida como sigue:
$\langle A, B, C\rangle = \min\{|X| : X \subseteq B \wedge (\forall a \in A)(\exists b \in X)((a, b) \in C)\}$

Decimos que el invariante (A, B, C) es boreliano si A, B y C son subconjuntos borelianos de algún espacio Polaco.

Una función $f : 2^{<\omega_1} \to X$, donde X es un espacio Polaco, es Borel si para cualquier $\alpha < \omega_1$, la restricción de f a 2^α es Borel.

En general, dado un invariante boreliano (A, B, C), se define su correspondiente principio de adivinanza $\diamondsuit(A, B, C)$ de la siguiente manera:

$\diamondsuit(A, B, C) :=$ Para cada función Borel $F : 2^{<\omega_1} \to A$ existe una función $g : \omega_1 \to B$ tal que para toda $f \in 2^{\omega_1}$ el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : (F(f \restriction \alpha), g(\alpha)) \in C\}$ es estacionario.

La función g mencionada en $\diamondsuit(A, B, C)$ es llamada una sucesión $\diamondsuit(A, B, C)$-guessing. En [9], se prueba que este tipo de principios de adivinanza son consistentes con ZFC.

Usando la notación anterior, el invariante $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ queda representado por la tripleta $(\mathsf{scat}^+, \mathsf{scat}^+, \mathsf{E})$, donde $(a, b) \in \mathsf{E}$ si y sólo si $b \subseteq a$ ó $b \cap a = \emptyset$. Notemos que tanto scat^+ como E son subconjuntos borelianos de 2^ω, por lo que $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ es un invariante boreliano.

El principio de adivinanza correspondiente a $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ es :

$\diamondsuit(\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}) :=$ Para cada función Borel $F : 2^{<\omega_1} \to \mathsf{scat}^+$ existe una función $g : \omega_1 \to \mathsf{scat}^+$ tal que para toda $f \in 2^{\omega_1}$ el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : g(\alpha) \subseteq F(f \restriction \alpha) \vee F(f \restriction \alpha) \cap g(\alpha) = \emptyset\}$ es estacionario.

Es bien conocido que para muchos invariantes cardinales del continuo no Borel existe un invariante Borel tal que su respectivo $\diamondsuit$-principio de adivinanza implica que el primero es igual a ω_1 (ver [9]). Algunos ejemplos de este tipo de relaciones son los casos de $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{u}$, y $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ y $\mathfrak{i}$ (ver [9]). El siguiente teorema nos dice que la relación entre $\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$ y $\mathfrak{irr}$ es análoga a los casos antes mencionados.

Teorema 3.2.2. $\diamondsuit(\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}})$ *implica* $\mathfrak{irr} = \omega_1$.

Demostración. Codificando de forma conveniente, podemos suponer que el dominio de nuestra función F es el conjunto de pares ordenados $(A, \vec{I})$, donde $\vec{I} = \langle I_\beta : \beta < \alpha \rangle \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es una sucesión de longitud $\alpha \in \omega_1$, y A es un subconjunto de ω. Definimos F de la siguiente manera:

- Si $\{I_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\omega \backslash I_\beta : \beta < \alpha\}$ no es una subbase para una topología homeomorfa a la topología usual sobre $\mathbb{Q}$, entonces $F(A, \overrightarrow{I}) = \mathbb{Q}$.

- Si $\{I_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\omega \setminus I_\beta : \beta \in \alpha\}$ es una subbase para una topología homeomorfa a la topología usual sobre $\mathbb{Q}$, y A es un conjunto scattered relativo a esta topología, entonces $F(A, \vec{I}) = \mathbb{Q}$.

- Si $\{I_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\omega \setminus I_\beta : \beta \in \alpha\}$ es una subbase para una topología homemorfa a la topología usual sobre $\mathbb{Q}$, y A no es scattered respecto a esta topología, tomemos $h_{\vec{I}} : \omega \to \mathbb{Q}$ un homeomorfismo recursivo, y definamos $F(A, \vec{I}) = h_{\vec{I}}[A]$.

El homeomorfismo $h_{\vec{I}}$ señalado en el tercer punto depende (de forma recursiva o boreliana) solo de $\vec{I}$, en particular, es el mismo para todos los pares $(A, \vec{I})$ con la misma segunda coordenada.

Ahora sea $g : \omega_1 \to \mathsf{scat}^+$ una sucesión $\diamondsuit(\mathfrak{r}_{\mathsf{scat}})$-guessing, y recursivamente definamos una sucesión creciente de bases para topologías como sigue:

- Sea $\mathcal{B}_0 = \langle U_n : n \in \omega \rangle$ una base para la topología usual sobre $\mathbb{Q}$.
- Supongamos que $\mathcal{B}_\beta$ ha sido definida para todo $\beta < \alpha$. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$. Para $\alpha = \beta + 1$, consideremos $g(\beta) \in \mathsf{scat}^+$. Por Lema 3.1.8, existe un cerrado nunca denso y crowded B_β que está contenido en $g(\beta)$. También $\langle U_\gamma : \gamma < \alpha \rangle$ genera una topología homeomorfa a la usual sobre $\mathbb{Q}$, así que en la definición de F, usamos un homeomorfismo recursivo $h_{\mathcal{B}_\alpha}$. Sea $U_\alpha = h_{\mathcal{B}_\alpha}^{-1}[B_\alpha]$. Entonces, $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta \cup \{U_\alpha, \omega \setminus U_\alpha\}$ como subbase genera una topología homeomorfa a la topología usual sobre $\mathbb{Q}$.

Afirmamos que $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ genera como subbase una topología τ_{ω_1} que es T_3 e irresoluble sobre ω. Dado que cada U_α es declarado como cerrado-abierto, entonces la topología resultante es 0-dimensional. Veamos que $(\omega, \tau_{\omega_1})$ es irresoluble. Para esto basta probar que dado $A \subseteq \omega$, al menos uno de A y $\omega \setminus A$ tiene interior no vacío en la topología τ_{ω_1}. Sólo debemos probarlo para $A \in \mathsf{scat}^+_{\tau_{\omega_1}}$ (si $A \in \mathsf{scat}_{\tau_{\omega_1}}$ entonces obviamente $\omega \setminus A$ tiene interior no vacío en τ_{ω_1}). Sea $A \in \mathsf{scat}^+_{\tau_{\omega_1}}$ arbitrario. Entonces $A \in \mathsf{scat}^+$. Si g adivina $(A, \langle U_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle)$ en γ, entonces $h_{\langle U_\alpha : \alpha < \gamma \rangle}[A] \supseteq g(\gamma)$ o $h_{\langle U_\alpha : \alpha < \gamma \rangle}[A] \cap g(\gamma) = \emptyset$. Por lo que tenemos $U_\gamma \subseteq A$ en el primer caso, y $U_\gamma \subseteq \omega \setminus A$ en el segundo.

$\square$

3.3. Consistencia de $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$.

El siguiente diagrama resume algunos de los resultados presentados (una flecha $\lambda \to \kappa$ significa $\lambda \leq \kappa$):

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{cof}(\mathcal{M}) & \to & \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} & \to & \mathfrak{i} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathfrak{d} & \to & \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}} & \to & \mathfrak{irr} \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \mathfrak{r} & &
\end{array}$$

Respecto a las relaciones entre los invariantes de este diagrama, se sabe que $\mathfrak{d}$ y $\mathsf{cof}(\mathcal{M})$ pueden ser consistentemente diferentes (por ejemplo, al agregar ω_2 reales Random a un modelo de $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$ obtenemos un modelo de $\mathfrak{d} < \mathsf{cof}(\mathcal{M})$). Sabemos que $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} \leq \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$, y que en el modelo de Miller ocurre $\mathfrak{r} < \mathfrak{d} = \mathfrak{r}_{\mathsf{scat}}$. En esta sección probaremos que la desigualdad máx$\{\mathfrak{d},\mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$ es consistente. El modelo en el cual ocurre lo anterior es una modificación inmediata del modelo de Shelah para la consistencia de $\mathfrak{d} = \mathfrak{r} < \mathfrak{u} = \mathfrak{i} = \mathfrak{c}$.

Primero enunciamos tres teoremas que necesitaremos, la prueba de los primeros dos puede ser consultada en [2], y la prueba del tercero puede ser encontrada en [7]. Recordemos que un forcing $\mathbb{P}$ es ω^ω-*bounding* si todo real en la extensión genérica es acotado por un real del modelo base, es decir, si ocure que

$$\mathbb{P} \Vdash (\forall \dot{f} \in \omega^\omega)(\exists g \in \omega^\omega \cap \mathbf{V})(\forall n \in \omega)(\dot{f}(n) \leq g(n))$$

Teorema 3.3.1. *Sea $\langle \mathbb{P}_\alpha \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ un iteración con soporte numerable de forcings propios. Si $\mathcal{U}$ es un p-punto en el modelo base, y para cada $\alpha \in \lambda$ $\mathbb{P}_\alpha \Vdash$ ”U genera un ultrafiltro”.* ■

Teorema 3.3.2. *Si $\langle \mathbb{P}_\alpha \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ es una iteración con soporte numerable de forcings propios tal que para todo $\alpha \in \lambda$ $\mathbb{P}_\alpha$ es ω^ω-bounding, entonces $\mathbb{P}_\lambda$ es ω^ω-bounding.* ■

Observación 3.3.3. Notemos que si una noción de forcing propio preserva algún p-punto $\mathcal{U}$, entonces el ultrafiltro generado por $\mathcal{U}$ es un p-punto en la extensión genérica. Si además $\mathbb{P}$ es ω^ω-bounding y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro selectivo, entonces $\mathcal{U}$ genera un ultrafiltro selectivo en la extensión genérica mediante $\mathbb{P}$, ya que en la extensión genérica cada partición $\mathcal{P}$ de ω en conjuntos finitos es dominada por alguna partición en conjuntos finitos $\mathcal{Q}$ del modelo base, y un selector de $\mathcal{Q}$ es a la vez un selector de $\mathcal{P}$.

Teorema 3.3.4. ([7]) *Para cada ideal $\mathcal{I}$ sobre ω existe una noción de forcing $Q_\mathcal{I}$ tal que:*

1. $Q_\mathcal{I}$ agrega un real $\dot{x}$ tal que $Q_\mathcal{I} \Vdash$ ”$(\forall a \in \mathcal{I}^+ \cap \mathbf{V})(|\dot{x} \cap a| = |a \setminus \dot{x}| = \aleph_0)$”.
2. Para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ selectivo, si $Q_\mathcal{I} \Vdash$ ”$\mathcal{U}$ *no genera un ultrafiltro*”, entonces existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f^*(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{U}^*$.
3. $Q_\mathcal{I}$ es propio y ω^ω-bounding. ■

Lema 3.3.5. ([7]) (CH) *Existe una familia de ultrafiltros selectivos $\{\mathcal{U}_f : f \in 2^{\omega_1}\}$ tal que para cualquier conjunto $A \in [2^{\omega_1}]^{\omega_1}$, existe $B \in [A]^{\omega_1}$ y $\{A_f : f \in B\}$ familia casi ajena tales que $A_f \in \mathcal{U}_f$ para todo $f \in B$.*

Demostración. Recursivamente una familia $\{X_f : f \in 2^{<\omega_1}\}$ de conjuntos de la siguiente manera:

1. Para cada $f \in 2^{<\omega_1}$, $X_f \subseteq \omega$ es infinito.

2. Si $f, g \in 2^{<\omega_1}$ son tales que $f \subseteq g$, entonces $X_g \subseteq^* X_f$.

3. Para cada $\alpha \in \omega_1$, la familia $\{X_f : f \in 2^\alpha\}$ es casi ajena.

4. Para todo $Y \in [\omega]^\omega$, existe algún $\alpha \in \omega_1$ tal que para todo $f \in 2^\alpha$, $X_f \subseteq Y$ ó $X_f \cap Y =^* \emptyset$.

5. Para cada $h \in \omega^\omega$ existe algún $\alpha \in \omega_1$ tal que para todo $f \in 2^\alpha$ $h \restriction X_f$ es constante o inyectiva.

Supongamos que hemos construido la familia $\{X_f : f \in 2^{<\omega_1}\}$. Para cada $f \in 2^{\omega_1}$ definimos $\mathcal{U}_f = \{A \in [\omega]^\omega : (\exists \alpha \in \omega_1)(X_{f\restriction\alpha} \subseteq^* A)\}$. Claramente $\mathcal{U}_f$ es un filtro, y por 4 tenemos que de hecho es un ultrafiltro, y 5 nos asegura que $\mathcal{U}_f$ es un ultrafiltro selectivo. Veamos que $\{U_f : f \in 2^{\omega_1}\}$ tiene la propiedad buscada. Sea $\{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^{\omega_1}$, tenemos dos casos:

Caso 1 Existe $g \in 2^{\omega_1}$ tal que para todo $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : f_\beta \restriction \alpha = g \restriction \alpha \wedge f_\beta \neq g\}$ es no vacío. Para $x, y \in 2^{\omega_1}$ sea $\Delta(x, y) = \min\{\alpha \in \omega_1 : x(\alpha) \neq y(\alpha)\}$. Recursivamente construimos $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ no numerable tal que para cada $\alpha, \beta \in B$, si $\alpha < \beta$ entonces $\Delta(f_\alpha, g) < \Delta(f_\beta, g)$. Entonces $\{U_{f_\alpha} : \alpha \in B\}$ es la familia buscada. En efecto, para cada $\alpha \in B$, $X_{f_\alpha\restriction\Delta(f_\alpha,g)} \in \mathcal{U}_{f_\alpha}$, y $\{X_{f_\alpha\restriction\Delta(f_\alpha,g)} : \alpha \in B\}$ es una familia casi ajena.

Caso 2 Para toda $g \in 2^{\omega_1}$ existe $\alpha \in \omega_1$ tal que el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : f_\beta \restriction \alpha = g \restriction \alpha \wedge f_\beta \neq g\}$ es vacío. Recursivamente construimos una sucesión creciente $\langle \gamma_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ tal que $\gamma_0 = 0$, y $\gamma_{\alpha+1}$ testifica que el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : f_\beta \restriction \gamma_{\alpha+1} = f_{\gamma_\alpha} \restriction \gamma_{\alpha+1} \wedge f_\beta \neq f_{\gamma_\alpha}\}$ es vacío. Veamos que $\{U_{f_{\gamma_\alpha}} : \alpha \in \omega_1\}$ es el conjunto buscado. Basta ver que la familia $\{X_{f_{\gamma_\alpha}\restriction\gamma_{\alpha+1}} : \alpha \in \omega_1\}$ es casi ajena, ya que claramente tenemos $X_{f_{\gamma_\alpha}\restriction\gamma_{\alpha+1}} \in \mathcal{U}_{f_{\gamma_\alpha}}$. Sean $\alpha < \beta$ ordinales numerables, entonces $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$, por lo que $f_{\gamma_\alpha} \restriction \gamma_{\alpha+1} \neq f_{\gamma_\beta} \restriction \gamma_{\alpha+1}$ y la intersección $X_{f_{\gamma_\alpha}\restriction\gamma_{\alpha+1}} \cap X_{f_{\gamma_\beta}\restriction\gamma_{\alpha+1}}$ es finita, y dado que $X_{f_{\gamma_\beta}\restriction\gamma_{\beta+1}} \subseteq^* X_{f_{\gamma_\beta}\restriction\gamma_{\alpha+1}}$, obtenemos que $X_{f_{\gamma_\alpha}\restriction\gamma_{\alpha+1}} \cap X_{f_{\gamma_\beta}\restriction\gamma_{\beta+1}}$ es finito.

La construcción es hecha fácilmente como sigue: sean $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de $[\omega]^\omega$ y $\{h_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de ω^ω. Hacemos $X_\emptyset = \omega$. Fijemos $\alpha \in \omega_1$ y supongamos construida $\{X_f : f \in 2^{<\alpha}\}$. Tenemos dos casos:

a) $\alpha = \beta + 1$. Para cada $f \in 2^\beta$ sean $Z_{f^\frown 0}, Z_{f^\frown 1}$subconjuntos ajenos de $X_{f\restriction\beta}$ tal que para cada $i \in 2$ $Z_{f^\frown i} \subseteq A_\alpha$ o $Z_{f^\frown i} \cap A_\alpha = \emptyset$, y además $h_\alpha \restriction Z_{f^\frown i}$ es constante o inyectiva. Definimos $X_f = Z_{f\restriction\beta^\frown f(\beta)}$ para cada $f \in 2^\alpha$. Dado que la familia $\{X_f : f \in 2^\beta\}$ es casi ajena, la nueva familia $\{X_f : f \in 2^\alpha\}$ también es casi ajena por la construcción.

b) α ordinal límite. Para cada $f \in 2^\alpha$ sea Y_f una pseudointersección de $\{X_{f\restriction\beta} : \beta < \alpha\}$. Tomamos $X_f \subseteq Y_f$ tal que $A_\alpha \cap X_f = \emptyset$ o $X_f \subseteq A_\alpha$, y también $h_\alpha \restriction X_f$ es constante o inyectiva. Dado que para cada $\beta < \alpha$ la familia $\{X_f : f \in 2^\beta\}$ es casi ajena, tenemos que $\{X_f : f \in 2^\alpha\}$ también lo es, ya que para cada $f \in 2^\alpha$ X_f está casi contenido en $X_{f\restriction\beta}$.

Esto termina la prueba del lema. □

En lo que sigue reservaremos el uso de $\mathcal{F}$ para denotar una familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \omega_2\}$ de ultrafiltros selectivos que tiene las propiedades del lema anterior, y convenimos que siempre que mencionemos a $\mathcal{F}$ estaremos suponiendo CH sin necesidad de decirlo (observemos que podemos suponer que $\mathcal{F}$ tiene tamaño ω_2, ya que $2^{\omega_1} \geq \omega_2$).

Lema 3.3.6. ([7]) *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω tal que $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ es ccc. Entonces existen a lo más una cantidad numerable de ultrafiltros en $\mathcal{F}$ que extienden a $\mathcal{I}^*$.*

Demostración. Probamos la contrapositiva. Supongamos que $\mathcal{F}' = \{\alpha \in \omega_1 : \mathcal{I}^* \subseteq \mathcal{U}_\alpha\}$ es no numerable y sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}'$ no numerable tal que $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$ es una familia casi ajena. Entonces para cada $\alpha \in \mathcal{B}$ se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{I}^+$, y dados $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ distintos, $A_\alpha \cap A_\beta \in \mathcal{I}$, ya que $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$ es una familia casi ajena, por lo que $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$ induce una anticadena no numerable en $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$. □

Lema 3.3.7. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal tal que $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ es ccc, entonces para cualquier $f \in \omega^\omega$ el cociente $\mathcal{P}(\omega)/f^*(\mathcal{I})$ es ccc.*

Demostración. Supongamos que no y sea $f \in \omega^\omega$ tal que $\mathcal{P}(\omega)/f^*(\mathcal{I})$ no es ccc. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq f^*(\mathcal{I})^+$ que induce una anticadena no numerable en $\mathcal{P}(\omega)/f^*(\mathcal{I})$. Entonces $\{f^{-1}[A_\alpha] : \alpha \in \omega_1\}$ induce una anticadena no numerable en $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$, ya que $f^{-1}[A_\alpha] \cap f^{-1}[A_\beta] \in \mathcal{I}$ si y sólo si $A_\alpha \cap A_\beta \in f^*(\mathcal{I})$, y por lo tanto $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$ no es ccc. $\square$

Un espacio topológico se llama *fuertemente irresoluble* si cualquier abierto es irresoluble. Es inmediato que todo espacio fuertemente irresoluble es irresoluble.

Lema 3.3.8. *Si (X, τ) es irresoluble, entonces existe $C \subseteq X$ cerrado tal que el espacio $(C, \tau \upharpoonright C)$ es fuertemente irresoluble y tiene peso a lo más $w(X, \tau)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todos los abiertos en τ que son resolubles. Notemos que $\mathcal{H}$ es cerrada respecto a la contención restringida a los conjuntos abiertos. Tomemos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ una anticadena maximal. Observemos que $Z = \bigcup \mathcal{H}$ es resoluble ya que $Z \setminus \bigcup \mathcal{A}$ es nunca denso y $\bigcup \mathcal{A}$ es resoluble. Veamos que $C = X \setminus Z$ es fuertemente irresoluble con la topología de subespacio. Supongamos que existe $U \in \tau$ tal que $U \cap C \neq \emptyset$ es resoluble, y sea $D \subseteq U \cap C$ denso co-denso en $U \cap C$. Sea $D' \subseteq U \cap Z$ denso co-denso en $U \cap Z$. Entonces $D \cup D'$ es denso co-denso en U, por lo que $U \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $U \cap C = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Es claro que el peso de $(C, \tau \upharpoonright C)$ es a lo más el peso de (X, τ). $\square$

Lema 3.3.9. ([6]) *Para cualquier topología τ sobre ω fuertemente irresoluble, el cociente $\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{nwd}(\tau)$ es ccc.*

Demostración. Supogamos que existe $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ anticadena no numerable. Para cada $\alpha \in \omega_1$ sea $U_\alpha \subseteq A_\alpha$ abierto no vacío. Entonces $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos dos a dos, lo cual es imposible. $\square$

Teorema 3.3.10. *La desigualdad* $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$ *es relativamente consistente con* ZFC.

Demostración. Por el lema 3.3.8 anterior basta encontrar un modelo en el cual todo espacio numerable, regular y fuertemente irresoluble tiene peso $\aleph_2$, mientras que $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} = \aleph_1$. Comenzando en un modelo de $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$, hacemos una iteración con soporte numerable de longitud ω_2 $\langle \mathbb{P}_\alpha \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \in \omega_2 \rangle$ tal que para cada α:

$\mathbb{P}_\alpha \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \dot{Q}_{\mathsf{nwd}(\dot{\tau})}$, $(\omega, \dot{\tau})$ *es un espacio regular y fuertemente irresoluble*"

Notemos que el forcing $Q_{\mathsf{nwd}(\tau)}$ agrega un conjunto denso y co-denso respecto a la topología τ, ya que cada para cada abierto U tenemos que $\dot{x}_{gen} \cap U$ y $U \setminus \dot{x}_{gen}$ son infinitos. Por lo tanto el espacio generado por la topología τ en la extensión genérica es resoluble, y a lo largo de la iteración permanece siendo un espacio resoluble. Haciendo un bookeeping nos aseguramos de destruir todos los espacios fuertemente irresolubles que aparecen en algún paso intermedio de la iteración. El bookkeeping nos asegura que en la extensión genérica no hay espacios fuertemente irresolubles de peso $\aleph_1$, ya que si $\mathcal{B}$ es una base de cardinalidad $\aleph_1$ para alguna topología en $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$, entonces necesariamente aparecio en algún paso intermedio de la iteración, digamos en la extensión dada por $\mathbb{P}_\alpha$. Si $\mathbb{P}_\alpha \Vdash$ "*$\mathcal{B}$ genera una topología resoluble*" no hay nada que hacer (ya que seguirá siendo resoluble hasta el final de la iteración), y $\mathbb{P}_\alpha \Vdash$ "*$\mathcal{B}$ genera una topología fuertemente irresoluble*", el bookeeping nos permite destruir la irresolubilidad esta topología en algún momento. Por lo tanto al final todo espacio fuertemente irresoluble tiene peso $\aleph_2$.

Dado que $\mathbb{Q}_{\mathcal{I}}$ es ω^ω-bounding tenemos que $\mathbb{P}_{\omega_2}$ es ω^ω-bounding, gracias al Teorema 3.3.2, y por lo tanto $\mathfrak{d} = \aleph_1$. Veamos que $\mathfrak{r} = \aleph_1$ en $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$. Afirmamos que $[\omega]^\omega \cap \mathbf{V}$ es una familia reaping. Notemos primero que para todo $\alpha \in \omega_2$, $\mathbb{P}_\alpha \Vdash$ "$(\exists \check{\mathcal{U}} \in \check{\mathcal{F}})(\check{\mathcal{U}}$ *genera un ultrafiltro*)". En efecto, por los lemas 3.3.6, 3.3.7, 3.3.9 y el inciso 2 del Teorema 3.3.4, y una aplicación el Teorema 3.3.1, vemos que en cada paso de la iteración solamente destruimos a lo más $\aleph_1$ ultrafiltros en $\mathcal{F}$, y por lo tanto sobreviven $\aleph_2$ ultrafiltros en $\mathcal{F}$ que aun generan un ultrafiltro cada uno de ellos, y por la observación 3.3.3 de hecho generan un ultrafiltro selectivo cada uno. Ahora, para cualquier $\alpha \in \omega_2$, trabajando en $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_\alpha}$, si $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ genera un ultrafiltro, entonces para todo $X \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{U}$ que contiene a X o es ajeno con X, por lo que $\mathcal{U}$ es una familia reaping, lo que implica que $[\omega]^\omega \cap \mathbf{V}$ es una familia reaping ya que $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega \cap \mathbf{V}$. Dado que todo $X \in [\omega]^\omega \cap \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ aparece en algún paso intermedio de la interación, tenemos que $[\omega]^\omega \cap \mathbf{V}$ es una familia reaping en $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$. Por lo tanto $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \models \mathfrak{r} = \aleph_1$. En conclusión tenemos que $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \models \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} < \mathfrak{irr}$. $\square$

Bibliografía

[1] B. Balcar, F. Hernández-Hernández, and M. Hrušák. Combinatorics of dense subsets of the rationals. *Fund. Math.*, 183(1):59–80, 2004.

[2] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory: On the structure of the real line.* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[3] Andreas Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 395–489. Springer, Dordrecht, 2010.

[4] J. Cancino-Manríquez, M Hrušák, and D. Meza-Alcántara. Countable irresolvable spaces and cardinal invariants, enviado para publicación.

[5] Antonio de Padua Franco-Filho. Topological characterization of the small cardinal $\mathfrak{i}$. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 44(4):745–750, 2003.

[6] S. Garcia-Ferreira and M. Hrušák. On resolvability and extraresolvability. *Topology Proc.*, 39:235–250, 2012.

[7] M. Goldstern and S. Shelah. Ramsey ultrafilters and the reaping number—Con($\mathfrak{r} < \mathfrak{u}$). *Ann. Pure Appl. Logic*, 49(2):121–142, 1990.

[8] Arnold W. Miller. Rational perfect set forcing. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 143–159. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[9] Justin Tatch Moore, Michael Hrušák, and Mirna Džamonja. Parametrized $\diamondsuit$ principles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6):2281–2306, 2004.

[10] Marion Scheepers. Topological games and Ramsey theory. In Elliott Pearl, editor, *Open problems in topology. II.* Elsevier B. V., Amsterdam, 2007.