



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS**

*"Mat.LuisManuel Rivera Gutiérrez"*

**"CAMPO ESCALAR COMO FUENTE DE COSMOLOGIAS NO SINGULARES"**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

PRESENTA:

**DAVID BECERRIL RODRIGUEZ**

ASESORES:

**DRA. TATJANA VUKASINAC**

**DR. JOAQUIN ESTEVEZ DELGADO**

Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas

*"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"*

U.M.S.N.H.

MORELIA, MICHOACAN, OCTUBRE DE 2010



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Relatividad General</b>	<b>1</b>
1.1. Ideas Principales de la Relatividad General . . . . .	1
1.2. Variedades . . . . .	3
1.3. Tensores . . . . .	5
1.4. Tensor de Energía Momento . . . . .	7
1.5. Derivada Covariante . . . . .	9
1.6. Transporte Paralelo, Geodésicas y Curvatura . . . . .	12
1.7. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y de Einstein . . . . .	16
1.8. Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	17
<b>2. Conceptos de Simetría</b>	<b>21</b>
2.1. Vectores de Killing . . . . .	21
2.2. Homogeneidad e Isotropía . . . . .	24
2.3. Propiedades de Espacios Simétricos . . . . .	26
2.4. Construcción de la Métrica de un Espacio Simétrico . . . . .	27
<b>3. Cosmología</b>	<b>31</b>
3.1. Principio Cosmológico . . . . .	31
3.2. Modelo de Robertson-Walker . . . . .	33
3.3. Ecuaciones Dinámicas del Universo de Robertson-Walker . . . . .	37

3.4. Dinámica del Universo de Roberston-Walker . . . . .	39
<b>4. Teorías Tensor-Escalar</b>	<b>45</b>
4.1. Campos Escalares . . . . .	45
4.2. Formulación Lagrangiana de las Ecuaciones de Einstein . . . . .	46
4.3. Campo Escalar con Acoplamiento Mínimo . . . . .	49
4.4. Expansión Exponencial de Sitter y Expansión de Tipo Polinomial . . . . .	51
4.5. Expansión de Tipo Polinomial Sin Singularidad . . . . .	52
<b>5. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>

# Introducción

“Las estrellas, todas juntas, deben como cualquier conjunto de puntos, representar una gigantesca ecuación, ante la mente de Dios tan trivial como, digamos, la ecuación de una esfera, -Para nosotros ilegible, incalculable. Una tarea solitaria, no compensada, tal vez hasta imposible. -sin embargo, supongo que algunos de nosotros debemos estar siempre buscando.”

Thomas Pynchon, “Mason & Dixon”

Es bien conocido que las soluciones a las ecuaciones del modelo cosmológico estandar llevan a una singularidad. Estas soluciones han dado lugar a la llamada “Teoría del Big Bang”, la cual dice que en el inicio del tiempo, todo el universo estaba comprimido en un sólo punto. Un ingrediente adicional de la cosmología moderna es la teoría de inflación, que predice un universo que pasó por un periodo de expansión acelerada. Aun mas, la teoría estándar predice un universo cuyo expansión se va desacelerando lo cual no concuerda con observaciones modernas que sugieren un universo que de nuevo está en un periodo de expansión acelerada. Estas observaciones han dado lugar a ideas como la materia y energía oscura, que buscan dar una mejor explicación de la evolución del universo. Hay una variedad de propuestas que se han hecho para describir la dinámica del universo en los periodos de aceleración. La evidencia de la aceleración de la expansión del universo ha llevado a introducir una constante cosmológica diferente de cero como una de las posibles explicaciones del fenómeno. Sin embargo, como la dinámica del universo va cambiando con el transcurso del tiempo, entonces una constante no es adecuada y se debe agregar algo más. Un siguiente paso consta en agregar un campo escalar a las ecuaciones. Esta idea propone que la geometría del universo está acoplada con un campo escalar  $\phi$ , cuyo efecto sobre la dinámica del universo estará determinado fuertemente por su energía potencial  $V(\phi)$ .

En esta tesis estudiaremos un caso de la Teoría Tensor-Escalar, la cual introduce un campo escalar con acoplamiento mínimo a las ecuaciones de Einstein. Tomando como fuente de gravedad un campo escalar, en vez de un fluido perfecto que es usado como fuente en el modelo estándar, se buscará obtener un comportamiento del factor escala que no tenga singularidad. Se estudiará la forma de generar soluciones que concuerden con el modelo estándar del universo de Robertson-Walker con el campo escalar como fuente. Para tratar estos problemas es necesario recurrir a la Teoría General de Relatividad, es por esto que en el primer capítulo se tratarán los conceptos básicos de esta teoría. El segundo capítulo se dedica a estudiar el concepto de simetría y las implicaciones que tiene sobre la métrica de un universo homogéneo e isotrópico. En el tercer capítulo se tratarán algunos temas importantes de la cosmología estándar, las ecuaciones dinámi-

cas del universo y sus soluciones. En el capítulo cuatro se empieza estudiando la formulación lagrangiana de las ecuaciones de Einstein, así como el acoplamiento mínimo del campo escalar. Se analizará el método presentado por Ellis y Madsen [1] que permite obtener el potencial del campo escalar, al fijar el factor de escala deseado. En la última sección del capítulo cuatro se obtiene la forma que toma el campo escalar y su potencial para algunas elecciones del factor de escala. En la última parte de esta tesis vamos a aplicar su método para las cosmologías no singulares. Finalmente se estudiará la forma del campo escalar y de su potencial que se obtiene a partir del factor escala propuesto. En el capítulo cinco se presentaran las conclusiones de este trabajo.

Se utilizarán las siguientes convenciones en este trabajo.

1. Los índices griegos  $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$  podrán tomar los valores (0, 1, 2, 3) indicando cualquiera de las coordenadas de un cuadritensor.
2. Los índices latinos  $i, j, k, l, \dots$  podrán tomar los valores (1, 2, 3) indicando cualquiera de las coordenadas espaciales.
3. Se empleará la notación de Einstein, donde índices repetidos en una expresión indican una sumación sobre todos los posibles valores del índice, por ejemplo  $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu =$

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

# Capítulo 1

## Relatividad General

La Relatividad General es una teoría del campo gravitatorio que fue iniciada por Albert Einstein entre los años 1915-1916. El nombre se debe a que es una generalización de la teoría especial de la relatividad. Originalmente pretendía explicar ciertas anomalías en el concepto de movimiento relativo, pero en su desarrollo se ha convertido en una de las teorías más importantes en la física. La Teoría de la Relatividad es un campo muy extenso por lo que en este capítulo sólo se abarcarán conceptos que se utilizarán en este trabajo.

### 1.1. Ideas Principales de la Relatividad General

Ordinariamente la gravedad es considerada como una de las cuatro fuerzas fundamentales del universo, pero se distingue de las demás en que dadas las mismas velocidades y posiciones iniciales, todos los cuerpos siguen las mismas trayectorias sin importar su composición. Todos los cuerpos en un campo gravitacional son afectados de la misma forma por la gravedad, opuesto a, por ejemplo, las fuerzas debidas a los campos electromagnéticos que afectan a cuerpos cargados pero no afectan a los cuerpos neutros, y las trayectorias además dependen de la relación entre la masa y la carga. El hecho de que todos los cuerpos caigan con la misma aceleración llevó a Einstein a proponer que la gravedad se podría ver como la curvatura del espacio y el tiempo en vez de como un campo de fuerzas adicionales. Una de las ideas fundamentales que llevo a Einstein a describir la gravedad de esta forma es el Principio de Equivalencia. Hay varias formas de enunciar este principio, uno de los cuales dice que la masa inercial es igual a la masa gravitacional. Para aclarar esto considere la segunda ley de Newton, la cual relaciona la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo con la aceleración que siente el cuerpo y su masa inercial.

$$F = m_i a$$

Considere además la ley de gravedad de Newton, que relaciona la fuerza debido a la gravedad cerca de la superficie de la tierra con la aceleración de la gravedad y la masa

gravitatoria.

$$F_g = m_g g$$

Aunque  $m_i$  y  $m_g$  tienen un carácter y uso distinto, hasta el momento se ha observado que

$$m_i = m_g$$

Este principio implica que localmente no hay forma de distinguir entre los efectos de un campo gravitacional de los efectos que se observarían en un sistema uniformemente acelerado. Si se tratara de un campo electromagnético sería posible distinguir entre los efectos debido a este campo y los efectos debido a una aceleración uniforme al observar el comportamiento de cuerpos con diferentes cargas. Ya que no hay distinción entre estas masas, se deja de visualizar la gravedad como una fuerza sino como una alteración o curvatura del espacio y el tiempo, pero ¿Qué causa esta curvatura? En la teoría clásica la fuente de gravedad es la masa de un cuerpo, sin embargo como en la Relatividad Especial se relaciona la masa con la energía, la fuente de campo gravitacional en la Relatividad General debe involucrar tanto la masa como la energía.

Esto nos lleva a otra forma de enunciar el principio de equivalencia: Existe una clase preferente de trayectorias en el espacio-tiempo llamadas inerciales o de caída libre a lo largo de las cuales viajan partículas no aceleradas, es decir partículas que sólo sienten los efectos de la gravedad. Einstein generalizó el principio de equivalencia y postuló el llamado Principio de Equivalencia de Einstein: En regiones lo suficientemente pequeñas las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial. Este principio implica que los efectos de la gravedad son universales ya que no hay objetos gravitacionalmente neutros. Así un cuerpo en caída libre en realidad es un cuerpo no acelerado al dejar de ver a la gravedad como una fuerza. Otro principio en el que se basó Einstein es el Principio General de la Relatividad, el cual nos dice que las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los marcos de referencia. Una forma de enunciar este principio es diciendo que las ecuaciones de la Relatividad General deben ser tensoriales, al cumplir esto, si las ecuaciones son válidas en un sistema serán válidas en cualquier sistema.

En la teoría clásica todo el espacio se puede describir con un sólo marco inercial, en el cual todos los puntos están en reposo con respecto del origen. Con esta nueva forma de describir los efectos de la gravedad, cambia lo que antes se consideraba los marcos inerciales. Sin embargo sí existe un sistema en el cual los cuerpos mantienen su velocidad uniforme. Un sistema en caída libre se acelera a de la misma manera que las partículas libres y por lo tanto mantendrán su velocidad uniforme en este sistema. Considere un observador en un elevador (ver figura 1.1) que se encuentra por el momento fijo, al soltar un objeto verá que este cae hacia el piso del elevador con una aceleración igual a la de la gravedad. Sostener un objeto en un punto fijo requiere de una fuerza igual a su masa por la aceleración de la gravedad. Supongamos que el elevador entra en caída libre, en este nuevo sistema sostener un cuerpo en un mismo punto con respecto del observador no requiere fuerza, y un cuerpo mantiene su velocidad uniforme. Así se concluye que un sistema que se encuentra en reposo en la Tierra no es un sistema inercial y un sistema en caída libre sí lo es. Sin embargo es imposible construir un marco inercial global que cubra todo el espacio, a lo más se pueden construir marcos inerciales locales.

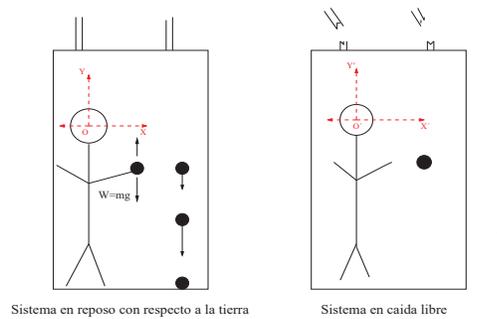


Figura 1.1: Cuando el sistema está en reposo con respecto a la Tierra un observador ve que los cuerpos caen con una aceleración igual a  $g$ . En el sistema en caída libre el cuerpo se mantiene en reposo con respecto al observador  $O'$ .

## 1.2. Variedades

El concepto matemático del espacio curvo empieza con la definición de una variedad. Básicamente una variedad es un espacio continuo que localmente se parece al espacio euclidiano, aunque globalmente no siempre se asemeje al espacio euclidiano. Por ejemplo, la superficie de una esfera es una variedad, la cual está parametrizada por medio de dos coordenadas  $\varphi$  y  $\theta$ . La asociación de los puntos con los valores de sus parámetros se puede ver como un mapeo de la variedad a los puntos del espacio euclidiano de la dimensión indicada. Como se mencionó, de forma global la variedad puede ser muy distinta al espacio euclidiano, pero cada punto del toro se puede parametrizar con 2 coordenadas  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , y hacer un mapeo entre una vecindad del punto  $p$  y el plano tangente al punto.

En la Relatividad General sólo se consideran las variedades diferenciables, esto es espacios que son continuos y diferenciables. Esto permite definir vectores y tensores. Para expandir nuestro entendimiento de una variedad es necesario introducir el concepto del tensor métrico. Este tensor se denota por medio de la letra  $\mathbf{g}$ , con componentes  $g_{\mu\nu}$ . Se pide que este tensor sea simétrico y no-singular, permitiendo así definir su inversa  $g^{\mu\nu}$ . En relatividad especial se adopta una métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , con 3 eigenvalores positivos y uno negativo, para describir el espacio plano. Se define el tensor  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , este tensor recibe el nombre de Métrica de Minkowski. El tensor métrico es de enorme utilidad, ya que da la noción de longitud, área, y volumen dentro de nuestro universo. Para poder dar una visión mas global de todas las funciones del tensor métrico se enlistan algunas de ellas. La métrica permite calcular la longitud de una trayectoria así como medir el tiempo propio de un observador. En un espacio plano la longitud de un vector se calculaba mediante la métrica euclidiana, esto es simplemente tomando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los componentes. Entonces un elemento diferencial de línea se podría escribir como  $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$ . Sin embargo en un espacio curvo la métrica reemplaza el producto punto tradicional en un espacio euclidiano. En un

espacio-tiempo curvado, se generaliza el elemento diferencial de línea por medio de

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

el cual es un mapeo entre dos vectores de la variedad a los números reales. La longitud de una curva se calcula por medio de la integral

$$l = \int_{\text{sobre la curva}} |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2}.$$

El tiempo propio es el tiempo medido por un reloj, entre dos eventos que suceden en el mismo lugar en el que se encuentra el reloj. Este se define como

$$t = \int |-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2}.$$

La métrica permite subir y bajar índices al crear un mapeo entre vectores y uno-formas

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu.$$

La métrica contiene toda la información para describir la curvatura de la variedad.

Una variedad diferenciable en la cual se ha introducido una métrica recibe el nombre de variedad Riemanniana, si la métrica es definida positiva, esto es si la métrica evaluada sobre dos vectores cumple  $g(V, U) > 0$  para todo  $U, V \neq 0$ , vectores dentro de la variedad. Las métricas que toman valores positivos y negativos reciben el nombre de métricas pseudo Riemanniana. Específicamente se tratara con una métrica Lorentziana, la cual tiene  $(n - 1)$  eigenvalores de un mismo signo y un eigenvalor del signo contrario. Al introducir la métrica a la variedad, esta toma estructura ya que la métrica describe la curvatura de la variedad. La matriz asociada a la métrica  $(g_{\mu\nu})$  por definición debe ser una matriz simétrica. Un teorema de álgebra lineal [2], postula que siempre existe una matriz de transformación que convierta una matriz simétrica a una matriz diagonal con las entradas siendo +1,-1 o 0, donde el número de +1 en las entradas es igual al número de eigenvalores positivos de la matriz  $(g_{\mu\nu})$  y el número de -1 es igual al número de eigenvalores negativos. Usando el teorema mencionado, en cualquier punto  $P$  siempre es posible encontrar una transformación que lleve a un sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  con el punto  $P$  como origen, y que transforme la métrica  $g_{\mu\nu}$ , a la métrica de Minkowski del espacio plano

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \eta_{\mu\nu} + O[(x^\alpha)^2] \quad (1.1)$$

Esta ecuación dice que cerca del punto  $P$ , la métrica es aproximadamente la usada en Relatividad Especial, con una diferencia de las coordenadas a segundo orden. Este sistema de coordenadas, o sistema de referencia, recibe el nombre de sistema localmente inercial. La ecuación (1.1), escrita de forma más precisa da

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\mu\nu}(P) = 0, \quad \forall \mu, \nu, \gamma, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(P) \neq 0, \quad (1.4)$$

En la sección anterior se mencionó que sólo se pueden encontrar sistemas inerciales de forma local. Una línea recta en el espacio plano es la línea de mundo describiendo la trayectoria de una partícula libre, el hecho de que la primera derivada sea cero significa que una partícula libre en un espacio curvo se mueve localmente a lo largo de una línea recta, en este sistema localmente inercial.

### 1.3. Tensores

Empezaremos por definir lo que son los tensores, ya que son una herramienta matemática que se utiliza mucho en la Relatividad General y Especial. Se da la siguiente definición: Un tensor de tipo  $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$  es una función de  $N$  vectores a los números reales, la cual es lineal en cada uno de sus  $N$  argumentos. Un tipo de tensor son aquellos de la forma  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , el cual es llamado covector, vector covariante o uno-forma. Una uno forma es una función lineal que toma como argumento un vector y regresa un número real. El conjunto de todas las uno-formas satisfacen los axiomas de un espacio vectorial, así el conjunto de uno formas constituyen el llamado Espacio Dual. Dado que forman un espacio vectorial, en un espacio de 4 dimensiones se pueden usar cuatro uno formas linealmente independientes para formar una base de dicho espacio. La base de las uno-formas se designaran con  $\tilde{w}_\alpha$  y con ellas se podrá escribir una uno forma arbitraria como combinación lineal de la base de uno formas.

Se puede definir otro tipo de tensores de la forma  $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$  los cuales son una función lineal de  $M$  uno-formas y que regresa un número real. Un tensor de tipo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  es una función que toma una uno-forma y regresa un número real. Esta definición concuerda con la de un vector, entonces un vector se puede definir como una función que toma como variable una-uno forma. Así los vectores dejan de ser los únicos objetos que se pueden tomar como argumentos de una función y de hecho se pueden ver como tensores en sí mismos. Con estas definiciones podemos empezar a notar la dualidad que existe entre vectores y uno-formas. Los tensores se pueden definir como funciones de uno-formas y las uno-formas como funciones de vectores. Un tensor arbitrario de la forma  $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$  es una función lineal que toma  $M$  covectores y  $N$  vectores y regresa un número real.

Así como los vectores, los tensores también tienen componentes. Empezamos por definir las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ : en un sistema  $O$  las componentes del tensor son el valor de la función cuando los argumentos son los vectores base del sistema  $O$ . Supongamos que tenemos un tensor  $\tilde{s}$  de tipo  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  en un espacio de 2 dimensiones con vectores base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , entonces  $\tilde{s}$  tendrá cuatro componentes

$$\tilde{s}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = s_{11} \quad \tilde{s}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = s_{12} \quad \tilde{s}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = s_{21} \quad \tilde{s}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = s_{22}.$$

El número de componentes de un tensor arbitrario dependerá de la dimensión del espacio en que está definido y del tipo de tensor. El tensor métrico es un tensor de este tipo el cual toma como argumento dos vectores, lo cual se denota como

$$g(\vec{V}, \vec{U}) \equiv g_{\mu\nu} V^{\mu\nu}$$

donde  $g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{\mu,\nu}$  son las componentes del tensor métrico.

Para definir las componentes de un tensor se requiere especificar un sistema  $O$ , entonces las componentes dependen del sistema que se elige. Para escribir las componentes en otro sistema  $O'$  se hace uso de la matriz de transformación  $\Lambda^{\alpha}_{\beta'}$ , la cual es usada para transformar las componentes de los vectores base del sistema  $O$  a  $O'$ , esto es  $\vec{e}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}_{\beta'} \vec{e}_\alpha$ . Por ejemplo, para definir las componentes de un tensor  $\mathbf{R}$  de tipo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en un sistema  $O$ , se requieren de las uno-formas base  $\tilde{w}_\alpha$  y los vectores base  $\vec{e}_\beta$ . La componente del tensor se escribe como  $\mathbf{R}(\tilde{w}^\alpha, \vec{e}_\beta) = R^\alpha_\beta$ . En un sistema  $O'$  se escribe

$$R^{\alpha'}_{\beta'} = \mathbf{R}(\tilde{w}^{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}) = \mathbf{R}(\Lambda^{\alpha'}_\mu \tilde{w}^\mu, \Lambda^\nu_{\beta'} \vec{e}_\nu) = \Lambda^{\alpha'}_\mu \Lambda^\nu_{\beta'} R^\mu_\nu, \quad (1.5)$$

El orden de los argumentos de un tensor arbitrario puede cambiar el número real que regresara el tensor. La forma en que se comporta un tensor según el orden de sus argumentos es una propiedad importante. Por ejemplo, se dice que un tensor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  es simétrico si:

$$f(\vec{A}, \vec{B}) = f(\vec{B}, \vec{A}), \quad \forall \vec{A}, \vec{B}.$$

Esto implica que las componentes del tensor son de la forma

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}.$$

De manera similar, se dice que el tensor es anti-simétrico si

$$f(\vec{A}, \vec{B}) = -f(\vec{B}, \vec{A}), \quad \forall \vec{A}, \vec{B},$$

lo cual implica que las componentes del tensor sean de la forma

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}.$$

Para un tensor arbitrario  $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$  pueden existir varias simetrías o anti-simetrías bajo algún cambio en sus argumentos. Por ejemplo si

$$R^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N} = R^{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N},$$

el tensor  $\mathbf{R}$  es simétrico en su primer y tercer índice superior. Este tensor sería anti-simétrico en estos dos índices si se cumple

$$R^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N} = -R^{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N}.$$

Existe un conjunto de operaciones que se pueden aplicar a las componentes de un tensor. Se llaman operaciones tensoriales permitidas porque producen componentes de un nuevo tensor. La multiplicación por un escalar produce componentes de un nuevo tensor del mismo tipo. La suma de las componentes de dos tensores del mismo tipo da componentes de un nuevo tensor del mismo tipo. La multiplicación de componentes de dos tensores de tipo arbitrario da componentes de un nuevo tensor, el tipo de este nuevo tensor es la suma de los tipos de los dos tensores que se multiplican. Esto se llama el producto exterior de los dos tensores. La derivada covariante de un tensor de tipo  $\binom{M}{N}$  da un nuevo tensor de tipo  $\binom{M}{N+1}$

## 1.4. Tensor de Energía Momento

Como veremos más adelante la energía y momento de las partículas son la fuente del campo gravitacional. Empezaremos repasando algunos conceptos necesarios para definir correctamente el tensor de energía momento. El cuadri-vector de momento de una partícula se define como

$$\vec{P} = m\vec{U} = (E, p^1, p^2, p^3)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula medida en un sistema comovil a ella y  $\vec{U}$  es la cuadri-velocidad de la partícula medida por un observador. La cantidad  $p^0 \equiv E$  es la energía de la partícula en algun sistema  $O$ , las demás son las componentes del momento espacial. Otro concepto importante es el flujo de cierta cantidad a través de una superficie. Por ejemplo, se puede calcular el número de partículas o la cantidad de energía que cruzan cierta superficie. Esto dependerá del sistema en que se mida y la superficie que se defina. La palabra superficie se refiere a una hypersuperficie de tres dimensiones. Una superficie se puede definir por medio de un vector  $\vec{N}$  que sea prependicular a ella. Por ejemplo, una hypersuperficie con la coordenada  $x^1$  constante tendrá un vector normal  $\vec{N} = (0, 1, 0, 0)$ . Un caso de interés es cuando se mantiene la coordenada temporal  $x^0$  constante. El flujo a través de una hypersuperficie de tiempo constante es la cantidad, ya sea partículas, energía o momento, que pasa a través del espacio 3 dimensional, es el número contenido en un volumen unitario a un tiempo constante dado, en otras palabras la densidad de cierta cantidad. Por ejemplo, si se habla del flujo de partículas a través de una hypersuperficie de tiempo constante, se está buscando el número de partículas que cruzan un volumen unitario a un tiempo constante. Se quiere saber cuantas partículas están contenidas en un volumen unitario a cierto tiempo, es decir la densidad de partículas a cierto tiempo.

El tensor de energía-momento es de tipo  $\binom{2}{0}$  y se representa con la letra **T**. Se puede definir en términos de sus componentes como sigue: la componente  $T^{\alpha\beta}$  describe el flujo de la componente de momento  $\alpha$  a través de una hypersuperficie de  $x^\alpha$  constante. Usando esta definición la componente  $T^{00}$  es el flujo de la componente temporal del cuadri-momento a través de una superficie de tiempo constante, en otras palabras la densidad de energía  $\rho$ . Las componentes  $T^{0i}$  describen el flujo de energía a través de una

superficie de  $x^i$  constante. Las componentes  $T^{i0}$  describen la densidad de la componente  $i$  del cuadri-momento. Finalmente las componentes  $T^{ij}$  describen el flujo de momento  $i$  a través de una superficie de  $x^j$  constante.

Un caso de interés es el fluido perfecto ya que se puede tomar como la fuente del campo gravitacional en varios casos físicos. En general, un fluido es una especie de continuo, una colección de partículas tan numerosas que no puede describir la dinámica de una partícula individual, sino que se describen cantidades promediadas, como lo son la densidad de energía, presión, número de partículas por unidad de volumen, aunque por lo general estas cantidades varían de un punto a otro. Se define un fluido perfecto como un fluido que no tiene viscosidad ni conducción de calor en un sistema comovil al fluido. El fluido perfecto es la generalización del gas ideal que se utiliza en termodinámica. La condición de que no haya conducción de calor implica que en el sistema comovil al fluido las componentes  $T^{0i} = T^{i0} = 0$ , esto nos dice que no habrá ni flujo de energía ni flujo de momento. La viscosidad es una fuerza paralela a la interface entre partículas. La condición de que no exista viscosidad implica que la fuerza siempre debe ser perpendicular a la interface entre partículas, para las componentes del tensor de energía momento esto significa que  $T^{ij} = 0$  excepto cuando  $i = j$ . Con estas condiciones una superficie de  $x^1$  constante sólo sentirá fuerza en la dirección  $x^1$ , es decir perpendicular a la superficie. Esto es igual para las superficies de  $x^2$  y  $x^3$  constante. Esta fuerza por unidad de área le llama presión y es igual para cada superficie. Con esto se obtiene  $T^{ij} = p\delta^{ij}$  donde  $p$  es la presión. Entonces en un sistema comovil al fluido perfecto el tensor  $\mathbf{T}$  toma la siguiente forma

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Esto se puede escribir de otra forma

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}, \quad (1.7)$$

donde  $\eta$  es la métrica de Minkowski y  $\vec{U} = (1, 0, 0, 0)$ . Para el caso de relatividad general, se reemplaza la métrica de Minkowski por una métrica general, así la expresión para el tensor de energía momento es

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

Una propiedad importante del tensor  $\mathbf{T}$  es que satisface la ley de conservación de energía y momento. Supongamos que tenemos un elemento cúbico de fluido (ver figura 1.2). La energía puede fluir a través de todos los lados. La energía que fluye a través del lado 4 es  $L^2 T^{0x}(x=0)$  y la energía que fluye a través del lado 2 es  $-L^2 T^{0x}(x=L)$ , el segundo término tiene un signo menos porque  $T^{0x}$  representa la energía que fluye hacia el lado positivo de las  $x$ 's, la cual estaría saliendo del volumen cúbico a través del lado 4. De forma similar la energía que fluye a través del lado 1 es  $L^2 T^{0y}(y=0)$  y la energía que fluye a través del lado 3 es  $-L^2 T^{0y}(y=L)$ . Ahora el cambio de la cantidad de energía dentro del volumen  $\frac{\partial T^{00} L^3}{\partial t}$  será igual a la suma de la energía que atraviesa todas las

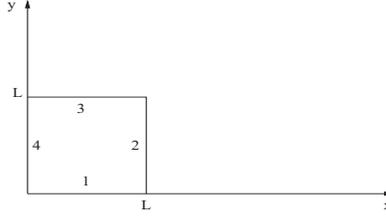


Figura 1.2: Un elemento de fluido cúbico con  $z$  constante, no se muestra el eje  $z$ .

paredes, esto se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{00} L^3}{\partial t} = & [L^2 T^{0x}(x=0) - L^2 T^{0x}(x=L) \\ & + L^2 T^{0y}(y=0) - L^2 T^{0y}(y=L) + L^2 T^{0z}(z=0) - L^2 T^{0z}(z=L)]. \end{aligned}$$

Dividiendo por  $L^3$  y tomando el límite  $L \rightarrow 0$  obtenemos

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z}.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$T^{0\alpha}{}_{,\alpha} = 0.$$

Similarmente cada una de las componentes de momento también se conserva y se puede obtener una ecuación similar para cada componente de momento. Con esto obtenemos la ley general de conservación dada por

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad (1.9)$$

En la Relatividad General la ecuación (1.9) se generaliza tomando la derivada covariante en ves de la derivada parcial.

## 1.5. Derivada Covariante

La derivada de un campo vectorial por definición involucra la diferencia de dos vectores en dos puntos distintos. En un sistema cartesiano la derivada sólo involucra las componentes del vector debido a que la base permanece constante en todo punto. Esta operación es muy conocida para un sistema cartesiano, pero en un espacio curvo la noción de la diferencia entre vectores en puntos diferentes se debe tratar con cuidado. En un espacio curvo la base en la cual se expresan los vectores no necesariamente se mantendrá constante de un punto a otro, entonces al derivar un campo vectorial es necesario involucrar la derivada de los vectores base. Así al derivar un vector expresado de la forma  $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ , con respecto a una coordenada, donde  $V^\alpha$  son las componentes y  $\vec{e}_\alpha$  son los vectores base, se obtiene

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (1.10)$$

Esto nos muestra que la derivada de un vector es más que la derivada de sus componentes. Los términos  $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$  son vectorer así que se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores base. Se introduce el símbolo  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  para denotar los coeficientes usados en la combinación lineal

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu.$$

La interpretación de  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  es que da la entrada  $\mu$ -ésima del vector  $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ . Se necesitan tres índices para definir completamente a  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ ,  $\alpha$  indica el vector base que se esta derivando,  $\beta$  la coordenada con respecto a la cual se esta derivando y  $\mu$  la componente del vector resultante. Estos símbolos han recibido el nombre de Símbolos de Cristoffel . Usando esta nueva notación la derivada de un vector toma la forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (1.11)$$

Se pueden renombrar los índices contraidos  $\alpha$  y  $\mu$  sin alterar la ecuación para obtener

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \vec{e}_\mu. \quad (1.12)$$

Se introduce una nueva notación para representar esta definición más general de la derivada o Derivada Covariante

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv \left( \nabla_\beta \vec{V} \right)^\alpha \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha.$$

Para una explicación mas detallada de la derivada covariante ver [2].La derivada covariante también se puede aplicar a tensores de cualquier orden. Para deducir la fórmula se empieza utilizando la propiedad de que un uno-forma aplicado a un vector da un escalar. Se toma un vector  $V$  y un uno-forma  $\tilde{p}$  arbitrarios. En un sistema de coordenadas arbitrario escribimos el escalar como

$$\phi = p_\alpha V^\alpha.$$

Tomando la derivada  $\nabla_\beta \phi$  se obtiene

$$\nabla_\beta \phi = \partial_\beta \phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Notamos que  $\phi$  no depende de los vectores base, por esto  $\nabla_\beta = \partial_\beta \phi$ . Se sustituye  $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$  por  $V^\alpha_{;\beta}$  el cual despejamos de (1.12):

$$\nabla_\beta \phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta} - p_\alpha V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha.$$

Renombrando índices podemos escribir la ecuación anterior como

$$\nabla_\beta \phi = \left( \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta}$$

donde el término entre paréntesis es la derivada covariante de  $\tilde{p}$ .

$$\nabla_\beta p_\alpha = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu.$$

Tenemos entonces las fórmula para calcular la derivada covariante de un uno forma y la derivada covariante de un vector. Usando el mismo procedimiento se puede calcular las siguientes fórmulas:

$$\nabla_{\beta} T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - T_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}, \quad (1.13)$$

$$\nabla_{\beta} A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}_{,\beta} + A^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + A^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}, \quad (1.14)$$

$$\nabla_{\beta} B^{\mu}_{\nu} = B^{\mu}_{\nu,\beta} + B^{\alpha}_{\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - B^{\mu}_{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}. \quad (1.15)$$

Hay una forma de relacionar la métrica con los Símbolos de Cristoffel [2]. Para ver esto se empieza tomando un sistema de coordenadas cartesianas denotadas por los índices  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  y coordenadas arbitrarias denotados por los índices primados  $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ . En cualquier sistema se tiene la igualdad  $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}$ , pero en un sistema cartesiano se tiene que

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\alpha\mu}.$$

En coordenadas cartesianas también se tiene que los símbolos de Cristoffel son iguales a cero entonces

$$V_{\alpha;\beta} = \eta_{\alpha\mu} V^{\mu}_{;\beta}$$

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} \quad \text{y} \quad V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta}.$$

De esto se concluye que

$$V_{\alpha;\beta} = V^{\alpha}_{\beta}.$$

Con esto se puede obtener, para coordenadas cartesianas, la siguiente ecuación

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}_{;\beta}. \quad (1.16)$$

Pero ya que esta ecuación esta en forma tensorial su validez en un sistema implica la validez en todos los sistemas. Si tomamos la derivada covariante de  $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}$  se obtiene

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'}.$$

Comparando esto con (1.16), ya que el vector  $\vec{V}$  es arbitrario, se obtiene

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} = 0. \quad (1.17)$$

Esta ecuación es válida en todos los sistemas. Ahora usando la ecuación (1.13) podemos calcular la fórmula para la derivada covariante de la métrica

$$\nabla_{\beta} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \quad (1.18)$$

Usando la igualdad obtenida (1.17) y escribiendo la ecuación anterior con una permutación en los índices obtenemos

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu},$$

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} g_{\alpha\nu},$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} g_{\beta\nu}.$$

Sumando estas ecuaciones, usando la propiedad de simetría de la métrica y haciendo un poco de álgebra se llega a la ecuación

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \quad (1.19)$$

Esta ecuación permite calcular los símbolos de Cristoffel a partir de las derivadas parciales de las componentes de la métrica.

## 1.6. Transporte Paralelo, Geodésicas y Curvatura

Hasta aquí no se ha analizado la curvatura de las variedades de forma explícita, sin embargo es necesario dar una definición matemática de ella. Primeramente se debe distinguir entre la curvatura intrínseca y la curvatura extrínseca. La curvatura intrínseca sólo considera la relación entre los puntos sobre la variedad, mientras la curvatura extrínseca aparece de considerar la variedad como una superficie en un espacio de mayor dimensión. Un cilindro por ejemplo parece estar curvado en una dirección, esto viene siendo su geometría extrínseca. Sin embargo un cilindro se puede obtener al enrollar una hoja de papel plana sin tener que arrugarlo. Así que la geometría intrínseca del cilindro es igual a la de la hoja de papel. Dos líneas paralelas sobre la hoja plana se mantendrían paralelas después de formar la superficie del cilindro. Si una hormiga caminara sobre la superficie del cilindro, esta llegaría a la conclusión de que la superficie es plana. Para apreciar su geometría extrínseca es necesario observar la superficie desde un espacio de mayor dimensión.

Se desea obtener una forma de saber si la geometría de un espacio tiene curvatura intrínseca. La idea de transporte paralelo nos ayuda a resolver este problema. Considere primeramente una curva cerrada en un espacio plano que empieza en un punto  $A$  (ver figura 1.3). En cada punto se dibuja un vector paralelo al vector que estaba en el punto previo sobre la curva cerrada. Esta construcción se sigue alrededor de la curva. El vector que se dibuja en  $A$  después de completar el circuito es paralelo al original.

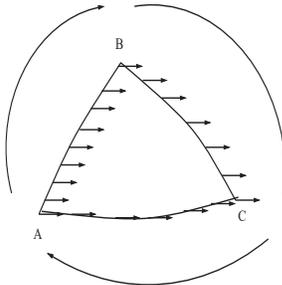


Figura 1.3: Transporte paralelo sobre una superficie plana.

Haciendo la misma operación sobre la superficie de una esfera vemos que obtenemos un resultado completamente distinto (ver figura 1.4). El vector que se dibuja al completar el

círculo gira 90 grados al regresar al punto original, a pesar de que cada vector se dibujo paralelo al vector anterior. Esto no pasó en el espacio plano así que se concluye que debe ser el resultado de la curvatura de la esfera. La construcción que se acaba de describir se llama transporte paralelo. Si se define en cada punto de una curva un campo vectorial

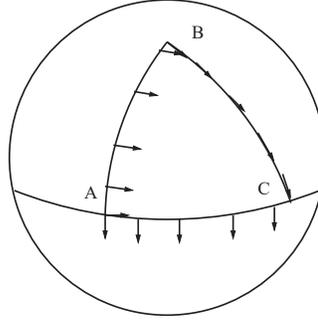


Figura 1.4: Transporte paralelo sobre una superficie esférica.

$\vec{V}$  y si los vectores  $\vec{V}$  en puntos sobre la curva infinitesimalmente cercanos son paralelos y de la misma longitud, entonces se dice que  $\vec{V}$  es transportado paralelamente sobre la curva. Para escribir una ecuación que describa este movimiento consideramos una curva parametrizada por  $\lambda$ , así un vector tangente a la curva es dado por  $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ . En un sistema localmente inercial en un punto  $P$  se pide que las componentes de  $\vec{V}$  sean constantes

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 \quad \text{en } P.$$

Esto se puede escribir como

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \text{en } P. \quad (1.20)$$

Dado que esta es una expresión tensorial es válido en cualquier sistema de referencia. Así la ecuación para expresar el transporte paralelo de un vector  $\vec{V}$  sobre una trayectoria definida por  $\vec{U}$  es

$$U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (1.21)$$

La expresión de lado derecho usa la notación  $\nabla_{\vec{U}}$  para definir una derivada covariante sobre  $\vec{U}$ .

En un espacio plano dos líneas rectas que inicialmente están paralelas se mantendrán paralelas cuando se extienden. Esto quiere decir que la tangente a la recta en un punto es paralela a la tangente de la recta en otro punto cercano al punto previo. En un espacio curvo se pueden extender líneas casi rectas exigiendo el transporte paralelo de los vectores tangentes. Estas curvas reciben el nombre de Geodésicas. Usando la ecuación del transporte paralelo se obtiene que el vector  $\vec{U}$  es tangente a una geodésica si y sólo si

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0.$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$U^\beta U^\alpha_{;\beta} = U^\beta U^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0. \quad (1.22)$$

Se mencionó que  $\lambda$  es el parametro de la curva así que  $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$  por lo que se puede expresar  $U^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{d}{d\lambda}$ . Con esto la ecuación anterior toma la forma de

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (1.23)$$

Esta es la ecuación para las geodésicas, la cual tiene una solución única dado la condición inicial  $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$  y  $U_0^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)_{\lambda_0}$ . Una geodésica tiene una longitud extremal entre dos puntos dados. Si se conoce  $g_{\mu\nu}$  entonces se podran obtener los símbolos de Cristoffel  $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$  y resolviendo la ecuación (1.23) se pueden obtener las trayectorias  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ . ALgunos ejemplos de la aplicación de la ecuación para las geodésicas son, la trayectoria de los planetas y la precssi3n del perihelio de Mercurio.

Dadas estas herramientas ya se puede hacer un análisis de la curvatura intrínseca de una variedad. Para hacer esto se considera el transporte paralelo de un vector alrededor de una curva cerrada cuyos cuatro lados tienen coordenadas  $x^1 = a$ ,  $x^1 = a + \delta a$ ,  $x^2 = b$  y  $x^2 = b + \delta b$ , y tomamos un vector  $\vec{V}$  que será transportado a lo largo de la curva (ver figura 1.5). Se empieza por transportar paralelamente el vector  $\vec{V}$  de A a B.

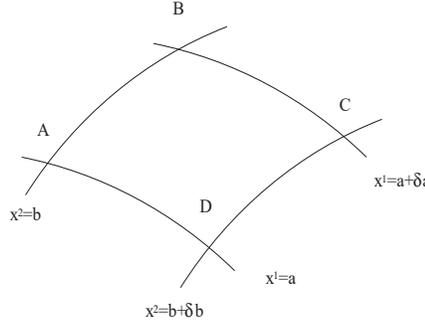


Figura 1.5: Se construye la curva como una pequeña parte de una red de coordenadas

Dado que estamos transportando  $\vec{V}$  en la dirección de la coordenada  $\vec{e}_1$  la ecuación de transporte paralelo es  $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0$  la cual desarrollada da:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu. \quad (1.24)$$

Así en el punto B el vector tiene componentes

$$V^\alpha(B) = V^\alpha(A) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = V^\alpha(A) - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1. \quad (1.25)$$

La notación  $x^2 = b$  debajo de la integral denota la trayectoria de A a B. De manera similar se puede transportar el vector de B a C a D

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2, \quad (1.26)$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1, \quad (1.27)$$

$$V^\alpha(A_{\text{final}}) = V^\alpha(D) + \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (1.28)$$

Las integrales en las últimas dos ecuaciones tienen el signo distinto porque el transporte paralelo de  $C$  a  $D$  y de  $D$  a  $A$  tienen el sentido con el signo negativo de  $x^1$  y de  $x^2$ . El cambio total de  $V^\alpha(A)$  es un vector  $\delta V^\alpha$ , que se encuentra al restar las ecuaciones (1.25)-(1.28).

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= V^\alpha(A_{\text{final}}) - V^\alpha(A_{\text{inicial}}) \\ &= \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \end{aligned}$$

Esta suma se cancelaría si  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu$  fueran constantes en la curva como lo son en el espacio plano. Pero en el espacio curvo no son constantes así a primer orden da

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &\approx - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) dx^1 \\ &\approx \delta a \delta b \left[ - \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) \right] \end{aligned}$$

Esta última expresión se obtuvo utilizando el teorema del valor medio. Esta ecuación involucra las derivadas de  $V^\mu$ , así se puede sustituir las por expresiones similares a (1.24) para obtener

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma_{\mu 1,2}^\alpha - \Gamma_{\mu 2,1}^\alpha + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu] V^\mu. \quad (1.29)$$

Se puede ver que hay una suma en  $\mu$  y que la expresión es antisimétrica en las coordenadas 1 y 2 ya que se escogió cierta dirección en la trayectoria. Ahora si se escogen coordenadas generales la ecuación da

$$\delta V^\alpha = \delta a^\sigma \delta b^\lambda [\Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu] V^\mu. \quad (1.30)$$

Se define

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (1.31)$$

Este es un tensor de tipo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  y recibe el nombre de tensor de curvatura o tensor de Riemann. Entonces

$$\delta V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \delta a^\nu \delta b^\mu$$

Es útil ver las componentes del tensor de Riemann en un punto  $P$  en un sistema localmente inercial. En este sistema  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$  y de la ecuación (1.19) vemos que

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}).$$

Como las segundas derivada de  $g_{\alpha\beta}$  son distintas de cero, en el punto  $P$  se obtiene

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu}). \quad (1.32)$$

Usando la simetría de  $g_{\alpha\beta}$  y el hecho que  $g_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\beta,\nu\mu}$  dado que en este caso las derivadas parciales conmutan se obtiene

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}). \quad (1.33)$$

Se puede bajar el índice del tensor de Riemann para obtener

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}). \quad (1.34)$$

Escrito de esta forma se pueden verificar las siguientes igualdades

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (1.35)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (1.36)$$

Como las ecuaciones (1.35) y (1.36) son ecuaciones tensoriales su validez en el sistema localmente inercial implica la validez en cualquier sistema. Se puede ver que el tensor  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  es antisimétrico en el primer y segundo par de índices y simétrico al cambiar los 2 pares de índices. Se puede mostrar que las identidades (1.35) y (1.36) reducen, en cuatro dimensiones, el número de componentes independientes del tensor  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  a 20. Es importante notar que una variedad plana es una en que existe una definición global de paralelismo, en otras palabras que un vector puede ser transportado paralelamente sobre una curva cerrada arbitraria y al regresar al punto de origen permanecer sin cambios. Esto implica que

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \text{la variedad es plana}$$

## 1.7. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y de Einstein

Regresemos a la ecuación (1.34), recordemos que esta ecuación es válida en el sistema localmente inercial. Tomando la derivada con respecto a  $x^\lambda$  de (1.34) se obtiene

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}).$$

Usando esta ecuación, la simetría de  $g_{\alpha\beta}$  y el hecho de que conmutan las derivadas parciales se puede verificar

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0.$$

Dado que en este sistema  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$  la ecuación anterior es equivalente a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (1.37)$$

Esta es una ecuación tensorial así que es válida en cualquier sistema y recibe el nombre de Identidades de Bianchi. Definimos el tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  como

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (1.38)$$

que es la contracción del tensor de Riemann en el primer y tercer índice. Definimos también el escalar de Ricci también llamado escalar de curvatura como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.39)$$

Aplicando una contracción a las identidades de Bianchi se obtiene

$$\begin{aligned} & g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] \\ &= R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu}) = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Para derivar este resultado se necesitan tomar en cuenta dos cosas. Primero que  $g_{\alpha\beta;\mu}=0$ , y dado que  $g^{\alpha\mu}$  es función solamente de  $g_{\alpha\beta}$  entonces se tiene que  $g^{\alpha\beta}_{;\mu} = 0$ . Lo segundo es que

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu}$$

Si se vuelve a contraer la ecuación (1.40) se obtiene

$$\begin{aligned} & g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu}] \\ &= R_{;\lambda} - R^{\mu}_{\lambda;\mu} - R^{\mu}_{\lambda;\mu} = 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

La ecuación anterior se puede escribir de la forma

$$(2R^{\mu}_{\lambda} - \delta^{\mu}_{\lambda} R)_{;\mu} = 0$$

Esta es la forma de las identidades de Bianchi contraídas dos veces. Se puede definir un tensor simétrico

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha}. \quad (1.42)$$

Con esta definición se puede reescribir (1.41) como

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (1.43)$$

El tensor  $G^{\alpha\beta}$  es un tensor que se contruye a partir del tensor de Riemann y de la métrica, este se llama Tensor de Einstein.

## 1.8. Ecuaciones de Campo de Einstein

Hasta ahora se ha dado la descripción de la gravedad y como afecta a la materia, falta por mostrar como las fuentes del campo gravitatorio determinan la curvatura del espacio y por lo tanto determinan la forma de la métrica. En la teoría de Newton se tiene

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (1.44)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa y  $\phi$  es el potencial del campo gravitacional. La solución de esta ecuación para una masa puntual  $m$  es

$$\phi = -\frac{Gm}{r}.$$

En la teoría de Newton la fuente del campo de gravedad es la densidad de masa. En la teoría de Relatividad la fuente de gravedad debe estar relacionada a la densidad de masa pero debe ser un objeto con una interpretación relativista, y la masa no es suficiente para describir la fuente de gravedad. La teoría de la Relatividad relaciona la energía con la materia, así que la energía también debe estar considerado como fuente de gravedad. Uno podría proponer  $\rho$ , la densidad de energía, como la fuente de gravedad, sin embargo  $\rho$  es la densidad de energía medido por un observador específico. Otro observador vería a  $\rho$  simplemente como la componente  $T^{00}$  del tensor de energía-momento. Se puede generalizar la fuente de campo gravitacional sin imponer un sistema privilegiado, al introducir el tensor de energía momento  $T$  como la fuente del campo gravitacional. La generalización de (1.44) a la teoría Relativista es

$$O(g) = kT \quad (1.45)$$

donde  $k$  es una constante y  $O$  es un operador diferencial de segundo orden que actúa sobre la métrica  $g$  la cual es la generalización de  $\phi$ . Esta generalización dará 10 ecuaciones diferenciales, una para cada componente de (1.45).

Por analogía a la ecuación (1.44), se busca que  $O$  sea un operador diferencial de segundo orden, el cual produce un tensor de forma  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . En otras palabras,  $O^{\alpha\beta}$  deben ser las componentes de un tensor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  y debe ser combinación de  $g_{\mu\nu;\lambda\sigma}$ ,  $g_{\mu\nu;\lambda}$  y  $g_{\mu\nu}$ . El tensor de Ricci satisface estas condiciones, también cualquier tensor de la forma

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}. \quad (1.46)$$

Usando la ecuación anterior y la ecuación de continuidad  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  se obtiene que

$$O^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (1.47)$$

La cual da

$$\left( R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} \right)_{;\beta} = 0. \quad (1.48)$$

Comparando esta ecuación con (1.42), se ve que tomando  $\mu = \frac{1}{2}$  la ecuación anterior es válida para  $g_{\alpha\beta}$  arbitrarios. Con esto se concluye que la ecuación que se busca es

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = k\mathbf{T}, \quad (1.49)$$

donde  $\Lambda$  es una constante cosmológica. Se toma  $k = G8\pi$  donde  $G$  es la constante de gravedad, para que las ecuaciones de Einstein concuerden con las predicciones clásicas, al pedir que la Relatividad concuerde con el límite Newtoniano, esto es para el caso de velocidades bajas y campos gravitacionales débiles. La constante cosmológica  $\Lambda$  no apareció en las ecuaciones originales de Einstein, sino que lo introdujo varios años después para obtener soluciones estáticas del universo. En su época se pensaba que el universo era estático y Einstein se dio cuenta que podía introducir una constante cosmológica para obtener soluciones estáticas. Sin embargo abandonó la idea después de las observaciones hechas por Hubble, las cuales indicaban que el universo no se encontraba estático. La idea de una constante cosmológica se volvió a retomar, cuando surgieron las ideas de

la energía oscura y cuando observaciones sugirieron que la expansión del universo se estaba acelerando.

Las ecuaciones de Einstein se han utilizado para modelar varios tipos de sistemas del universo, por ejemplo, los sistemas esféricamente simétricos. Se han encontrado soluciones para modelos de estrellas estáticas con simetría esférica. La métrica se puede construir a partir de argumentos geométricos, imponiendo las condiciones de simetría esférica y se usa el tensor de energía momento para un fluido perfecto estático. Se necesita una ecuación de estado que relaciona la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $p$ . De estas soluciones se obtiene la geometría de Schwarzschild que describe el espacio tiempo afuera de las estrellas esféricamente simétricas y que depende de la masa de la estrella. Las ecuaciones de Einstein también se han utilizado para modelar diferentes tipos de hoyos negros. Los hoyos negros de Schwarzschild son estáticos con simetría esférica, los hoyos negros de Kerr tienen simetría axial. Los hoyos negros de Reissner-Nordström son cargados y presentan simetría esférica. El tensor de energía momento es de campo electromagnético. Veremos más adelante que las ecuaciones de Einstein también se pueden utilizar para modelar la evolución del universo.



## Capítulo 2

# Conceptos de Simetría

En este trabajo nos enfocaremos a la métrica de Robertson-Walker, este modelo toma la fuerte suposición de que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, esto implica que el universo sea espacialmente simétrico. La suposición de homogeneidad e isotropía del universo determina en gran manera la forma de la métrica. Para poder usar correctamente el concepto de simetría, y así obtener información sobre la forma de la métrica, es necesario definirlo de una manera más precisa. Este capítulo esta basado en [3].

### 2.1. Vectores de Killing

Decimos que un espacio es simétrico si la métrica no cambia bajo cierta transformación de coordenadas. En términos más precisos se dice que una métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  es invariante bajo una transformación de coordenadas  $x \rightarrow x'$ , cuando la métrica transformada  $g'_{\mu\nu}(x')$  es la misma función de sus argumentos  $x'^\mu$  que la métrica original  $g_{\mu\nu}(x)$  lo era de sus argumentos  $x^\mu$ , esto es

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y), \quad \forall y \in M, \quad (2.1)$$

donde M representa el espacio en el cual existe el tensor  $g_{\mu\nu}$ . La métrica original se puede expresar en términos de la transformada como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x').$$

Si se cumple la ecuación (2.1) entonces podemos escribir la ecuación anterior como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'). \quad (2.2)$$

Cualquier transformación de coordenadas que cumple con esta ecuación se le llama una isometría. Solo vamos a considerar el caso de transformaciones infinitesimales de la forma

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (2.3)$$

Considerando transformaciones de este tipo podemos sustituir (2.3) en (2.2), lo cual nos da:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial(x^\rho + \epsilon\xi^\rho)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\sigma + \epsilon\xi^\sigma)}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x + \epsilon\xi).$$

Podemos desarrollar  $g_{\rho\sigma}$  en serie de Taylor alrededor de  $x$  y obtener

$$g_{\mu\nu}(x) = (\delta_\mu^\rho + \epsilon\partial_\mu\xi^\rho) (\delta_\nu^\sigma + \epsilon\partial_\nu\xi^\sigma) \left( g_{\rho\sigma}(x) + \epsilon\xi^\mu \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \dots \right).$$

Escrita a primer orden en  $\epsilon$ , la ecuación anterior se convierte en

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma g_{\rho\sigma} + \epsilon g_{\rho\sigma} \delta_\mu^\rho \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} + \epsilon g_{\rho\sigma} \delta_\nu^\sigma \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} + \epsilon \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma \xi^\mu \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}.$$

Esta ecuación debe ser válida para cualquier valor de  $|\epsilon| \ll 1$ , simplificando obtenemos.

$$0 = \frac{\partial \xi^\mu(x)}{\partial x^\rho} g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\nu(x)}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu} + \xi^\mu \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu}.$$

Podemos reescribir la ecuación anterior en términos de las componentes covariantes,  $\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\xi^\mu$ . La ecuación que resulta de esta operación es

$$0 = \frac{\partial \xi_\sigma(x)}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho(x)}{\partial x^\sigma} + \xi^\mu \left[ \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}(x)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}(x)}{\partial x^\sigma} \right].$$

Recordando la ecuación que relaciona los símbolos de Cristoffel con la métrica y sustituyendo obtenemos

$$0 = \frac{\partial \xi_\sigma(x)}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho(x)}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu.$$

Esto se puede reescribir con la notación de la derivada covariante como:

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma}. \quad (2.4)$$

Cualquier campo de cuadvectores que cumpla con esta ecuación recibe el nombre de vectores de Killing, así que para poder encontrar todas las transformaciones infinitesimales que son isometrías de cierta métrica, es necesario resolver la ecuación de Killing.

Se puede obtener otra igualdad muy útil usando primeramente la ecuación del conmutador de dos derivadas covariantes

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} = -R_{\sigma\rho\mu}^\lambda \xi_\lambda. \quad (2.5)$$

Si permutamos dos veces los índices  $\sigma\rho\mu$ , de la ecuación anterior podemos obtener otras dos ecuaciones

$$\xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} = -R_{\mu\sigma\rho}^\lambda \xi_\lambda. \quad (2.6)$$

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu} = -R_{\rho\mu\sigma}^\lambda \xi_\lambda. \quad (2.7)$$

Recordemos que el tensor de curvatura cumple con la igualdad (1.36)

$$R_{\sigma\rho\mu}^\lambda + R_{\mu\sigma\rho}^\lambda + R_{\rho\mu\sigma}^\lambda = 0.$$

Sumando (2.5)-(2.7) y utilizando la ecuación anterior obtenemos

$$0 = \xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} + \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} + \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu}.$$

Utilizando la igualdad (2.4) para vectores de Killing se obtiene

$$0 = \xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu}.$$

Si despejamos  $\xi_{\rho;\sigma;\mu}$  de esta última ecuación y la sustituimos en (2.5) obtenemos la ecuación deseada.

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} = -R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda}\xi_{\lambda}. \quad (2.8)$$

Esta ecuación nos resulta muy útil, al expresar la segunda derivada de un vector de Killing en términos de sus componentes  $\xi_{\lambda}$  y el tensor de curvatura en algún punto  $X$ . Tomando la derivada de (2.8) obtenemos la tercera derivada de  $\xi$  en términos de la primera derivada de  $\xi$ , al tomar derivadas de mayor orden estas quedarán expresadas en términos de  $\xi_{\lambda}$  y de  $\xi_{\lambda;\nu}$ . Dados entonces los valores de  $\xi_{\lambda}$  y  $\xi_{\lambda;\nu}$  en algún punto  $X$  se puede resolver (2.8) para encontrar  $\xi_{\lambda}(x)$  en cualquier punto. Si desarrolláramos una de las  $\lambda$  funciones que son componentes de uno de los  $n$  vectores de Killing  $\xi_{\lambda}^n(x)$ , en serie de Taylor alrededor del punto  $X$  obtenemos

$$\xi_{\rho}^n(x) = \xi_{\rho}^n(X) + (x^{\nu} - X^{\nu})\xi_{\rho;\nu}^n(X) + \frac{1}{2}(x^{\nu} - X^{\nu})(x^{\mu} - X^{\mu})\xi_{\rho;\nu;\mu}^n(X) + \dots \quad (2.9)$$

Como todas las derivadas de orden mayor quedan en función de  $\xi_{\lambda}$  y de  $\xi_{\lambda;\nu}$ , la serie quedará expresada como una función de  $\xi_{\lambda}$  y de  $\xi_{\lambda;\nu}$  en  $X$

$$\xi_{\rho}^n(x) = A_{\rho}^{\lambda}(x; X)\xi_{\lambda}^n(X) + B_{\rho}^{\lambda\nu}(x; X)\xi_{\lambda;\nu}^n(X). \quad (2.10)$$

Donde  $A_{\rho}^{\lambda}(x; X)$  y  $B_{\rho}^{\lambda\nu}(x; X)$  son funciones que dependen de la métrica, de  $X$  y del punto  $x$  donde se va calcular la función  $\xi_{\lambda}^n(x)$ . La primera variable que aparece en  $A_{\rho}^{\lambda}(x; X)$  denota el punto donde se quiere calcular  $\xi_{\lambda}^n(x)$  y la segunda indica el punto alrededor del cual se va desarrollar la expresión (2.9) para  $\xi_{\rho}^n(x)$ . Las funciones  $A_{\rho}^{\lambda}(x; X)$  y  $B_{\rho}^{\lambda\nu}(x; X)$  dependen de  $X$  pero no dependen de el valor  $\xi_{\lambda}(X)$  y de  $\xi_{\lambda;\nu}(X)$  así que cada vector de Killing queda especificado por estos valores.

Se dice que un conjunto de vectores de Killing es independiente sí no satisface la ecuación

$$\sum_n c_n \xi_{\rho}^n(x) = 0. \quad (2.11)$$

con coeficientes constantes  $c_n \neq 0$ . La ecuación (2.10), muestra que los valores  $\xi_{\lambda}(X)$  y  $\xi_{\lambda;\nu}(X)$  forman una base para expresar cualquier vector de Killing, nos gustaría saber cuantos vectores independientes puede haber. De (2.10) podemos ver que a lo más pueden existir  $\frac{N(N+1)}{2}$  vectores de Killing independientes en un espacio de  $N$  dimensiones. Esto se debe a que para cada  $n$  pueden existir  $N$  valores de  $\xi_{\lambda}(X)$  y  $\frac{N(N-1)}{2}$  valores independientes de  $\xi_{\lambda;\nu}(X)$ , esto último se debe a la relación de antisimetría entre las primeras derivadas de los vectores de Killing de la ecuación (2.4).

La idea de que puedan existir más de  $N$  vectores de Killing independientes en un espacio de  $N$  dimensiones puede causar cierta confusión. Lo que pide la condición (2.11) es que los coeficientes  $c_n$  sean constantes en todo el espacio. Ciertamente, cualquier conjunto de más de  $N$  vectores de Killing, o cualquier otro tipo de vectores, en un espacio de  $N$  dimensiones será linealmente dependiente ya que en cada punto se podrán encontrar valores  $c_n$  que cumplan con (2.11), sin embargo estos valores no necesariamente serán constantes en todo el espacio, sino que los valores dependerán del punto en que se calculen  $c_n(x)$ .

## 2.2. Homogeneidad e Isotropía

De forma más precisa se dice que un espacio es homogéneo si existen isometrías infinitesimales que llevan cualquier punto  $X$  a otro punto que está dentro de su vecindad. Esto implica que, en cualquier punto la métrica debe admitir vectores de Killing que formen una base en el espacio, permitiendo ir del punto  $X$  a cualquier otro sin alterar la métrica. De forma matemática esto implicaría que en un espacio de  $N$  dimensiones podemos tomar  $N$  vectores de Killing de forma que

$$\xi_{\lambda}^{(\mu)}(X; X) = \delta_{\lambda}^{\mu}. \quad (2.12)$$

Se utiliza la letra  $\mu$  entre parentésis para identificar uno de los  $N$  vectores con los que se trabaja, y la letra  $\lambda$  para identificar la entrada del vector  $\mu$ . Esta definición de homogeneidad concuerda con nuestra idea intuitiva de homogeneidad ya que con un conjunto de  $N$  vectores de Killing de la forma (2.12) sería posible escribir traslaciones infinitesimales que dejen la métrica invariante en todas las direcciones. Este conjunto de vectores formara una base ortonormal.

Se dice que un espacio es isotrópico en un punto  $X$  si existen isometrías que dejan el punto fijo, o sea que  $\xi_{\lambda}^{\mu}(X; X) = 0$  y que su primera derivada tome valores arbitrarios. Estos vectores deben cumplir con la ecuación (1.4), haciéndolos antisimétricos en  $\mu$  y  $\nu$ . En un espacio de  $N$  dimensiones estas condiciones nos darán un conjunto de  $\frac{N(N-1)}{2}$  vectores de Killing que cumplen con

$$\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x; X) = -\xi_{\lambda}^{(\nu\mu)}(x; X), \quad (2.13)$$

$$\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(X; X) = 0, \quad (2.14)$$

$$\xi_{\lambda;\rho}^{(\mu\nu)}(X; X) = \delta_{\lambda}^{\mu}\delta_{\rho}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}. \quad (2.15)$$

En estas ecuaciones se utilizó la notación  $(\mu\nu)$  para indicar uno de los  $\frac{N(N-1)}{2}$  vectores de Killing. Esta definición de isotropía también concuerda con nuestra idea intuitiva. Un conjunto de vectores de Killing que cumpla con las condiciones (1.9)-(1.11) permiten isometrías que representan a rotaciones infinitesimales. Estos vectores son independientes ya que en un espacio de  $N$  dimensiones existen  $\frac{N(N-1)}{2}$  rotaciones que son justamente el número de vectores de Killing que cumplen con estas condiciones. Una métrica

que admite  $\frac{N(N+1)}{2}$ , el número máximo de vectores de Killing, es una métrica con simetría máxima. De hecho, un espacio que es homogéneo e isotrópico en un punto  $X$  tendrá los  $\frac{N(N+1)}{2}$  vectores de Killing, así concluimos que cualquier espacio que sea homogéneo e isotrópico es un espacio con simetría máxima.

Para ejemplificar, consideremos un espacio euclidiano de 2 dimensiones, el cual es homogéneo e isotrópico. Como es un espacio de simetría máxima, debemos encontrar  $\frac{2(2+1)}{2}$  vectores de Killing. Existen 2 vectores de Killing con la propiedad (2.12)

$$\xi^1 = (1, 0), \xi^2 = (0, 1).$$

El hecho de que existan estos 2 vectores de Killing permite las traslaciones en cualquier dirección en el espacio sin alterar la métrica. Así se puede ir de un punto  $x$  a cualquier punto  $x'$  que este dentro de la vecindad al crear una isometría de la forma (2.3).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix},$$

en donde  $a$  y  $b$  son constantes  $|a| \ll 1, |b| \ll 1$ . En el espacio plano existe una sola rotación independiente, sabemos que una rotación se puede expresar de forma matricial como:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Para una rotación infinitesimal para el cual  $|\theta| \ll 1$  esta matriz toma la forma de

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Así la expresión de una rotación en las coordenadas queda como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Podemos definir el último vector de Killing como

$$\xi^3 = (-y, x).$$

Usando la notación  $(\mu\nu)$  podemos etiquetar este vector como

$$\xi^{(12)} = (-y, x), \quad \xi^{21} = (y, -x).$$

Si intercambiamos los índices, obtenemos el vector que representa rotaciones en el sentido opuesto a las del vector  $\xi^{12}$ . En este ejemplo, el punto isotrópico, denotado por  $X$  en (2.13)-(2.15), es el origen del plano, el punto  $(0, 0)$ . Por lo tanto el vector  $\xi^{12}$  cumple con la condición (2.14). Para comprobar la condición (2.14), primero etiquetamos la variable  $x$  con el 1 y la variable  $y$  con 2. Entonces los casos distintos de cero son:

$$\xi_{1;2}^{12} = 1 \quad \xi_{2;1}^{12} = -1.$$

El vector de Killing que definimos, cumple con las tres condiciones (2.13)-(2.15) y define las isometrías equivalentes a las rotaciones infinitesimales.

### 2.3. Propiedades de Espacios Simétricos

Si un espacio es homogéneo e isotrópico, las condiciones de simetría máxima imponen fuertes restricciones sobre la forma de la métrica. A continuación se mencionarán algunas de las propiedades más importantes de los espacios con simetría máxima. Un espacio con simetría máxima queda especificado de forma única por medio de una constante de curvatura  $K$ , y por el número de eigenvalores positivos o negativos de la métrica [3]. Esta propiedad nos permite escribir el tensor de Ricci y Reimann como

$$R_{\sigma\rho} = -(N - 1)K g_{\sigma\rho}, \quad (2.16)$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}), \quad (2.17)$$

donde  $N$  es la dimensión del espacio. Esta propiedad nos será muy útil a la hora de construir la métrica para un espacio con simetría máxima.

La suposición de simetría máxima no sólo afecta el tensor métrico sino que afecta a todos los tensores que existen en ese espacio. Así se puede pedir que un tensor  $T_{\mu\nu\dots}$  sea invariante bajo una transformación  $x \rightarrow x'$ , este tensor debe cumplir con una ecuación parecida a (2.1). Considerando el caso de transformaciones infinitesimales de la forma (2.3), obtenemos

$$0 = \frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\mu} T_{\rho\nu\dots}(x) + \frac{\partial \xi^\sigma(x)}{\partial x^\nu} T_{\mu\sigma\dots}(x) + \dots + \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T_{\mu\nu\dots}(x). \quad (2.18)$$

Para el caso de un escalar  $S(x)$  que es invariante la ecuación (1.14) lleva a

$$\xi^\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} S(x) = 0$$

lo que nos dice que  $S(x)$  debe ser una constante  $S(x) = S$ . Si consideramos el caso de un vector invariante  $A_\mu(x)$ , la ecuación (1.14) nos lleva a que el vector  $A_\mu = 0$ . Finalmente para el caso de un tensor invariante de rango dos,  $T_{\mu\nu}$  sólo puede ser igual a la métrica multiplicado por una constante [3].

Ahora consideremos un espacio que en su totalidad no tiene simetría máxima pero que tiene subespacios con simetría máxima. Este tipo de espacios se encuentran en varios casos físicos, como el modelo del espacio-tiempo que se tratará en este trabajo. Ahora, los subespacios con máxima simetría imponen restricciones sobre la forma de la métrica del espacio completo. Supongamos que el espacio completo tiene una dimensión  $N$  y que el subespacio con máxima simetría tiene una dimensión  $M$ , entonces para localizar un punto dentro del complemento del espacio simétrico se ocuparán  $(N - M)$  coordenadas  $v^a$ , para localizar un punto en el subespacio simétrico se ocuparán  $M$  coordenadas  $u^i$ . Por ejemplo el espacio 3 dimensional se puede dividir en familias de superficies esféricas con el centro en el origen, cada una de estos subespacios serán simétricos. Así la coordenada  $v = r$  y las coordenadas  $u = \theta, \varphi$ .

Los espacios de este tipo tienen la siguiente propiedad: Siempre es posible escoger las  $u$ -coordenadas de forma que la métrica de todo el espacio toma la forma de:

$$-ds^2 = g_{ab}(v)dv^a dv^b + f(v)\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j \quad (2.19)$$

donde  $g_{ab}(v)$  y  $f(v)$  son funciones solamente de las coordenadas  $v$  y  $\tilde{g}_{ij}$  es una métrica del subespacio de dimensión  $M$  con simetría máxima,  $y$  es una función solamente de las coordenadas  $u$  [3]. Aquí los índices  $a, b$  van sobre las  $M - N$  entradas y los índices  $i, j$  van sobre las  $M$  entradas.

## 2.4. Construcción de la Métrica de un Espacio Simétrico

Utilizando la propiedad de que los espacios simétricos se pueden especificar de forma única con una constante  $K$ , se pueden construir espacios tomando una  $K$  arbitraria. Consideremos un espacio plano de dimensión  $(N + 1)$  con una métrica dada por

$$-ds^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + K^{-1}dz^2. \quad (2.20)$$

Donde  $C_{\mu\nu}$  es una matriz constante de  $N \times N$  y  $K$  es una constante arbitraria. Si restringimos las variables  $x^\mu$  y  $z$  a una pseudo esfera de la forma

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1, \quad (2.21)$$

obtenemos un espacio no-euclidiano de dimensión  $N$ . Al despejar  $z^2$  de (2.21) y diferenciando obtenemos una expresión para  $dz^2$  sobre la superficie

$$dz^2 = \frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.20), esta se escribe como

$$ds^2 = C_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}. \quad (2.22)$$

La métrica inducida en la pseudo esfera toma la forma de

$$g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + \frac{K}{(1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)} C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu\kappa}x^\kappa. \quad (2.23)$$

Para ayudar a ilustrar esto consideremos el espacio euclidiano 3 dimensional. Podemos restringir el espacio a la superficie de una esfera, este subespacio será de dimensión 2. De la sección 2.1, sabemos que existen  $\frac{N(N-1)}{2}$  rotaciones independientes en un espacio de dimensión  $N$ , si hacemos una rotación de las coordenadas en el espacio 3 dimensional, el subespacio queda invariante, como se ve en la figura 2.1. En el caso general no necesariamente se esta tratando la superficie de una esfera, sino que restringimos el espacio a una pseudo esfera. En el espacio de dimensión  $(N + 1)$  existen  $\frac{(N+1)([N+1]-1)}{2}$  rotaciones independientes que dejarán invariante el subespacio de dimensión  $N$ . Entonces la métrica (2.23) admite  $\frac{N(N+1)}{2}$  vectores de Killing para las transformaciones:

$$x'^\mu = R^\mu{}_\nu x^\nu + R^\mu{}_z z, \quad (2.24)$$

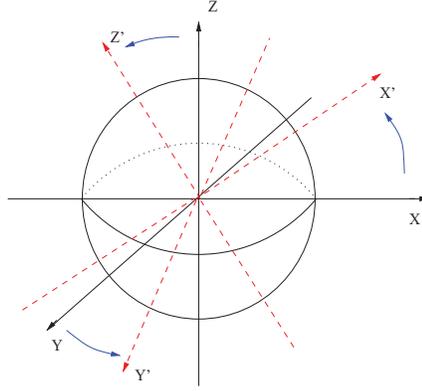


Figura 2.1: Una rotación del espacio tres dimensional, deja la superficie de la esfera invariante

$$z' = R_{\mu}^z x^{\mu} + R_z^z z. \quad (2.25)$$

Donde  $R^A_B$  son constantes con las siguientes condiciones:

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}_{\rho} R^{\nu}_{\sigma} + K^{-1} R^z_{\rho} R^z_{\sigma} = C_{\rho\sigma}, \quad (2.26)$$

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}_{\rho} R^{\nu}_z + K^{-1} R^z_{\rho} R^z_z = 0, \quad (2.27)$$

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}_z R^{\nu}_z + K^{-1} (R^z_z)^2 = K^{-1}. \quad (2.28)$$

Estas condiciones se obtienen al sustituir (2.24)-(2.25) en la métrica obtenida (2.23) y pedir que esta no cambie de forma al sustituir las variables primadas. Estas transformaciones son en el espacio de dimensión  $(N + 1)$ , como se ilustró en el ejemplo, dejarán inalterado el subespacio de dimensión  $N$ . Ahora podemos diferenciar dos clases de transformaciones independientes que cumplen con las condiciones (4.24)-(4.26). La primera clase de transformación tiene las siguientes condiciones

$$R^{\mu}_{\nu} = A^{\mu}_{\nu}, \quad R^{\mu}_z = R^z_{\mu} = 0, \quad R^z_z = 1. \quad (2.29)$$

Donde  $A^{\mu}_{\nu}$  es cualquier matriz de  $N \times N$  que cumple con la siguiente condición

$$C_{\mu\nu} A^{\mu}_{\rho} A^{\nu}_{\sigma} = C_{\rho\sigma}. \quad (2.30)$$

Bajo estas condiciones las transformaciones (2.24) y (2.25) toman la siguiente forma

$$x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (2.31)$$

$$z' = z.$$

Podemos notar que las condiciones (2.29) que se imponen a  $R^{\mu}_{\nu}$  y la forma que toman las transformaciones, se asemejan mucho a una rotación en las coordenadas sobre el eje  $z$ . Concluimos entonces que estas transformaciones son rotaciones rígidas alrededor del origen de la forma (2.31).

La segunda clase de transformaciones tiene como condición

$$R^{\mu}_{\ z} = a^{\mu}, \quad (2.32)$$

donde  $a^{\mu}$  es arbitrario. A partir de esta condición y de las condiciones (4.24)-(4.26) podemos obtener expresiones para los términos  $R^z_{\ \mu}, R^z_{\ z}, R^{\mu}_{\ \nu}$  escritas en términos de  $a^{\mu}$ .

$$R^z_{\ \mu} = -KC_{\mu\nu}a^{\nu}, \quad R^z_{\ z} = (1 - KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}, \quad R^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - bKC_{\nu\rho}a^{\rho}a^{\mu}, \quad (2.33)$$

donde

$$b = \frac{1 - (1 - KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}}{KC_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta}}.$$

Para que el término  $R^z_{\ z}$  sea real se pide que

$$KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma} \leq 1.$$

Estas condiciones forman la traslación definida por

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \left[ (1 - KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})^{1/2} - bKC_{\rho\sigma}x^{\rho}a^{\sigma} \right]. \quad (2.34)$$

Es importante señalar que esta transformación lleva el origen  $x^{\mu} = 0$  a  $x^{\mu} = a^{\mu}$ . Podemos calcular los vectores de Killing de este espacio viendo la transformación infinitesimal de (2.31) y (2.34). Consideremos la primera clase de transformación y tomemos

$$A^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon\Omega^{\mu}_{\ \nu} \quad |\epsilon| \ll 1.$$

Si sustituimos  $A^{\mu}_{\ \nu}$  en la transformación (2.31) obtenemos:

$$x'^{\mu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon\Omega^{\mu}_{\ \nu})x^{\nu} = x^{\mu} + \epsilon\Omega^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}.$$

Si comparamos esto con la ecuación (2.3) vemos que el vector de Killing es dado por

$$\xi^{\mu}_{\Omega}(x) = \Omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}. \quad (2.35)$$

Estos vectores de Killing deben cumplir con la condición de antisimetría (2.4), así que se pide que

$$C_{\mu\sigma}\Omega^{\mu}_{\ \rho} + C_{\rho\mu}\Omega^{\mu}_{\ \sigma} = 0.$$

Ahora consideremos las transformaciones de segunda clase. Tomemos entonces

$$a^{\mu} = \epsilon\alpha^{\mu}.$$

A primer orden en  $\epsilon$  la transformación (2.34) toma la forma

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\alpha^{\mu} (1 - KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})^{1/2}.$$

Si comparamos con (2.3) vemos el vector de Killing es dado por

$$\xi^{\mu}_{\alpha}(x) = \alpha^{\mu} \left[ 1 - KC_{\lambda\nu}x^{\lambda}x^{\nu} \right]^{1/2}.$$

La segunda propiedad que define un espacio de simetría máxima, y que usaremos para construir nuestra métrica, es el número de eigenvalores positivos y negativos de la métrica. Supongamos que queremos introducir coordenadas de un espacio euclidiano, cuya métrica tiene todos sus eigenvalores positivos. Podemos asegurar esto al suponer  $|K| \neq 0$  y tomando  $C_{\mu\nu}$  como  $|K|^{-1}$  multiplicado por la matriz identidad. Con estas condiciones la ecuación (2.22) toma la forma de

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= |K|^{-1} \left[ dx^2 - \frac{(x \cdot dx)^2}{1+x^2} \right], & K < 0, \\
 ds^2 &= K^{-1} \left[ dx^2 + \frac{(x \cdot dx)^2}{1-x^2} \right], & K > 0.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Esta es la forma general de la métrica para un espacio de simetría máxima, que tenga todos los eigenvalores positivos. Estas dos ecuaciones serán muy útiles más adelante ya que expresan la forma de la métrica de un espacio homogéneo e isotrópico.

## Capítulo 3

# Cosmología

La cosmología es la parte de la ciencia que estudia el comportamiento, estructura y evolución del universo en las escalas más grandes del espacio tiempo. A estas escalas la gravedad rige la estructura del universo y determina la evolución del mismo. Para estudiar el comportamiento del universo es importante primeramente considerar su tamaño. El telescopio Hubble ha logrado observar cuerpos a distancias alrededor de 10 mil millones de años luz. Debido a las dimensiones gigantescas del universo la teoría clásica de Newton no es adecuada para describir su comportamiento y es necesario recurrir a la teoría de la Relatividad General.

A estas escalas el universo parece tener la misma distribución de materia en todas partes, es decir una densidad uniforme alrededor de  $\rho_{visible} = 10^{-28} \text{kg m}^{-3}$  [2]. El modelo más aceptado que explica la evolución del universo usa esta distribución uniforme de materia para tomar la suposición de que existe una simetría en la geometría del universo. Este modelo fue propuesto alrededor de 1930 por H.P. Robertson y A. G. Walker y ha podido explicar de manera satisfactoria el comportamiento del universo de forma que se ha aceptado como el modelo estándar de la cosmología.

### 3.1. Principio Cosmológico

Uno de los descubrimientos más importantes de la ciencia moderna fue que la Tierra no es el centro del universo. Esta visión anti-antrópocéntrica se ha incorporado en el pensamiento científico moderno, de tal forma que una gran parte de la cosmología moderna se basa en el Principio Cosmológico: la hipótesis de que la Tierra no ocupa un lugar privilegiado en el universo o dicho de otra forma, que el universo es esencialmente igual en todas partes. Una suposición de este estilo pudiera sonar muy inexacta ya que una estrella no se parece al espacio vacío y frío que se encuentra entre las galaxias, pero el Principio Cosmológico se aplica a escalas muy grandes en las cuales se toma el promedio de la densidad de masa del universo. Dos consecuencias verificables del Principio Cos-

mológico son la Homogeneidad e Isotropía del Universo.

Observaciones astronómicas han mostrado que el universo está hecho de conglomerados de estrellas, galaxias, polvo etc., sin embargo a ordenes de  $10^3 \text{Mpc}^{-1}$  se observa no sólo una densidad uniforme de materia sino también homogeneidad en cuanto al tipo de galaxias, la densidad de cúmulos y su composición química. Las imágenes obtenidas por el telescopio Hubble muestran una región pequeña del cielo donde se aprecia una distribución uniforme de galaxias [4](ver figura 3.1).



Figura 3.1: Imagen obtenida por el telescopio Hubble

Además de materia, el universo está lleno de radiación, esta radiación no está conglomerada como la materia sino que va viajando a la velocidad de la luz. La radiación que ha sido detectada con la mayor densidad de energía es la Radiación Cómica de Fondo, la radiación que quedó como producto de la gran explosión. Esta radiación equivale al espectro de la radiación de un cuerpo negro a la temperatura de 3 Kelvin. Aunque esta radiación no es perfectamente uniforme las desviaciones son del orden de  $10^{-5}$ [?]. Estas observaciones ayudan a concluir que a grandes escalas el universo es homogéneo.

A estas escalas el universo también parece ser isotrópico en todo punto, o sea que un observador no podría distinguir una dirección de la otra al hacer mediciones locales. Sabemos que el universo está en expansión, esta velocidad de recesión podría proporcionar un medio de anisotropía, si se pudiera distinguir una dirección en la cual las galaxias se alejaran a una velocidad más grande. Sin embargo esto no parece suceder ya que la velocidad de recesión se relaciona con la distancia por medio de la ecuación

$$v = Hd,$$

donde  $H$  es la constante de Hubble, aunque veremos más adelante que  $H$  en realidad no es una constante sino que depende del tiempo. En la época actual tiene el valor de

<sup>1</sup>1 MPc= $10^6$ pc, siendo 1pc=3.26 años luz, 1 año luz= $9.4 \times 10^{15}$ m

$H = (75 \pm 25) \text{ km/s/Mpc}$ . Esto da un buen argumento para aceptar la isotropía del universo.

En términos más formales el principio cosmológico nos dice que podemos descomponer el espacio tiempo en subespacios o hypersuperficies, de tiempo constante  $\tau$ , que tengan máxima simetría. Así cada una de estas hypersuperficies son homogéneas e isotrópicas. Un observador comovil, es decir un observador que se encuentre en reposo con respecto a cualquier punto sobre la hypersuperficie, debe tener su cuadrivelocidad perpendicular a dicha hypersuperficie, de lo contrario existiría una proyección privilegiada lo cual rompería con la suposición de un espacio isotrópico. Para ilustrar esta idea, imaginemos el espacio dividido en planos a un tiempo  $\tau$  constante como muestra las figuras 3.2 y 3.3. En cada plano un punto cualquiera  $P$  podría ser interpretado como el

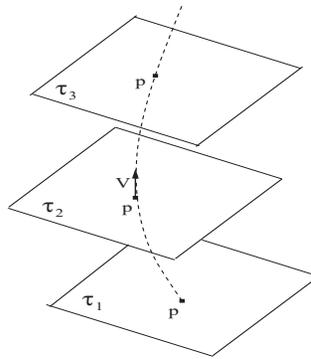


Figura 3.2: Descomposición del espacio tiempo en hypersuperficies de tiempo  $\tau$  constante.

centro de una galaxia donde se halla un observador, en nuestro modelo una galaxia es como un átomo comparado con el universo. El cuadrivector de velocidad  $V$  debe ser perpendicular a este plano de lo contrario existe una dirección privilegiada, la dirección de la proyección, donde se podrían percibir por ejemplo más galaxias o más materia de la que se vería en otra dirección. Además el Principio cosmológico establece que los tensores que existan dentro del espacio deben ser invariantes con respecto a las isometrías que existan en el subespacio simétrico. Al hacer transformaciones de  $x \rightarrow x'$  dentro de cada hypersuperficie los tensores deben mantenerse invariantes cumpliendo con la ecuación análoga a (2.1).

### 3.2. Modelo de Robertson-Walker

Como ya se ha mencionado las observaciones astronómicas dan buena razón para aceptar el Principio Cosmológico y esto nos permite aplicar las propiedades de los espacios mencionados en las secciones 1.3 y 1.4. Dado que el modelo de Robertson-Walker descompone el espacio-tiempo en su parte espacial con coordenada  $x^i$ , la cual es homogénea e isotrópica y su parte temporal  $t'$ , la métrica de este modelo debe tener la

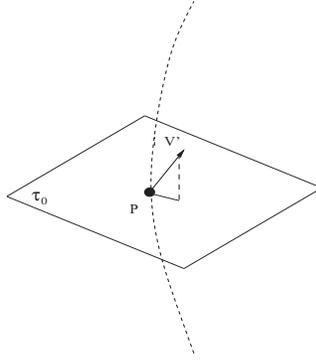


Figura 3.3: Supongamos que un observador comovil tenga una cuadrivectorial de velocidad  $v'$  que no sea perpendicular a la hypersuperficie. La dirección de la proyección sería una dirección privilegiada rompiendo con la suposición de isometría

forma de (2.19):

$$ds^2 = g(t')dt'^2 + f(t')\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

Como el subespacio simétrico es el espacio 3-dimensional, la métrica  $g_{ij}$  tendrá todos sus eigenvalores positivos. Dado esto se puede aplicar el resultado de la sección 1.4 que nos da la forma de una métrica de simetría máxima con eigenvalores positivos. Podemos utilizar (2.36) para obtener

$$ds^2 = g(t')t'^2 + f(t') \left[ dx^2 + \frac{k(x \cdot dx)^2}{1 - kx^2} \right], \quad (3.2)$$

donde  $f(t')$  es una función positiva,  $g(t')$  es una función negativa. El valor de  $|K|$  que aparece en la ecuación (2.36) no aparece en la ecuación anterior ya que se absorbe en la función  $f(t') = \frac{f'(t')}{|K|}$ . Se puede simplificar la forma de esta métrica si introducimos un cambio de coordenadas definido por:

$$\int (-g(t'))^{1/2} dt' = t,$$

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x^2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x^3 = r \cos \theta.$$

Al sustituir estas ecuaciones en la métrica (3.2) obtenemos

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.3)$$

donde  $a(t) = \sqrt{f(t)}$ , determina la escala de la geometría del espacio por lo que recibe el nombre de factor de escala. La variable temporal  $t$  representa el tiempo propio medido por un observador comovil. Las coordenadas espaciales obviamente adoptan la forma de coordenadas esféricas.

Como ya se habia dicho la constante  $k$  puede tomar tres valores  $-1, 0, 1$ , su valor determina la forma de la métrica y por lo tanto la geometría del universo. Vamos a revisar los diferentes tipos de universo generado por los distintos valores de  $k$ . Primero consideremos el caso para  $k = 0$ , para cualquier tiempo  $t_0$  un segmento de linea es dado por

$$dl^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

donde se tomo  $\tilde{r} = a(t_0)r$  y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ . Esto es el segmento de linea de un espacio euclidiano plano, por lo que esta métrica es conocida como el universo de Robertson-Walker plano. Para entender más claramente la interpretación física de los siguientes dos tipos de universo introducimos una nueva variable dada por

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

Podemos integrar esto para obtener

$$r = S_k(\chi).$$

donde

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi), & 0 < \chi < 2\pi, & k = +1 \\ \sinh(\chi) & , -\infty < \chi < \infty, & k = -1 \end{cases}.$$

Podemos ver que para la métrica (3.3), un segmento de linea, a cualquier tiempo  $t_0$  para  $dt = 0$ , es dado por:

$$dl^2 = a^2(t_0) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] = a^2(t_0) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2].$$

Para el caso  $k = +1$  obtenemos

$$dl^2 = a^2(t_0) [d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2].$$

Esta es la métrica de una 3-esfera de radio  $a(t_0)$ , este modelo es llamado cerrado o el modelo de Robertson-Walker esférico. Esta métrica nos permite visualizar las hypersuperficies de tiempo constante como un conjunto de 3-esferas con un volumen finito. Por último para el caso  $k = -1$  obtenemos

$$dl^2 = a^2(t_0) [d\chi^2 + \sinh^2(\chi) d\Omega^2]$$

este modelo es llamado hiperbólico o el modelo de Robertson-Walker abierto. Podemos notar que en este modelo al aumentar la coordenada radial  $\chi$ , esto es al alejarse del origen, las circunferencias de las esferas incrementan de la forma  $\sinh \chi$ , por lo que el espacio podría extenderse de forma infinita.

Una vez determinada la métrica podemos calcular los símbolos de Cristoffel y las componentes del tensor de curvatura. Los símbolos de Cristoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \end{aligned}$$

Debemos ahora calcular las componentes del tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ , usaremos la siguiente fórmula, la cual se obtiene directamente de la ecuación (1.32) al contraer el primero y tercer índice:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\alpha,\nu}^{\nu} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\nu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\rho\nu}^{\rho} \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}.$$

La componente temporal  $R_{00}$  se puede calcular a mano para obtener

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}.$$

Las componentes espaciales se pueden calcular de manera general

$$R_{ij} = \Gamma_{\nu i,j}^{\nu} - \Gamma_{\beta i,\nu}^{\nu} + \Gamma_{i\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma i}^{\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} \Gamma_{ji}^{\nu}.$$

Separando las componentes espaciales de las temporales podemos describir la ecuación anterior

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \left( \Gamma_{0i,j}^0 + \Gamma_{ki,j}^k \right) - \left( \Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{ji,k}^k \right) \\ &+ \left( \Gamma_{j0}^0 \Gamma_{0i}^0 + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{jk}^0 \Gamma_{0i}^k + \Gamma_{j0}^k \Gamma_{ki}^0 \right) - \left( \Gamma_{00}^0 \Gamma_{ji}^0 + \Gamma_{0k}^0 \Gamma_{ji}^k + \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ji}^0 + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l \right) \\ &= \left( \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ji,k}^k + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l \right) - \Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{jk}^k \Gamma_{0i}^k + \Gamma_{j0}^k \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ji}^0. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \left( R\ddot{R} + \dot{R}^2 \right) \tilde{g}_{ij}.$$

Donde  $\tilde{R}_{ij} = \left( \Gamma_{ki,j}^k + \Gamma_{ji,k}^k + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l \right)$  es el tensor de Ricci espacial calculado a partir de  $\tilde{g}_{ij}$ , la métrica espacial. Como  $\tilde{g}_{ij}$  es la métrica de un espacio de simetría máxima, podemos utilizar el resultado del capítulo de Espacios Simétricos, el cual nos dice que el tensor de Ricci debe ser de la forma

$$\tilde{R}_{ij} = -2k\tilde{g}_{ij}.$$

Con esto podemos escribir la expresión final del tensor de Ricci

$$R_{ij} = - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R} + 2k \right) \tilde{g}_{ij}. \quad (3.4)$$

La curvatura del universo se puede describir por medio del escalar de Ricci, que se contruye a partir del tensor de Riemann. Para el caso de la métrica de Robertson-Walker el escalar de Ricci es dado por

$$R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (3.5)$$

Se puede notar que si el factor escala toma el valor de cero para algún tiempo  $a(t_0) = 0$ , el escalar de Ricci tiende al infinito y se produciría una singularidad. Veremos mas adelante si es posible que el factor de escala se anule para algún tiempo y cuales son las interpretaciones físicas de dicha dinámica. Otro escalar que es usado para describir curvatura fue

introducido por Erich Kretschmann y recibe el nombre de Escalar de Kretschmann. Este escalar es una invariante que se construye a partir del tensor de Riemann

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Al involucrar directamente todas las componentes del tensor de Riemann, ofrece mas información acerca de la curvatura del espacio-tiempo. El espacio de un universo es plano si y sólo si el escalar de Kretschmann es igual a cero. De forma análoga si el escalar de Kretschmann toma un valor infinito, esto implicaría una curvatura infinita. Para el caso de la métrica de Robertson-Walker el escalar de Kretschmann es dado por

$$K = \frac{4(3\dot{a}^4 + 3\ddot{a}^2a^2 + 2\dot{a}^2 + k)}{a^4}. \quad (3.6)$$

Podemos ver que tanto el escalar de Ricci como el escalar de Kretschmann dependen del inverso del factor escalar. Entonces si el factor escalar  $a$  tiende a cero ambos escalares tienden al infinito y estarían describiendo un universo con una curvatura infinita.

### 3.3. Ecuaciones Dinámicas del Universo de Robertson-Walker

Hasta ahora sólo se han utilizado argumentos de geometría para poder determinar la forma de la métrica y se analizó la geometría posible del universo, pero para poder obtener información acerca de la dinámica de evolución del universo se tendrán que utilizar las ecuaciones de Einstein. Primeramente se necesita considerar como modelar la materia que constituye el universo, para poder darle forma al tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ .

Se empieza por aplicar el principio cosmológico a el tensor  $T_{\mu\nu}$ , el cual debe ser invariante bajo rotaciones y traslaciones espaciales. Por lo tanto una isometría  $x \rightarrow x'$  de la métrica de Robertson-Walker transformará la componente temporal  $T_{00}$  como un escalar, las componentes cruzadas  $T_{i0}$  como un vector de tres componentes y las componentes espaciales  $T_{ij}$  como un tres-tensor. De acuerdo a las propiedades descritas anteriormente, estas condiciones requieren que

$$T_{00} = \rho(t), \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = g_{ij}p(t), \quad (3.7)$$

donde  $g_{ij}$  es una métrica espacial, y  $\rho$  y  $p$  son cantidades desconocidas que pueden depender de la coordenada temporal  $t$  pero no de las coordenadas espaciales  $r, \theta$  o  $\varphi$ . Estas condiciones se pueden escribir de forma mas compacta como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Donde  $U_\mu$  es la cuadrivelocidad definida por  $U_0 = 1$  y  $U_i = 0$ , esta condición muestra que en promedio el contenido del universo se encuentra en reposo con respecto a las coordenadas espaciales  $r, \theta$  y  $\varphi$ , dado que en el sistema de un observador comovil a las hipersuperficies, las componentes espaciales de velocidad son cero. Además, la ecuación anterior (3.8) muestra que el tensor de energía momento para nuestro modelo toma la

forma del tensor de energía momento de un fluido perfecto. Las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Contrayendo con  $g^{\mu\nu}$  se obtiene que

$$R = -8\pi G T.$$

Así se pueden describir las ecuaciones de Einstein como

$$8\pi G \left( T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) = R_{\mu\nu}.$$

donde  $T = -3p + \rho$  es la traza del tensor  $T^{\mu\nu}$ . La componente con  $\mu = \nu = 0$  da la ecuación

$$3\ddot{a} = -\frac{8\pi G}{2}(\rho + 3p)a. \quad (3.9)$$

Las componentes espaciales  $i = j$  dan una sola ecuación independiente

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k = \frac{8\pi G}{2}(\rho - p)a^2. \quad (3.10)$$

Las expresiones (3.9) y (3.10) son las ecuaciones de Einstein, y en este caso se llaman las ecuaciones de Friedman. Se puede utilizar estas dos ecuaciones para eliminar el término  $\ddot{a}$ , y así obtener

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2. \quad (3.11)$$

Para continuar con el análisis se puede obtener información acerca de la evolución de la densidad de masa y energía al recordar que el tensor de energía momento, debe cumplir con la ecuación de conservación:

$$0 = T^{\mu\nu}_{;\nu}.$$

Se utiliza la definición de derivada covariante para desarrollar la ecuación de continuidad

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}.$$

Usando la fórmula  $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{g}$ , donde  $g$  es el determinante de la métrica, se describe la ecuación como

$$0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (p(t) g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu g^{\mu\lambda} p(t) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (8p(t) + \rho(t) U^\mu U^\nu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}.$$

Esta ecuación se cumple trivialmente para  $\mu = r, \theta, \varphi$ , para  $\mu = 0$  da

$$a^3(t) \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3(t) (\rho(t) + p(t))]. \quad (3.12)$$

Escrita de otra forma da

$$\frac{d}{da} (\rho a^3) = -3pa^2. \quad (3.13)$$

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica del universo son las ecuaciones de Einstein, la ecuación de conservación de energía-momento y la ecuación de estado. Se han obtenido las primeras dos dadas por

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (3.14)$$

$$a^3(t) \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3(t) (\rho(t) + p(t))] \quad (3.15)$$

Podemos notar que tenemos un sistema de ecuaciones con tres variables, estas siendo  $a(t)$ ,  $\rho$  y  $p$ . Se obtuvieron 2 ecuaciones de Einstein (3.9) y (3.10) las cuales usamos para obtener (3.11), además se obtuvo la ecuación de conservación (3.12). Además se pedirá una ecuación que involucre la presión y la densidad, esta ecuación es llamada ecuación de estado. De todas estas ecuaciones sólo 3 son independientes, estas son la ecuación de Einstein (3.11), la ecuación de conservación y la ecuación de estado.

Notamos que la ecuación (3.9) al diferenciar (3.11) con respecto al tiempo

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G\dot{a}}{3a} (-\rho a^2 - 3pa^2).$$

esta ecuación es igual a (3.9). Luego se puede obtener (3.10) de la ecuación (3.9) y (3.11), por lo tanto solo tenemos dos ecuaciones efectivas.

### 3.4. Dinámica del Universo de Roberston-Walker

Se puede obtener información acerca del pasado y futuro del universo usando (3.9)-(3.12) antes de tener que especificar una función de estado. Primeramente podemos ver de (3.9) que si el término  $(\rho + 3p) > 0$  entonces  $\frac{\dot{a}}{a} < 0$ . Como en el presente  $a > 0$  se tiene que  $\ddot{a} < 0$  por lo que se puede concluir que el universo no puede estar estático y entonces debe encontrarse en un estado de contracción  $\dot{a} < 0$  o de expansión  $\dot{a} > 0$ . Como consecuencia la distancia entre dos puntos irá cambiando con el tiempo. Para ilustrar esto consideremos la distancia que existe entre dos puntos  $r_1$  y  $r_2$ , la distancia medida o distancia propia será dada por

$$\mathbf{d}(t) = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

Un observador vera que esta distancia propia va aumentando con el tiempo de la forma:

$$v = \frac{d}{dt} \mathbf{d}(t) = \frac{\mathbf{d}}{a} \frac{da}{dt} = H \mathbf{d}.$$

donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , recibe el nombre de la constante de Hubble. Como se mencionó en el primero capítulo, el valor  $H$  en realidad no es una constante sino una función que depende del tiempo.

Para fijar la ecuación de estado se consideran dos casos de interés en la cosmología, la era dominada por materia y la era dominada por radiación. En la era dominada por materia, como lo es en el presente, la mayor densidad de energía se encuentra en la materia ordinaria de las galaxias. La materia se considera como partículas no-relativistas entre las cual no hay colisiones y la presión que pudiera existir es despreciable en comparación con la densidad de energía que se encuentra en la materia. La ecuación de estado para esta era es

$$p_m = 0. \quad (3.16)$$

Sustituyendo esto en (3.12) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0.$$

Esto implica que

$$\rho_m a^3 = cte. \quad (3.17)$$

En esta era la materia también recibe el nombre de polvo.

La radiación son ondas electromagnéticas, y el tensor de energía momento debido a radiación electromagnética es dado por

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}.$$

Donde  $F^{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético  $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$  siendo  $A^{\mu}$  las componentes del cuadri-potencial electromagnético. Contrayendo con  $g_{\mu}^{\nu}$  nos da la traza

$$T_{\mu}^{\mu} = F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}(4)F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = 0.$$

Sin embargo, la radiación también tiene el tensor de energía momento dado por (3.8), así que la traza de (3.8) debe coincidir con la traza que se calculó para el tensor de energía-momento electromagnético.

$$0 = T_{\mu}^{\mu} = -3p_R + \rho_R \quad \Rightarrow \quad p_R = \frac{1}{3}\rho_R.$$

Esta es la ecuación de estado para la era dominada por radiación. Sustituyendo esta ecuación en (3.12) obtenemos que

$$\rho_R a^4 = cte. \quad (3.18)$$

Aunque en el presente el universo se encuentra dominado por materia se puede notar que la densidad de energía debido a la radiación decrece de forma  $\rho_R \propto a^{-4}$  mientras que la densidad de energía de materia decrece de forma  $\rho_m \propto a^{-3}$ , para valores pequeños de  $a$  la densidad de energía debida a la radiacion  $\rho_R$  empieza a dominar.

Para ver que predicen las ecuaciones de Einstein para cada era, se sustituye la ecuación de estado correspondiente, en la ecuación (3.11). Para la era dominada por materia se debe sustituir (3.17) en (3.11) obteniendo

$$\dot{a}^2 - \frac{A}{a} + k = 0 \quad (3.19)$$

Donde  $A$  es una constante de la ecuación de estado  $a^{-3}\rho_m = A$ . Se puede analizar el comportamiento del universo durante la era dominada por materia, sin dar todavía una solución exacta a la ecuación anterior. Definiendo un potencial efectivo

$$V_M = -\frac{A}{a}.$$

Rescribiendo (3.19) en términos del potencial efectivo

$$\dot{a}^2 = (-k) - V_M(a). \quad (3.20)$$

Graficando  $V_M$  contra  $a$  se obtiene una curva que se muestra en la figura 3.4. Dado que  $\dot{a}^2$  siempre es positivo el universo sólo puede existir en regiones donde  $(-k) - V_M(a) \geq 0$ , en la gráfica estas regiones son en donde  $-k$  esta por encima de  $V_M$ . Dado que  $\dot{a} \geq 0$

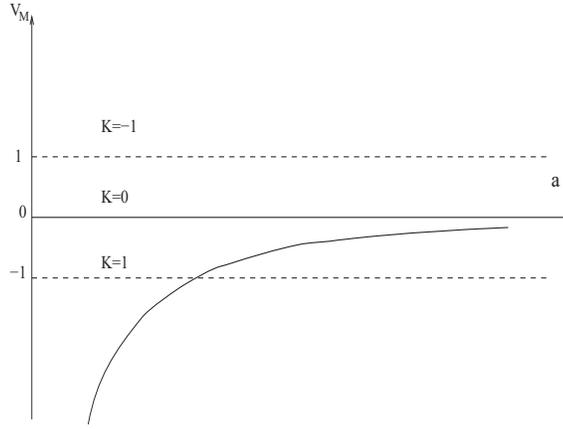


Figura 3.4: Potencial efectivo para la evolución del modelo de Robertson-Walker

entonces hay 3 posibilidades para el futuro del universo. En el caso en que  $k = -1$  el universo se continúa expandiendo hasta un radio  $a$  infinito, con una velocidad finita. En el caso  $k = 0$  el universo se expande a un radio infinito con una velocidad decreciente. En el último caso  $k = +1$  el universo llega a un radio máximo  $a = A$ , donde llega a su punto de retorno y luego colapsa.

Como se mencionó antes, para cierto valor pequeño de  $a$  el término de energía debido a la radiación  $a^4\rho_R = B$  empieza a dominar así que para conocer el comportamiento del universo para  $a$  pequeño se sustituye la ecuación de estado para la radiación en la ecuación (3.11). Se obtiene

$$\dot{a}^2 = \frac{B}{a^2} - k. \quad (3.21)$$

Al principio de la sección se mencionó que el factor de escala debió tomar el valor de  $a(t_0) = 0$  para algún tiempo. Para poder analizar la dinámica del universo cerca de  $t_0$  se consideran valores pequeños de  $a$ . Para estos valores el término  $k$  se vuelve despreciable así que se obtiene una misma ecuación para cualquier valor de  $k$ , por lo tanto todos los

posibles universos tienen la misma dinámica.

$$\dot{a}^2 = \frac{B}{a^2}.$$

Esta ecuación tiene como solución

$$a^2 = B^{1/2}t + cte.$$

De esta solución se ve que  $a = 0$  se logra en un tiempo finito.

Las dos ecuaciones que se obtuvieron para describir la dinámica del universo en sus distintas eras son:

$$\dot{a}^2 - \frac{A}{a} + k = 0,$$

$$\dot{a}^2 - \frac{B}{a^2} + k = 0.$$

Hasta este punto sólo se ha hecho un análisis de las ecuaciones sin buscar una solución exacta. Para encontrar una solución exacta primero debemos considerar todos los casos. Existen dos eras distintas, cada una con su ecuación de estado y para cada era existen 3 posibles universos, así que se deben obtener 6 soluciones en total. Consideremos primeramente la era dominada por la materia en la cual modelamos el universo constituido por polvo. La ecuación por resolver es (3.19). Para obtener la solución de esta ecuación se empieza despejando  $\dot{a}$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{A - ak}{a}} \Rightarrow dt = \frac{da}{\sqrt{\frac{A - ak}{a}}}.$$

Se considera el siguiente cambio de variable  $d\eta = \frac{dt}{a}$

$$d\eta = \frac{da}{a\sqrt{\frac{A - ak}{a}}} = \frac{da}{\sqrt{ac - a^2k}}.$$

Para  $k = 1$  y tomando  $\tilde{c} = \frac{A}{2}$ ,

$$d\eta = \frac{da}{\sqrt{2\tilde{c}a - a^2}} = \frac{da}{\sqrt{\tilde{c}^2 - (a - \tilde{c})^2}}.$$

integramos se obtiene

$$\eta = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\tilde{c}^2 - (a - \tilde{c})^2}} = \sin^{-1} \frac{a}{\tilde{c}} \Big|_0^a = \sin^{-1} \left( \frac{a - \tilde{c}}{\tilde{c}} \right) + \frac{\pi}{2}.$$

Escribiendo  $a$  en función del parámetro  $\eta$

$$a = \frac{A}{2}(1 - \cos \eta). \quad (3.22)$$

Para encontrar  $t$ , se despeja  $dt$  de

$$d\eta = \frac{dt}{a} \Rightarrow \int a d\eta = \int dt.$$

Así se obtiene

$$t = \frac{A}{2}(\eta - \sin \eta). \quad (3.23)$$

Para  $k = -1$  se hace el mismo cambio de variable y tomando  $\tilde{c} = \frac{A}{2}$  se obtiene

$$\eta = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{(\tilde{c} + a)^2 - \tilde{c}^2}} = \cosh^{-1} \left( \frac{a}{\tilde{c}} + 1 \right).$$

Escribiendo  $a$  en función de  $\eta$

$$a = \frac{1}{2}A(\cosh \eta - 1). \quad (3.24)$$

Usando los mismos pasos que para la ecuación pasada, es posible encontrar  $t$  como función de  $\eta$

$$t = \frac{1}{2}A(\sinh \eta - \eta). \quad (3.25)$$

Para el caso  $k = 0$ , la ecuación se puede resolver por separación de variables, dando como solución

$$a(t) = \left( \frac{9A}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (3.26)$$

Para la era dominada por radiación las soluciones son mas simples y se obtienen por integración directa. Para  $k = 1$  se obtiene la solución:

$$a(t) = \sqrt{B} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{B}} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.27)$$

Para  $k = 0$  la solución es:

$$a(t) = (2t)^{1/2} B^{1/4}. \quad (3.28)$$

Finalmente la solución que se obtiene para  $k = -1$  es

$$a(t) = \sqrt{B} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{B}} \right) - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.29)$$

En la figura 3.5 se gráfica las soluciones a las ecuaciones de Friedman para la era dominada por la materia. Para el caso de  $k=1$  el factor escalar alcanza un punto crítico y luego cae a cero. Para el caso  $k=0$  y  $k=-1$  el factor escalar aumenta de forma monótona.

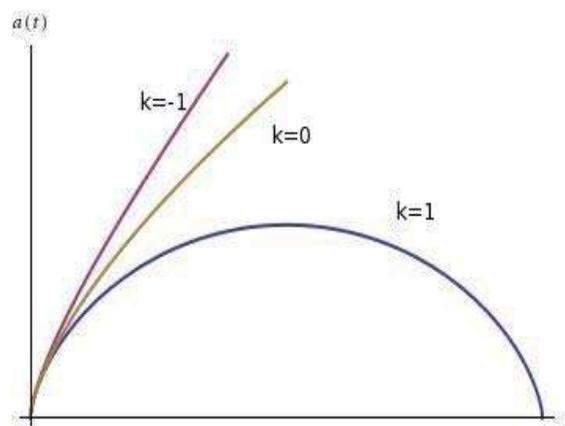


Figura 3.5: Gráfica de las soluciones a las ecuaciones de Friedman de la era dominada por materia para un universo de Robertson Walker para  $k=1$ ,  $k=0$  y  $k=-1$ . [Fuente propia]

## Capítulo 4

# Teorías Tensor-Escalar

Como vimos en los capítulos anteriores las ecuaciones de Einstein describen la relación entre la curvatura y la materia y energía. Estas ecuaciones se obtuvieron a partir de una generalización de las ecuaciones de Newton y del principio de equivalencia, el cual relaciona la gravedad con la geometría. Sin embargo es posible derivar las ecuaciones dinámicas a partir del principio de acción mínima. Veremos que es posible tener una formulación Lagrangiana de la Relatividad General. Por otro lado, la Relatividad General ha podido describir satisfactoriamente muchos tipos de sistemas concordando con los datos experimentales. Sin embargo siempre existe la posibilidad que alguna observación muestre que es necesario algún cambio en las ecuaciones originales de Einstein. En este capítulo nos enfocaremos en una forma en que la Relatividad General se puede modificar, a través del modelo conocido como Teorías Tensor-Escalar.

### 4.1. Campos Escalares

Como se mencionó en el capítulo anterior las soluciones de las ecuaciones de Einstein del modelo estándar predicen la expansión del universo. Estas soluciones predicen un universo en el cual esta expansión se va desacelerando sin embargo observaciones recientes han mostrado que la expansión del universo se esta acelerando. Una de las posibles causas de la aceleración del universo se le atribuye a algún tipo de materia no luminosa llamada materia oscura. Una primera propuesta para obtener la dinámica deseada consistía en agregar una constante  $\Lambda$ , llamada constante cosmológica a las ecuaciones de Einstein. A esta constante se le asocia una densidad de energía que pretende modelar la energía debido a la materia oscura. Esta modificación ha ayudado a explicar el enigma de la materia oscura, sin embargo todavía presenta varios problemas. Otra idea para resolver este problema es la introducción de un campo escalar  $\phi$ , el cual en vez de tener una densidad de energía constante, puede variar de forma continua, imitando así el papel que juega la constante cosmológica. Si uno introduce un campo escalar  $\phi$  aun quedaria por determinar un potencial  $V(\phi)$  [5].

## 4.2. Formulación Lagrangiana de las Ecuaciones de Einstein

Hay una ruta alternativa, a la utilizada en el Capítulo 1, para obtener las ecuaciones de Einstein utilizando el principio de acción mínima. En la mecánica clásica se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula utilizando este método. Se buscan puntos críticos de una acción  $S$  que se toma como función de la trayectoria, esto se escribe como

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) dt.$$

Donde  $q^i$  son las coordenadas de la partícula y  $\dot{q}^i$  la derivada. La función  $L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)$  es el Lagrangiano. Dicho en otras palabras se desea encontrar una trayectoria que haga que el valor  $S$  sea extremal. En el caso clásico, el lagrangiano típico es de la forma  $L = K - V$  donde  $K$  es la energía cinética y  $V$  es la energía potencial. Los puntos críticos de la acción se obtienen para trayectorias  $q^i(t)$  que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0. \quad (4.1)$$

En la Relatividad General se hace la variación con respecto a las coordenadas ya que no se busca encontrar las trayectorias de las partículas directamente de  $g_{\mu\nu}$ , así que se cambian las variables  $q$  y  $\dot{q}$  por  $g_{\mu\nu}$  y su derivada covariante  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}$ .

$$q^i(t) \longrightarrow g_{\mu\nu}(x).$$

$$\dot{q}^i(t) \longrightarrow \nabla_\alpha g_{\mu\nu}(x).$$

El lagrangiano ahora es una función de la métrica y su derivada covariante en vez de la derivada parcial. El lagrangiano se toma como una densidad escalar y se escribe como

$$L = \sqrt{-g} \hat{L} \quad (4.2)$$

donde  $\hat{L}$  es un escalar y  $g$  es el determinante de la métrica. Antes de poder continuar se necesita definir una acción para la Relatividad General. Se busca un escalar que es una función de la métrica ya que esta es la variable dinámica del sistema. Se sabe que la métrica se puede reducir a su forma canónica donde la primera derivada es igual a cero, entonces para que la acción no sea trivial, esta debe involucrar las segundas derivadas de la métrica. El tensor de Riemann se construye a partir de las segundas derivadas de la métrica y el un escalar independiente que se puede obtener de este es el escalar de Ricci. También se sabe que cualquier tensor no trivial que se puede escribir como combinación de la métrica y su primera y segunda derivada, se puede expresar en términos de la métrica y el tensor de Riemann[4]. Así concluimos que la opción más sencilla para el lagrangiano es:

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x.$$

Esta acción no está del todo completa ya que debemos también considerar la contribución de la materia u otros campos al lagrangiano, así que debemos añadir también este

término al lagrangiano

$$S = \int (L_g + L_m) \sqrt{-g} d^4x = S_g + S_m. \quad (4.3)$$

Donde  $L_g$  es el lagrangiano de gravedad  $L_m$  el lagrangiano de materia. Para derivar las ecuaciones de Einstein aplicamos el principio variacional a la acción  $S$ .

$$\delta S = \int_M \delta(L_g \sqrt{-g}) d^4x + \int_M \delta(L_m \sqrt{-g}) d^4x = 0. \quad (4.4)$$

Para ayudar a entender estos pasos se va desarrollar cada una de las integrales por separado. Primero consideremos el término  $\int_M \delta(L_g \sqrt{-g}) d^4x$ . El lagrangiano de gravedad depende solamente de la métrica  $L_g(g_{\mu\nu}, \nabla g_{\mu\nu})$  así que solamente se necesita considerar la variación con respecto de la métrica. Desarrollando esta integral y utilizando la igualdad  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  obtenemos

$$\delta S_g = \int_M (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x \quad (4.5)$$

Usando que  $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g$  y  $\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ , se puede reescribir la ecuación como

$$\delta S_g = \int_M \left[ g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x \quad (4.6)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación se puede reescribir utilizando la definición del tensor de Ricci y tomando un sistema localmente inercial, en el cual los símbolos de Cristoffel se anulan, sin embargo sus derivadas no

$$\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) g^{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

En este sistema localmente inercial se tiene que

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= (\partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) g^{\mu\nu} = \partial_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho g^{\mu\nu} - \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma g^{\mu\rho}) \\ &\equiv \partial_\rho W^\rho = W^\rho{}_{;\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} W^\mu). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Retomando la ecuación (4.6) y utilizando (4.7)-(4.8), obtenemos

$$\delta S_g = \int_M \partial_\mu (\sqrt{-g} W^\mu) d^4x + \int_M \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.9)$$

Recordando el teorema de la divergencia, el cual nos dice que  $\int_M \nabla \cdot \vec{F} = \oint_{\partial M} \vec{F} \cdot \hat{n}$ , podemos reescribir la primera integral de la ecuación anterior como  $\int_M \partial_\mu (\sqrt{-g} W^\mu) d^4x = \oint_{\partial M} n_\mu \sqrt{-g} W^\mu d^4x = 0$ . Esta última igualdad se obtiene de la condición  $\delta \Gamma|_{\partial M} = 0$ . Con esta nueva información (4.9) da

$$\delta S_g = \int_M \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.10)$$

Pasamos a considerar la integral  $\int_M (\delta L_m \sqrt{-g}) dx^4$ . Primero debemos definir que vamos a tomar por el lagrangiano  $L_m$ . Vamos a considerar el caso de un campo escalar con acoplamiento mínimo

$$L_m = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2V(\phi). \quad (4.11)$$

Este Lagrangiano es una adaptación del lagrangiano de una partícula en mecánica clásica. El primer término es el análogo a la energía cinética de una partícula, e involucra el cuadrado de la primera derivada del campo escalar. También se considera un potencial, el cual es función del campo escalar. Podemos ver que este lagrangiano depende de  $L_M(\phi, \partial_\mu \phi, g_{\mu\nu})$ , así que se tendrá que hacer la variación con respecto de estas variables.

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int_M \delta(L_m \sqrt{-g}) dx^4 = \int_M \left( \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \int_M L_m \delta \sqrt{-g} \right) dx^4 \\ &\quad + \int_M \left( \sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial \phi} \delta \phi + \sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) dx^4. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por ahora nos fijamos solamente en la primera integral, así obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_M \left( \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} L_m g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} dx^4 \\ &= \int_M \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - 2V(\phi)) \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} dx^4. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Continuamos con la segunda integral de la ecuación (4.12) y la rescribimos usando la igualdad  $\partial \delta = \delta \partial$  ya que la derivada es independiente a la variación, [6] como

$$\begin{aligned} &\int_M \left( \sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial \phi} \delta \phi + \sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi \right) dx^4 \\ &= \int_M \left( \frac{\partial L_m}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right) \sqrt{-g} dx^4. \end{aligned}$$

Juntando los términos con  $\delta \phi$  y calculando la parcial  $\frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} = g^{\rho\mu} \partial_\rho \phi$  obtenemos

$$\int_M \left( -\dot{V}(\phi) - \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi \right) \delta \phi \sqrt{-g} dx^4 + \int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \sqrt{-g} dx^4, \quad (4.14)$$

donde  $\dot{V}(\phi)$  es la derivada del potencial  $V(\phi)$  con respecto de  $\phi$ . La última integral se puede rescribir usando la igualdad

$$\left( \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \sqrt{-g} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \delta \phi.$$

Con esto la última integral (volviendo a usar el teorema de la divergencia de la ecuación (4.14)) se convierte en

$$\int_M \left[ (-2\dot{V}(\phi) - \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi) + \partial^\mu \phi \partial_\mu \sqrt{-g} \right] \delta \phi \sqrt{-g} dx^4.$$

Con esto hemos desarrollado cada una de las partes de la ecuación (4.4). Para escribir la variación total necesitamos juntar las ecuaciones (4.10)-(4.14)

$$\begin{aligned} \delta S = \int_M \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi - V(\phi)) \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ + \int_M \left[ (-2\dot{V}(\phi) - \partial^\rho\partial_\rho\phi) - \partial^\mu\phi\partial_\mu\sqrt{-g} \right] \delta\phi\sqrt{-g} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dado que cada una de estas variaciones es independiente, implica que cada integral debe ser igual a cero, así obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi)) = 0. \quad (4.16)$$

$$(2\dot{V}(\phi) + \partial^\rho\partial_\rho\phi) + \partial^\mu\phi\partial_\mu\sqrt{-g} = 0. \quad (4.17)$$

Se puede describir la ecuación (4.16), notando que  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{8\pi G}G_{\mu\nu}$  donde  $\mathbf{G}$  es el tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left( \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - 2V(\phi)) \right).$$

donde  $G$  es la constante de gravedad. El término de la derecha es un tensor de segundo orden, requiriendo de dos índices para indicar sus componentes. Además, escrita de esta forma podemos reconocer el tensor de energía momento del campo escalar. Entonces

$$T_{\mu\nu} = \left( \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - 2V(\phi)) \right) \quad (4.18)$$

Dado esto tomamos el término entre paréntesis como el tensor de energía-momento asociado al campo escalar  $\phi$ .

$$\mathbf{G} = 8\pi G \mathbf{T}_\phi$$

### 4.3. Campo Escalar con Acoplamiento Mínimo

Vamos a analizar la dinámica del modelo de Roberston-Walker con un campo escalar  $\phi$ , este campo es función sólo del tiempo  $\phi(t)$ . En el desarrollo de la variación del lagrangiano que se hizo en la sección anterior no se especificó la forma de la métrica, sin embargo al querer analizar la dinámica de un universo de Robertson-Walker la métrica toma la forma de (3.3). Con la métrica bien definida podemos desarrollar la ecuación (4.17), usando que  $\frac{\partial L_m}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} = 3H\dot{\phi}$  donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es la constante de Hubble y  $\dot{\phi}$  es la derivada del campo escalar con respecto al tiempo.

$$2\frac{\partial V}{\partial\phi} + \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0. \quad (4.19)$$

El tensor de energía momento definido en la ecuación (4.18) puede escribirse en la misma forma que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto.

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}.$$

En el caso del fluido perfecto, se tiene que  $T_{\mu\nu}^{(\text{fp})}U^\mu U^\nu = \rho_{(\text{fp})}$ . De forma análoga, podemos calcular la densidad asociada al tensor de energía momento del campo escalar definida en (4.18).

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= T_{\mu\nu}^{(\phi)}U^\mu U^\nu = (\partial_\mu\phi U^\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + V = (\partial_\mu\delta_\nu^\mu)^2 + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V. \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(t) + V(\phi).\end{aligned}\quad (4.20)$$

De manera análoga se calcula

$$\begin{aligned}p_\phi &= \frac{1}{3}\left(T_{\mu\nu}^\phi g^{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\phi U^\mu U^\nu\right), \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(t) - V(\phi).\end{aligned}\quad (4.21)$$

que es la presión asociada al campo escalar. De la sección de Relatividad General, sabemos que para este modelo resultan dos ecuaciones de Einstein, la ecuación de conservación y la ecuación (4.19)

$$3H + 3K = 8\pi G \left(\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (4.22)$$

$$3\dot{H} + 3H^2 = 8\pi G \left(V(\phi) - \dot{\phi}^2\right). \quad (4.23)$$

donde  $K = \frac{k}{a}$ . Estas ecuaciones tienen la forma de las ecuaciones obtenidas en la sección 1, pero con el tensor de energía momento es definido de forma específico. En estas ecuaciones tenemos tres incógnitas: el campo escalar  $\phi$ , el potencial  $V$  y el factor de escala  $a$ , sin embargo de las 3 ecuaciones que tenemos (4.22),(4.23) y (4.17) solamente 2 de las ecuaciones son independientes. Si podemos encontrar una solución para (4.22) y (4.23) entonces las demás ecuaciones también serán satisfechas.

Para encontrar una solución a estas ecuaciones, se va fijar el factor de escala  $a(t)$ , y de ahí se encontrará el potencial  $V(\phi)$  y el campo  $\phi$ . El potencial y el campo escalar que se obtendrán por medio de este método se derivan del comportamiento deseado del universo, esto es del factor de escala que se escoge. Para especificar un modelo deseado se debe notar que la combinación de ecuaciones  $\{2(4.22)+(4.23)\}$  da

$$V(\phi(t)) = (\dot{H} + 3H^2 + 2K)\frac{1}{8\pi G}. \quad (4.24)$$

Mientras que la combinación  $\{(4.22)-(4.23)\}$  da

$$\dot{\phi}^2(t) = (-\dot{H} + K)\frac{1}{4\pi G}. \quad (4.25)$$

Estas dos nuevas ecuaciones son equivalentes a (4.22) y (4.23). Para encontrar las soluciones primero se debe fijar el valor de  $k$  y especificar la función  $a$  que se desea, pidiendo que el lado derecho de la ecuación (4.25) sea positivo

$$\dot{H} \leq K. \quad (4.26)$$

Luego se debe determinar  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  y  $\dot{H}$  y fijar el valor inicial  $\phi_0$ . La ecuación (4.25) da  $\dot{\phi}(t)$ , así que al integrar se puede obtener  $\phi(t)$ . Para algunos casos esto se puede invertir para obtener  $t(\phi)$ . La ecuación (4.24) nos da  $V(t) = V(t(\phi))$ . Con esto se encuentra  $V(\phi)$  el cual corresponde a el factor de escala  $a$  que se escogio. Para ilustrar el procedimiento a continuación se muestran algunos ejemplos. El método anterior fue desarrollado por Ellis y Madsen [1], a continuación se propondran nuevas formas del factor escalar y se aplicará este método.

#### 4.4. Expansión Exponencial de Sitter y Expansión de Tipo Polinomial

En este ejemplo se considera una expansión exponencial:

$$a(t) = A \exp(wt) \quad A, w \text{ constantes} > 0. \quad (4.27)$$

entonces  $H = w$  y  $\dot{H} = 0$ . La condición (4.26) se satisface si

$$B^2 \equiv \frac{1}{4\pi G} \left( \frac{k}{A^2} \right) \geq 0.$$

Esta desigualdad se cumple para  $k = 1$  y  $k = 0$  pero no se puede satisfacer para  $k = -1$ . (4.24) y (4.25) dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{B^2}{\exp(2wt)},$$

$$V = \frac{3w^2}{8\pi G} + \frac{B^2}{\exp(2wt)}.$$

Integrando  $\dot{\phi}^2$  da

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{B}{w} \exp(-wt) \quad \phi_0 = \text{constante}, \quad (4.28)$$

Si se restringe al caso en que  $B^2 > 0$  se obtiene

$$t = \frac{1}{w} \log \left( \frac{1}{\pm (w/B)(\phi - \phi_0)} \right).$$

Sustituyendo esto en la expresión para  $V$  se obtiene

$$V(\phi) = \frac{3w^2}{8\pi G} + w^2(\phi - \phi_0).$$

Recordando la ecuación 3.6 vemos que el escalar de curvatura  $K \sim \frac{1}{a^4}$  por lo que en este caso, cuando  $t \rightarrow \infty$  tanto el escalar de curvatura  $K$  como el campo  $\Phi$  tienden a cero. Cuando  $t \rightarrow -\infty$  el escalar de curvatura y el campo tienden a infinito. La cantidad de tiempo propio necesario para llegar a la singularidad es infinito.

En el segundo ejemplo se considera un factor de escala como una potencia de  $t$ :

$$a(t) = At^n \quad A, n = \text{constante} > 0, \quad n \neq 1, \quad (4.29)$$

entonces  $H = \frac{n}{t}$  y  $\dot{H} = -\frac{n}{t^2}$ . La condición (4.26) se satisface para

$$b^2 = B^2 \left( 1 + \frac{k}{nA^2t^{2(n+1)}} \right) \geq 0 \quad C^2 = \frac{n}{4\pi G},$$

lo cual se cumple para  $k \geq 0$ , también se satisface para un periodo de tiempo restringido en el caso  $k = -1$ . En este caso las ecuaciones (4.24) y (4.25) dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{C^2}{t^2} \left( 1 + \frac{k}{nA^2t^{2(n+1)}} \right),$$

$$V = \frac{2C^2}{t^2} \left( (3n-1) + \frac{2k}{nA^2t^{2(n-1)}} \right).$$

Cuando  $k \neq 0$  se puede integrar  $\dot{\phi}$  pero no se puede invertir para obtener  $t(\phi)$ . Aunque no se puede invertir es posible obtener información acerca del comportamiento de  $\phi$  y de  $V(\phi)$  al graficar estas funciones. Sin embargo para  $k = 0$  se obtiene que

$$\phi = \phi_0 \pm B \log t \quad \phi_0 = \text{constante}.$$

Como siempre  $C^2 > 0$  tenemos que

$$t = \exp \left( \pm \frac{1}{C} (\phi - \phi_0) \right).$$

Finalmente obtenemos

$$V(\phi) = \frac{B^2}{2} (3n-1) \exp \left( \pm \frac{2}{C} (\phi - \phi_0) \right).$$

Esta familia de soluciones es inflacionaria para  $n > 1$  y es no inflacionaria para  $0 < n < 1$ . En este caso  $K \sim \frac{1}{(At^n)^4}$ , así que existe una singularidad en la curvatura escalar y en el campo  $\Phi$  cuando  $t = 0$ . Por lo tanto la singularidad se encuentra a un tiempo propio finito, el espacio es entonces geodesicamente incompleto.

## 4.5. Expansión de Tipo Polinomial Sin Singularidad

Estudios numéricos y analíticos realizados en la Teoría de Gravedad Cuántica de Lazos predicen que la relatividad general es un modelo adecuado del universo para una densidad  $\sim 0,01\rho_{pl}$ <sup>1</sup>, donde  $\rho_{pl}$  es la densidad de Planck[7]. Al ir aumentando la densidad los efectos cuánticos empiezan a dominar, creando una fuerza repulsiva efectiva la cual vence la fuerza de gravedad, lo cual causa un rebote. En esta teoría el Big

---

<sup>1</sup> $\rho_{pl} \approx 5,1 \times 10^{96} \text{ kg/m}^3$

Bang es remplazado por un Big Bounce, evitando así la creación de una singularidad, en donde todo el universo es comprimido en un punto. Sabemos que se produce una singularidad cuando el factor de escala se anula para algún tiempo. Usando el metodo de Ellis [1] buscaremos evitar una singularidad para todo tiempo escogiendo un factor de escala adecuado. Vamos a considerar un factor de escala similar al analizado en la sección anterior, pero se le agrega una constante  $c$ , para evitar que el factor de escala se anule en el tiempo  $t = 0$ . Se considera un factor de escala de la forma

$$a(t) = At^n + c, \quad c, A = \text{constantes},$$

se debe cumplir que  $A, c > 0$ , y para que la métrica sea bien definida para todo  $t \in (-\infty, \infty)$   $n > 0$  debe ser par.  $A$  es una constante que tiene dimensiones de  $t^{-n}$  y es necesaria para que el factor escala se mantega adimensional, por su parte la constante  $c$  no tiene dimensiones. Para encontrarle sentido físico a la constante  $c$  podemos definir una constante  $\tilde{c} = \frac{A}{c}$  donde  $\tilde{c} \sim (\text{tiempo de plank})^n$ .

Para este factor de escala se tiene

$$H = \frac{nAt^{n-1}}{At^n + c}, \quad \dot{H} = \frac{-nAt^{-2+n}(c - cn + At^n)}{(c + At^n)^2}.$$

Las ecuaciones (4.24) y (4.25) dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{4\pi G} \frac{k + nAt^{-2+n}(c - cn + At^n)}{(c + At^n)^2}. \quad (4.30)$$

$$V(t) = \frac{1}{8\pi G} \frac{-nAt^{n-2}(c - cn + At^n) + 3n^2 At^{2n-2} + 2k}{(At^n + c)^2}. \quad (4.31)$$

El lado derecho de la ecuación (4.30) debe ser siempre mayor o igual a cero, por lo que  $k + nAt^{-2+n}(c - cn + At^n) \geq 0$  para que (4.30) esté bien definida para todo tiempo. Para los casos  $n \geq 2$  esta condición restringe  $k$  a los valores  $\{0,1\}$ . Esta restricción es necesaria pero no suficiente para que se cumpla la desigualdad, para garantizar se cumpla para todo tiempo, es necesario fijar un constante  $c$  adecuada la cual depende de la elección de  $n$ . Para los casos en que  $n < 2$  la constante  $k$  puede tomar cualquiera de los tres valores, y el valor de  $c$  también se debe elegir dependiendo del caso que sea. Para cualquier valor de  $n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ , pero para diferentes valores de  $n$  el potencial tiene un comportamiento distinto en el límite en que el tiempo tiende a cero. En la tabla 4.1 se muestra el límite del potencial para algunos casos

La presión y la densidad se pueden calcular de (4.21) y (4.20), para nuestro caso

$$p(t) = -\frac{1}{8\pi G} \frac{kt^2 + nAt^n(2c(-1+n) + (-2A + 3n)t^n)}{t^2(c + At^n)^2}, \quad (4.32)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{8\pi G} \frac{3(kt^2 + n^2 At^{2n})}{t^2(c + At^n)^2}. \quad (4.33)$$

Para cualquier valor de  $n$   $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$ . El límite de  $\rho$  y  $p$  cuando  $t$  tiende a cero varia dependiendo del valor de  $n$ , en la tabla 4.2 se muestra el límite para algunos

	$\lim_{t \rightarrow 0} V(t)$
$n=1/2$	$-\infty$
$n=1$	$\frac{2(A^2 + k)}{c^2}$
$n=2$	$\frac{2(Ac + k)}{c^2}$
$n > 2$	$\frac{2k}{c^2}$

Cuadro 4.1: Límites del Potencial

	$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t)$	$\lim_{t \rightarrow 0} p(t)$
$n=1/2$	$\infty$	$\infty$
$n=1$	$\frac{3(A^2 + k)}{c^2}$	$-\frac{A^2 + k}{c^2}$
$n > 2$	$\frac{3k}{c^2}$	$-\frac{k}{c^2}$

Cuadro 4.2: Límite de la función de la presión y densidad

valores de  $n$ . El signo de la presión depende de la elección de las constantes  $A, c, k$  y del valor de  $n$ . Notamos que para  $n > 1$  par, en los casos  $k = 0, 1$  y para la constante  $A$  fija, siempre existe una  $N$  tal que para toda  $n > N$  el signo de la presión es negativo para todo tiempo. El valor de  $N$  se determina cumpliendo que  $3N > 2A$ . Si  $n < N$ , el signo de la presión es negativo para tiempos cercanos al cero y se vuelve positivo para tiempos grandes. En el caso  $k = -1$  si  $n < N$  la presión cambia de signo, siendo positivo para tiempos pequeños y negativo para tiempos grandes.

Se puede obtener información adicional de la relación entre la presión, densidad y el factor de escala recordando la ecuación (3.9). Sustituyendo nuestro factor de escala a esta ecuación obtenemos

$$\rho + 3p = -\frac{3A n(n-1)t^{n-2}}{4(A^n + c)}.$$

Para  $n > 1$  se tiene que  $(\rho + 3p) < 0$ , esto implica que  $\ddot{a} > 0$ .

Para el caso de una  $n$  arbitraria integrar  $\dot{\phi}^2$  se vuelve muy complicado y muchas veces  $\phi(t)$  no tiene solución analítica. Aun en los casos en los que si es posible encontrar una solución analítica a la integral de  $\dot{\phi}^2$ , a veces la expresión no se puede invertir para encontrar  $t(\phi)$ . Para estos casos se puede resolver la integral numericamente y graficar los resultados. Primeramente consideraremos dos casos de interés donde  $n$  no es par. El caso más sencillo es el de  $n = 1$ . En este caso sí es posible integrar (4.30) e invertir para obtener  $V(\phi)$ . Para este caso el potencial (4.24) da

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{A^2 + k}{4\pi GA^2}} \ln(c + At) + \phi_0$$

invirtiendo se obtiene

$$t = e^{\sqrt{\frac{4\pi GA^2}{A^2 + k}}(\phi - \phi_0)} - c.$$

Sustituyendo en (4.25) da

$$V(\phi) = 2e^{\frac{-2A\phi - \phi_0}{\sqrt{A^2 + k}}} (A^2 + k). \quad (4.34)$$

De la ecuación 4.34 se puede ver que un potencial  $V(\Phi)$  definido en principio para todo  $\Phi$  no implica un buen comportamiento de la geometría. El potencial obtenido es muy similar al potencial que se obtiene para una expansión de tipo polinomial. Sin embargo en este caso sigue existiendo una singularidad para el tiempo  $t = -\frac{c}{A}$ , vemos que simplemente se recorre el tiempo de la singularidad. Utilizando las ecuaciones (4.21) y (4.20) podemos calcular la presión y densidad. En la gráfica 4.1 se puede ver que la presión es negativa, la cual para este modelo contribuye a la expansión del universo. Podemos ver

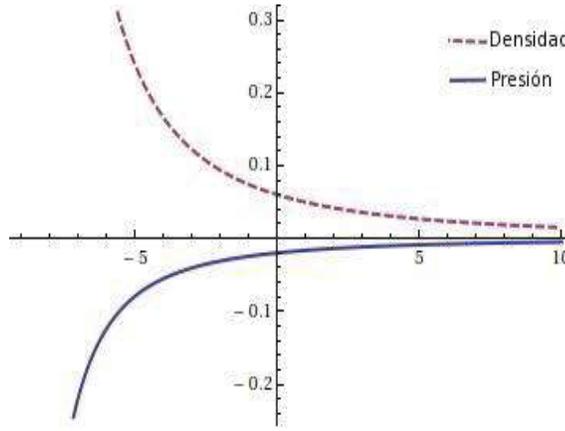


Figura 4.1: Gráfica de la presión y densidad para el caso  $n = 1, k = 1, A = 1$  y  $c = 10$

que esta va decayendo al ir aumentando el tiempo. Para esta elección de parámetros se puede ver que la presión  $p(t)$  y la densidad  $\rho(t)$  divergen para  $t \rightarrow -\frac{c}{A}$

Otro caso de interés es cuando  $n = 1/2$ , para este caso  $a(t)$  está definido sólo para  $t \geq 0$  recordemos que en la cosmología estandar el factor escala para el caso  $k = 0$  en la era dominada por radiación (3.28), es una función proporcional a  $t^{1/2}$ , motivado por esto fijamos  $n = 1/2$ . Con estas condiciones la integral de  $\dot{\phi}$  da

$$\phi(t) = \log \left[ \frac{c2^{-2\sqrt{2}} \left( c\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\sqrt{t} + 4\sqrt{(c+2\sqrt{t})\sqrt{t}} \right)^{\sqrt{2}} \left( c + 3\sqrt{t} - 2\sqrt{(c+2\sqrt{t})\sqrt{t}} \right)}{c + \sqrt{t}} \right] + \phi_0$$

donde  $\phi_0$  es una constante. Esta función no se puede invertir para encontrar  $t(\phi)$ , y por lo tanto el potencial sólo se puede expresar en función del tiempo.

$$V(t) = \frac{A(A\sqrt{t} - c)}{4(c + A\sqrt{t})^2 t^{3/2}}$$

Ya que la función  $\phi(t)$  no se puede invertir, podemos obtener información del comportamiento del potencial como función del campo escalar al graficar de forma paramétrica

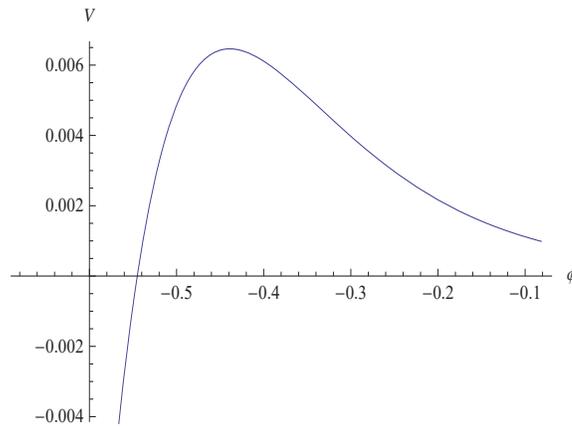


Figura 4.2: Gráfica del potencial con respecto a  $\phi$  para  $n = 1/2$ ,  $A = 1$ ,  $k = 0$  y  $c = 1$

$V$  y  $\phi$ . Con esta restricción el valor más pequeño que puede tomar el campo escalar es  $\phi(0) = -1.6139$ . En la gráfica 4.2 se puede apreciar que el potencial tiene un máximo, este valor dependerá del valor de  $c$ , y se puede calcular de forma numérica, para  $n = 1/2$ ,  $k = 0$  y  $c = 1$  el potencial toma el máximo  $\phi_{\max} \approx 1.78905$ . Una característica interesante de este caso, es la contribución que tiene la constante  $c$  al potencial. Para el caso  $c = 0$  se recupera el caso polinomial, analizado en la sección anterior. Al agregar una constante  $c \neq 0$ , el comportamiento del potencial cambia notoriamente, sin importar lo pequeño que sea  $c$ . Esto se puede apreciar en la gráfica 4.3

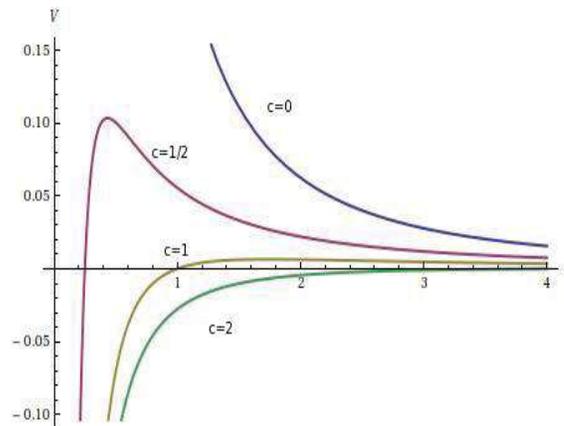


Figura 4.3: Gráfica del potencial con diferentes valores de  $c$  para  $n = 1/2$ ,  $A = 1$  y  $k = 0$

Para este caso la expresión de la presión y la densidad da

$$p(t) = \frac{A(2c + A\sqrt{t})}{4(c + A\sqrt{t})^2 t^{3/2}}$$

$$\rho(t) = \frac{3A^2}{4(c + A\sqrt{t})^2 t}$$

Se puede ver que tanto la presión como la densidad tendrán un valor positivo para cualquier  $t > 0$ . En la gráfica 4.4 se muestra el comportamiento de estas dos funciones.

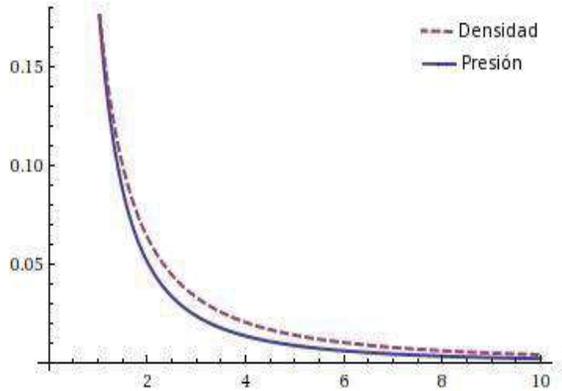


Figura 4.4: Gráfica de  $p$  y  $\rho$  para  $n = 1/2$ ,  $A = 1$ ,  $k = 0$  y  $c = 1$

Como se había mencionado, para una  $n$  arbitraria la integral (4.25) no se puede calcular analíticamente pero se puede resolver de forma numérica. Tomemos el caso  $n = 2$ . Tomando  $A = 1$ , la condición  $\dot{\phi}^2 \geq 0$  restringe las constantes a  $k = 1$  y  $c \leq 1/2$ . Conociendo estas restricciones se fijó  $c = 1/4$  y las ecuaciones (4.30), (4.31) se resolvieron numéricamente y se graficó paramétricamente. En la gráfica 4.5 se puede apreciar el com-

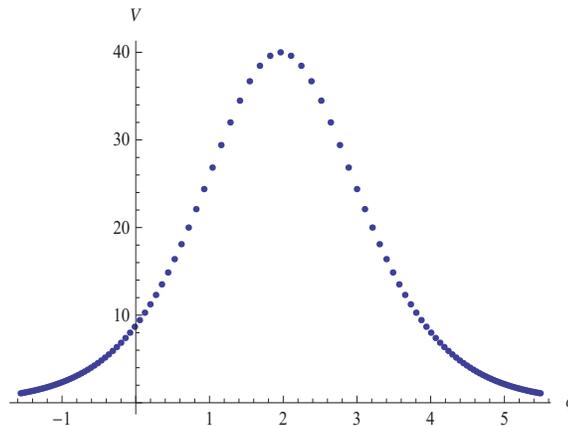


Figura 4.5: La grafica de la función  $V(\phi)$  para  $n = 2$ ,  $k = 1$  y  $c = 1/4$

portamiento del potencial que tiene forma de campana, con un máximo  $V_{max} = \frac{2(1+c)}{c^2}$  cuando  $\phi(t = 0) \approx 2$ . El potencial tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito o menos infinito.

Para apreciar la contribución de la constante  $c$  al comportamiento del potencial, se graficó para distintos valores de  $c$  (ver gráfica 4.6). Para  $c = 0$  el potencial tiene una singularidad en  $t = 0$  por lo que no se consideran sus valores para tiempos negativos. Al aumentar una constante  $c > 0$  el potencial toma un máximo finito al tiempo cero, el máximo aumenta al disminuir el valor de  $c$ .

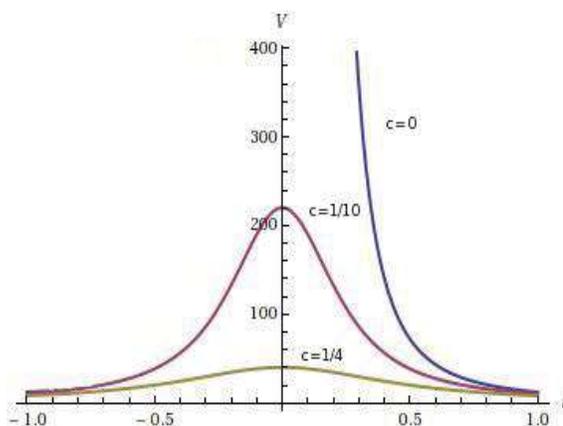


Figura 4.6: Gráfica del potencial con respecto al tiempo para diferentes valores de  $c$ ,  $n = 2$  y  $k = 1$

Graficando las funciones para la presión y la densidad se obtiene la gráfica 4.7. Para esta elección de  $n$  la presión siempre es negativa independientemente de la elección

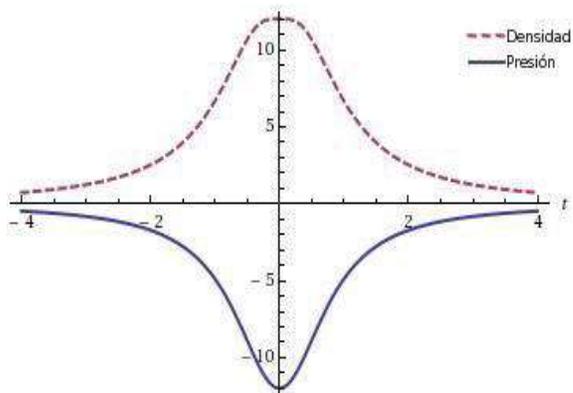


Figura 4.7: Gráfica de la presión y densidad para  $n = 2$ ,  $k = 1$  y  $c = 1/4$

de  $c$ , cuidando de que cumpla con la restricción ya mencionada (ver gráfica 4.7).

Por último consideramos el caso  $n = 4$ , las expresiones de  $\dot{\phi}$  y  $V$  dan

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\sqrt{k + 4At^2(-3c + At^4)}}{c + At^4},$$

$$V(t) = \frac{2(k + 6Act^2 + 22A^2t^6)}{(c + At^4)^2}.$$

Para este caso  $k$  se restringe a  $+1$  y la  $c \leq \frac{1}{4}$  para que el campo escalar esté definido para todo tiempo. Resolviendo numericamente se obtiene la siguiente gráfica del potencial con respecto al campo escalar. En la gráfica 4.8 se puede ver que no existe una singularidad

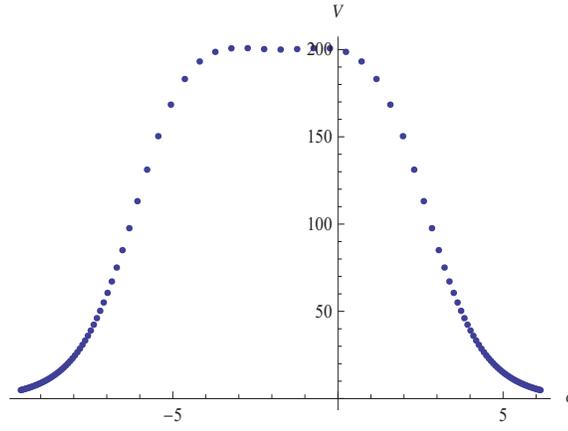


Figura 4.8: Gráfica del potencial para  $n = 4$ ,  $k = 1$  y  $c = 1/4$

para algún tiempo, y esta definido para tiempos negativos y positivos. Se ve que tiene una forma similar al caso  $n = 2$ , con la diferencia de que tiene dos máximos y un mínimo local. De nuevo, para apreciar la contribución de la constante  $c$  al comportamiento del campo escalar, se graficó este variando el valor de  $c$  (ver gráfica 4.9). Para  $c = 0$  el potencial tiene una singularidad para  $t = 0$  por lo que no se consideran los sus valores para  $t < 0$ . Se puede ver que al agregar una constante  $c > 0$  ya no existe una singularidad. Las gráficas de la presión y la densidad muestran un comportamiento similar al potencial (ver gráfica 4.10). Para este caso la presión es negativa, lo cual concuerda con la ecuación (3.9).

Notamos que en el caso cuando  $n \geq 1$  la presión del campo escalar es negativa, para todo  $t$ , mientras que la densidad de campo escalar es siempre positiva (para  $k = 0, 1$ ). En todos estos casos la aceleración del universo es positiva, como ha sido durante la época de inflación o en la época actual. Como  $n$  crece el potencial del campo escalar va adquiriendo más punto críticos, pero siempre tiende a cero para  $|t| \rightarrow \infty$ .

La propuesta de este trabajo es que el campo escalar se puede introducir como fuente de un modelo cosmológico sin singularidades, basado en las ideas de Ellis y Masden. Los resultados preliminares que hemos obtenido se refieren a la forma del potencial del campo escalar y el comportamiento de la densidad y la presión del campo escalar

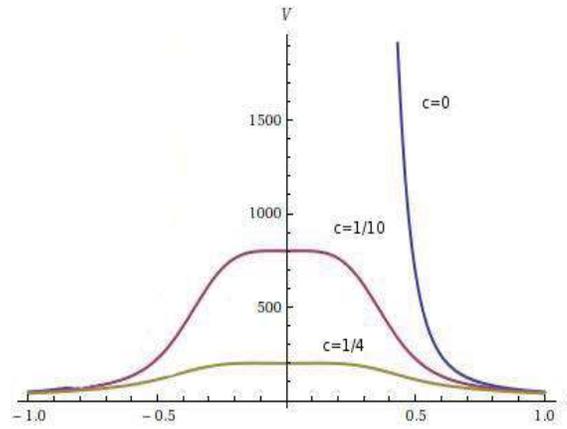


Figura 4.9: Gráfica del potencial para  $n = 4$ ,  $k = 1$

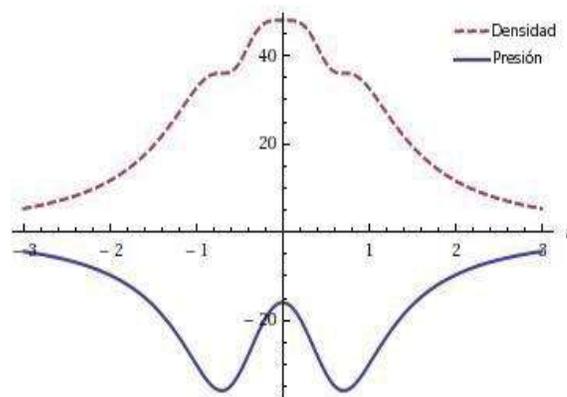


Figura 4.10: Gráfica de la presión y densidad para  $n = 4$ ,  $k = 1$  y  $c = 1/4$

que se obtienen en el caso de un factor de escala polinomial. Planeamos analizar también el caso de una expansión exponencial y sus implicaciones dentro de este método. Las teorías propuestas podrían modelar el universo en el periodo de inflación, cuando domina el campo escalar, pero para los periodos posteriores se vuelven importantes los efectos de la radiación y la materia, y en el último periodo los efectos de la materia y energía oscura (que usualmente se modela con un campo escalar). El siguiente paso de este trabajo será introducir, a parte del campo escalar, la materia modelada por fluido perfecto y analizar sus efectos a la forma del potencial de campo escalar.



## Capítulo 5

# Conclusiones

La cosmología ha extendido nuestro conocimiento del universo y de su comportamiento. Nos ha permitido indagar en preguntas tan difíciles como las del origen y futuro del universo. A pesar de sus grandes contribuciones, la cosmología también ha dejado varios problemas abiertos, como lo son la materia oscura y su contribución a la dinámica del universo. Es por esto que han surgido varias modificaciones a la Relatividad General estandar, siendo la teoría tensor-escalar una de las teorías alternas.

En este trabajo se estudió un caso de la teoría tensor-escalar, específicamente el acoplamiento mínimo del campo escalar. Utilizando el método de Ellis y Madsen para generar soluciones [1] se obtuvo el potencial del campo escalar asociado al factor de escala elegido. Se propuso un factor de escala de la forma  $a(t) = At^n + c$  con la finalidad de modelar un universo sin una singularidad. A diferencia del trabajo realizado por Ellis y Madsen, se resolvieron ecuaciones numericamente permitiendo así analizar las soluciones a ecuaciones sin solución analítica. Se trabajaron varios casos con diferentes valores de  $n$ , para  $n$  par, el factor de escala no se hace cero y por lo tanto se modela un universo cuyo escalar de curvatura no tiene una singularidad. En este tipo de universo no existirá un evento semejante al big bang y por lo tanto se puede definir para el tiempo negativo. Para los casos  $n = 1/2$  y  $n = 1$ , el universo sigue teniendo una singularidad. Se estudió la presión y la densidad para cada uno de los casos, obteniendo una presión negativa para todos los casos excepto para  $n = 1/2$ . El resultado de que la presión se haya obtenido negativa para ciertos valores de los parámetros sugiere que los campos escalares también pueden ser utilizados para modelar los periodos de la aceleración del universo.



# Bibliografía

- [1] George F R Ellis y Mark S Madsen: "Exact Scalar Field Cosmologies ", Class. Quantum Grav. (1991) 667-676.
- [2] Bernard F. Schutz: "A First Course In General Relativity".
- [3] Steven Weinberg: "Gravitation and Cosmology".
- [4] James B. Hartel: "Gravity ".
- [5] G. Esposito-Farese y D. Polarski, Physics Review D63(2001) 063504
- [6] Hans Sagan: "Introduction to the Calculus of Variations". Dover Publications 1992
- [7] Abhay Ashtekar, Alejandro Corichi, Parampreet Singh: "Robustness of key features of loop quantum cosmology ". Phys.Rev.D77:024046,2008