



**Universidad Michoacana San
Nicolás de Hidalgo**



**Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Luis Manuel Rivera Gutiérrez”**

***“EXPERIMENTACIÓN CON UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE
BACHILLERATO CON HOJAS DE TRABAJO RELACIONADAS CON LA
PARÁBOLA Y ELIPSE USANDO ARTEFACTOS CONCRETOS”***

**Tesis para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas**

Presenta:

Héctor Arturo Soto Rodríguez

Asesores: Dr. José Carlos Cortés Zavala
Dra. Graciela Eréndira Núñez Palenius

Diciembre del 2010

AGRADECIMIENTOS

A Dios y a mis padres por brindarme la oportunidad de estudiar una Licenciatura y ponerme el ejemplo día a día con su dedicación y esfuerzo en todo lo que hacen. Fue demasiado importante todo el apoyo que me brindaron a lo largo de toda la carrera así como todos los consejos y su paciencia.

A mis tres hermanas que estuvieron conmigo durante todo este proceso y que me brindaron su apoyo. A mi tío Martín y mis tías Carmela y Martha. Quiero darles las gracias a todas las personas que me apoyaron a lo largo de la carrera y a todos mis compañeros, de los cuales siempre aprendí algo, y con los cuales conviví y compartí varias experiencias en todo este proceso.

A mis asesores de Tesis, Carlos y Eréndira, los cuales confiaron en mí para la realización de este proyecto brindándome en todo momento sus conocimientos y asesorías para lograr sacarlo adelante así como su amistad.

También a todos los involucrados en mi tesis, quienes me ayudaron a realizar las pruebas piloto y formal, en especial a Erandi. A mi novia Yunnuen por motivarme a trabajar duro en el proyecto aun cuando las cosas no salían de la manera esperada, siempre confió en mí brindándome su apoyo y paciencia.

Por último y no menos importante quiero agradecer a la señora Elvia, encargada de la biblioteca en el turno vespertino, sin sus consejos, su confianza y su apoyo no hubiera sido posible que hubiera permanecido más de un mes en la carrera.

ÍNDICE

CAPIULO I	1
1.1	1
1.2	1
1.3	1
1.4	1
1.5	1
1.6	1
1.7	1
1.8	1
1.9	1
1.10	1
1.11	1
1.12	1
1.13	1
1.14	1
1.15	1
1.16	1
1.17	1
1.18	1
1.19	1
1.20	1
1.21	1
1.22	1
1.23	1
1.24	1
1.25	1
1.26	1
1.27	1
1.28	1
1.29	1
1.30	1
1.31	1
1.32	1
1.33	1
1.34	1
1.35	1
1.36	1
1.37	1
1.38	1
1.39	1
1.40	1
1.41	1
1.42	1
1.43	1
1.44	1
1.45	1
1.46	1
1.47	1
1.48	1
1.49	1
1.50	1
1.51	1
1.52	1
1.53	1
1.54	1
1.55	1
1.56	1
1.57	1
1.58	1
1.59	1
1.60	1
1.61	1
1.62	1
1.63	1
1.64	1
1.65	1
1.66	1
1.67	1
1.68	1
1.69	1
1.70	1
1.71	1
1.72	1
1.73	1
1.74	1
1.75	1
1.76	1
1.77	1
1.78	1
1.79	1
1.80	1
1.81	1
1.82	1
1.83	1
1.84	1
1.85	1
1.86	1
1.87	1
1.88	1
1.89	1
1.90	1
1.91	1
1.92	1
1.93	1
1.94	1
1.95	1
1.96	1
1.97	1
1.98	1
1.99	1
1.100	1

CAPIULO II	2
2.1	2
2.2	2
2.3	2
2.4	2
2.5	2
2.6	2
2.7	2
2.8	2
2.9	2
2.10	2
2.11	2
2.12	2
2.13	2
2.14	2
2.15	2
2.16	2
2.17	2
2.18	2
2.19	2
2.20	2
2.21	2
2.22	2
2.23	2
2.24	2
2.25	2
2.26	2
2.27	2
2.28	2
2.29	2
2.30	2
2.31	2
2.32	2
2.33	2
2.34	2
2.35	2
2.36	2
2.37	2
2.38	2
2.39	2
2.40	2
2.41	2
2.42	2
2.43	2
2.44	2
2.45	2
2.46	2
2.47	2
2.48	2
2.49	2
2.50	2
2.51	2
2.52	2
2.53	2
2.54	2
2.55	2
2.56	2
2.57	2
2.58	2
2.59	2
2.60	2
2.61	2
2.62	2
2.63	2
2.64	2
2.65	2
2.66	2
2.67	2
2.68	2
2.69	2
2.70	2
2.71	2
2.72	2
2.73	2
2.74	2
2.75	2
2.76	2
2.77	2
2.78	2
2.79	2
2.80	2
2.81	2
2.82	2
2.83	2
2.84	2
2.85	2
2.86	2
2.87	2
2.88	2
2.89	2
2.90	2
2.91	2
2.92	2
2.93	2
2.94	2
2.95	2
2.96	2
2.97	2
2.98	2
2.99	2
2.100	2

CAPIULO III	3
3.1	3
3.2	3
3.3	3
3.4	3
3.5	3
3.6	3
3.7	3
3.8	3
3.9	3
3.10	3
3.11	3
3.12	3
3.13	3
3.14	3
3.15	3
3.16	3
3.17	3
3.18	3
3.19	3
3.20	3
3.21	3
3.22	3
3.23	3
3.24	3
3.25	3
3.26	3
3.27	3
3.28	3
3.29	3
3.30	3
3.31	3
3.32	3
3.33	3
3.34	3
3.35	3
3.36	3
3.37	3
3.38	3
3.39	3
3.40	3
3.41	3
3.42	3
3.43	3
3.44	3
3.45	3
3.46	3
3.47	3
3.48	3
3.49	3
3.50	3
3.51	3
3.52	3
3.53	3
3.54	3
3.55	3
3.56	3
3.57	3
3.58	3
3.59	3
3.60	3
3.61	3
3.62	3
3.63	3
3.64	3
3.65	3
3.66	3
3.67	3
3.68	3
3.69	3
3.70	3
3.71	3
3.72	3
3.73	3
3.74	3
3.75	3
3.76	3
3.77	3
3.78	3
3.79	3
3.80	3
3.81	3
3.82	3
3.83	3
3.84	3
3.85	3
3.86	3
3.87	3
3.88	3
3.89	3
3.90	3
3.91	3
3.92	3
3.93	3
3.94	3
3.95	3
3.96	3
3.97	3
3.98	3
3.99	3
3.100	3

3.5.2.1 PAS ESPEA

C
R
E
O

CAPO

I
D
E
A

CAPO

C
R

LOGRAA

ANEOS

ANE
ANE
ANE
ANE

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

CONTENIDO

Figura 1.1	Dispositivos de Dürer para el dibujo de curvas.....	10
Figura 1.2	Aparato de Descartes para el dibujo de curvas.....	10
Figura 1.3	Dibujo de una elipse utilizando una cuerda.....	11
Figura 1.4	Par de Tusi.....	12
Figura 1.5	Modelo del Par de Tusi de Reuleaux (Foto del Profesor. F. C. Moon).....	12
Figura 1.6	Modelo del trasallo de la colección cinemática de Reuleaux (Foto del profesor D.W..... Henderson).	13
Figura 1.7	Mecanismo de van Schooten para dibujar elipses.....	14
Figura 1.8	Mecanismo de van Schooten para dibujar hipérbolas.....	15
Figura 1.9	Mecanismo de van Schooten para dibujar parábolas.....	15
Figura 1.10	Conicógrafo de Boguslavskii (Artobolevski).....	16

CONTENIDO

Tabla 3.1	Especificaciones y barras necesarias para armar cada uno de los artefactos.....	56
Tabla 3.2	Especificaciones de las pruebas piloto.....	58
Tabla 3.3	Especificaciones de las pruebas formales.....	61
Tabla 3.4	Ejemplo de cómo se organizó la información recopilada en las grabaciones mediante tablas...	64
Figura 3.1	Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards.....	32
Figura 3.2	Antiparalelogramo articulado de van Schooten.....	33
Figura 3.3	Parabológrafo de palancas y colisa de inwards.....	34
Figura 3.4	Construcción para la demostración del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards.....	35
Figura 3.5	Trazo del segmento KC.....	35
Figura 3.6	Trazo del punto P (mover el artefacto hasta colocar al punto E sobre P').....	37
Figura 3.7	Construcción para la demostración del Antiparalelogramo articulado de van Schooten.....	38
Figura 3.8	Trazo de los segmentos CA y DB	39
Figura 3.9	Teorema del ángulo exterior.....	39
Figura 3.10	Teorema AIP.....	40
Figura 3.11	Comparación de los triángulos ABD y DCA.....	40

Figura 3.12	Los ángulos ADB y DAC son congruentes.....	41
Figura 3.13	Los ángulos ACB y DBC son congruentes.....	41
Figura 3.14	Comparación entre los ángulos APB y APD.....	42
Figura 3.15	Trazo del eje de simetría t.....	42
Figura 3.16	Puntos de intersección M y N.....	43
Figura 3.17	Obsérvese que los ángulos α y β son opuestos por el vértice.....	44
Figura 3.18	Trazo del punto P (mover el artefacto hasta colocar al punto E sobre P').....	46
Figura 3.19	Caso en el que el Antiparalelogramo articulado forma un paralelogramo.....	47
Figura 3.20	Diversos trazos y puntos de intersección necesarios para la demostración del caso especial....	47
Figura 3.21	a) Remaches. b) Postes de distintos tamaños.....	49
Figura 3.22	Barras y correderas de papel ilustración y sus especificaciones.....	50
Figura 3.23	Correderas hechas de papel ilustración	50
Figura 3.24	Bosquejo del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards construido en papel ilustración.....	51
Figura 3.25	Barras de tireno y sus especificaciones	51
Figura 3.26	Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards construido en tireno.....	52
Figura 3.27	Barras y correderas de tireno grueso y sus especificaciones.....	52
Figura 3.28	Prototipo del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards hecho en tireno grueso.....	53
Figura 3.29	Barras y correderas en tireno grueso necesarias para armar el Antiparalelogramo articulado.. de van Schooten.	53
Figura 3.30	Antiparalelogramo articulado de van Schooten en tireno grueso.....	54
Figura 3.31	Barras de metal y sus especificaciones.....	55
Figura 3.32	Antiparalelogramo articulado de van Schooten construido en metal.....	55
Figura 3.33	Artefactos construidos en acrílico. a) Antiparalelogramo, b) Parabológrafo y c) Elipsógrafo.... de palancas y colisa de inwards.	56

C??P??P ?

Figura 4.1	Respuesta 3 del Equipo 1.....	67
Figura 4.2	El Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards en estado fijo formando un rombo.....	69
Figura 4.3	Respuesta 6 del Equipo 1 en sus hojas de trabajo.....	70
Figura 4.4	Respuesta 7 del Equipo 1 en sus hojas de trabajo.....	70
Figura 4.5	Respuesta 6 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.....	72
Figura 4.6	Respuesta 7 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.....	72

Figura 4.7 Demostración gráfica.....	73
Figura 4.8 Respuesta escrita de la pregunta 8 del Equipo 1.....	76
Figura 4.9 Integrantes del Equipo 3 remarcando los triángulos KED y KCE.....	78
Figura 4.10 Triángulos remarcados y etiquetados en la hoja de dibujo del Equipo 3.....	79
Figura 4.11 Respuesta escrita del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.....	80
Figura 4.12 Diversos trazos sugeridos en la pregunta 11.....	82
Figura 4.13 Respuesta brindada por el Equipo 3 en sus hojas de trabajo a la pregunta 11.....	82
Figura 4.14 Trazado de una elipse mediante el uso de una cuerda.....	86
Figura 4.15 Integrantes del Equipo 3 manipulando el artefacto.....	86
Figura 4.16 Respuesta escrita a la pregunta 12 del Equipo 3.....	87
Figura 4.17 El Equipo 3 trazando su trapecio.....	89
Figura 4.18 Respuesta 7 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.....	89
Figura 4.19 Respuesta escrita de la pregunta 8 del Equipo 3.....	91
Figura 4.20 Respuesta escrita del Equipo 2 para la pregunta 8.....	94
Figura 4.21 Triángulos BEN y DEN en el trapecio.....	97
Figura 4.22 Respuesta 9 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.....	97
Figura 4.23 Respuesta escrita de la pregunta 9 del Equipo 2.....	99
Figura 4.24 Respuesta 10 del Equipo 2 en sus hojas de trabajo.....	100
Figura 4.25 Respuesta escrita del Equipo 4.....	101
Figura 4.26 Respuesta escrita de la pregunta 10 del Equipo 4.	102
Figura 4.27 Manera en que los integrantes del Equipo 4 hicieron las comparaciones de los triángulos..... pedidos en las preguntas 9, 10 y 11.	104
Figura 4.28 Respuesta correspondiente a la pregunta 11 del Equipo 4.....	104
Figura 4.29 Dibujo hecho por el equipo 3 donde se muestran los triángulos analizados así como..... algunos otros trazos y marcas.	107
Figura 4.30 Respuesta de la pregunta 11 del Equipo 3.....	108
Figura 4.31 La definición de elipse del Equipo 2 en la pregunta 14.....	111
Figura 4.32 Respuesta 15 del Equipo 4 en sus hojas de trabajo.....	114

CAPÍTULO I

1.1. Introducción

Este proyecto de tesis está relacionado con artefactos matemáticos, éstos son una representación física de un modelo que contiene matemáticas y pueden ser potencialmente útiles en la enseñanza y aprendizaje de éstas en el nivel Medio Superior. Internacionalmente, se ha mostrado un creciente interés por integrar la tecnología moderna (ambientes de Geometría Dinámica, sistemas computacionales de álgebra, etc.) así como tecnología clásica (regla, compás y artefactos de dibujo) para enseñarlas, hecho que se populariza rápidamente. Recordemos, que la práctica de utilizar instrumentos tangibles en Matemáticas se ha incluido históricamente en los trabajos de grandes matemáticos, como R. Descartes, B. Pascal, G. von Leibniz, J. Napier, entre otros.

Resultados recientes de investigación constatan la importancia del uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias, y en la incorporación al trabajo científico por parte de los estudiantes. En sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar habilidades matemáticas que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998), o se promueve la creatividad y el ingenio en el diseño científico mediante el uso de nuevas tecnologías (Verillon y Rabardel, 1995; Jörgensen, 1999).

Por otro lado, perspectivas teóricas y prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas (Mariotti, Bartolini, Boero et al., 1997; Boero, 1998; Arzarello, 2004), argumentan a favor de la introducción en el salón de clase de contextos históricos de recreación de la experiencia científica, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de

máquinas para dibujar o trazar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas.

Además las metodologías, las actividades y las secuencias curriculares utilizadas son diferentes a las de una forma tradicional de enseñanza, basada únicamente en clases frontales, y el papel del profesor es más dinámico no sólo en la realización de actividades, sino también en la planificación de las interacciones dentro del aula.

Cabe mencionar que este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más general, en el que se involucra el uso de la tecnología para crear espacios virtuales y el uso de artefactos mecánicos para realizar el *Antiparalelogramo articulado*¹. En particular en esta investigación se abordará lo relacionado con dos artefactos trazadores de elipses (elipsógrafos), los cuales son conocidos como Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards y Antiparalelogramo articulado de van Schooten.

Se construyó también un Parabológrafo, llamado Parabológrafo de colisa y palancas de inwards, pero se decidió que sólo se aplicarían con estudiantes los elipsógrafos anteriormente mencionados.

Es importante resaltar que ambos artefactos fueron sacados de la obra “*Les mécanismes dans la technique moderne*” (Artobolevski, 1975), tomo 2, parte 1. Por otro lado, debe de mencionarse que de este tipo de artefactos o instrumentos existe muy poca evidencia literaria y las construcciones físicas de ellos son muy reducidas. Parte importante de este trabajo consistió en realizar la construcción de los artefactos referidos anteriormente, de los cuales inicialmente se realizaron varios prototipos con diferentes materiales, hasta poder obtener los adecuados y que garantizaran un desempeño óptimo.

En este trabajo se presentan cinco capítulos relacionados con lo siguiente: En el primero se mencionan hechos generales, aspectos históricos, el problema que se

¹ Se refiere al trabajo en el que participan el sentido del tacto así como el visual

investigará y objetivos del trabajo; en el segundo se da una visión general de la teoría en la que podremos enmarcar este tipo de trabajos; el tercero está relacionado con la exposición de los artefactos construidos; en el cuarto se mostrará el análisis de la información recabada en las sesiones experimentales, y por último, el capítulo cinco se conformará por las conclusiones.

2.2.2. Artefactos matemáticos

Una gran diversidad de máquinas e instrumentos para el análisis matemático han sido construidos a lo largo de la historia para observar, contar, medir, trazar curvas, tratar de demostrar casos no posibles (duplicación de cubo, trisección de un ángulo, entre otros), así como para resolver problemas geométricos, comunicar o difundir ideas matemáticas nuevas.

Podemos encontrar artefactos articulados para dibujar curvas desde la antigua Grecia. Los dispositivos mecánicos utilizados en la antigua Grecia para construir diversas curvas, fueron inventados principalmente para solucionar tres famosos problemas: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo. Existen referencias de que Meneachmus (~380 - ~320 A.C.) tenía un dispositivo mecánico para construir cónicas, que usó para solucionar el problema de la duplicación del cubo. Un método para solucionar problemas de trisecar un ángulo y la cuadratura del círculo, era utilizar la Cuadratriz de Hippias (~460 - ~400 B.C). Éste es el primer ejemplo de una curva que se define por medio del movimiento y no puede construirse usando solamente regla y compás. Proclus (418-485) también menciona que Isidoro de Mileto tenía un instrumento para trazar una parábola (Dyck, p.58). Es importante entender la importancia de dichos artefactos, puesto que los geómetras griegos estaban buscando y encontrando soluciones a problemas geométricos por medios mecánicos. Las soluciones antes mencionadas, en su mayoría eran necesarias para propósitos prácticos.

Leonardo Da Vinci (1452-1519) inventó un torno para modelar partes de sección elíptica, usando un mecanismo de cuatro articulaciones, un elipsógrafo con movimiento invertido de la articulación fija. Los dispositivos mecánicos para dibujar curvas fueron utilizados también por Albrecht Dürer (1471-1528). Véanse dos imágenes de sus “Cuatro libros de proporciones” en la figura 1.1.

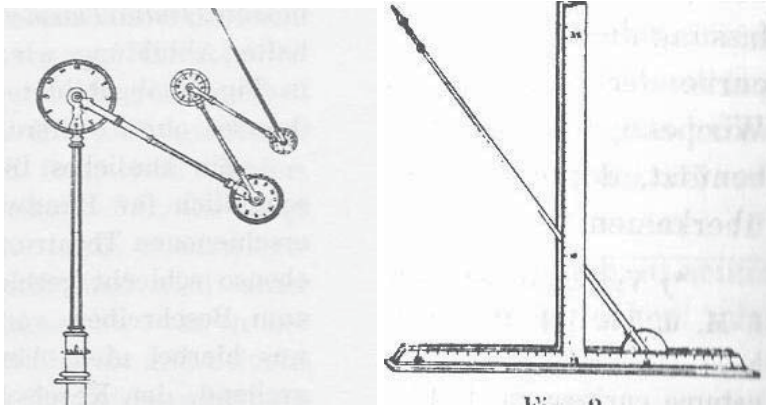


Figura 1.1 Dispositivos de Dürer para el dibujo de curvas.

Cuando René Descartes (1596-1650) publicó su *Geometría* (1637), no creó una curva trazando puntos de una ecuación. Siempre dio métodos geométricos para dibujar cada curva con algunos aparatos y estos aparatos eran a menudo articulados. Véase la figura 1.2.

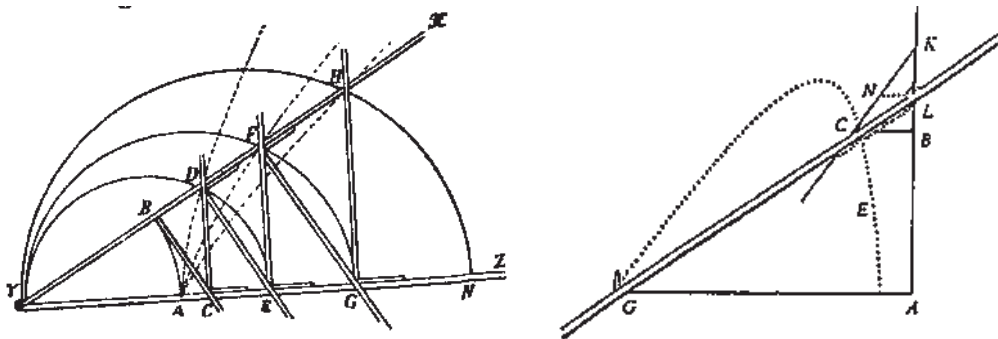


Figura 1.2 Aparato de Descartes para el dibujo de curvas.

La construcción mecánica más conocida de una elipse es la construcción por medio de una “cuerda”, que data de los antiguos griegos o incluso anteriores a ellos. Se basa en la definición de los dos-focos de una elipse. Como Coolidge (1873-1958) indica:

“Los Griegos deben haber percibido que si los dos extremos de un pedazo de cuerda se amarran, en dos puntos cuya distancia que las separa es menor que la longitud de la cuerda, el lugar geométrico de un punto que tire la cuerda tensa es una elipse, cuyos focos son los puntos dados.”

El primero que escribió sobre la construcción de una elipse por medio de una cuerda fue Abud ben Muhamad, que escribió a mediados del siglo IX (Coolidge, 1945).

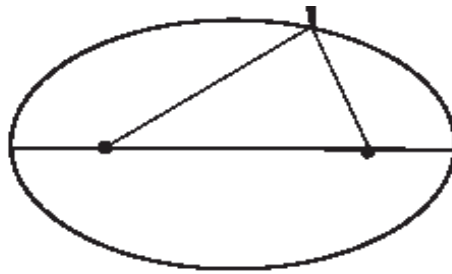


Figura 1.3 Dibujo de una elipse utilizando una cuerda.

En mecánica al obtener una trayectoria elíptica en máquinas, usamos con frecuencia el teorema de La Hire (1614-1718).

Teorema de La Hire Si un círculo rueda, sin resbalar, por lo que es tangente internamente a un círculo fijo del doble de su radio, el lugar geométrico trazado por un punto que se encuentre en su circunferencia es el diámetro del círculo fijo, mientras que el lugar geométrico trazado por un punto que no se encuentre en el borde y ni en el centro del círculo es una elipse (La Hire, p.351). La prueba de La Hire de este teorema se basa en la teoría de las ruletas o de los centroides. El lector interesado puede ver una simulación virtual en mathworld (<http://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid.html>), que ilustra el teorema anterior.

El siguiente teorema ha sido redescubierto muchas veces, pero al parecer la primera persona que lo enunció fue Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274). Al-Tusi hizo el

desarrollo más significativo del modelo del sistema planetario de Ptolomeo hasta el desarrollo del modelo heliocéntrico en la época de Copérnico (1473-1543). El teorema que también fue mencionado por Copérnico se refiere al famoso “par de Tusi”, el cual descompone el movimiento lineal en la suma de dos movimientos circulares. El par de Tusi es obtenido rodando sin resbalar un círculo de radio a dentro de un círculo de radio $2a$. Véanse las figuras 1.4 y 1.5. El resultado es un segmento lineal igual al radio del círculo más grande. Los matemáticos a veces llaman a esto como hipocicloide de dos picos, pero los ingenieros se refieren al movimiento como casos especiales de engranajes. Puede ver en mathworld (<http://mathworld.wolfram.com/TusiCouple.html>) una simulación virtual del par de Tusi. Esta idea también fue utilizada por F.Reuleaux (1829 - 1905) como puede ser visto en la figura 1.5.

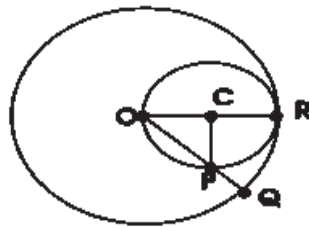


Figura 1.4 Par de Tusi.

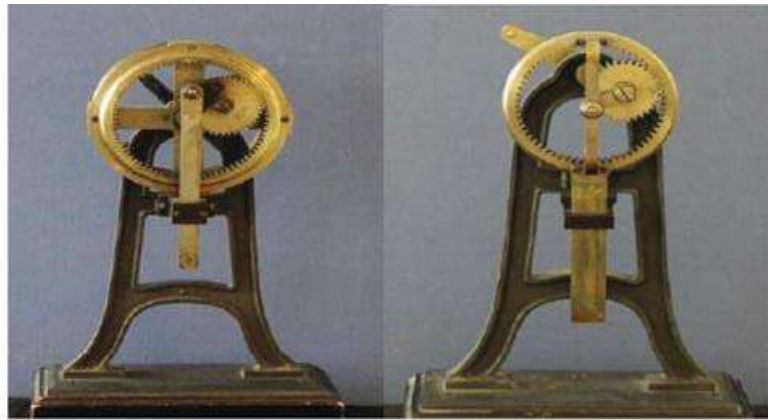


Figura 1.5 Modelo del Par de Tusi de Reuleaux
(Foto del Profesor. F. C. Moon).

En la figura 1.4, $OR=2CR$, $\angle PCR=2\angle POC$, por consiguiente arco PR = arco QR y el punto P en esta imagen está describiendo una línea recta, pero el punto C describe un círculo. El hecho de que C trace un círculo sugiere una mejora mecánica para convertir

este par de Tusi en elipsógrafo. Supongamos que tenemos una barra delgada de longitud fija, uno de cuyos extremos se mueve en una línea fija, mientras que su otro extremo traza un círculo cuyo centro está en la línea, cuyo radio es igual a la longitud de la barra, un punto rígido adjunto a la barra trazará una elipse. Esto fue descrito por van Schooten quien demostró cómo realizarlo mecánicamente.

La más sistemática y completa discusión del tratamiento de las cónicas se encuentra en la *“Elementa Curvarum Linearum”* de Johan de Witt, que apareció como apéndice de la Segunda Edición en latín de van Schooten de la *“Geometrie”* de Descartes, 1659-1661 (Easton, 1963). Johan de Witt (1625-1672) fue un político holandés con considerables habilidades como matemático. Mientras estudiaba leyes en la universidad de Leiden se hizo amigo de Francis van Schooten (1615 - 1660) y recibió de él una excelente preparación en matemáticas cartesianas. Van Schooten fue el principal divulgador de la Geometría de Descartes en Europa. Según van Schooten, el tratado de De Witt fue escrito unos diez años antes de su publicación. De Witt describe dos construcciones más de una elipse. Una de ellas es la construcción del trasmallo, que fue descrita por Proclus pero también se atribuye a Arquímedes (287-212 A.C.). Esta construcción con imágenes de la colección del modelo cinemático de Reuleaux se describe en el tutorial de F. Moon. *“Cómo dibujar una elipse”*. Véase la figura 1.6.



Figura 1.6 Modelo del trasmallo de la colección cinemática de Reuleaux (Foto del profesor D.W. Henderson).

En el año de 1657, van Schooten publicó su “*Exercitationum mathematicarum libri quinque*”. Como el título sugiere, la obra se divide en cinco "libros" de un centenar de páginas cada uno. El libro I es una revisión bastante estándar de la aritmética y la geometría de su época. El libro II contiene construcciones con regla. En el Libro III, van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio acerca de lugares geométricos. Éste fue un importante tema de investigación de la época. El libro IV contiene la obra más conocida de van Schooten, su título es *Organica conicarum sectionum* o *De los instrumentos de las secciones cónicas*. La palabra "orgánica" está más estrechamente relacionada con el órgano como instrumento musical que a la "orgánica" que a veces encontramos en la química o la agricultura. Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de bellos artefactos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas.

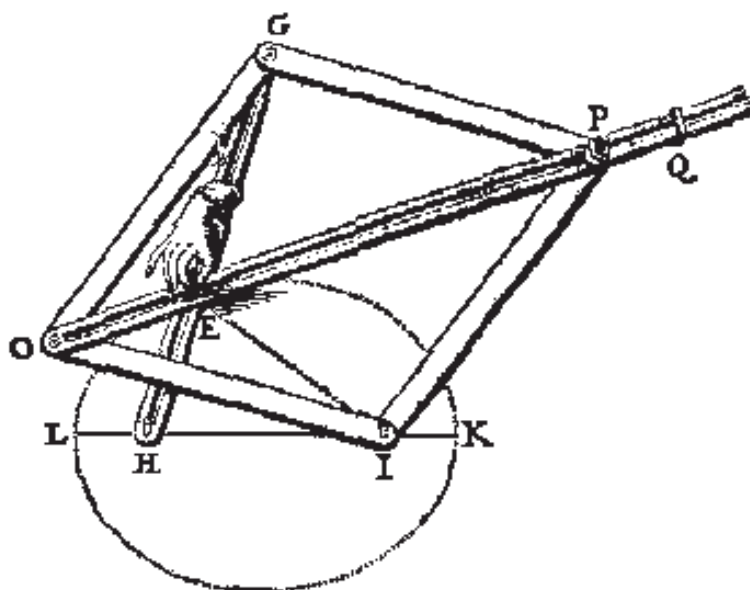


Figura 1.7 Mecanismo de van Schooten para dibujar elipses.

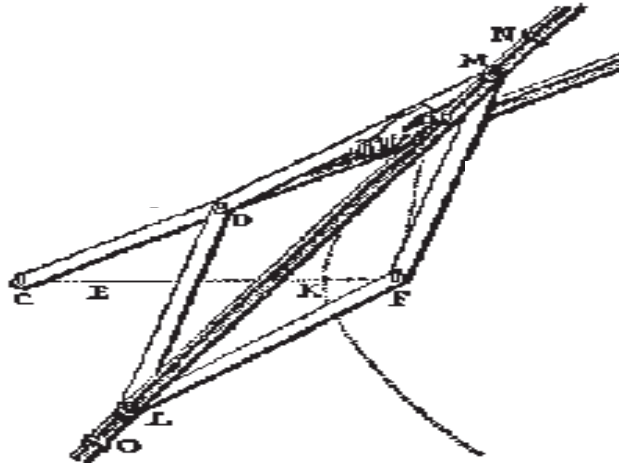


Figura 1.8 Mecanismo de van Schooten para dibujar hipérbolas.

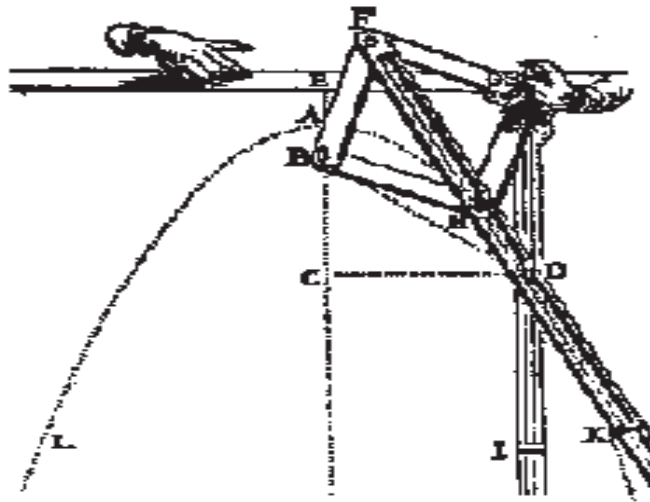


Figura 1.9 Mecanismo de van Schooten para dibujar parábolas.

Por último, el Libro V se titula *Sectiones triginta miscellaneas*, o Treinta secciones diversas. En estas secciones, van Schooten cuidadosamente desarrolla los principios del conteo y la combinatoria.

Examinando la teoría de curvas algebraicas del tercer grado, Isaac Newton (1643-1727) propuso un mecanismo para la generación de curvas de tercer grado, usando una

conexión de cuatro cadenas con dos pares de deslizaderas. En la figura 1.10, puede ver la realización de esta idea en el conicógrafo de Boguslavskii (Artobolevski, 1964, p. 70).

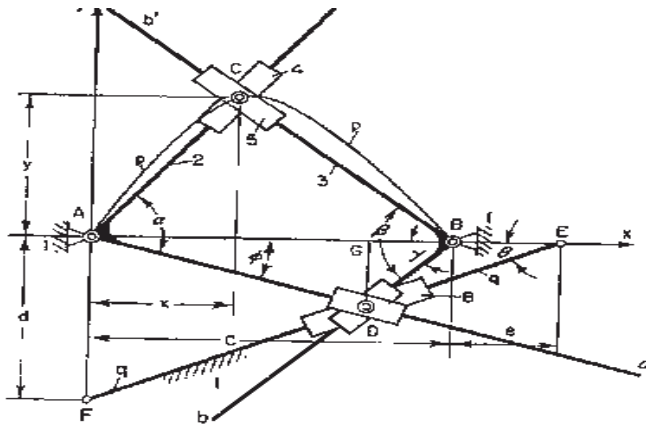


Figura 1.10 Conicógrafo de Boguslavskii (Artobolevski).

Alfred Bray Kempe (1849-1922) también formuló un famoso teorema, que menciona que cualquier curva algebraica puede ser generada por un artefacto apropiado o puede decirse simplemente: es posible diseñar un artefacto, que firme con su nombre (mientras su firma sea la unión de curvas continuas). Este teorema parece ser demasiado ambicioso.

Si el lector se encuentra interesado en revisar un bosquejo de la conjetura de Kempe puede ver a Artobolevski (p.8-12) y a Horsburgh (p. 260-261), para más detalles.

En 1877 A.B. Kempe publicó el libro: *¿Cómo dibujar una línea recta en una conferencia sobre artefactos articulados*. Mencionó a J. Watt (1736-1819) y también el trabajo de J.J. Sylvester (1814-1897), R. Roberts (1789-1864), P.L. Chebyshev (1821-1894), H. Hart (1848-1920), W.K. Clifford (1845-1879), J.A. Lissajous (1822-1880), S. Roberts (1827 - 1913), y A. Cayley (1821-1895).

Esta tradición de considerar curvas como resultado de acciones geométricas se puede encontrar también en trabajos de Roberval (1602-1675), Pascal (1623-1662), y de Leibniz (164-1716). Los dispositivos mecánicos para dibujar curvas han desempeñado un

papel fundamental en la creación de nuevos lenguajes simbólicos (por ejemplo, el cálculo) y establecer su viabilidad. Las tangentes, las áreas y la longitud de arco asociada a muchas curvas eran conocidas antes de que cualquier ecuación algebraica fuera escrita. Experimentos críticos usando curvas permitieron la coordinación de representaciones algebraicas con resultados independientemente establecidos de la geometría (Dennis, 1995).

Franz Reuleaux (1829-1905), quién a menudo es llamado "el padre del diseño de las máquinas modernas", tenía muchos mecanismos de líneas rectas en su colección del modelo cinemático. La Universidad Cornell tiene una colección con cerca de 220 modelos cinemáticos distintos de F. Reuleaux y 39 de ellos son mecanismos sobre el movimiento rectilíneo. La página KMODDL contiene varios de los mecanismos de F. Reuleaux (www.kmoddl.cornell.edu).

Iván Ivánovich Artobolevski, (1905–1977). Fue un ingeniero mecánico y científico ruso en el campo de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Fue miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética desde 1946. Artobolevski propuso una clasificación de los mecanismos espaciales y desarrolló métodos para su análisis estructural, cinemático y cinetostático. Recopiló en *Les mécanismes dans la technique moderne* (Artobolevski, 1975) constituida por cuatro tomos, varios artefactos mecánicos cuya finalidad era trazar alguna cónica.

?? ???? ?

A lo largo de la historia de las matemáticas, la fabricación de máquinas o juegos matemáticos han intervenido en el proceso de enseñanza, los especialistas dedicados a investigar los instrumentos mencionados han reportado: la relación máquina-matemática, la construcción de instrumentos a partir de sus propiedades geométricas y la posibilidad

de proponer problemas dentro de un contexto que permita al estudiante formular sus propias estrategias para la búsqueda de soluciones, entre otros factores (Abdank, 1878, Falcóni & Hoyos 2005, entre otros).

Si se compara la aplicación de máquinas matemáticas en diferentes entornos, en particular el uso de elipsógrafos con sus modelos virtuales para trazar elipses y a partir de ellos obtener las características fundamentales de dicha cónica, se fundamentarían mejor las razones de la intervención de modelos físicos y virtuales en el proceso de la enseñanza de la Geometría Analítica.

Además esta investigación aborda cómo los alumnos mediante la observación, la manipulación de un instrumento matemático (elipsógrafo) y la resolución de actividades didácticas que contienen preguntas que los guían, puedan llegar a desarrollar el concepto de elipse por sí mismos, esperando que obtenido de esta manera, sea aprendido mejor que el brindado en una clase tradicional usando sólo lápiz y papel.

RESUMEN

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo es parte de un proyecto más general en el cual se pretenden realizar comparaciones, entre otras cosas, de las diferencias fenomenológicas que existen entre el hecho de que un estudiante trabaje con modelos virtuales haciendo uso de las computadoras y modelos físicos tales como el uso de estos artefactos. En particular, en este trabajo se investigó el uso de dos de estos artefactos mecánicos, específicamente dos elipsógrafos, los cuales se diseñaron y se construyeron con apoyo del libro *“Des mécanismes dans la technique moderne”* (Artobolevski, 1975), tomo 2, parte 1. Se elaboró una serie de actividades de aprendizaje con una guía de preguntas que respondieron los alumnos. Al final de la actividad los alumnos podrán ser capaces de construir ciertos conceptos de acuerdo con sus respuestas

en dicha guía, la cual se responde usando dichos artefactos. Estas actividades se experimentaron con alumnos de bachillerato que ya habían cursado Geometría Analítica, en ellas se pretendió usar los artefactos mecánicos y obtener datos, los cuales fueron analizados para que dentro del proyecto general, se comparen con los obtenidos cuando los estudiantes usan modelos virtuales.

Por lo que, en este proyecto de tesis, la investigación que se realizó está relacionada con el uso de artefactos mediante los cuales los estudiantes de bachillerato construyan conceptos de Geometría Analítica, específicamente el concepto referente a la elipse. Para ello se utilizaron los instrumentos mecánicos que se han construido, en este caso los elipsógrafos.

2.1.1. Elipsógrafos

Los estudiantes de bachillerato al utilizar instrumentos mecánicos, se motivarán a deducir y encontrar los modelos matemáticos que están involucrados en la construcción de este tipo de artefactos, además les permitirán conjeturar sobre los significados y aplicaciones de los conceptos matemáticos involucrados y recordar conceptos, habilidades y conocimientos adquiridos anteriormente en otras etapas de su desarrollo educativo. De igual manera también les permitirán construir el concepto involucrado en los instrumentos mecánicos en cuestión.

2.1.2. Objetivos

Los objetivos de este proyecto de tesis son:

- Determinar qué artefactos mecánicos permiten la aplicación del concepto de elipse en su diseño.
- Analizar si es posible llevar a cabo la construcción de instrumentos mecánicos que permitan desarrollar conceptos como el de la elipse.
- Indagar si los artefactos contruidos permiten ejemplificar, ante estudiantes, conceptos tal como el de la elipse.
- Examinar si el uso de los elipsógrafos contruidos, ayudan a los estudiantes de bachillerato en la construcción del concepto de elipse.
- Analizar qué metodología de enseñanza es la más apropiada para llevar a cabo con estudiantes de bachillerato el uso de este tipo de artefactos.
- Determinar qué conceptos de Geometría aprenden los estudiantes con el uso de instrumentos mecánicos concretos.

?? ???? ? ? ???? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

- ¿Es posible que la construcción de artefactos mecánicos le permitan al estudiante trabajar con conceptos como el de la elipse?
- ¿El artefacto contruido al ser manipulado por el estudiante, le permite ejemplificar conceptos como el de la elipse?
- ¿El uso de los elipsógrafos elaborados, ayuda a los estudiantes de bachillerato a construir el concepto de elipse, una vez que comprenden el modelo involucrado?
- ¿La demostración de una construcción geométrica puede ser tratada a través de que el estudiante manipule un instrumento y encuentre el modelo de construcción?
- ¿Qué metodología de enseñanza es la más apropiada para llevar a cabo con estudiantes de bachillerato el uso de este tipo de artefactos?
- ¿Qué fenómenos emergen en los estudiantes cuando utilizan instrumentos concretos en el aprendizaje de conceptos geométricos?

CAPÍTULO 2

2.1. Modelos Teóricos

La construcción de artefactos matemáticos ha estado presente a lo largo de la historia, la necesidad que han tenido personas dedicadas a las matemáticas e ingenieros por apoyarse en máquinas e instrumentos que les faciliten el trabajo que les ocupa, se ve en las diferentes etapas históricas de la construcción del conocimiento. Un instrumento matemático es una representación física de un modelo que contiene matemáticas y como es sabido, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación, por lo que para iniciar el estudio de la utilización de los instrumentos anteriormente mencionados es importante primeramente abordar las diferentes cuestiones sobre la representación.

Duval (1995) menciona en su libro *“Semiosis y pensamiento Humano”* lo siguiente:

La representación ha sido el centro de toda reflexión que se preocupa por las cuestiones que tienen que ver con la posibilidad y la constitución de un conocimiento cierto. Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. No es sorprendente pues, que igualmente se haya impuesto la noción de representación en los estudios psicológicos sobre la adquisición de los conocimientos o sobre sus tratamientos. Ahora bien, esta noción de representación se ha presentado en tres ocasiones distintas, cada una con una determinación totalmente diferente al fenómeno designado (p. 25).

También menciona que:

La primera vez que se presentó fue en los años 1924-1926, como representación *de la acción* en el estudio de Piaget sobre *la representación del mundo en el niño* relativo a las *acciones físicas* y las explicaciones de los niños

pequeños sobre los fenómenos naturales y físicos. El método empleado para el estudio de las representaciones mentales fue esencialmente la entrevista, en las que lo que puede parecer un error es considerado como una visión distinta de las cosas o de otra lógica. En *El nacimiento de la inteligencia en el niño* (1937), Piaget recurre a la noción de representación como “evocación de los objetos ausentes” para caracterizar la novedad del último de los estadios de la inteligencia sensomotriz (pp. 305-306).

La segunda vez, a partir de 1955-1960, como representación **psicológica** de **objetos** **psicológicos** con las teorías que privilegian el **aspecto** **psicológico**, por un sistema, de las representaciones recibidas de modo tal que produzcan una respuesta adaptada.

Y la tercera vez, más o menos desde 1985, como una representación **psicológica** **psicológica** en el marco de los trabajos sobre la adquisición de los conocimientos matemáticos y sobre los considerables problemas que su aprendizaje suscita. La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **representaciones** **psicológicas** diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un “cambio de forma”. Trazar la curva correspondiente a una ecuación de segundo grado, o pasar del enunciado de una relación a la escritura literal de esta relación, habrá de considerarse como el cambio de la forma en que un conocimiento está representado.

En varios artículos y reportes de investigación como los de M. Maschietto (2007), M. G. Bartolini (2003), V. Hoyos (2006), P. Verillon, P. Rabardel (1995) y A. Mariotti (2002), entre otros, existe información suficiente que avala la hipótesis de que se mejora el aprendizaje de conceptos matemáticos a través de acciones sobre las representaciones, de hecho se menciona que las acciones sobre objetos concretos, por ejemplo instrumentos matemáticos, (que pueden ser las representaciones) conducen al estudiante a tener un mejor significado del concepto en juego. Piaget menciona de manera más específica, “que el entendimiento conceptual de un fenómeno matemático pasa a través de concepciones de acciones, procesos y objetos y estos entendimientos están coordinados en esquemas (1976, pp. 95-103)”, así mismo propone “que el desarrollo de estos mecanismos ocurre de manera espontánea como resultado de la maduración pero sólo en presencia de experiencias apropiadas (1976, p. 98)” sugiere entonces que “el papel de la pedagogía es el de cooperar con los mecanismos de aprendizaje y el de ayudar al estudiante a desarrollar, darse cuenta de ellos e invocarlos de manera consiente (1970, p. 71)”.

De esta manera Piaget (1950) sugiere que la acción se realice sobre objetos físicos o materiales concretos. En ese sentido, Dubinsky (1998) menciona “que en nivel universitario es difícil encontrar sustitutos apropiados de los objetos físicos (p. 5)”, para que éstos puedan ser manipulados y tener acción sobre ellos; una posibilidad es la construcción de instrumentos matemáticos con un objetivo didáctico.

Relacionando la idea de representación y de manipulación de objetos físicos para la apropiación de conceptos, consideramos que el uso de artefactos e instrumentos mecánicos permite la manipulación física y la manipulación de las representaciones.

Hoyos y Falconi (2005) en el prólogo de su libro *“Instrumentos y Matemáticas”* mencionan:

La fabricación misma de una máquina o juego matemático es un proceso que involucra diversas etapas de conceptualización, para lo que se requiere: 1) Un alto nivel de comprensión de las propiedades matemáticas que definen a la máquina o artefacto en términos abstractos; 2) La capacidad de definir a partir de esta conceptualización matemática (abstracta), un proceso de construcción de la máquina; 3) Finalmente se culmina con la transformación de esa definición "algorítmica" en un objeto manipulable y funcional (p. 12).

Ahora bien, la propuesta que se hace en este trabajo es en el sentido de lo que Piaget (1950) llamó la reversibilidad, es decir, ya construida la máquina o artefacto investigar las posibilidades que tienen los estudiantes de que puedan explicar por qué funciona el artefacto.

La Tesis de este trabajo consiste precisamente en probar, que es posible a través de la manipulación de estos artefactos y de trabajar con las representaciones gráficas generadas por la máquina, entender el funcionamiento de ésta y por ende iniciar la comprensión conceptual de los objetos matemáticos involucrados.

Para el desarrollo de esta investigación se construyeron dos artefactos matemáticos para el trazado de elipses (elipsógrafos) y otro para trazar parábolas (parabológrafo). Antes de continuar mencionaremos la diferencia entre artefacto e instrumento: conforme a Rabardel (1995), el artefacto es el material u objeto simbólico, mientras que el instrumento es definido como una entidad mixta formada tanto por el artefacto así como sus esquemas de utilización.

Una máquina matemática (relacionadas con el campo de la geometría) tiene un objetivo básico, que no depende del uso práctico (si procede) del artefacto. Su objetivo es forzar a un punto, un segmento de línea o una figura plana (con el apoyo de un soporte

material adecuado que las haga visibles y palpables) para mover o transformar de acuerdo con una ley matemática que ha sido determinada por el diseñador.

En 2003, el documento de la Comisión de Enseñanza Italiana (UMI-CIIM), creado dentro de la Sociedad Matemática Italiana señala lo siguiente:

Es importante recordar que estas herramientas son el resultado de una evolución: han sido producidas con objetivos específicos, como tal, encarnan ideas. Esto tiene importantes implicaciones didácticas: antes que nada, los significados no residen solo en las herramientas y no pueden emerger puramente de la interacción de los alumnos con ellas. Los significados tienen sus raíces en los objetivos para los cuales son usados, y en las estrategias relacionadas con el uso de esas herramientas que son elaboradas en el curso de las actividades: por otra parte, la apropiación de los significados requiere una reflexión individual sobre los objetos de estudio y las actividades propuestas.

Cuando el estudiante manipula los elipsógrafos, éste realizará una representación gráfica; la comprensión de las relaciones existentes entre representación mental (al manipular el objeto) y representación gráfica (externa) resultado de esta manipulación juega un papel en la cognición. Una clasificación de estos diferentes tipos de representación puede ser la siguiente (Duval et al, 1995):

1. La oposición $\text{conciencia} / \text{no conciencia}$ es la oposición entre lo que aparece a un sujeto y él observa, de una parte, y lo que a él se le escapa y no puede observar, de otra. En este sentido la conciencia se caracteriza por la mirada de “alguna cosa” que toma *ipso facto* el status de objeto para el sujeto que efectúa esta mirada. El pasaje de la no conciencia a la conciencia, corresponde a un proceso de objetivación para el sujeto que toma conciencia. La objetivación corresponde al

descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospecha, incluso si otros se lo hubieran explicado. Las representaciones conscientes son aquellas que presentan este carácter intencional y que cumplen una función de objetivación. La significación es la condición necesaria de la objetivación para el sujeto, es decir, de la posibilidad de tomar conciencia.

2. La oposición **representación externa / representación interna** es la oposición entre lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, al contrario, no lo es. Esta oposición permite dividir el dominio de las representaciones mediante dos precisiones suplementarias. La primera, es que todas las representaciones llamadas “externas” son representaciones producidas como tales por un sujeto o por un sistema: no son síntomas, como por ejemplo la expresión de las emociones que se percibe en la cara. La segunda, es que la producción de una representación externa sólo puede efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico. Las representaciones externas son, por naturaleza representaciones semióticas. Estas representaciones están por tanto estrechamente ligadas a un estado de desarrollo y de dominio de un sistema semiótico. Son accesibles a todos los sujetos que han aprendido el sistema semiótico utilizado. Las representaciones internas son las representaciones que pertenecen a un sujeto y que no son comunicadas a otro por la producción de una representación externa.

En este sentido, consideramos que la posibilidad de manipular los elipsógrafos, contribuye a que el estudiante interiorice la relación existente entre la representación semiótica resultante (gráfica) con la representación interna o mental, que el mismo estudiante tiene sobre el funcionamiento del artefacto.

Según Verillon y Rabardel (1995, p. 77), como resultado de una creciente atención a los efectos de la tecnología y del cambio tecnológico en la forma en que vivimos,

aprendemos y trabajamos, actualmente se ha vuelto a poner a discusión la cuestión referente a las relaciones entre cognición y la naturaleza de los artefactos a partir de los cuales ésta se origina en situaciones cotidianas, del trabajo y escolares. En sus indagaciones, estos autores han hecho énfasis en las funciones específicas de los artefactos en el desarrollo cognitivo.

Una de las aportaciones de estos autores, es la de hacer notar que deben existir diferencias sustanciales en los productos del conocimiento que se derivan de experiencias de manipulación que son muy distintas, como son aquéllas en donde un sujeto manipula (Piaget y Inhelder, 1958) únicamente barras de metal, de diferentes tamaños y grosores, o transvasa líquidos entre recipientes de diferente forma y tamaño, o bien como las que involucran la exploración o el uso de tecnologías, como la activación de un robot (Verillon y Rabardel, 1995).

Para Verillon y Rabardel (1995, p. 77), es una cuestión primordial en el campo de la educación tecnológica y vocacional, indagar cuáles son los elementos particulares específicos y funcionales que aportan los artefactos a los procesos de asimilación o acomodación de la génesis del conocimiento. De acuerdo con estos autores, cabe preguntarse acerca del efecto que puede inducir, en las matemáticas que el estudiante aprende, el uso de artefactos técnicos como la computadora y los pantógrafos. En particular, interesaría dar cuenta de patrones de uso o de esquemas de utilización de los instrumentos, resaltando la utilización del artefacto para incorporarlo a la resolución de un problema. El interés de estos autores (1995, p. 84) es el desarrollo de perspectivas educativas renovadas que se basen en las transformaciones, en las cuales pueden influir los artefactos tecnológicos, al modificar las acciones o la actividad en general del sujeto que aprende.

La actividad será presentada para realizarse en pequeños grupos de trabajo, por medio de actividades que contienen preguntas que los alumnos responderán para llegar a la definición de Elipse. Lo siguiente se ha tomado de un documento del 2003 de la U.M.I.

La construcción de significado con una metodología basada en uso de artefactos matemáticos está estrictamente relacionada con la interacción social de los estudiantes durante una actividad, llevada a cabo en el trabajo de pequeños grupos. Durante la actividad del grupo, los estudiantes pueden compartir el proceso de conceptualización, a través de una interacción colaborativa o cooperativa. Después de la actividad de grupo, es la esperanza de que una discusión en clase, dirigida por el profesor, permita a los estudiantes compartir sus resultados con los demás grupos. Una discusión matemática consiste en una interacción social dirigida a la construcción de un conocimiento común en el salón de clase, compartida por todos los estudiantes (p. 34).

CAPÍTULO I

METODOLOGÍA

1.1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación estuvo basada de acuerdo con el plan de trabajo que a continuación se muestra:

- Documentación.
- Análisis y selección de artefactos.
- Descripción de los artefactos.
- Demostración matemática del funcionamiento de los artefactos.
- Construcción física de los artefactos.
- Realización de actividades didácticas (hojas de trabajo).
- Experimentación piloto y formal mediante el uso de artefactos y hojas de trabajo con estudiantes de bachillerato.
- Organización y análisis de la información (hojas de trabajo, videgrabaciones, etc.).

A continuación se detallará cada aspecto de manera individual explicando lo sucedido en cada punto.

1.2. DOCUMENTACIÓN HISTÓRICA

Se realizó una documentación histórica de algunos artefactos empleados para dibujar curvas y secciones cónicas. Con lo anterior se observó, que dichos artefactos son realmente antiguos, los primeros fueron creados por los griegos hace más de dos mil años y han sufrido varias transformaciones convirtiéndose cada día en artefactos más

complejos y elaborados. Con el paso del tiempo dichos artefactos ganaron popularidad y tomaron fuerza con el nacimiento de la Geometría Analítica, aproximadamente en el año de 1657.

Por otro lado, se revisó la obra de Iván Ivanovich Artobolevski “*Des mécanismes dans la technique moderne*” (Artobolevski, 1975), la cual es un compendio de varios artefactos que trazan diferentes cónicas, además de información sobre artefactos que se habían construido virtualmente, con la finalidad de simplificar su análisis. Cabe mencionar que cada artefacto tiene una breve nota acerca de su construcción (bosquejos de su funcionamiento y algunas restricciones para ello).

Figura 1. Artefactos virtuales y concretos.

Se seleccionaron los artefactos a partir de los que ya estaban construidos virtualmente, esto con la finalidad de poder contrastar los resultados obtenidos usando artefactos concretos y virtuales.

Los artefactos virtuales están construidos con el software Geogebra, con el cual se trabajó para aprender a usar algunas de sus herramientas. La siguiente fase de la investigación, fue manipular los distintos artefactos para entender su funcionamiento a través de esta interface. En esta etapa se realizó una comparación entre el artefacto virtual y el concreto.

Una vez que se analizaron los artefactos virtuales, se prosiguió a seleccionar cuáles de ellos eran factibles para poderse construir, puesto que había artefactos interesantes, pero físicamente complicados de realizar. En el análisis de dichos artefactos se observó que algunos de ellos virtualmente rebasan a la realidad, esto es, al atravesar una barra a otra en determinada parte del movimiento, lo cual físicamente es imposible.

De esta manera, los dos primeros artefactos seleccionados fueron el Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards y el Parabológrafo de palancas y colisa de inwards, puesto que eran muy parecidos. Posteriormente se optó por incluir el Antiparalelogramo articulado de van Schooten. Todos estos artefactos estaban contruidos por barras articuladas, es decir, que tienen movimiento en los extremos. Algunas de esas barras están perforadas en el centro para que por allí pueda correr la punta del instrumento que se pudiera usar para dibujar la elipse (un lápiz, lapicero, pincelín) por medio de una corredera. Otro comentario, es que los dos elipsógrafos necesitan dos correderas mientras que el parabológrafo necesita tres. Por otro lado, los artefactos fueron seleccionados, porque se pensó que podrían tener medidas similares y armarse con las mismas barras, de esta manera se optimizaría el material.

Una vez realizada la selección de dichos artefactos se procedió a manipularlos virtualmente y en tratar de comprender la descripción de los artefactos en las hojas impresas. Al tener ideas más claras sobre eso lo siguiente fue tratar de ajustar las posibles medidas del artefacto. El primero con el que se trabajó fue con el Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards. Se trató de que el artefacto tuviera medidas que se ajustaran a las especificaciones de las impresiones pero que también tuvieran un tamaño adecuado y que no fueran muy grandes.

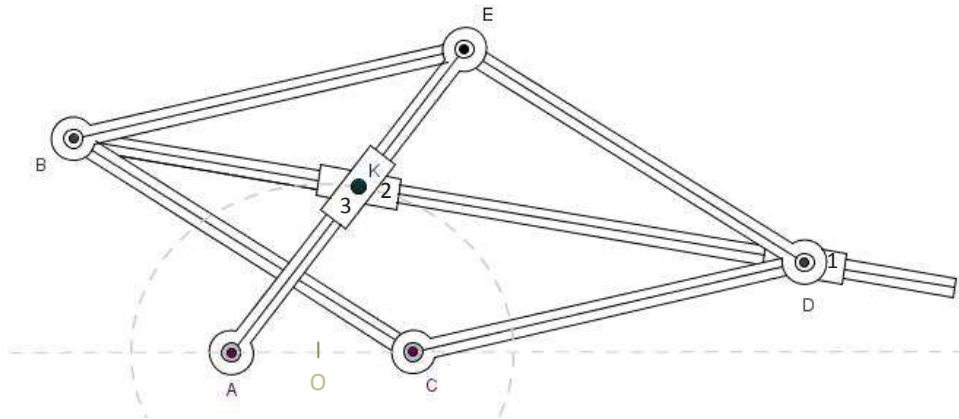


Figura 3.1 Elipsógrafa de palancas y colisa de inwards.

Las longitudes de los segmentos del artefacto satisfacen las siguientes condiciones:

$$EB = BC = CD = DE,$$

es decir, la figura EB CD es un rombo. Los puntos A y C se mantienen fijos (focos). El segmento BD es la diagonal del rombo. Los segmentos BE y ED forman pares de rotación con el segmento AE que giran alrededor del punto fijo A y los segmentos BC y CD giran alrededor del punto fijo C. La diagonal BD forma un par de rotación con los segmentos CB y BE. Los segmentos CD y ED se encuentran conectados a la corredera 1, la cual durante el movimiento se desplaza a través del segmento BD provocando con esto que el rombo se estire o se contraiga. La corredera 2 se desplaza sobre el segmento BD y la corredera 3 por el segmento AE. Con la intersección de ambas correderas obtenemos el punto K, que por lo anterior, tiene desplazamiento sobre los segmentos AE y BD. Cuando el segmento AE gira alrededor del punto fijo A, el punto K describe una elipse. El artefacto puede trazar más de la mitad de la elipse en el plano, para completar el trazo es necesario sacar los puntos fijos y cambiar el artefacto de posición.

Existe una condición para que dicho artefacto pueda describir una elipse. La condición es que $\frac{1}{2} AE > AO$ ($AO = OC$) es decir, que la distancia entre los focos sea menor que el segmento AE, de lo contrario el artefacto no trazará nada.

Antiparalelogramo articulado de van Schooten

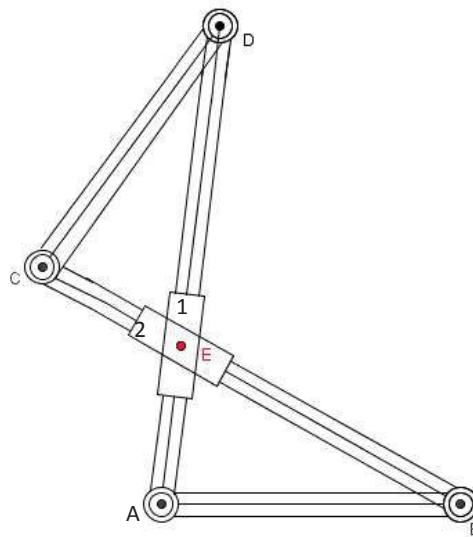


Figura 3.2 Antiparalelogramo articulado de van Schooten.

La base de este artefacto es el Antiparalelogramo ABCD. Cabe mencionarse que:

$$AB = CD \text{ y } AD = BC.$$

Se dice que es Antiparalelogramo, puesto que en el movimiento, el artefacto sigue manteniendo la propiedad de no tener dos pares de lados paralelos.

Los puntos fijos (focos), son los puntos A y B. La corredera 1 se desplaza a través del segmento AD y la corredera 2 por el segmento BC. Con la intersección de la corredera 1 y 2 obtenemos el punto E. Al mover el artefacto, el punto E tiene desplazamiento por los segmentos AD y BC, describiendo durante el movimiento una elipse.

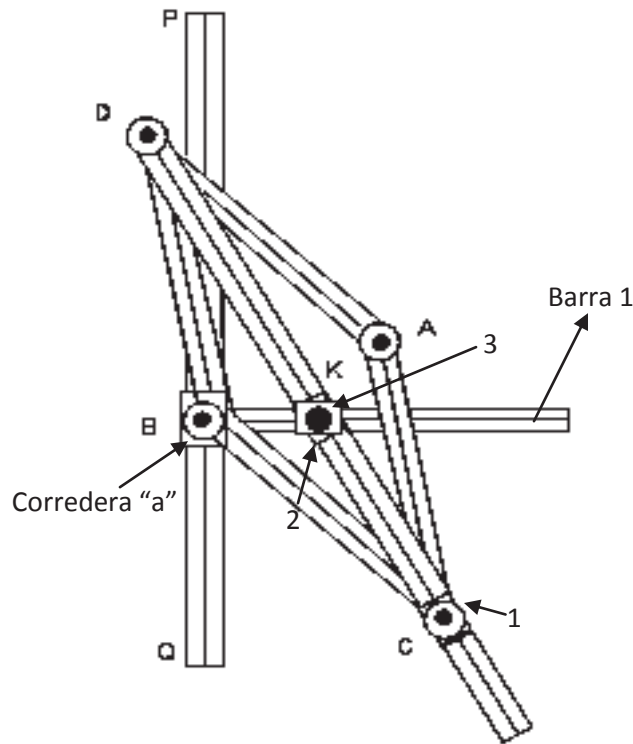


Figura 3.3 Parabológrafo de palancas y colisa de inwards.

Las longitudes de los segmentos del artefacto satisfacen que:

$$AD = DB = BC = CA,$$

es decir, la figura ADBC es un rombo. Los segmentos CA y AD giran alrededor del punto fijo A. Los segmentos AC y BC están conectados a la corredera 1 que se desliza por parte del segmento CD. Los segmentos BD y BC forman pares de rotación con la barra 1 y la corredera "a" que se desliza a lo largo de la guía fija P-Q. La corredera 2 se desliza a través del segmento CD y la corredera 3 por la barra 1. Ambas correderas forman el par de rotación K, a través de la cual pasa el segmento DC, que a su vez es la diagonal del rombo ADBC. Cuando la corredera "a" se desplaza a lo largo de la guía P-Q, el punto K describe una parábola, cuya ecuación es:

$$y^2 = 2px$$

donde p es la distancia desde el punto A hasta el eje de la guía P-Q.

Los triángulos KDE y KDC son congruentes por LAL por tener

- a. $DE = DC$ (por construcción)
- b. KD lado común
- c. $\angle KDE = \angle KDC$ puesto que BD es diagonal

De la congruencia anterior podemos deducir que:

$$KC = KE$$

Observemos que:

$$AE = AK + KE$$

$$AE = AK + KC \quad (\text{por ser } KE \cong KC)$$

Pero AE es constante

$$\rightarrow AK + KC = \text{constante}$$

$\therefore$ Se cumple la condición para que el punto describa una elipse según su definición.

Hasta aquí se ha demostrado que todos los puntos que traza el artefacto se encuentran sobre la misma elipse, a continuación se demostrará que el artefacto puede trazar cualquier punto que se desee sobre la elipse.

Supongamos que el Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards es ideal y puede girar libremente pudiendo de esta manera trazar completamente la elipse.

Durante el movimiento del artefacto, los puntos A y C se mantienen fijos (focos), el Punto E describe una circunferencia con centro en A y radio AE . De igual manera el punto D describe una circunferencia cuyo centro es el punto C y su radio es CD . Por construcción, conocemos que $BE = ED = DC = CB$. Durante el movimiento del artefacto también se describe una circunferencia cuyo centro es E y de radio ED .

Al momento de fijar la posición del punto E, los puntos B y D estarán determinados por las intersecciones de las circunferencias con centros en C, E y de radios CD y ED respectivamente, en cualquier movimiento del artefacto puesto que $BC = CD$.

Ahora bien, se llamará P a un punto arbitrario sobre la elipse y se trazará una recta (R1) que valla del punto A y que pase por el punto P. Dicha recta cortara en P' a la circunferencia descrita por E. Se puede ver que $AP' = AE$ y que el punto K también se encuentra sobre la elipse.

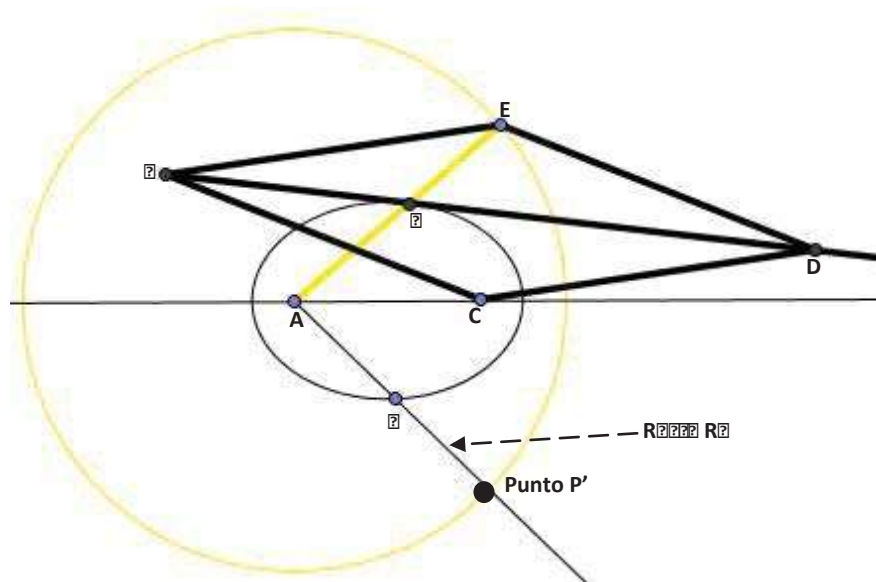


Figura 3.6 Trazo del punto P (mover el artefacto hasta colocar al punto E sobre P').

Para poder trazar el punto P con el artefacto, es necesario moverlo hasta que el punto E se encuentre sobre el punto P', por lo mencionado anteriormente K quedará sobre P.

?

?

?

A continuación se mostrará una imagen del artefacto anteriormente mencionado:

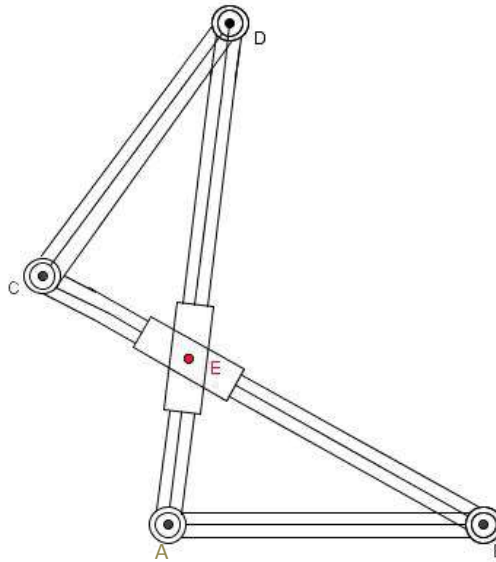


Figura 3.7 Construcción para la demostración del Antiparalelogramo articulado de van Schooten.

Primeramente se demostrará que el punto E está sobre la misma elipse durante el movimiento del artefacto. Se presentarán dos demostraciones de ello, las cuales son en teoría iguales, salvo el último paso.

Por construcción conocemos que:

$$AB = CD$$

$$AD = BC$$

Ahora tracemos los segmentos CA y DB:

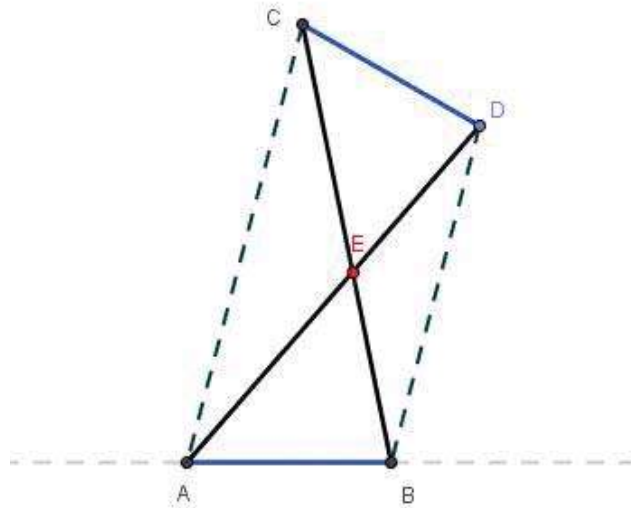


Figura 3.8 Trazo de los segmentos CA y DB.

Notemos que se forma un trapecio, puesto que tiene 4 lados y tiene un par de lados opuestos paralelos, más aún, se trata de un trapecio isósceles, puesto que sus lados no paralelos son iguales ($AB = CD$).

A continuación se presenta la demostración del paralelismo de los segmentos AC y BD en el cuadrilátero ABDC. Ésta se basa en el teorema del ángulo exterior y en el teorema AIP. El primero señala que la medida de un ángulo exterior a un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos a él. Esto es, para el triángulo ABC, el ángulo PCB (figura 3.8) es exterior a $\triangle ABC$, por tanto $\angle PCB = \angle CBA + \angle CAB$.

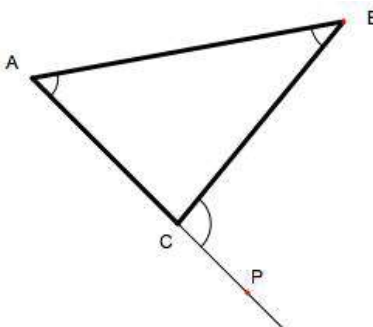


Figura 3.9 Teorema del ángulo exterior

Este resultado se basa a su vez en el hecho de que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180° .

Como $\angle ACB + \angle PCB = 180^\circ$

Entonces $\angle ACB + \angle PCB = \angle ACB + \angle CBA + \angle CAB$

Eliminando tenemos $\angle PCB = \angle CBA + \angle CAB$.

Por otra parte, el teorema AIP señala que si en un sistema de líneas transversales los ángulos alterno internos son congruentes, entonces dos de las rectas que conforman el sistema son paralelas. Esto es, si $L1$ y $L2$ son dos rectas cualesquiera y $L3$ es una transversal a ellas, y si la pareja de ángulos α y β son congruentes, entonces $L1 \parallel L2$ (figura 3.9).

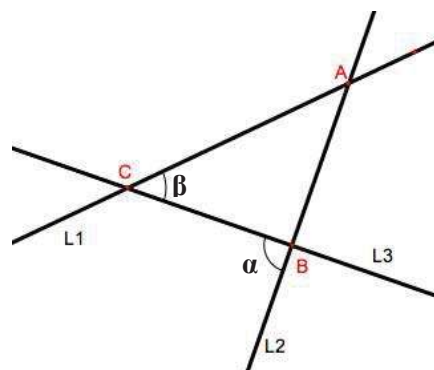


Figura 3.10 Teorema AIP

La demostración de este teorema se puede realizar por reducción al absurdo; esto es: queremos demostrar que $L1 \parallel L2$, entonces supongamos que $L1$ y $L2$ no son paralelas.

Por tanto, $L1$ intersecta a $L2$ en un punto (A). Entonces, el ángulo α es exterior al triángulo ABC , por lo que $\beta > \alpha$, lo que es imposible ya que contradice la hipótesis inicial ($\alpha = \beta$). Luego entonces $L1 \parallel L2$.

Regresando al resultado que se quiere demostrar, primeramente notemos que para los triángulos ABD y DCA (figura 3.11) se tiene que:

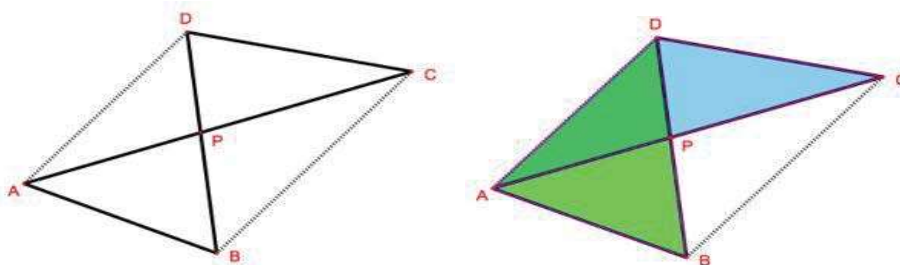


Figura 3.11 Comparación de los triángulos ABD y DCA

Por construcción:

$$DC = AB$$

Así mismo, por construcción:

$$BD = CA$$

Y,

$$AD = DA$$

Por tanto, por el criterio de congruencia de triángulos LLL, concluimos que $\triangle ABD \cong \triangle DCA$. Como resultado de esta congruencia tenemos que:

$$\angle ADB \cong \angle DAC (\equiv \alpha)$$

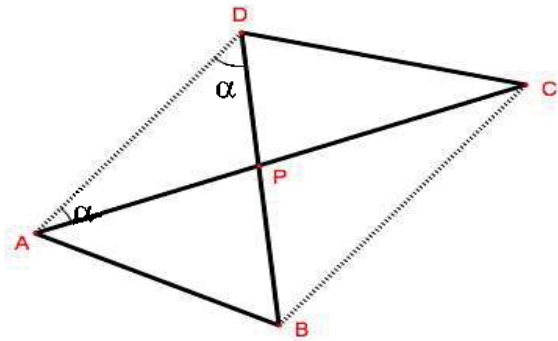


Figura 3.12 Los ángulos ADB y DAC son congruentes.

De manera semejante, observemos que en los triángulos ABC y DCB, se tiene:

Por construcción: $AB = DC$

También por construcción: $AC = DB$

Y, $BC = CB$

Y nuevamente utilizando el criterio de congruencia LLL, concluimos que

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB.$$

De esta congruencia, obtenemos:

$$\angle ACB \cong \angle DBC (\equiv \beta)$$

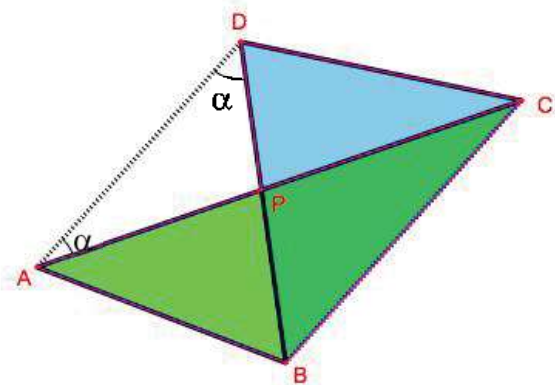


Figura 3.13 Los ángulos ACB y DBC son congruentes.

□ APB es exterior a $\triangle APD$ entonces, por el teorema del ángulo exterior,

$$\square APB = 2\alpha \quad (1)$$

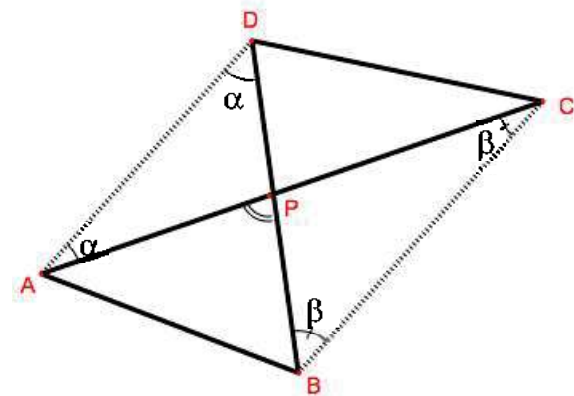


Figura 3.14 Comparación entre los ángulos APB y APD.

□ APB también es exterior a $\triangle BPC$ entonces, por el teorema del ángulo exterior:

$$\square APB = 2\beta \quad (2)$$

De (1) y (2) concluimos que $\alpha = \beta$. Y, utilizando el teorema AIP, concluimos que $BC \parallel AD$.
L.q.d.

Una vez concluido lo anterior regresamos a la demostración de que el artefacto traza puntos sobre la misma elipse. Tracemos el eje de simetría al cual llamaremos t:

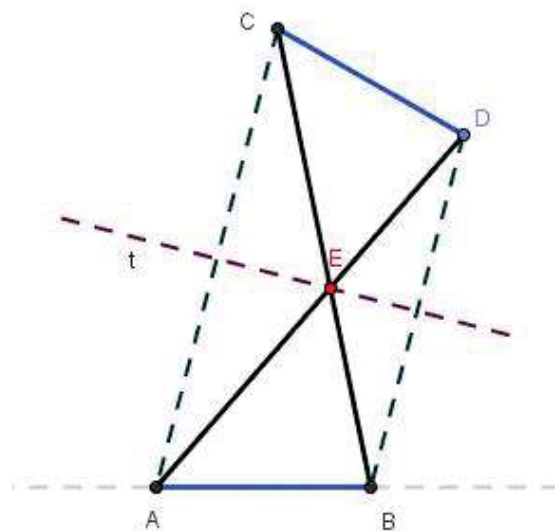


Figura 3.15 Trazo del eje de simetría t.

Sea M el punto de la intersección de t con CA y N el punto de la intersección entre t y BD:

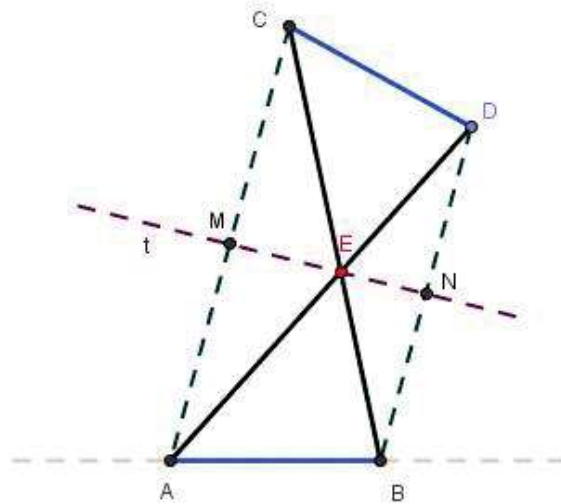


Figura 3.16 Puntos de intersección M y N.

Nótese que el trazo del eje de simetría tiene algunas implicaciones interesantes en nuestra figura como son las siguientes:

- t es perpendicular a BD y AC y los corta en su punto medio (mediatriz).
- t bisecta a los ángulos $\angle DEB$ y $\angle CEA$.

Ahora tenemos todo lo necesario para afirmar que $\triangle BEN$ es congruente con $\triangle DEN$ por el criterio LAL:

- Tienen a EN como lado común.
- $\angle BNE = \angle DNE$ (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).
- $BN = ND$ (puesto que t bisecta a BD por ser eje de simetría).

$$\therefore \triangle BEN \cong \triangle DEN$$

También $\triangle MEA$ es congruente con $\triangle MEC$:

- EM lado común.
- $\angle CME = \angle AME$ (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).
- $CM = MA$ (puesto que t bisecta a AC por ser eje de simetría).

$$\therefore \triangle MEA \cong \triangle MEC$$

De las dos congruencias anteriores obtenemos que el $\triangle AEB$ es congruente con $\triangle CED$ por el criterio LLL (ya que de las congruencias anteriores deducimos que $EB \cong ED$ y $EA \cong EC$ además de que por construcción conocíamos que $AB \cong CD$).

De allí vemos que:

$$AE + EB = AE + ED = AD = \text{cte.}$$

$\therefore$ Se cumple la condición para que el punto E describa una elipse según su definición.

De manera más rigurosa, puede demostrarse que dicho artefacto cumple la definición de elipse.

La demostración es análoga a la anterior hasta los siguientes resultados:

$$\triangle BEN \cong \triangle DEN$$

$$\triangle MEA \cong \triangle MEC$$

Ahora observemos la siguiente figura:

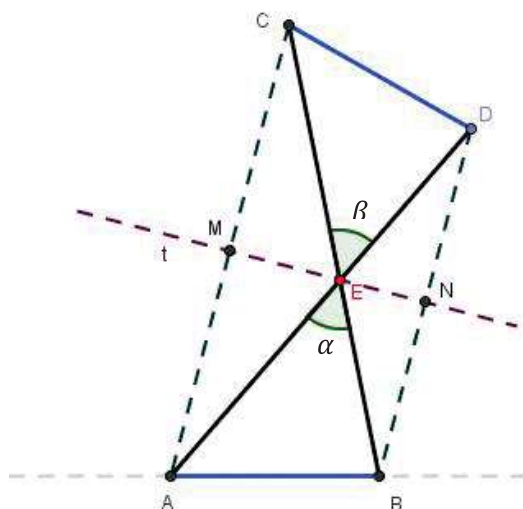


Figura 3.17 Obsérvese que los ángulos α y β son opuestos por el vértice.

De allí nos damos cuenta que $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Entonces $\triangle AEB \cong \triangle CED$ por el criterio LAL:

- El lado $BE = DE$ (resultado de la primera congruencia)

- $\angle \alpha = \angle \beta$ (por ser ángulos opuestos por el vértice)
- El lado $AE = CE$ (resultado de la segunda congruencia)

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CED$$

Y de allí podemos observar que $AE + EB = AE + ED = AD = \text{cte.}$

$\therefore$ Se cumple la condición para que el punto E describa una elipse según su definición.

A continuación se demostrará que el artefacto puede trazar cualquier punto que se desee sobre la elipse.

Supongamos que el Antiparalelogramo articulado de van Schooten es ideal, siendo sus barras lo suficientemente angostas, permitiendo con ello trazar completamente la elipse.

Considerando lo anterior, movemos el artefacto a partir del punto D . Tomemos en cuenta que los puntos A y B se mantienen fijos (focos), el punto E (describe la elipse) es la intersección entre los segmentos AC y CD .

Durante el movimiento, el punto D describe una circunferencia de centro en A y radio AD ($C1$), y el punto C otra con centro en B y radio BC ($C2$). Por construcción $AD = BC$. Por otra parte, el punto D durante el movimiento actúa como centro de la circunferencia de radio DC ($C3$). Al mover el artefacto por el punto D y dejarlo fijo en cualquier posición, el punto C quedará situado sobre la intersección de $C2$ con $C3$.

Supongamos que se quiere trazar un punto arbitrario P sobre la elipse. Tracemos una recta ($R1$) que vaya del punto A y que pase por el punto P . Dicha recta cortara en P' a la circunferencia descrita por el punto D y que tiene centro en A . Notemos que $AP' = AD$ por ser ambos radios de la circunferencia con centro en A y que el punto E también se encuentra sobre la elipse.

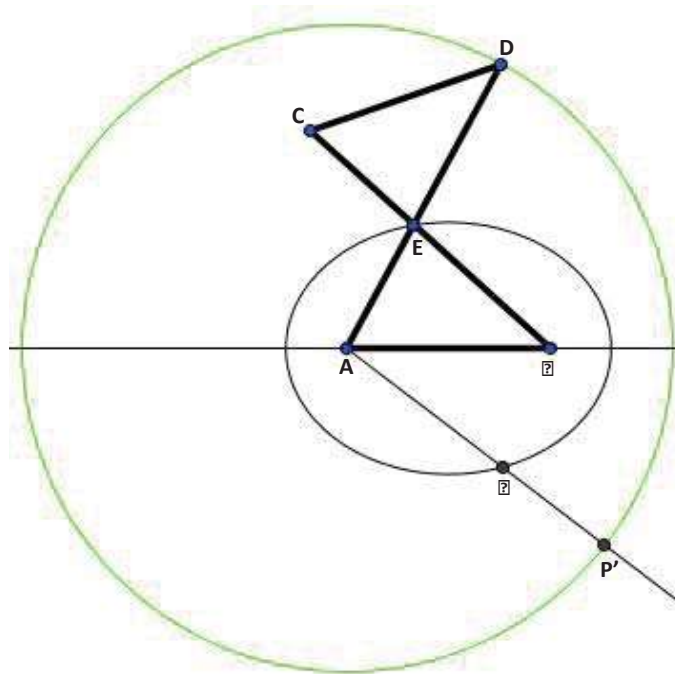


Figura 3.18 Trazo del punto P (mover el artefacto hasta colocar al punto E sobre P').

Para poder trazar dicho punto con el artefacto, es necesario moverlo hasta que el punto D se encuentre sobre el punto P', por lo mencionado anteriormente E quedará sobre P.

3.5.2.1 AS ESPEA

En el caso en el cual los segmento AB y CD sean paralelos se formará un rectángulo o bien un cuadrado (dependiendo de la longitud de los segmentos AD y BC).

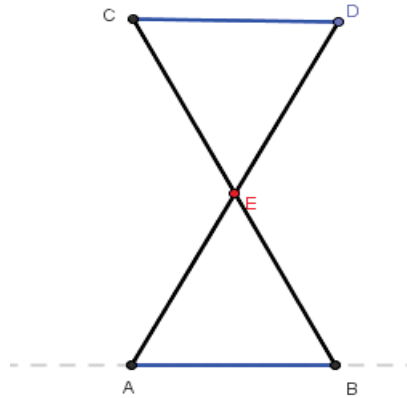


Figura 3.19 Caso en el que el Antiparalelogramo articulado forma un paralelogramo.

Tracemos los segmentos AC y BD así como sus ejes de simetría de la figura a los cuales llamaremos s y t (los segmentos AD y CD coinciden con sus diagonales). Llamemos a M a la intersección del segmento AC con t y N a la intersección del segmento BD con t . Llamemos P a la intersección del segmento CD con s y Q a la intersección del segmento AB con s . Observemos la siguiente figura:

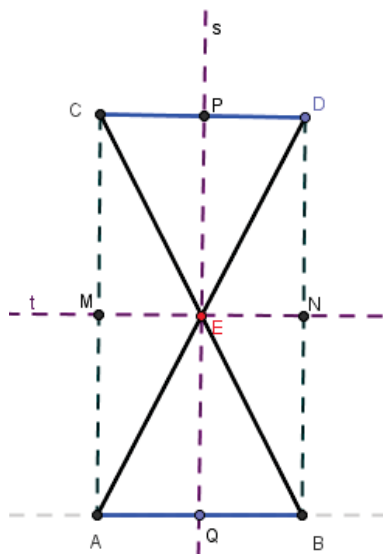


Figura 3.20 Diversos trazos y puntos de intersección necesarios para la demostración del caso especial.

De la figura podemos obtener las siguientes características:

- $AC = BD$ y $AB = CD$

- E es la intersección de los ejes de simetría s y t, por lo que es punto medio.
- El eje de simetría t bisecta en dos a los segmentos AC y BD. De allí $AM = CD = BN = DN = PE = QE$.
- El eje de simetría s bisecta en dos a los segmentos AB y CD. De allí $AQ = QB = CP = PD = EM = EN$.
- También tenemos que $AE = EC = BE = DE$.
- Los ángulos AEB y CED son iguales por ser opuestos por el vértice. El eje de simetría s los bisecta formando ángulos iguales ($\angle AEQ = \angle BEQ = \angle CEP = \angle DEP$).
- Los ángulos AEC y BED son iguales por ser opuestos por el vértice. El eje de simetría t los bisecta formando ángulos iguales ($\angle AEM = \angle CEM = \angle BEN = \angle DEN$).

De lo anterior claramente podemos observar que todos los triángulos formados son congruentes entre sí. De allí podemos observar que:

$$AE + EB = AE + ED = AD = \text{cte.}$$

$\therefore$ Se cumple la condición para que el punto E describa una elipse según su definición.

?? C????????? ?????? ?? ?? ???? ??????

Desde el inicio de la construcción se trató de adecuar las medidas para cada uno de los artefactos con el fin de que no fueran muy grandes y que funcionaran adecuadamente de acuerdo a sus propiedades. Además, se seleccionaron artefactos cuya longitud de sus barras fueran iguales, con la finalidad de poder armar los distintos artefactos sin construir demasiadas de ellas. En esta etapa se realizaron varios bosquejos utilizando diferentes materiales.

El primer bosquejo realizado fue el del elipsógrafo de palancas y colisa de inwards, puesto que éste es la base para construir el parabológrafo de palancas y colisa de inwards

al cual solo se le agrega una barra más, si este quedaba bien se garantizaba que el parabológrafo también. De esta forma, fue construido con barras de cartón. Las articulaciones fueron simuladas con el tintero de un lapicero, lo que permitía torsión entre las barras; no contaba con correderas por lo tanto fue un prototipo simple.

Después de la construcción de éste, se decidió hacer un prototipo elaborado. Se volvió a construir el mismo artefacto pero con un material más rígido como el papel ilustración (usado para hacer maquetas). Además se trató de pensar en algo que funcionara como articulación entre las barras para que estas pudieran tener torsión. Primero se consideró usar remaches, pero se decidió por postes, los cuales son más rígidos, de mayor calidad y que difícilmente podrían desatorarse como lo hacen los remaches, puesto que los postes se atornillan y existen de diferentes tamaños.



Figura 3.21 a) Remaches. b) Postes de distintos tamaños.

Las barras hechas en papel ilustración fueron cortadas con un exacto y los orificios por los que se unirían mediante postes fueron hechos con una perforadora. Fueron cortadas seis barras con las especificaciones mostradas en la figura 3.22.

	Descripción	Cantidad	Medidas (cm)
	Barra rígida	4	10 x 1.5 x 0.15
	Barra perforada larga	1	20 x 1.5 x 0.15
	Barra perforada corta	1	12 x 1.5 x 0.15
	Corredera	3	2 x 1.9 x 0.5

Figura 3.22 Barras y correderas de papel ilustración y sus especificaciones.

El verdadero reto fue diseñar y construir las correderas. La opción fue hacer pequeños cubos que pudieran meterse en las barras perforadas (es decir, cubos sin dos de sus caras) y que tuvieran un orificio en la parte central de la cara superior y posterior para poder introducir por allí el lápiz para trazar la elipse. Los orificios de las dos caras por donde pasaría el lápiz fueron hechos con una perforadora de hojas. Primero se obtuvieron las medidas pertinentes y se cortaron las caras, perforando las que se usarían en la parte superior e inferior y luego uniéndolas todas con un pegamento especial.



Figura 3.23 Correderas hechas de papel ilustración.

Una vez todo listo, lo siguiente fue unir las barras con los postes y colocar las correderas. Los postes quedaban un poco flojos en los orificios hechos para unir las barras, pero se les enrolló cinta adhesiva para que llenaran mejor el orificio. El modelo final se muestra a continuación:

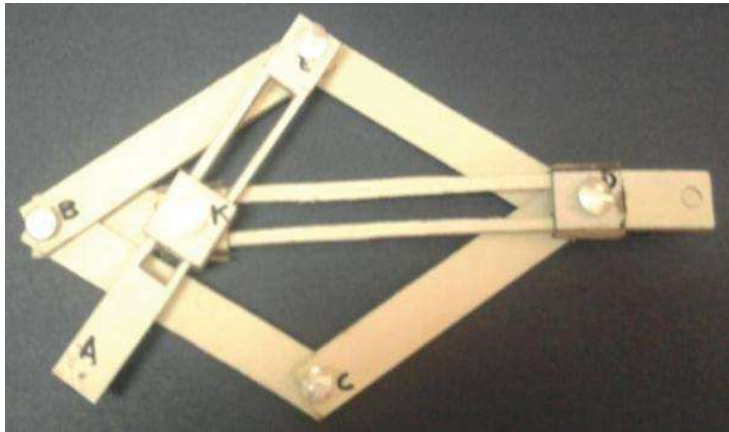
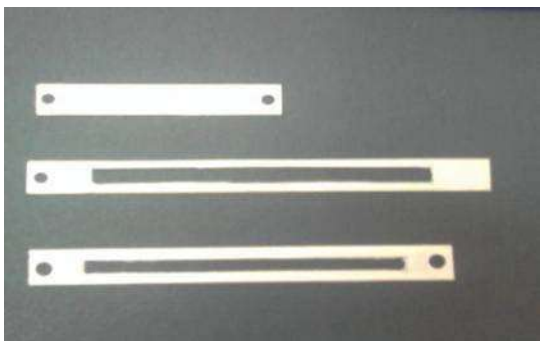


Figura 3.24 Bosquejo del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards construido en papel ilustración.

La siguiente construcción tuvo cambios en la longitud de algunas barras, así como el material en que se construyó, el cual fue tireno (plástico); es más delgado que el papel ilustración, pero a su vez, más rígido y resistente para que las barras tuvieran menos deformación que las construidas en papel ilustración y su manejo se facilitara.



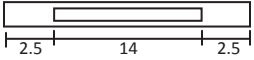
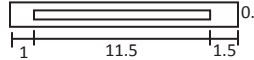
Diseño de la barra	Cantidad	Medidas y detalles
Barra rígida	4	10 x 1.5 x 0.9
Barra perforada larga (1)	1	19 x 1.5 x 0.9 
Barra perforada corta (2)	1	14 x 1.5 x 0.9 
Corredera	3	2 x 1.9 x 0.4

Figura 3.25 Barras de tireno y sus especificaciones.

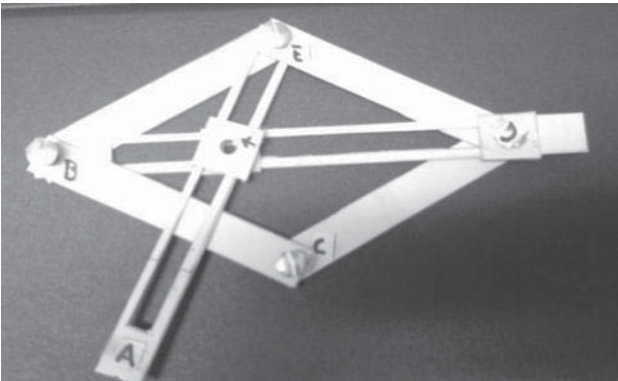
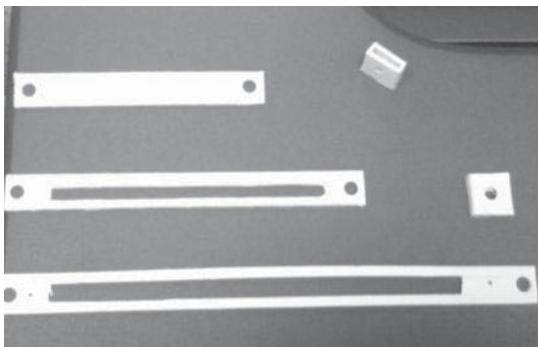


Figura 3.26 Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards
construido en tireno.

Se realizó otro prototipo en tireno de mayor calibre. Fue una aproximación más cercana a lo que se pretendía llevar a las aulas. Este material fue difícil de trabajar debido a su grosor por lo que las barras fueron cortadas usando una navaja especial para acrílicos. En este prototipo se decidió aumentar la longitud de las barras.



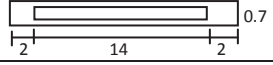
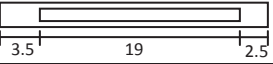
Diseño de la barra	Cantidad	Medidas y detalles
Barra rígida	4	12 x 1.5 x 0.15
Barra perforada corta	1	17 x 1.5 x 0.15 
Barra perforada larga	1	25 x 1.5 x 0.15 
Corredera	3	2 x 1.9 x 0.6

Figura 3.27 Barras y correderas de tireno grueso y sus especificaciones.

Hasta el momento se trataba del mejor prototipo que se había desarrollado. Cabe destacarse que por las características de este material, las barras se deformaban muy poco en el movimiento, de esta manera las elipses se trazaban mejor

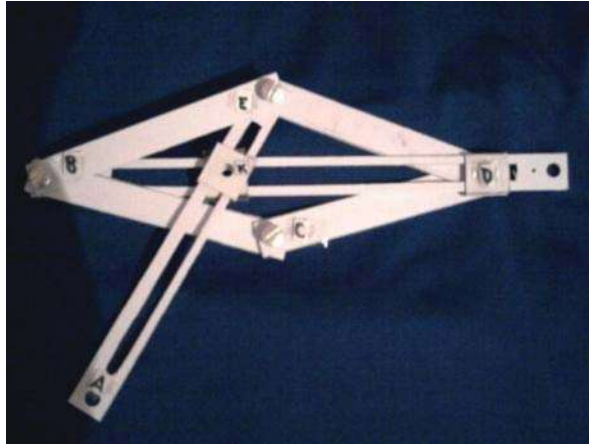
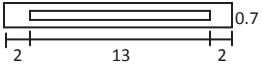


Figura 3.28 Prototipo del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards
hecho en tireno grueso.

Con la experiencia de haber trabajado con diversos materiales y conociendo los resultados, el siguiente artefacto construido fue el Antiparalelogramo articulado de van Schooten con el tireno de mayor calibre.

Diseño de la barra	Cantidad	Medidas de la barra
Barra rígida	2	10 x 1.5 x 0.15
Barra perforada	2	17 x 1.5 x 0.15 
Corredera	2	2 x 1.9 x 0.6

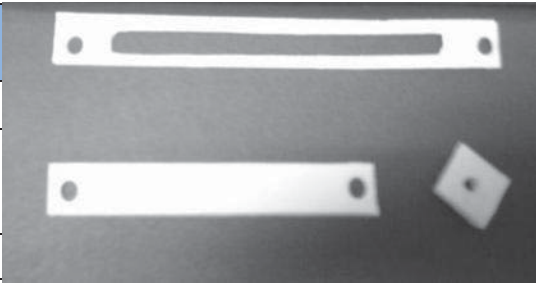
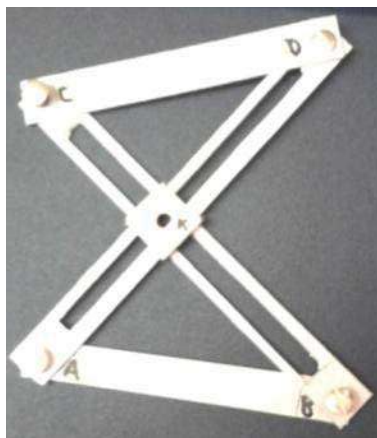


Figura 3.29 Barras y correderas en tireno grueso necesarias para armar el Antiparalelogramo articulado de van Schooten.

Se decidió que las barras rígidas de este artefacto fueran de la misma longitud y perforaciones que las del elipsógrafo de palancas y colisa de inwards. De esta manera se pudieron usar las mismas barras en ambos artefactos, con la seguridad de que ambos funcionarían adecuadamente. La siguiente figura muestra el Antiparalelogramo construido en tireno.



3.30 Antiparalelogramo articulado de van Schooten en tireno grueso.

El siguiente paso fue decidir el material final que se usaría para realizar los elipsógrafos, que serían los que se aplicarían con un grupo de bachillerato. Se optó por el metal o bien la madera. Al contar con dos prototipos de calidad, podíamos usarlos para llevarlos a lugares especializados donde realizaran la construcción con dichos materiales. Fueron llevados a diferentes lugares, como tornos y herrerías, así como a la facultad de Tecnología de la Madera de la UMSNH; donde no pudieron construir los artefactos.

Después se decidió buscar a un herrero artesanal, proporcionándole el Antiparalelogramo articulado de van Schooten así como sus piezas individuales (sin unirlos con los postes), se le pidió que él sugiriera el material más adecuado para construirlo (aluminio, latón, etc.). Al cabo de unos días el herrero tenía el artefacto, el cual era diferente al que se le había proporcionado, ya que el ancho de las barras no correspondía a las del prototipo, porque al perforar las barras de aluminio se doblaban o se arrugaban. También mencionó que el bronce podía ser mejor material pero más caro, al final el herrero trabajó con solera, las correderas las realizó con mucho ingenio puesto que dobló una laminilla de metal alrededor de las barras por donde debería de deslizarse y las perforó en el centro para que por allí se pudiera introducir el lápiz que trazaría la elipse. En la figura 3.30 se pueden observar las medidas de las barras y en la figura 3.31 se muestra el Antiparalelogramo en solera.

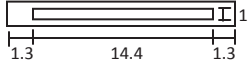
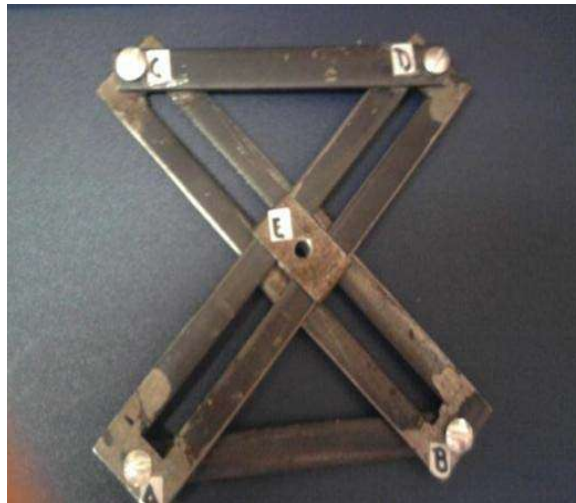
	Descripción del artefacto	Cantidad	Medidas (mm) y especificaciones
	Barra rígida	2	12 x 1.3 x 0.23
	Barra perforada	2	17 X 3 X 0.23 
	Corredera	2	3.4 X 1.75 X 0.5

Figura 3.31 Barras de metal y sus especificaciones.

El artefacto era muy tosco, pesado y difícilmente manejable. De esta manera se decidió desechar la idea de construir los artefactos en metal. La siguiente opción era intentar construirlos en acrílico.



3.32 Antiparalelogramo articulado de van Schooten construido en metal.

Se encontró un lugar donde de inmediato aceptaron la propuesta de construir las barras de los artefactos. Se decidió que se hicieran en acrílico de dos milímetros de grosor, puesto que entre menos grosor tuvieran las barras, con mayor soltura podía manejarse el artefacto. El personal del lugar adaptó las medidas de las deslizaderas.

Las barras de los artefactos tienen las mismas medidas, por lo que con las barras del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards era posible construir tanto el Parabológrafo de palancas y colisa de inwards y el Antiparalelogramo articulado. Con esto se logró la optimización del material así como reducción en los gastos. Véanse la tabla 3.1 y la figura 3.25.

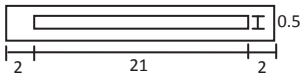
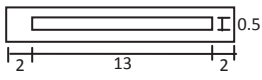
Descripción del artefacto	Medidas de las barras necesarias	Cantidad de barras rígidas	Cantidad de barras perforadas	Cantidad de correderas
Barra rígida	10 x 1.5 x 0.15	4	2	4
Barra perforada larga	25 X 1.5 X 0.2 	1	0	2
Barra perforada corta	17 X 1.5 X 0.2 	1	2	1
Corredera	2 x 1.9 x 0.5	3	2	4

Tabla 3.1 Especificaciones y barras necesarias para armar cada uno de los artefactos.

De esta manera fue como se llegó a la construcción en acrílico de dichos artefactos, los cuales fueron aplicados con alumnos de bachillerato.

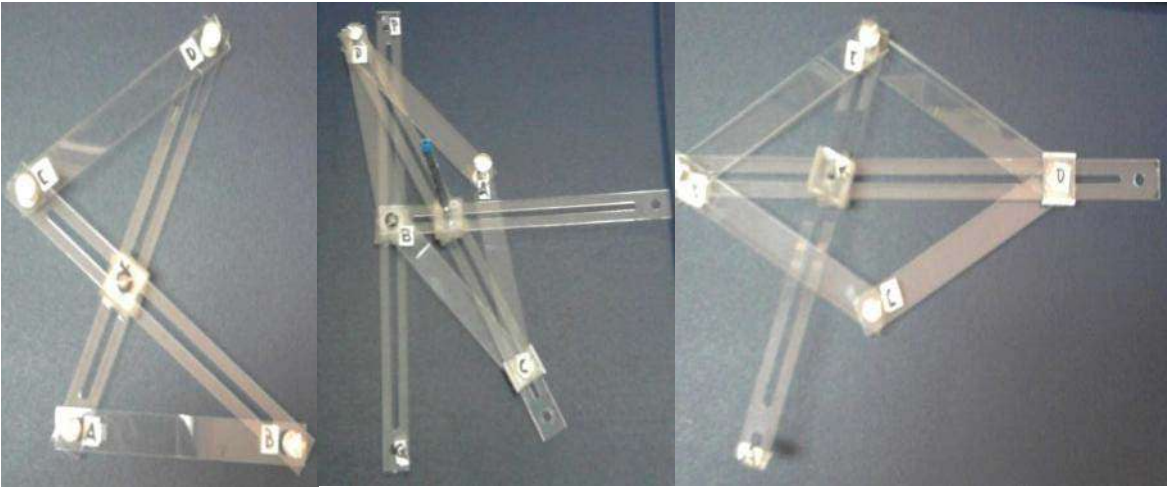


Figura 3.33 Artefactos contruidos en acrílico. a) Antiparalelogramo, b) Parabológrafo y c) Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards.

222 R22222222 22 2222222222 22222222 222222 22 22222222

Se decidió presentar a los alumnos de bachillerato únicamente los elipsógrafos y se planeó una actividad distinta para cada uno de ellos.

Se comenzó tomando en cuenta las características de cada artefacto así como su demostración matemática. A partir de allí se decidió que dichas actividades deberían de consistir en una serie de preguntas que invitaran a los estudiantes a manipular cada artefacto, que conocieran cada parte que los conforma, que observaran las figuras que se formaban entre sus barras así como las longitudes de las mismas, también que verificaran su comportamiento mientras dicho artefacto tenía movimiento así como en estado inmóvil. Lo que se deseaba era que los alumnos, a partir de esa guía y de la manipulación del artefacto pudieran construir por sí mismos el concepto de elipse.

De esta manera, se hicieron dos actividades didácticas, en las cuales algunas preguntas eran iguales, pero debido a que las demostraciones de cada una de ellas eran muy diferentes muchas preguntas variaron. Dichas actividades se encuentran anexas al final de esta investigación.

222 222222 2222222 22222 2 2222 222 2222222 222222 22 2222222222 2 22222

22 2222222 222 222222222222 22 222222222222

Primeramente se realizó una prueba piloto usando las actividades didácticas que se habían desarrollado. La finalidad de esta prueba fue observar si las instrucciones son las adecuadas, si los alumnos comprenden el enunciado de cada pregunta, así como si el vocabulario utilizado es el adecuado. Otro aspecto importante de la prueba piloto es que nos permite identificar si las preguntas planteadas son las adecuadas para que los alumnos puedan llegar a la demostración del artefacto así como la construcción del

concepto de elipse, además de si sobran o hacen falta preguntas, y también si debe de modificarse el orden de las mismas.

La prueba piloto se dividió en dos sesiones. Primero se aplicó la actividad correspondiente al Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards. Se llevó a cabo el día martes 23 de marzo del 2010, en el edificio D de Ciudad Universitaria a las 4:00 pm. Los alumnos que participaron provenían del CBTIS 149 de la ciudad de Morelia, estaban cursando el cuarto semestre. Esta actividad se realizó con seis estudiantes, los cuales fueron divididos en dos equipos de tres integrantes. Los equipos se conformaron por afinidad. Cabe mencionar que se contó con una video cámara de grabación para recabar información acerca del razonamiento de los alumnos.

La segunda actividad, correspondiente al Antiparalelogramo articulado de van Schooten, se realizó el día miércoles 24 de marzo del 2010, en el edificio D de Ciudad Universitaria, a las 4:00 pm. Se trabajó con los mismos seis estudiantes, divididos en tres equipos de dos integrantes. En esta ocasión se indicó qué alumnos formarían cada equipo. Hubo dos cámaras de grabación.

Actividad	No. de equipos	Integrantes por equipo	Video cámaras	Duración aproximada de cada actividad
Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards	2	3	1	140 minutos
Antiparalelogramo articulado de Van Schooten	3	2	2	110 minutos

Tabla 3.2 Especificaciones de las pruebas piloto.

La prueba piloto permitió hacer observaciones que hicieron cambiar la redacción de algunas preguntas, así como la inclusión y eliminación de otras, y el agregado de anexos de algunas definiciones. Por ejemplo, en la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards se encontraban las siguientes preguntas:

6. ¿Cuáles son las características de la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB?
12. ¿Crees que la elipse se modificaría si los segmentos BE, ED, DC y CB fueran más grandes o más pequeños?
13. Ahora, acerca el punto A al punto C y manipula el artefacto. ¿Cómo se comporta este trazo?
14. Ahora, aleja el punto A del punto C y manipula el artefacto. ¿Cuál es el comportamiento de este trazo?
15. ¿Qué puedes deducir del acercamiento y el alejamiento del punto A con el C?

Después de la prueba piloto, hubo varios cambios en la redacción de la mayoría de las preguntas, pero los cambios más significativos fueron que se agregó una pregunta al principio de la actividad, las preguntas 6 y 13 se modificaron y las 12, 14 y 15 fueron eliminadas, también se agregó un anexo para responder la pregunta 15. A continuación se muestra la pregunta incluida al principio de la actividad así como la corrección de la 6 y el anexo de la pregunta 15 (Anexo 1):

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto? Escribe la longitud de cada una de ellas, nombrando a cada barra con los puntos de cada uno de sus extremos (por ejemplo barra AE).
6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I** **J** **K** **L** **M** **N** **O** **P** **Q** **R** **S** **T** **U** **V** **W** **X** **Y** **Z** **a** **b** **c** **d** **e** **f** **g** **h** **i** **j** **k** **l** **m** **n** **o** **p** **q** **r** **s** **t** **u** **v** **w** **x** **y** **z** **0** **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9** **+** **-** ***** **/** **=** **<** **>** **<=** **>=** **^** **%** **1/x** **1/y** **1/z** **1/w** **1/v** **1/u** **1/t** **1/s** **1/r** **1/q** **1/p** **1/o** **1/n** **1/m** **1/l** **1/k** **1/j** **1/i** **1/h** **1/g** **1/f** **1/e** **1/d** **1/c** **1/b** **1/a** **1/0** **1/1** **1/2** **1/3** **1/4** **1/5** **1/6** **1/7** **1/8** **1/9** **1/10** **1/11** **1/12** **1/13** **1/14** **1/15** **1/16** **1/17** **1/18** **1/19** **1/20** **1/21** **1/22** **1/23** **1/24** **1/25** **1/26** **1/27** **1/28** **1/29** **1/30** **1/31** **1/32** **1/33** **1/34** **1/35** **1/36** **1/37** **1/38** **1/39** **1/40** **1/41** **1/42** **1/43** **1/44** **1/45** **1/46** **1/47** **1/48** **1/49** **1/50** **1/51** **1/52** **1/53** **1/54** **1/55** **1/56** **1/57** **1/58** **1/59** **1/60** **1/61** **1/62** **1/63** **1/64** **1/65** **1/66** **1/67** **1/68** **1/69** **1/70** **1/71** **1/72** **1/73** **1/74** **1/75** **1/76** **1/77** **1/78** **1/79** **1/80** **1/81** **1/82** **1/83** **1/84** **1/85** **1/86** **1/87** **1/88** **1/89** **1/90** **1/91** **1/92** **1/93** **1/94** **1/95** **1/96** **1/97** **1/98** **1/99** **1/100** **1/101** **1/102** **1/103** **1/104** **1/105** **1/106** **1/107** **1/108** **1/109** **1/110** **1/111** **1/112** **1/113** **1/114** **1/115** **1/116** **1/117** **1/118** **1/119** **1/120** **1/121** **1/122** **1/123** **1/124** **1/125** **1/126** **1/127** **1/128** **1/129** **1/130** **1/131** **1/132** **1/133** **1/134** **1/135** **1/136** **1/137** **1/138** **1/139** **1/140** **1/141** **1/142** **1/143** **1/144** **1/145** **1/146** **1/147** **1/148** **1/149** **1/150** **1/151** **1/152** **1/153** **1/154** **1/155** **1/156** **1/157** **1/158** **1/159** **1/160** **1/161** **1/162** **1/163** **1/164** **1/165** **1/166** **1/167** **1/168** **1/169** **1/170** **1/171** **1/172** **1/173** **1/174** **1/175** **1/176** **1/177** **1/178** **1/179** **1/180** **1/181** **1/182** **1/183** **1/184** **1/185** **1/186** **1/187** **1/188** **1/189** **1/190** **1/191** **1/192** **1/193** **1/194** **1/195** **1/196** **1/197** **1/198** **1/199** **1/200** **1/201** **1/202** **1/203** **1/204** **1/205** **1/206** **1/207** **1/208** **1/209** **1/210** **1/211** **1/212** **1/213** **1/214** **1/215** **1/216** **1/217** **1/218** **1/219** **1/220** **1/221** **1/222** **1/223** **1/224** **1/225** **1/226** **1/227** **1/228** **1/229** **1/230** **1/231** **1/232** **1/233** **1/234** **1/235** **1/236** **1/237** **1/238** **1/239** **1/240** **1/241** **1/242** **1/243** **1/244** **1/245** **1/246** **1/247** **1/248** **1/249** **1/250** **1/251** **1/252** **1/253** **1/254** **1/255** **1/256** **1/257** **1/258** **1/259** **1/260** **1/261** **1/262** **1/263** **1/264** **1/265** **1/266** **1/267** **1/268** **1/269** **1/270** **1/271** **1/272** **1/273** **1/274** **1/275** **1/276** **1/277** **1/278** **1/279** **1/280** **1/281** **1/282** **1/283** **1/284** **1/285** **1/286** **1/287** **1/288** **1/289** **1/290** **1/291** **1/292** **1/293** **1/294** **1/295** **1/296** **1/297** **1/298** **1/299** **1/300** **1/301** **1/302** **1/303** **1/304** **1/305** **1/306** **1/307** **1/308** **1/309** **1/310** **1/311** **1/312** **1/313** **1/314** **1/315** **1/316** **1/317** **1/318** **1/319** **1/320** **1/321** **1/322** **1/323** **1/324** **1/325** **1/326** **1/327** **1/328** **1/329** **1/330** **1/331** **1/332** **1/333** **1/334** **1/335** **1/336** **1/337** **1/338** **1/339** **1/340** **1/341** **1/342** **1/343** **1/344** **1/345** **1/346** **1/347** **1/348** **1/349** **1/350** **1/351** **1/352** **1/353** **1/354** **1/355** **1/356** **1/357** **1/358** **1/359** **1/360** **1/361** **1/362** **1/363** **1/364** **1/365** **1/366** **1/367** **1/368** **1/369** **1/370** **1/371** **1/372** **1/373** **1/374** **1/375** **1/376** **1/377** **1/378** **1/379** **1/380** **1/381** **1/382** **1/383** **1/384** **1/385** **1/386** **1/387** **1/388** **1/389** **1/390** **1/391** **1/392** **1/393** **1/394** **1/395** **1/396** **1/397** **1/398** **1/399** **1/400** **1/401** **1/402** **1/403** **1/404** **1/405** **1/406** **1/407** **1/408** **1/409** **1/410** **1/411** **1/412** **1/413** **1/414** **1/415** **1/416** **1/417** **1/418** **1/419** **1/420** **1/421** **1/422** **1/423** **1/424** **1/425** **1/426** **1/427** **1/428** **1/429** **1/430** **1/431** **1/432** **1/433** **1/434** **1/435** **1/436** **1/437** **1/438** **1/439** **1/440** **1/441** **1/442** **1/443** **1/444** **1/445** **1/446** **1/447** **1/448** **1/449** **1/450** **1/451** **1/452** **1/453** **1/454** **1/455** **1/456** **1/457** **1/458** **1/459** **1/460** **1/461** **1/462** **1/463** **1/464** **1/465** **1/466** **1/467** **1/468** **1/469** **1/470** **1/471** **1/472** **1/473** **1/474** **1/475** **1/476** **1/477** **1/478** **1/479** **1/480** **1/481** **1/482** **1/483** **1/484** **1/485** **1/486** **1/487** **1/488** **1/489** **1/490** **1/491** **1/492** **1/493** **1/494** **1/495** **1/496** **1/497** **1/498** **1/499** **1/500** **1/501** **1/502** **1/503** **1/504** **1/505** **1/506** **1/507** **1/508** **1/509** **1/510** **1/511** **1/512** **1/513** **1/514** **1/515** **1/516** **1/517** **1/518** **1/519** **1/520** **1/521** **1/522** **1/523** **1/524** **1/525** **1/526** **1/527** **1/528** **1/529** **1/530** **1/531** **1/532** **1/533** **1/534** **1/535** **1/536** **1/537** **1/538** **1/539** **1/540** **1/541** **1/542** **1/543** **1/544** **1/545** **1/546** **1/547** **1/548** **1/549** **1/550** **1/551** **1/552** **1/553** **1/554** **1/555** **1/556** **1/557** **1/558** **1/559** **1/560** **1/561** **1/562** **1/563** **1/564** **1/565** **1/566** **1/567** **1/568** **1/569** **1/570** **1/571** **1/572** **1/573** **1/574** **1/575** **1/576** **1/577** **1/578** **1/579** **1/580** **1/581** **1/582** **1/583** **1/584** **1/585** **1/586** **1/587** **1/588** **1/589** **1/590** **1/591** **1/592** **1/593** **1/594** **1/595** **1/596** **1/597** **1/598** **1/599** **1/600** **1/601** **1/602** **1/603** **1/604** **1/605** **1/606** **1/607** **1/608** **1/609** **1/610** **1/611** **1/612** **1/613** **1/614** **1/615** **1/616** **1/617** **1/618** **1/619** **1/620** **1/621** **1/622** **1/623** **1/624** **1/625** **1/626** **1/627** **1/628** **1/629** **1/630** **1/631** **1/632** **1/633** **1/634** **1/635** **1/636** **1/637** **1/638** **1/639** **1/640** **1/641** **1/642** **1/643** **1/644** **1/645** **1/646** **1/647** **1/648** **1/649** **1/650** **1/651** **1/652** **1/653** **1/654** **1/655** **1/656** **1/657** **1/658** **1/659** **1/660** **1/661** **1/662** **1/663** **1/664** **1/665** **1/666** **1/667** **1/668** **1/669** **1/670** **1/671** **1/672** **1/673** **1/674** **1/675** **1/676** **1/677** **1/678** **1/679** **1/680** **1/681** **1/682** **1/683** **1/684** **1/685** **1/686** **1/687** **1/688** **1/689** **1/690** **1/691** **1/692** **1/693** **1/694** **1/695** **1/696** **1/697** **1/698** **1/699** **1/700** **1/701** **1/702** **1/703** **1/704** **1/705** **1/706** **1/707** **1/708** **1/709** **1/710** **1/711** **1/712** **1/713** **1/714** **1/715** **1/716** **1/717** **1/718** **1/719** **1/720** **1/721** **1/722** **1/723** **1/724** **1/725** **1/726** **1/727** **1/728** **1/729** **1/730** **1/731** **1/732** **1/733** **1/734** **1/735** **1/736** **1/737** **1/738** **1/739** **1/740** **1/741** **1/742** **1/743** **1/744** **1/745** **1/746** **1/747** **1/748** **1/749** **1/750** **1/751** **1/752** **1/753** **1/754** **1/755** **1/756** **1/757** **1/758** **1/759** **1/760** **1/761** **1/762** **1/763** **1/764** **1/765** **1/766** **1/767** **1/768** **1/769** **1/770** **1/771** **1/772** **1/773** **1/774** **1/775** **1/776** **1/777** **1/778** **1/779** **1/780** **1/781** **1/782** **1/783** **1/784** **1/785** **1/786** **1/787** **1/788** **1/789** **1/790** **1/791** **1/792** **1/793** **1/794** **1/795** **1/796** **1/797** **1/798** **1/799** **1/800** **1/801** **1/802** **1/803** **1/804** **1/805** **1/806** **1/807** **1/808** **1/809** **1/810** **1/811** **1/812** **1/813** **1/814** **1/815** **1/816** **1/817** **1/818** **1/819** **1/820** **1/821** **1/822** **1/823** **1/824** **1/825** **1/826** **1/827** **1/828** **1/829** **1/830** **1/831** **1/832** **1/833** **1/834** **1/835** **1/836** **1/837** **1/838** **1/839** **1/840** **1/841** **1/842** **1/843** **1/844** **1/845** **1/846** **1/847** **1/848** **1/849** **1/850** **1/851** **1/852** **1/853** **1/854** **1/855** **1/856** **1/857** **1/858** **1/859** **1/860** **1/861** **1/862** **1/863** **1/864** **1/865** **1/866** **1/867** **1/868** **1/869** **1/870** **1/871** **1/872** **1/873** **1/874** **1/875** **1/876** **1/877** **1/878** **1/879** **1/880** **1/881** **1/882** **1/883** **1/884** **1/885** **1/886** **1/887** **1/888** **1/889** **1/890** **1/891** **1/892** **1/893** **1/894** **1/895** **1/896** **1/897** **1/898** **1/899** **1/900** **1/901** **1/902** **1/903** **1/904** **1/905** **1/906** **1/907** **1/908** **1/909** **1/910** **1/911** **1/912** **1/913** **1/914** **1/915** **1/916** **1/917** **1/918** **1/919** **1/920** **1/921** **1/922** **1/923** **1/924** **1/925** **1/926** **1/927** **1/928** **1/929** **1/930** **1/931** **1/932** **1/933** **1/934** **1/935** **1/936** **1/937** **1/938** **1/939** **1/940** **1/941** **1/942** **1/943** **1/944** **1/945** **1/946** **1/947** **1/948** **1/949** **1/950** **1/951** **1/952** **1/953** **1/954** **1/955** **1/956** **1/957** **1/958** **1/959** **1/960** **1/961** **1/962** **1/963** **1/964** **1/965** **1/966** **1/967** **1/968** **1/969** **1/970** **1/971** **1/972** **1/973** **1/974** **1/975** **1/976** **1/977** **1/978** **1/979** **1/980** **1/981** **1/982** **1/983** **1/984** **1/985** **1/986** **1/987** **1/988** **1/989** **1/990** **1/991** **1/992** **1/993** **1/994** **1/995** **1/996** **1/997** **1/998** **1/999** **1/1000** **1/1001** **1/1002** **1/1003** **1/1004** **1/1005** **1/1006** **1/1007** **1/1008** **1/1009** **1/1010** **1/1011** **1/1012** **1/1013** **1/1014** **1/1015** **1/1016** **1/1017** **1/1018** **1/1019** **1/1020** **1/1021** **1/1022** **1/1023**

2. Mueve el punto D y observa atentamente lo que ocurre con los demás puntos, así como en los segmentos. Durante la manipulación del artefacto, ¿qué figuras geométricas forman dichas barras?
8. Traza el eje de simetría de dicha figura. ¿Cuál es la propiedad del eje de simetría?, Cómo es el eje de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

Dichas preguntas se modificaron quedando de la siguiente manera:

2. Mueve el artefacto y observa atentamente lo que ocurre con todos sus segmentos. Durante el movimiento del artefacto, ¿qué figuras geométricas forman dichos segmentos (incluyendo los segmentos AC y BD)?

?? ??? ????????? ??? ?? ?????????? ?????????? ??? ??????

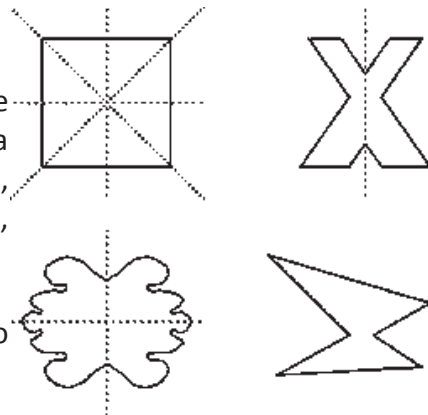
Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

ANEXO 2

??? ?? ??? ?????

Una línea que atraviesa una figura de tal manera que cada lado es el espejo del otro. Si dobláramos la figura en la mitad a lo largo del Eje de Simetría, tendríamos que las dos mitades son iguales, quedarían parejas.

El eje de simetría es la mediatriz del segmento cuyos extremos son puntos simétricos.



Para mayor información, las actividades didácticas se encuentran en los Anexos, al final de esta investigación.

Una vez modificadas las actividades, se realizó la prueba formal de la misma manera que la prueba piloto, es decir en dos sesiones, primero se aplicó la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards el día jueves 6 de Mayo del 2010, en la sala de

juntas de la Academia de Matemáticas del CBTIS 149 en Morelia Michoacán a las 11:00 am. En esta ocasión se realizó con ocho alumnos de cuarto semestre de la especialidad de administración, siendo cuatro hombres y cuatro mujeres. Se formaron cuatro equipos de dos integrantes (un hombre y una mujer).

La segunda actividad se llevó a cabo el día miércoles 13 de Mayo del 2010, en la sala antes citada a las 11:00 am. Los equipos fueron los mismos de la sesión anterior.

Actividad	No. de equipos	Integrantes por equipo	Video cámaras	Duración aproximada de cada actividad
Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards	4	2	2	150 minutos
Antiparalelogramo articulado de Van Schooten	4	2	2	110 minutos

Tabla 3.3 Especificaciones de las pruebas formales.

La muestra de esta prueba formal se vio limitada debido a diversas causas:

- Fue difícil conseguir un grupo de bachillerato en donde el profesor a cargo de dicho grupo motivara e incentivara a los estudiantes a participar en las actividades.
- Se hizo la invitación a varios alumnos a participar pero sólo se presentaron ocho.
- La prueba coincidió con los exámenes parciales que se aplican a los alumnos en las diferentes asignaturas.
- Sólo pudieron construirse cinco Elipsógrafos de palancas y colisa de inwards y siete Antiparalelogramos articulados de van Schooten.

En la aplicación de las actividades durante la prueba piloto, se recabó información en un cuaderno, haciendo anotaciones de las dudas que surgían en los alumnos en cuanto

al vocabulario usado en las preguntas así como en la redacción de las mismas. Esto sería de gran ayuda para modificar las hojas de trabajo que se pretendían usar en la prueba formal. Esa información se transcribió en un procesador de textos.

Las respuestas de los alumnos en sus hojas de trabajo fueron de gran ayuda para decidir si era necesario agregar o quitar algunas de las preguntas.

Las videograbaciones nos proporcionaron información importante, puesto que en los videos se observó el razonamiento que los alumnos realizaron mientras respondían las preguntas. En muchas ocasiones las respuestas de los alumnos eran diferentes a lo que habían discutido en los videos.

Una vez concluidas las pruebas piloto de cada actividad, se descargaron los videos de las videocámaras a una computadora para comenzar el análisis detallado de cada uno de ellos. En la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards, se utilizó una video cámara de grabación debido a que sólo se formaron dos equipos y en la del Antiparalelogramo articulado de van Schooten se grabó con 2 cámaras.

Para la revisión de los videos, se organizó la información en tablas con cuatro columnas, las cuales son las siguientes:

- Tiempo: Un episodio, es un pasaje de video donde tiene una intervención un equipo diferente. Los episodios comenzaron desde el segundo cero hasta el final de la grabación. Cabe mencionar que el video total fue cortado en varios pasajes y esta columna marca el tiempo en el que inicia cada uno de ellos hasta que concluye.
- Participantes: Se hace mención del o de los equipos que hallan participado en dicho episodio así como del profesor investigador.
- ¿De qué trata el episodio?: En esta columna se hace una pequeña descripción de lo mas representativo que ocurrió en ese periodo de tiempo, tomando en cuenta

algunas de las actitudes y labores que realizaron tanto los alumnos como el profesor investigador.

- ¿Es de interés?: En esta columna se marca si dicho episodio contiene material que ayude a tomar decisiones importantes posteriormente. Las posibles notas para esta columna pueden ser las siguientes:
 - SI: Esto nos indica que dicho episodio puede ser útil para tratar de modificar alguna pregunta así como para indicarnos que una respuesta de los alumnos contiene elementos importantes y argumentos sólidos. Inclusive se usa para anexar definiciones.
 - NO: Carece de importancia dicho episodio.
 - POSIBLE CAMBIO: Se usa para dar a entender que no se tiene claro si es necesario realizar ajustes a las preguntas que los alumnos tratan de responder en el episodio.

Cabe señalar que cada equipo se dio un nombre, aunque después fue cambiado. A continuación se muestra la nomenclatura usada en la tabla así como un ejemplo:

Olinda = Ol Aimeé = Ai Wilmer = Wil Emily = Em Viviana = Viv Silvestre = Sil.

Profesor Héctor = Hec. Además EQ 1= Equipo 1 y EQ 2 = Equipo 2.

Olinda, Aimeé y Wilmer forman el Equipo 1 y Emily, Viviana y Silvestre forman el Equipo 2.

TIEMPO	PARTICIPANTES	¿DE QUE TRATA EL EPISODIO?	¿ES DE INTERES ?
0:00-3:26	Hec	Breve introducción, explicación de las instrucciones e ilustración de cómo manipular el artefacto.	NO
3:26-4:00	(EQ 1)	Aparecen manipulando el artefacto.	NO
4:00-4:35	(EQ 2)	Manipulan el artefacto y responden pregunta 1.	NO
4:35-5:26	Equipos 1 y 2	Siguen moviendo el artefacto y realizan el trazo completo.	SI (para mejorar la preg. 2)

5:26-7:36	(EQ 2),Hec	Em y Viv tratan de responder la pregunta 2, tienen ideas erróneas, les hago sugerencias y miden la longitud de los segmentos y responden	SI
7:36-9:22	(EQ 1), Hec	Ol y Ai tratan de responder la pregunta 2 y les sugiero que pueden medir los segmentos con la regla.	SI (modificar pregunta 3)
9:22-13:58	(EQ 2), Hec	Tratan de responder la pregunta 3, discutiendo entre sí Em con Viv y Sil dando sus puntos de vista. Manipulando el artefacto forman algunas figuras, discuten sus propiedades y verifican si cambia el perímetro	

Tabla 3.4 Ejemplo de cómo se organizó la información recopilada en las grabaciones mediante tablas.

En el siguiente capítulo se hará el análisis de la información de la prueba formal, incluyéndose los diálogos relevantes.

CAPÍTULO 2

2.1. Metodología

Se digitalizaron las hojas de trabajo de todos los equipos y se analizaron las mismas. Posteriormente se revisaron los videos de las actividades y la información se organizó en tablas como se muestra al final del capítulo anterior. Esto nos permitió seleccionar los diálogos más importantes y luego rescatarlos para analizarlos más a fondo.

A continuación se relatan los diálogos seleccionados en las videgrabaciones realizadas en las actividades correspondientes al Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards así como del Antiparalelogramo articulado de van Schooten. Mencionando lo que a continuación se detalla:

- ✚ Se especificará el nombre del equipo y de los participantes durante el diálogo.
- ✚ INTRODUCCIÓN: En ella se especifica de qué trata el episodio en cuestión, es decir una breve descripción del diálogo que se desarrolla.
- ✚ DIALOGO: Todo lo mencionado por los participantes.
- ✚ OBSERVACIONES: Se detallan cuestiones que aparecen en los diálogos, explicando lo que los alumnos trataron de decir, la relación que hicieron de respuestas anteriores para responder la siguiente, etc.
- ✚ CONCLUSIONES: Se sacarán algunas reflexiones de acuerdo a lo observado durante la interacción de los alumnos con el artefacto.

- Los alumnos contaban con una regla para medir los segmentos en diferentes posiciones y de esta manera podían observar si algún segmento cambiaba o no de longitud.
- Los alumnos de este equipo, sabían cuales eran los segmentos que no cambiaban de longitud y cuales sí, pero no sabían el por qué del cambio. Moisés menciona que según movían el artefacto, los segmentos cambiaban porque la figura (rombo formado por los segmentos BC, CD, DE y BE) se abría o se cerraba. No se habían dado cuenta hasta ese momento que el punto K se recorría conforme movían el artefacto y era el que hacía que los segmentos asociados a él cambiaran de longitud.

3. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?

Segmento BC. (b—c) (c—d) (d—e) (b—e)

No cambian porque los segmentos anteriores no tienen un punto medio móvil. Como es el caso de/

No cambian porque ningún extremo de cada segmento es móvil.

Figura 4.1 Respuesta 3 del Equipo 1.

Conclusiones

Los alumnos podrían haberse dado cuenta de qué segmentos permanecían invariantes si los hubieran medido en diferentes posiciones y hubieran comparado sus longitudes de acuerdo a lo que respondieron en la pregunta 1, donde se les pedía que midieran las longitudes de las barras del artefacto, las cuales forman casi todos los segmentos (salvo los segmentos formados por la corredera que es la intersección entre el segmento AE y BD). Esto al parecer no ocurrió y los alumnos tuvieron dificultades al pasar por alto lo mencionado anteriormente.

Una vez que los alumnos logran identificar lo anterior, comienzan a responder la pregunta 6 cuyo enunciado es el siguiente: Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura? Veamos lo que obtuvo el Equipo 1:

Equipo 1 (Moisés, Ayla) y Héctor.

Moisés menciona algunas características del rombo tratando de responder la pregunta 6. Tiene duda en una de las características que menciona concerniente con los ángulos internos del rombo.

Moisés:	Tienen ángulos interiores iguales, pero... dos pares de ángulos iguales, pero eso quiere decir ¿qué tiene sus cuatro ángulos iguales ó dos iguales y otros dos iguales?
Héctor:	Puedes repetirme de favor.
Ayla, Moisés:	Se ríen.
Moisés:	Lo que pasa es que quiero poner que el rombo tiene dos pares de ángulos iguales, pero ummm...
Héctor:	Lo que me estas diciendo ahorita es que por ejemplo, este ángulo es igual a este (CBE con CDE) y este igual a este (BCD con BED), pero que estos dos (BCD y BED) pueden ser distintos (CBE y CDE) (señalo todos los ángulos en el artefacto). Eso es lo que me estas diciendo.
Moisés:	Eso es lo que quiero decir.
Héctor:	Así como lo dijiste, sí.

Observaciones:

- Era importante que los alumnos respondieran acertadamente la pregunta 6. Primero que reconocieran que se trataba de un rombo y después que hicieran mención de algunas de sus características particulares. Se espera que respondan que es un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales, dos pares de lados paralelos, dos pares de ángulos iguales, que tiene dos ejes de simetría que coinciden con sus diagonales entre algunas otras cosas.

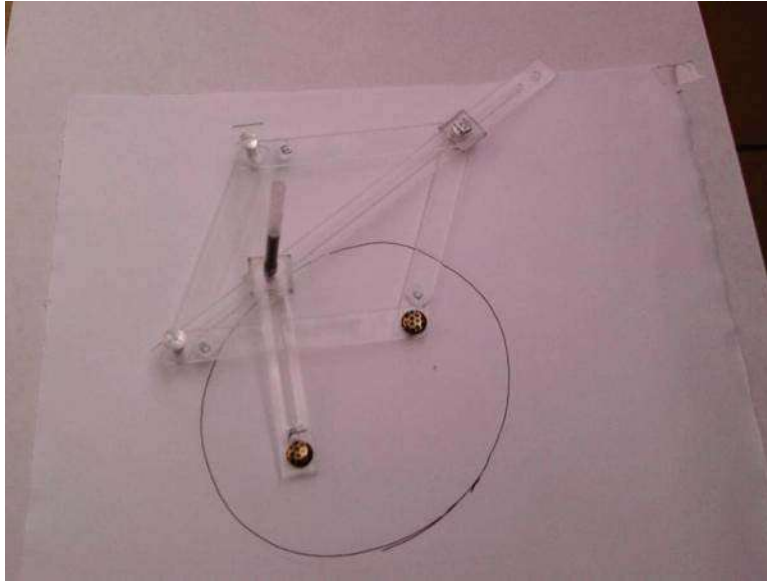


Figura 4.2 El Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards en estado fijo formando un rombo.

- Este equipo respondió que en cierta posición el artefacto podía formar un cuadrado o bien un rombo. Recordemos que ambas figuras tienen algunas características similares por ser el cuadrado un caso especial del rombo salvo, que el cuadrado sólo tiene ángulos rectos.
- En su respuesta a la pregunta 6 mencionan algunas características como puede apreciarse en la figura 4.2, pero algo importante que los alumnos no tomaron en cuenta fue ver que dicha figura tiene dos ejes de simetría, puesto que de esta forma hubieran respondido correctamente la pregunta 7 con un argumento sólido, pero en este caso no tomaron en cuenta dicha propiedad.

6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

Podría formarse un cuadrado y un rombo.

Tienen 4 lados de igual longitud.

Tienen 2 pares de lados paralelos.

El cuadrado tiene sus 4 ángulos interiores de 90°

El cuadrado tiene sus 4 ángulos interiores de 90°

El rombo tiene 2 pares de ángulos interiores iguales.

Figura 4.3 Respuesta 6 del Equipo 1 en sus hojas de trabajo.

C??P??P??P??P??

Los integrantes de dicho equipo pasaron por alto una característica importante del rombo, la cual era que dicha figura tiene dos ejes de simetría o bien diagonales, puesto que de haberlo hecho hubieran respondido de inmediato la pregunta siguiente (7). Al final, su respuesta a la pregunta 7 deja en claro que tuvieron una aproximación a lo anteriormente mencionado:

7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

Sí, porque este segmento siempre está dividiendo al cuadrilátero en 2 partes iguales.

Figura 4.4 Respuesta 7 del Equipo 1 en sus hojas de trabajo.

Se espera que los alumnos puedan responder la pregunta 7 en función de alguna de las características obtenidas en la pregunta anterior, el enunciado es: ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta. Observemos lo que el equipo de Gabi y Uriel respondió así como en que se basaron para llegar a ello:

P??P??P??P??P??P??Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

Los alumnos tratan de dar la respuesta de la pregunta 7 y la comienzan a escribir en sus hojas de trabajo. Después de eso se les pide que mencionen su respuesta a dicha pregunta. Se les hacen más preguntas al respecto y ellos tratan de responder.

Gabriela:	¿Por qué sería?
Uriel:	Es un eje de simetría.
Gabriela:	Es la diagonal... ¿así nada más?, ¿BD es eje de simetría de CE?
Uriel:	Pues sí, el punto K no cambiaría de distancia entre el EC también.
Gabriela:	No influye, K no influye (señala el punto K), nada más te está preguntando de estos (señala los puntos D y B). Entonces por qué es su eje de simetría... siempre va a ser su eje de simetría.
Uriel:	Pues... sí.
Héctor:	¿En qué pregunta van?
Gabriela:	En la siete.
Héctor:	¿En la siete?, a ver ¿qué respondieron?
Gabriela:	Que si porque EC es el eje de simetría (señala el segmento EC en su artefacto).
Héctor:	¿Por qué?
Gabriela:	Este... se supone que nosotros estamos tomando que es un rombo, ¿no?
Uriel:	Rombo.
Gabriela:	Entonces tiene dos ejes de simetría, lo que viene siendo éste (señala el segmento CE) y viene siendo éste (señala el segmento BE).
Uriel:	BD (corrigiendo a Gabriela que señaló BE).
Gabriela:	Ajá, éste (señala el BD) y éste (señala el CE). Entonces se supone que aquí, quedaría hacia la mitad si quedáramos en éste (simula con sus manos que dobla el artefacto por CE). Entonces al doblarlo (ahora por BD) automáticamente me esta formando su eje de simetría... y es una figura que siempre lo va a tener allí y aquí (señala el segmento CE).
Héctor:	¿Siempre en distintas posiciones se cumple que la distancia de C al segmento BD y de E a BD es la misma?
Uriel:	Sí.
Gabriela:	Cuando es un eje en el rombo sí porque sus cuatro lados son iguales.
Héctor:	Ok sigan adelante...

O

- En la pregunta 6, se les pedía que observaran la figura formada por su artefacto cuando este estuviera fijo, que dijeran de qué figura se trataba así como algunas de sus características. Allí se dieron cuenta de que se trataba de un rombo y entre sus características mencionan que el rombo tiene dos ejes de simetría.

6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

Rombo, tiene por el lado BC la longitud
igual a la de los otros y que tiene 2 lados
paralelos. El ángulo que se forma
tiene la medida de 90 grados.

Figura 4.5 Respuesta 6 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

- Ellos ya se habían dado cuenta de que su rombo tenía dos ejes de simetría y que uno de ellos era el segmento BD y el otro eje lo era el segmento CE, por lo que no tuvieron dificultad alguna para contestar.

7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

Si...xq. es el eje de simetría

Figura 4.6 Respuesta 7 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

Conclusión

Una buena observación al momento de tratar de responder la pregunta 6 les dio de inmediato la respuesta de la pregunta 7. De antemano ellos conocían que su rombo tenía dos ejes de simetría y de esa manera no dudaron en responder que BD siempre pasa por la mitad del segmento CE.

La pregunta 8 dice lo siguiente: Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta. A continuación se mostrará el diálogo correspondiente a la pregunta mencionada por parte del Equipo 1, donde sus integrantes realizan un análisis no esperado:

Equipo 1 (Moisés, Ayla).

Los integrantes de dicho equipo tratan de responder la pregunta 8, Moisés mediante un dibujo observa que los triángulos KED y KCD, ¿son?...

Moisés:	Son iguales ¿no?... es como si tuvieses tú un... ¿dónde puedo rayar?... es cómo si tuvieses tú un...
Ayla:	¿Pero entonces?
Moisés:	Un subtriángulo (Moisés dibuja un triángulo sobre la hoja de dibujo del artefacto). Tenemos que es un rombo ¿no? (dibuja otro triángulo debajo del anterior formando un rombo), puede ser un rombo y si lo divides en dos (en su dibujo divide su primer triángulo a la mitad) pues serán dos triángulos iguales, pero ¿cómo se llaman esos triángulos iguales?
Ayla:	¿Cómo se llaman esos triángulos? Estoy pensando.

O

- Para responder correctamente esta pregunta es preciso darse cuenta en la pregunta 7 que el segmento BD es un eje de simetría del rombo o bien una diagonal y que por eso siempre va a pasar por en medio del segmento CE. A partir de esto y teniendo en cuenta que la figura formada es un rombo (pregunta 6) se puede obtener que los triángulos KED y KCD son congruentes por LAL. Por construcción del artefacto $DE = DC$, los ángulos KDE y KDC son iguales puesto que BD es diagonal, los triángulos KED y KCD tienen a KD como lado común.

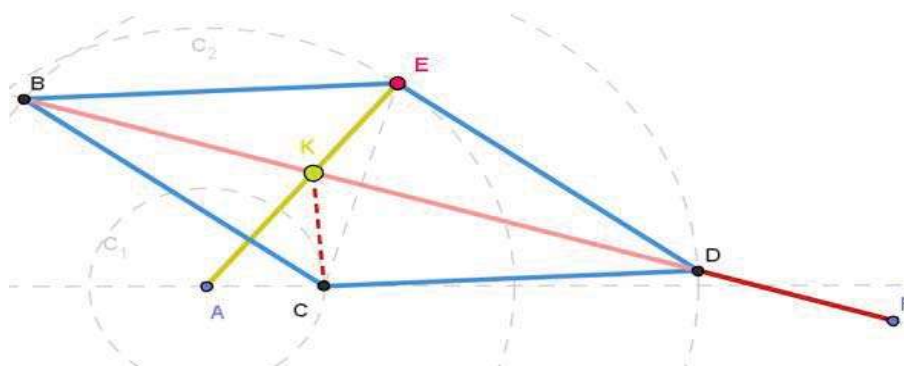


Figura 4.7 Demostración gráfica.

- Los alumnos hacen uso de respuestas anteriores, como que la figura formada es un rombo (pregunta 6), así mismo también usando algunas de sus características.
- Los integrantes tienen uno de sus primeros acercamientos a la respuesta de la pregunta 8 a través del análisis mencionado en el diálogo anterior. Su

razonamiento acerca de que al dividir un rombo por la mitad en dos triángulos y después dividir a uno de esos dos triángulos en dos y que dichos triángulos sean iguales es válido y hasta cierto punto correcto. Sin embargo, hasta dicho momento a los alumnos les hace falta observar los triángulos en otras posiciones para lograr una justificación mejor fundada y rigurosa.

- También entra en función la justificación de la pregunta 7. Los integrantes del Equipo 1 se dieron cuenta de que el segmento BD siempre pasa por la mitad del segmento CE, pero no dieron una justificación del por qué ocurre eso. El segmento BD es fundamental para determinar la congruencia que se espera como respuesta para la pregunta 8.
- Se pone de manifiesto el poco uso de algunos conceptos aprendidos en semestres anteriores, puesto que los alumnos no saben que nombre dar a los triángulos KED y KCD (congruentes).

CÓDIGO DE ACCESO

Los integrantes de dicho equipo, en un primer bosquejo de respuesta no recuerdan términos importantes como en este caso “congruencia”. Existen algunos otros conceptos que son recordados por ellos pero que no pueden asociarlos a su definición, no saben como usarlos.

El diálogo que a continuación se muestra tiene conexión con el anterior y podremos observar lo que ocurrió después de que los alumnos del Equipo 1 ordenaron sus ideas y observaron mejor el artefacto así como los triángulos en cuestión en la pregunta 8.

ENTREVISTA AL EQUIPO 1 (Moisés, Ayla) y Héctor.

Los integrantes del Equipo 1 y el profesor investigador tratan de dibujar con ayuda de un pincelín los triángulos KED y KCD (pregunta 8). Después de hacerlo Moisés trata de explicar

cómo son dichos triángulos entre ellos, usando la ayuda obtenida por respuestas anteriores y sus observaciones.

Héctor:	Ya márcale y después hacemos lo demás, para que vean los triángulos que ya marcaron o algo así, pero bueno, si no se puede (trazar adecuadamente dichos triángulos) pues nada mas obsérvenlos a través del artefacto. Bueno te piden el KCD (triángulo), ¿verdad?
Ayla:	Sí.
Moisés:	Sí.
Héctor:	Tienes que tenerlo fijo (el artefacto) para que no se te quede así (indicándoles como deben fijar el artefacto). ¿Y cuáles son los triángulos que se piden?
Moisés:	KED y KCD. Es que si esta recta (señala el segmento BD) siempre está dividiendo al cuadrilátero en dos partes iguales, cualquier punto de aquí (se refiere a cualquier punto que este sobre el segmento BD), pues será la misma distancia de E al punto K y de C al punto K. Entonces sí son distancias iguales, esta distancia (CD) es igual a esta (DE), y la distancia (DK) será igual para los dos.
Héctor:	Pero bueno ¿KD qué sería entonces si lo divide en 2 partes iguales (al cuadrilátero)?
Moisés:	¿Cómo?, ¿Qué sería que?
Héctor:	¿Qué es BD por ejemplo? En la pregunta 7 se te pide que justifiques si el segmento BD siempre por la... a ok (muestra Moisés la justificación de la pregunta 7). Entonces ¿por qué son congruentes? (señalando los triángulos en el artefacto).
Moisés:	Este lado siempre será igual (señala el segmento KD) porque el segmento BD siempre está dividiendo en dos al cuadrilátero. Entonces si está aquí o aquí (señala el recorrido que hace el punto K) o en el punto que sea siempre va a ser igual en los dos lados, a los dos triángulos. Entonces si se pone por ejemplo aquí, como es a la mitad, pues el segmento EK y KC siempre serán igual, según el movimiento en que se dé, siempre estarán de la misma longitud y el ED y CD miden 12 centímetros, es decir lo mismo.
Héctor:	A ok.
Moisés:	Siempre serán congruentes en cualquier movimiento.
Héctor:	Pues anota tu justificación allí y si te hace falta espacio puedes anotarla atrás, sólo pon que la respuesta la anotaste atrás en caso de que no te llegue a caber.

Observaciones:

- En preguntas anteriores, los alumnos tuvieron la posibilidad de medir los segmentos del artefacto y darse cuenta que algunos de ellos son iguales entre sí.
- En otras palabras, Moisés logra darse cuenta de que BD es una diagonal del rombo y que por esa razón siempre va a pasar por la mitad del segmento CE.
- Otro aspecto importante es que Moisés logra darse cuenta que no importa el movimiento que se le dé al artefacto ni la posición en que este quede, que siempre va a mantenerse que los segmentos CK y KE van a ser iguales, puesto que los dos

segmentos se relacionan con el punto K y si este se mueve afecta de la misma manera a ambos segmentos.

- Él justifica que los triángulos KED y KCD son congruentes puesto que $CK = CE$, $CD = ED$ puesto que los midió y ambos lados miden 12 cm, y que el lado KD va ser el mismo para ambos triángulos, es decir encontró una congruencia LLL.
- SE pudo observar que los alumnos conocen el concepto de congruencia pero no lo recuerdan completamente y les cuesta trabajo argumentar el por qué los triángulos mencionados son congruentes.

8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes, porque el segmento CD y ED tienen la misma longitud, el segmento EK y CK siempre serán igual sin importar el movimiento que tenga K, ya que K siempre estará moviéndose sobre el segmento BD y este segmento divide en partes iguales al cuadrilátero, luego el segmento KD será igual en los 2 triángulos sin importar el movimiento de K.

Figura 4.8 Respuesta escrita de la pregunta 8 del Equipo 1.

Conclusiones

Se pone de manifiesto que los integrantes de dicho equipo conocen el término “congruencia” y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, así mismo se pudo observar que no pueden recordar los distintos criterios de congruencia, y no obtienen una congruencia distinta a LLL. Cabe mencionar que en esta actividad, los alumnos cuentan con una regla para medir los segmentos. A partir de la evidencia recabada, se logró deducir que les hizo falta más observación y ver los segmentos involucrados en dicha pregunta para obtener la congruencia solicitada.

Ahora veamos lo que contestó el equipo de Gabi y Uriel en la misma pregunta y comparemos la respuesta entre ambos equipos:

	E...
Uriel:	Deben de medir lo mismo.
Gabriela:	Miden lo mismo ($CD=DE$), entonces los dos triángulos son iguales solamente que KD es un eje de simetría para los dos. Es el eje de simetría de una figura y es por eso que se forman dos triángulos.
Héctor:	Por eso son ¿cómo me dijiste?
Gabriela:	Congruentes...

O

- Gabriela usa su artefacto para trazar los triángulos KED y KCE. Remarca los lados de los triángulos con su pincelín por debajo del artefacto.

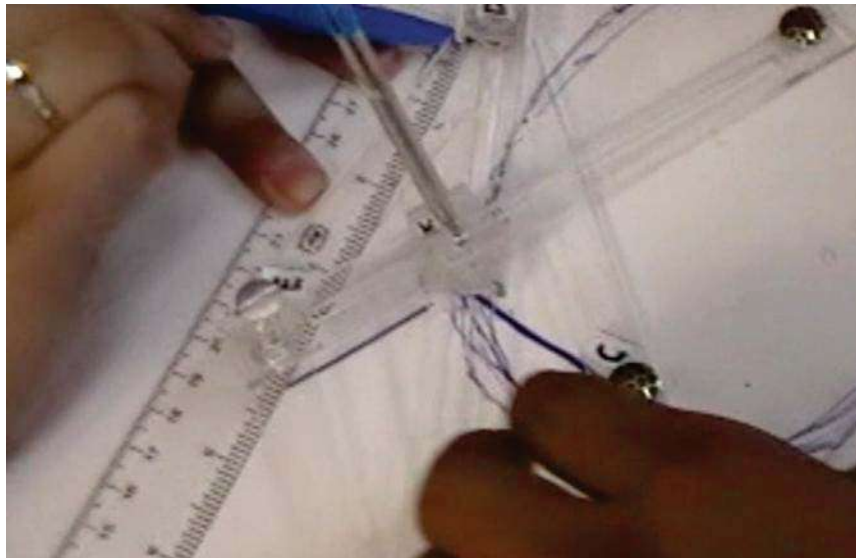


Figura 4.9 Integrantes del Equipo 3 remarcando los triángulos KED y KCE.

- Una vez que quedan remarcados los lados de sus triángulos opta por quitar su artefacto de la hoja de dibujo. Prefiere trabajar con los triángulos que dibujó previamente, etiquetando los puntos correspondientes con los que tenía el artefacto en dicha posición.

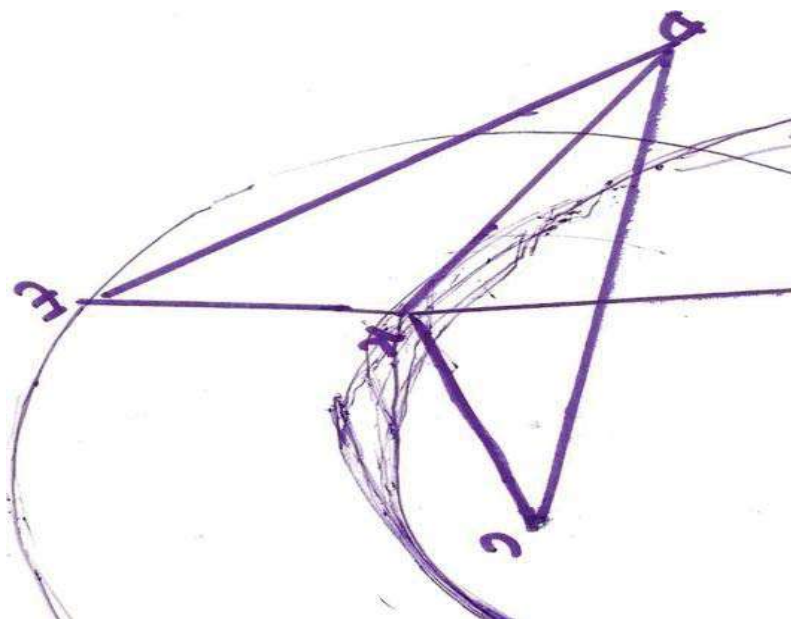


Figura 4.10 Triángulos remarcados y etiquetados en la hoja de dibujo del Equipo 3.

- Los integrantes de este equipo sabían por su respuesta de la pregunta 7 que el segmento BD es un eje de simetría. Tratan de justificar que los triángulos KED y KCD son congruentes porque dicho segmento (BD) los separa y al doblarlos por allí los triángulos van a pegarse el uno con el otro. Al analizar las evidencias recabadas se deduce que intuitivamente trataban de responder de esa manera, al saber que la figura era un rombo, que tenía como ejes de simetría a los segmentos BD y EC y que ED y CD son barras del artefacto que miden lo mismo (esto lo conocieron en la respuesta de la primera pregunta). Además también conocían que el punto K se desplazaba sobre el segmento BD. Su razonamiento tuvo que ver con todo lo anterior y se dieron cuenta de que al medir lo mismo las barras ED y CD y saber que dichos segmentos cambiaban de longitud por estar conectados al punto K, los segmentos EK y CK cambiaban de la misma manera y podían medir lo mismo.
- Intuitivamente y por observación pudieron darse cuenta de que los segmentos EK y CK eran iguales, antes de sugerirles que midieran dichos segmentos Uriel respondió inmediatamente que dichos segmentos eran iguales, aún cuando

Gabriela media los segmentos, Uriel seguía mencionando que deberían de medir lo mismo.

- Les costó mucho trabajo tratar de justificar su respuesta, aún cuando habían contestado bien las preguntas anteriores a esta.

8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Los triángulos son congruentes
 "q" son iguales y congruentes. Los lados de KC
 KD tiene como eje de simetría
 $DE = DC$ $KE = KC$

Figura 4.11 Respuesta escrita del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

C?????P???

Los integrantes de dicho equipo conocen el término “congruencia” y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, pero también, a través de la evidencia recabada se observó que no recuerdan los criterios de congruencia distintos al LLL, se deduce que esto ocurre ya que en la actividad los alumnos pueden medir los segmentos con regla.

La pregunta 11 es la siguiente: Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad? Observemos el análisis realizado por el equipo denominado Gabi y Uriel para contestarla:

?????P??P??Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

Tratan de responder la pregunta 11 haciendo los trazos que se les piden. Conforme los van realizando, van haciendo una comparación entre ellos y comentan sus observaciones.

Gabriela:	Bueno ¿este cómo se mueve?, ¿respecto al primer trazo?, ¿cuál fue el primer trazo?
Héctor:	El primero que hicieron en toda la actividad.
Gabriela:	¿La cosa que nos quedó toda chueca?
Héctor:	Aja, la chueca (risas).
	...(Realizan el segundo trazo sugerido)
Gabriela:	Aquí ya va como en un movimiento circular (refiriéndose al segundo trazo), si ¿no?
Uriel:	A ver...estaba así (tratando de colocar el artefacto en los puntos donde lo fijaron para realizar el segundo trazo).
Gabriela:	Observa el trazo (lee parte de la pregunta 11), entre más cerca están los dos puntos más circular es la figura ¿no? Entre más cerca están ambos puntos fijos más circular es la figura, porque cuando estaban separados como que hacían como una elipse.
Uriel:	Sí.
Gabriela:	Entonces cuando los fuimos acercando como que más redonda se va haciendo. Entonces como nos dice que pongamos luego A sobre C va a ser el mismo punto (refiriéndose a que A sobre C será solo un punto único), entonces solamente será como si tuviéramos un compás girando y entonces ya va a hacer un círculo.
Uriel:	Ay, hace lo mismo (mientras realiza el tercer trazo con A sobre C).
	... (Gabriela escribe la pregunta y Uriel termina de realizar el tercer trazo).

O

- La finalidad de esta pregunta es que los alumnos se den cuenta de cómo cambia la elipse cuando la distancia focal va siendo menor (de esta manera se afecta la excentricidad). No se planteó en las hojas de trabajo el otro extremo, es decir cuando los focos se alejan puesto que el artefacto es incapaz de realizar el trazo en dichas condiciones.

C?? ?? ?? ??

A través de la observación del movimiento del artefacto, Gabriela dedujo lo que sucedía cuando alejabas los puntos fijos o los acercabas aún sin realizar dichos trazos. El artefacto por sí sólo y mediante su observación es capaz de brindar valiosa información para deducir características particulares de la figura que traza. De esta manera Gabriela puede asociar su experiencia moviendo el artefacto con los temas vistos en clase correspondientes a la elipse, con esta pregunta se puede llegar a redescubrir y asociar el concepto de excentricidad mediante sus observaciones.

Todas las respuestas anteriores deben de enlazarse para que los alumnos lleguen a definir lo que es una elipse a partir de la información obtenida y puedan responder la pregunta 12, la cual es la siguiente: Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.

A continuación se muestra la manera en que Gabriela y Uriel hicieron frente a dicha cuestión:

????? ?? ??Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

!????? Tratan de responder la pregunta 12 con sus palabras. Revisan las respuestas de preguntas anteriores, mencionan lo que sucedía cuando movían el artefacto y mencionan algunos elementos de la elipse. El proceso es largo y lleno de cuestiones interesantes. Gabriela menciona la definición de elipse a través de un hilo y a partir de eso trata de definir con su compañero lo que es la elipse. Moviendo el artefacto y mediante la observación de él se trató de que los alumnos aclararan sus ideas y respondieran de la mejor manera posible.

Gabriela:	Para formar una elipse necesitaremos dos puntos fijos.
Uriel:	Sí.
Gabriela:	Entonces la definición de elipse es...
Uriel:	¿Te dice que pongas la definición?
Gabriela:	Ajá. Escribe con tus palabras la definición de elipse...
	...(Pasan un tiempo prolongado pensando)
Uriel:	Pero dice que reflexiones sobre tus respuestas anteriores (las señala en sus hojas).
Gabriela:	Y escribe con tus palabras la definición de elipse. Nosotros siempre estuvimos

	manejando los dos puntos, entonces cuando girábamos siempre...
Uriel:	Cuando estaban más separados, salía más... ¿cómo se dice?...la elipse... ¿cómo se dice?
Gabriela:	Ovaladita.
Uriel:	Y si los acercábamos salía más ...
Gabriela:	Más circular se iba haciendo. Entonces es la distancia de entre dos... no... teniendo dos puntos fijos como referencia...
Uriel:	Como nos hizo el maestro con el hilito.
Gabriela:	Ajá.
Uriel:	¿Pero cómo se explica?
Gabriela:	Pues es que se supone que tienes dos puntos fijos de referencia, uno fijo y otro en movimiento, porque teníamos este así (pone 2 lápices simulando que son los focos)... ¡nooo!, los dos estaban fijos. Tenemos esto aquí así ¿no? (dibuja dos puntos en su hoja de trabajo), entonces nosotros tenemos este punto que giraba, por ejemplo aquí (lo dibuja en medio de los dos puntos anteriores). Entonces como en el hilito, tienes un punto fijo y has de cuenta que tuvieras dos, entonces nada más... al girarlo esto se va haciendo como ondular (realiza el trazo de la elipse) y este también se va abriendo hacia acá y este se cierra hacia acá (señala el movimiento del trazo respecto al foco que toma como referencia) cuando este va acá este se abre hacia acá. Entonces tenemos tres puntos.
Uriel:	¿Tres?
Gabriela:	Sí. Dos fijos y uno en movimiento. Entonces, al mover el punto que está en medio de los dos, da forma a una figura elíptica (en su simulación el punto medio era el punto móvil y los puntos extremos los focos).
Uriel:	¿Por qué?
Gabriela:	Porque mientras aumenta de un lado del otro va disminuyendo.
Uriel:	Sí, sí ponle que la distancia de uno aumenta mientras la distancia de otro disminuye.
Gabriela:	Pero le pongo lo de los 3 puntos ¿no? Que tenemos dos puntos fijos y uno en movimiento.
	...(Piensan en voz baja)
Gabriela:	Es una figura geométrica en la que actúan dos puntos fijos llamados focos.
Uriel:	Y al otro que tenemos, ¿cómo se le podría decir?
Gabriela:	Y uno llamado... ¿vértice?, ¿cómo se llama el del centro?, ¿vértice?
Uriel:	No... y uno... ¿cómo se le puede decir?
Gabriela:	Y un punto en movimiento que va marcando... ah es que ¿cómo se le puede decir a un punto en movimiento?
Uriel:	Pregúntale a Arturo.
Gabriela:	Héctor, cuando teníamos la elipse ves que teníamos dos puntos fijos que eran los focos y teníamos cuando trazábamos con el hilito aquí (señala su dibujo), ¿cómo se llama el punto que queda en el hilito, el punto que va marcando el recorrido?, ¿o nada más es un simple punto que marca el recorrido?
Héctor:	Sí, es un punto.
Gabriela:	Un punto a cualquier distancia marcando el recorrido que forma la elipse.
Hec:	Ajá pero ¿cómo es ese punto?... a ver tienes tu hilo aquí y estos son tus focos (hago mi simulación en su hoja de dibujo)...pero si te fijas lo que hace este aparato (contrastando el artefacto con su definición de hilo)...
Gabi:	Este vendría siendo supongamos que el hilito que tenemos.

Héctor:	Ajá, tú me dices que este es él...
Gabriela:	Estos eran nuestros puntos fijos. Has de cuenta que estos son nuestros focos, los dos puntos fijos (señala los puntos A y C en el artefacto fijo) entonces este lo estamos manejando como si fuera el hilito (el artefacto) que al girarlo va marcando nuestra forma de la elipse pero se encuentra respectivamente a una distancia de los focos.
Héctor:	Ajá, ¿y cómo es esa distancia?, ¿cómo es la suma, por ejemplo, de aquí a aquí es una distancia (de K a A) y de aquí a aquí es la otra (de K a C)? Conforme lo gira (el artefacto) ¿qué pasa con esas distancias?
Gabriela:	Aumentan o disminuyen: aumentan de un lado y disminuyen de otro.
Héctor:	Pero al final de todo ¿la suma es distinta en cada movimiento?
Gabriela:	No, es la misma.
Uriel:	Ajá, es la misma.
Gabriela:	Acuérdate que es la misma (recordándomelo).
Héctor:	Exacto, es la misma porque están marcando KA y KC. Entonces lo que tú me dices es que esta es tu cuerda, este es el punto que dibuja en tu cuerda y estos son tus focos (señalo cada parte en el artefacto)...

Observaciones

- En esta pregunta se espera que los alumnos retomen detalles de las preguntas anteriores y mediante la observación del artefacto puedan dar una definición de elipse que se aproxime a la definición formal de elipse como lugar geométrico.
- Algo notable fue que Uriel hubiera mencionado la definición de elipse a través de un hilo. Gabriela intentó dar una explicación de dicha definición primero auxiliándose de dos lápices y después rayando en su hoja de respuestas. En su segunda simulación lo que en otras palabras ella trata de explicarle a Uriel es que cuando jala de la cuerda con el lápiz, mientras lo mueve, uno de los segmentos de un punto de los que ella marcó (foco) al lápiz aumenta de longitud mientras el otro segmento (del otro punto o foco al lápiz) disminuía, y que si movía el lápiz en sentido contrario al primer movimiento ocurría lo contrario, es decir, el segmento que había disminuido de longitud ahora aumenta y el que aumentaba ahora disminuye.

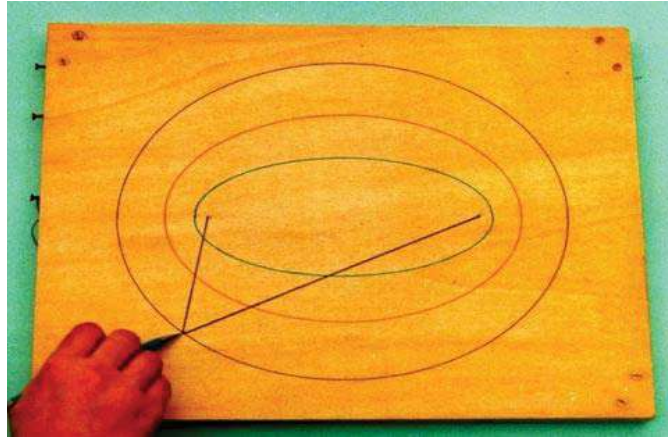


Figura 4.14 Trazado de una elipse mediante el uso de una cuerda.

- Algo muy importante y que ninguno de los dos integrantes de este equipo observó, tomó en cuenta o descubrió, fue que, el movimiento del artefacto era similar al de la definición de elipse por medio de una cuerda al que hicieron mención. De haberlo hecho hubieran respondido inmediatamente dicha pregunta.

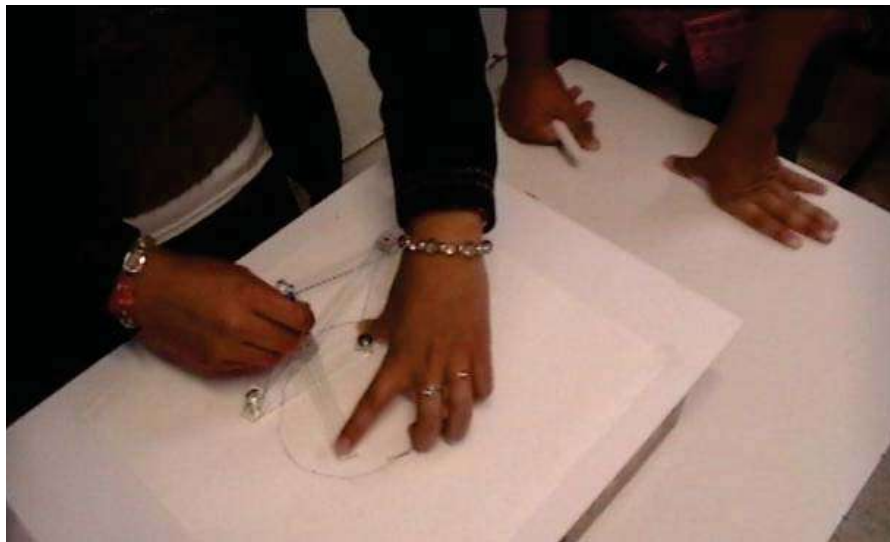


Figura 4.15 Integrantes del Equipo 3 manipulando el artefacto.

- Después de eso los integrantes comenzaron a identificar los puntos importantes de la elipse en su artefacto. Mencionaron que los puntos fijos A y B eran sus focos, que el punto móvil K es el que trazaba la elipse. A través de la observación del

artefacto y del uso de algunas preguntas anteriores pudieron dar una definición de elipse, en función del artefacto.

12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.
- Elipse es una figura plana que se forma al mover un punto en un plano, de modo que la suma de las distancias de este punto a dos puntos fijos (los focos) sea constante. La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es igual a la longitud de la cuerda que pasa por los focos.

Figura 4.16 Respuesta escrita a la pregunta 12 del Equipo 3.

Conclusiones

Los alumnos fueron obteniendo información esencial a lo largo de toda la actividad, no pudieron entrelazar sus observaciones para escribir la definición de elipse. Aún así, era suficiente que solo observaran sus respuestas de la pregunta 8 en adelante para dar una definición. En este caso, Gabriela y Uriel conocían la definición de elipse por medio de una cuerda y un lápiz, la cual tiene similitudes con el movimiento del artefacto. Una vez que lograron comparar su definición a través de una cuerda con el comportamiento del artefacto durante su movimiento lograron dar su definición de elipse.

Definición de elipse es una figura plana que se forma al mover un punto en un plano, de modo que la suma de las distancias de este punto a dos puntos fijos (los focos) sea constante.

Características de la elipse son: es una figura plana, tiene dos focos, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es igual a la longitud de la cuerda que pasa por los focos.

Las primeras preguntas tienen que ver con las figuras que se forman con los segmentos del artefacto así como que segmentos cambian de longitud durante el movimiento y cuales no lo hacen. El enunciado de la pregunta 7 es: Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características.

A continuación veremos lo que contestaron Gabriela y Uriel así como las dificultades y aciertos que tuvieron en la pregunta 7.

¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel)

!¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿En la pregunta 7 los integrantes de este equipo afirmaron que la figura formada por su artefacto fijo era un trapecio. Entonces a partir de ello comienzan a mencionar algunas de sus características y Gabriela las comienza a escribir mientras algunas de ellas son dictadas por Uriel.

Gabriela:	Estos dos no son paralelos en sí (señala los segmentos AB y CD).
Uriel:	No, no son paralelos.
Gabriela:	Entonces se forma un trapecio y luego sus características... tiene cuatro lados.
Uriel:	AC y BD son paralelos.
Gabriela:	¿AC y qué?
Uriel:	AC y BD son paralelos, ¿qué más?
Gabriela:	AB y CD tienen la misma longitud
Uriel:	Pues si quieres (anotarlo).
Gabriela:	¿Y cuáles son las otras características?...tiene un eje de simetría aquí, este de aquí (lo señala en su artefacto fijo), si ¿verdad?
Uriel:	Uju.
Gabriela:	¿Encuentras otra, otra característica?
Uriel:	Que su perímetro siempre será igual aunque cambie a recuadro (se refiere a que si mueve el artefacto su trapecio puede cambiar y ser un cuadrado, esto lo dice mientras observa el movimiento del artefacto). Sí, aunque cambie (ahora observa el artefacto fijo).
Gabriela:	Son las únicas características porque aquí ya lo tenemos de una manera inmóvil (el artefacto) y no se te pide que lo vuelvas a mover. Tiene cuatro lados, AC y BD son paralelos, AB y CD tienen la misma longitud y tiene un eje de simetría.

O¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿

- Es muy importante que los alumnos se den cuenta que la figura formada es un trapecio (isósceles) puesto que esto es la base para llegar a la demostración.
- Los alumnos mantuvieron fijo el artefacto, mencionaron algunas características y después trazaron los segmentos AC y BD. Después de esto quitaron su artefacto y lo colocaron en otra parte tratando de ponerlo en la misma posición que tenía antes de cambiarlo de lugar. Después de esto continuaron observándolo y mencionando características.

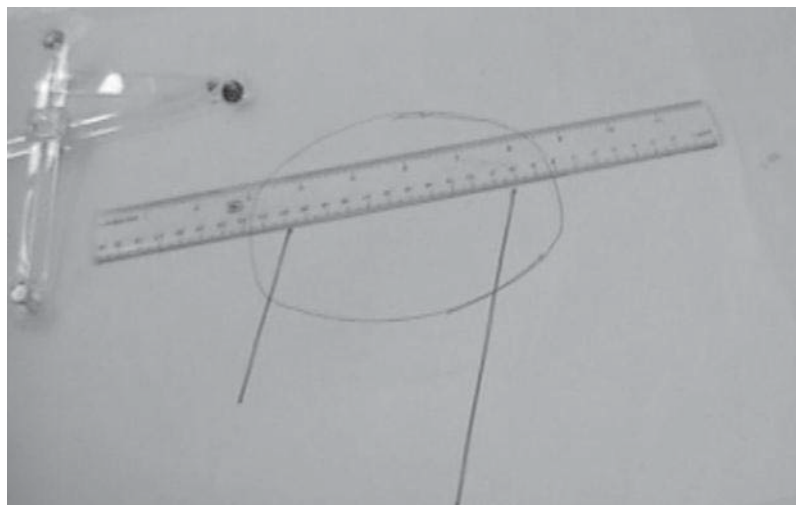


Figura 4.17 El Equipo 3 trazando su trapecio.

- Los integrantes de este equipo mencionan que el trapecio tiene un eje de simetría y Gabriela lo señala en su artefacto. Este hecho es importante, puesto que es fundamental para responder la siguiente pregunta.
- En su respuesta mencionan todas las propiedades del trapecio isósceles aunque no se dan cuenta de ello y sólo nombran a su figura como trapecio.

Ahora deje el artefacto inmóvil de manera que los segmentos AB y CD no sean paralelos y responda lo siguiente:

7. Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características. *Se forma un trapecio.*

Tiene 4 lados, AC y BD son paralelos, AB y CD tienen la misma longitud. Tiene un eje de simetría.

Figura 4.18 Respuesta 7 del Equipo 3 en sus hojas de trabajo.

- Fue importante que los estudiantes se dieran cuenta que al mover el artefacto y mantener paralelo el segmento AB con el CD se forma un cuadrado. Cabe mencionar que las indicaciones sugeridas antes de responder la pregunta 7 se

hacen con la finalidad de evitar llegar a dicha figura, puesto que de esa forma puede haber confusiones para responder las siguientes preguntas.

C??????

Su buena observación, conocimiento y acordarse un poco de sus clases de geometría, fue clave para darse cuenta de la figura que se formaba en las condiciones pedidas en la pregunta 7, así como para rescatar propiedades del trapecio. Lo más importante fue que lograron darse cuenta de que su trapecio tiene un eje de simetría, ya que de allí podrían responder sin ningún problema la pregunta 8.

La pregunta 8 es muy importante y tiene una relación directa con la respuesta de la pregunta 7. En la pregunta 8, la contestación que se espera condiciona el resto de la actividad, donde el enunciado de ésta es el siguiente: Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

Veamos y comparemos las respuestas brindadas por alumnos de los distintos equipos participantes.

?????Gabri y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

?????Leen el anexo de la pregunta 8 el cual contiene la definición de Eje de Simetría. Ellos ya sabían que su trapecio de la pregunta 7 tenía un eje de simetría, así que se enfocan en responder el resto de la pregunta 8 así como a escribirla en sus hojas de trabajo.

Gabriela:	La figura de la pregunta anterior...esta (la señala), ¿tiene algún eje de simetría? Sí (responde)... ¿cómo es el eje o los ejes de simetría respecto al segmento AC y BD?
Uriel:	AC y BD (buscándolos en su figura formada por el artefacto)...que el eje de simetría pasa por sus puntos medios.
Gabriela:	Es perpendicular.
Uriel:	Es perpendicular.
Gabriela:	Entonces, ¿tiene algún eje de simetría? (lee parte de la pregunta 8).
Uriel:	Sí.
Gabriela:	Sí. Traza los ejes de simetría (lee parte de la pregunta 8), ¿los trazamos aquí los ejes

	de simetría? (en su hoja de dibujo).
Héctor:	¿Cuántos ejes de simetría tiene (la figura)?, ¿si vieron el anexo?
Uriel:	Sí. Nada más tiene uno.
Gabriela:	Tiene uno.
Héctor:	¿Y cómo es ese eje de simetría a los segmentos AC y BD?
Gabriela:	AC y BD perpendicular, ¿lo trazamos aquí arriba (hoja de dibujo) o aquí en una figurita (en su hoja de trabajo)?
Héctor:	Si quieres nada más en la figurita, si quieres también acá (en su hoja de dibujo), si quieres en las dos.

Observación

- En esta pregunta se espera que los alumnos mencionen que su trapecio tiene un eje de simetría, que dicho eje divide en dos a ambos segmentos (AC y BD) así como que es perpendicular a ellos.
- Cabe mencionar que para responder dicha pregunta se les proporciona un anexo a cada equipo, el cual viene al final de sus hojas de trabajo. Dicho anexo contiene la definición de eje de simetría.
- Este equipo anteriormente había respondido que su trapecio tenía un eje de simetría. Uriel se da cuenta de que el eje de simetría divide a los segmentos AC y BD a la mitad y Gabriela menciona que es perpendicular a ellos.

8. Lee el anexo 1 que se encuentra al final de las hojas.

Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

Si. el eje es perpendicular a AC y BD, y forma 4 ángulos de 90°

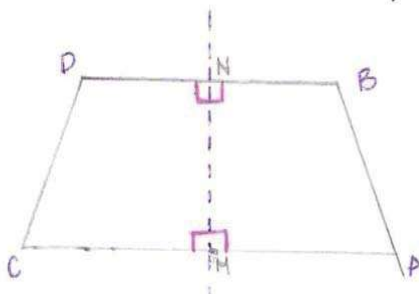


Figura 4.19 Respuesta escrita de la pregunta 8 del Equipo 3.

Conclusión

Gracias a su respuesta 7 pudieron contestar magistralmente la pregunta 8. Algo importante que notaron fue que el eje de simetría forma ángulos rectos con los segmentos BD y AC, puesto que esto puede ayudarles para obtener la respuesta de la pregunta 10. Los alumnos realmente estaban interesados en esta actividad y pusieron de manifiesto conocimientos adquiridos en semestres anteriores.

Ahora veamos lo que discutieron en el equipo de Los MS en la misma pregunta y hagamos una comparación entre su respuesta y la respuesta de Gabi y Uriel.

Los MS (Diana, Eduardo) y Héctor.

Los alumnos anteriormente descubren que al dejar fijo el artefacto en la posición sugerida se les forma un trapecio. Tratan de responder la pregunta 8, y mencionan equivocadamente que su trapecio tiene tres ejes de simetría, así que se les lee el Anexo 1 y se les trata de guiar para que respondan adecuadamente.

Diana:	Uno es este (señala un eje de simetría, el cual es de hecho el único que tiene el trapecio) y otro...
Eduardo:	Bueno, ¿no es cierto que tiene tres?, ¿no?
Héctor:	¿Sí?, ¿cuáles serían?
Eduardo:	Éste allí (señala el segmento AD), éste acá (ahora señala el BC).
Diana:	No, pero es que van a quedar igual, al doblarlos ...
Héctor:	Bueno, yo les di la definición de eje de simetría, entonces se las voy a leer: Una línea que atraviesa una figura de tal manera que cada lado es el espejo del otro. Con eso es suficiente, ¿cuál otro me dices? (refiriéndome a que otro eje de simetría), ¿éste? (señalo el segmento BC).
Diana:	No, éste (señala el perpendicular a AC y BD), bueno éste sí es.
Héctor:	Tú me dices que éste sí es (señalo el segmento BC dirigiéndome a Eduardo), crees que si lo dobláramos para tratar de unir el punto B ¿quedaría sobre el punto C o quedaría volando?
Diana:	¡No!, es que no.
Héctor:	A ver, lo tendríamos como si dobláramos esta hoja (hago una simulación con una hoja rectangular de papel), éste punto pues queda arriba del otro (uno dos orillas de la hoja) ¿no?
Diana:	Sí, quedan igual.
Héctor:	Pero crees que aquí (en la figura formada por su artefacto) si lo doblas como si fuera una tortilla ¿va a quedar éste (señalo el punto C) en algún otro punto?
Diana:	No, esto va a quedar acá en otro lado.
Héctor:	Entonces ¿sería eje de simetría o no?

Diana:	No.
	...(Eduardo se queda pensativo)
Héctor:	Entonces ¿cuántos ejes de simetría tiene?
Eduardo:	Solamente tiene uno.
Diana:	Ajá, porque si lo doblamos así queda éste punto con éste (se pega el punto B con el D) y éste con éste (A con C) (menciona eso mientras señala el eje de simetría que pasa por el punto E, perpendicular a los segmentos AC y BD).

Oportunidades de aprendizaje

- A diferencia del equipo de Gabi y Uriel, los MS respondieron en la pregunta 7 lo siguiente: es un trapecio, tiene 4 lados, 4 vértices, eje de simetría y también se puede decir que es paralelogramo. Su respuesta no es de lo más rescatable puesto que con “eje de simetría” dan lugar a pensar que puede tener uno sólo o más de uno, así como que también no se sabe su ubicación. Otro error es que mencionaron que su figura es un paralelogramo, puesto que un paralelogramo es una figura de cuatro lados con dos pares de lados paralelos.
- En el diálogo Eduardo y Diana están confundidos. Eduardo menciona que su trapecio tiene tres ejes de simetría cuando sólo tiene uno. Lo que ocurrió es que Eduardo se confundió pensando que las diagonales del trapecio eran ejes de simetría, puesto que inclusive las señala en el artefacto como tales.
- Se trató de darles una explicación con una hoja de papel, doblándola y marcando sus ejes de simetría, se les dijo que cada una de las orillas de un lado de la hoja deben de quedar exactamente en las orillas contrarias. Diana logra entender y menciona que su trapecio tiene un sólo eje de simetría y señala el correcto. Luego imaginamos que el trapecio formado por el artefacto podía doblarse y se le preguntó a Eduardo que si lo doblara por el segmento CB (diagonal) ocurriría lo que pasaba con la hoja de papel y se quedó pensativo. Después mencionó que el trapecio sólo tenía un eje de simetría y lo señaló (el correcto).

En el diálogo que sigue a continuación, el equipo de los MS responde completamente la pregunta 8 mencionando cuantos ejes de simetría tiene su trapecio y como es respecto a los segmentos AC y BD.

Los MS (Diana, Eduardo) y Héctor.

Eduardo lee la respuesta de la pregunta 8 y menciona las propiedades del eje de simetría en su trapecio.

Héctor:	¿Es la respuesta 8?, ¿qué dice?
Eduardo:	Sí, tiene un eje de simetría, es perpendicular (a los segmentos AC y BD) y atraviesa la mitad del segmento de cada una (de los segmentos que menciona la pregunta los cuales son AC y BD).

8. Lee el anexo 1 que se encuentra al final de las hojas.

Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

Si, tiene 1 eje de simetría es perpendicular y
atraviesa la mitad del segmento de AC, y
El eje queda a la mitad y al momento de doblarlo
el punto A y D coinciden al igual que el punto B y C

$$AB = CD$$

Figura 4.20 Respuesta escrita del Equipo 2 para la pregunta 8.

C

Los integrantes del equipo de los MS incluyendo a algunos alumnos más, tienden a confundir lo que es un eje de simetría con una diagonal. Piensan que toda diagonal es un eje de simetría, lo que no es cierto aunque en ocasiones coinciden. Se observó falta de comprensión de la lectura, puesto que en sus hojas de trabajo se incluía un anexo con la definición de eje de simetría de una manera muy clara y concisa, pero la cual no comprendieron.

En lo que respecta a las preguntas 9, 10 y 11 los alumnos tienen que comparar algunos triángulos. Al parecer esta actividad fue lo que más dificultad causó entre los grupos participantes. La pregunta 9 es la siguiente: Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el

segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Analicemos sus respuestas así como el pensamiento e ideas que manifestaron. Comencemos con el tratamiento dado a la pregunta 9 por el equipo Gabi y Uriel:

👤👤👤👤👤👤 Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

👤👤👤👤👤👤 En la pregunta 9, los alumnos tienen serias dudas acerca de las congruencias en los triángulos. Se les explica cuándo dos triángulos son congruentes, así como los diferentes tipos de congruencias que hay. De esa explicación, Gabriela empieza a mencionar por qué los triángulos BEN y DEN pueden ser congruentes. Se les intenta guiar con algunas preguntas, para que ellos se den cuenta del tipo de congruencia que se trata y la expliquen, pero en el transcurso surgen algunas dudas y problemas para llegar a lo esperado.

Héctor:	¿Cuál están respondiendo?
Gabriela:	La 9, la de los triángulos (señala los triángulos en su hoja de dibujo). ¿Un triángulo congruente es aquél que está dividido por un eje, por una línea? (me cuestiona).
Héctor:	No, eso no es congruencia, pero las congruencias se dan cuando tienes triángulos iguales, por ejemplo: tienes un triángulo de esta forma (dibujo dos triángulos en su hoja de dibujo) y tu dices que es congruente con este, si este lado es igual a este, este lado es igual a este, este lado también es igual a este (señalo en mis triángulos los lados correspondientes en cada triángulo) y los ángulos interiores correspondientes también son iguales. Entonces hay varios tipos de congruencias: puede haber congruencias cuando tienes los tres lados iguales, otra cuando tienes un ángulo igual un lado igual y un ángulo igual...
Gabriela:	Entonces estos podrían ser congruentes porque éste es igual a éste (señala los lados BE y ED), éste es igual en los dos (señala el lado NE) y éste a éste (BN al ND) y también son triángulos opuestos por el eje porque nada más los divide este (señala el eje de simetría)
Héctor:	Pero a parte ¿qué es lo que afecta el eje de simetría?, para empezar ¿qué pasa con el segmento BD y el eje de simetría?
Gabriela:	BD y el eje de simetría...es perpendicular con BD.
Héctor:	Pero la propiedad del eje de simetría, ¿qué hace en este segmento (BD)? Por ejemplo tienes este segmento que mide no sé... (Gabriela interrumpe).
Gabriela:	Lo divide a la mitad.
Héctor:	¿Lo divide a la mitad?
Gabriela:	Sí.
Héctor:	Entonces ¿qué pasa con el segmento DN y el NB?, ¿cómo son? Tú me dices que los divide a la mitad ¿verdad? (haciendo referencia en su dibujo al eje).
Uriel:	Sí.
Héctor:	¿Entonces cómo son el segmento ND y BN?

Gabriela:	Son iguales.
Héctor:	¿Son iguales?
Gabriela:	Sí.
Héctor:	¿Y este ángulo cómo me dijiste qué era allí en tu respuesta? (señalo el ángulo DNE y hago referencia a su respuesta de la pregunta 7, puesto que allí dibujaron un trapecio con un eje de simetría donde ubican 4 ángulos rectos).
Gabriela:	Es un ángulo de 90° .
Héctor:	¿Y este también va a ser de 90° ? (señalo el ángulo ENB).
Gabriela:	Sí, también. Entonces por ejemplo que nos dice que el triángulo BEN y DEN ¿Cómo son entre ellos? (refiriéndose a la pregunta en cuestión), entonces podemos decir que son congruentes porque todos sus lados son los mismos.
Héctor:	Ajá. Pueden ser dos tipos de congruencias en este caso. Tienes un ángulo (señalo el ángulo BNE en su hoja de dibujo), tienes éste lado que es igual a éste (señalo que $BN=ND$) y éste lado (NE) es igual pues es común para los dos, entonces es una congruencia que llamamos lado ángulo lado.
Gabriela:	¿Lado ángulo lado?
Héctor:	Ajá, o también puedes decir que es por lado lado lado (LLL) porque ya sabes que lados son iguales así como también este ángulo (menciono el ángulo refiriéndome a lo que ya conocen).
Gabriela:	Entonces le voy a poner que tienen congruencia con lado ángulo lado.
Héctor:	Ajá. ¿Y puedes decir qué lados son iguales?, ¿y cuál es el ángulo?, por favor describir la congruencia.

Oportunidades

- Aquí lo que se espera es que los alumnos puedan llegar a que se trata de una congruencia LAL puesto que el eje de simetría divide en dos al segmento BD, haciendo $BN = DN$. El eje de simetría es perpendicular a los segmentos AC y BD formando ángulos rectos con los segmentos BN y DN, y como además comparten el segmento NE, de allí sale la congruencia LAL.
- Se les explica la definición de congruencia mediante unos triángulos que fueron dibujados en una hoja puesto que estaban un poco confundidos. Tienen idea de lo que es el concepto pero así mismo tienden a confundirlo, en este caso con simetría. Después de eso Gabriela me dice que los triángulos en cuestión son congruentes prácticamente por LLL aunque sigue pensando en simetría.

C???

Los alumnos no pudieron obtener una congruencia, aún cuando pudieron auxiliarse de la medición de segmentos. Tuvieron serios problemas para observar los triángulos trazados en su trapezio y enlazar algunas características que habían mencionado en las preguntas 7 y 8 para obtener que sus triángulos BEN y DEN eran congruentes. Llegaron a ello gracias una serie de preguntas hechas por el profesor investigador y recapitulando las respuestas a las preguntas mencionadas anteriormente. Se nota claramente que no recuerdan bien lo que es una congruencia ni mucho menos los posibles criterios.

De manera análoga, observemos lo que los integrantes del equipo Los MS razonaron mientras trataban de responder la pregunta 10, la cual dice lo siguiente: Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Los MS (Diana, Eduardo) y Héctor.

Tratan de comparar los triángulos MEA y MEC correspondientes a la pregunta 10. Diana y Eduardo mencionan que dichos triángulos son congruentes usando que el eje de simetría los divide y por eso dichos triángulos son simétricos. Ellos en preguntas anteriores han medido segmentos y conocen sus medidas. Al final proporcionan el por qué los triángulos son congruentes.

Diana:	Son congruentes.
Héctor:	¿Sí?, ¿por qué son congruentes?
Diana:	Porque también al doblarlos son congruentes (al doblar los triángulos por el eje de simetría que encontraron en su trapezio).
Eduardo:	O sea al momento de que esta diagonal de este triángulo (señala el segmento EM) si lo doblamos a la mitad el punto A queda sobre el punto C.
Héctor:	¿Pero cómo son sus lados?
Eduardo:	El lado AE...(es interrumpido por Diana)
Diana:	Tienen la misma longitud.
Eduardo:	Es lo mismo que el segmento CE, sí ¿no?
Héctor:	¿Cuál?
Eduardo:	El segmento AE es lo mismo que el CE.
Héctor:	¿Y cómo es el segmento MA y el MC?
Diana:	Tienen la misma longitud.
Héctor:	¿Por qué?
Diana:	Porque es el eje de simetría EM, y el punto M está en el eje de simetría, entonces ya

	están a la mitad (refiriéndose a los segmentos MA y MC).
Eduardo:	¿Entonces anotamos eso? (refiriéndose a las preguntas que les había hecho)
Héctor:	Depende de lo que tú quieras responder.

02222222222222

- La justificación es análoga a la de la pregunta 9.
- Diana y Eduardo respondieron lo siguiente en la pregunta 9:

9. Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Porque son 2 triángulos congruentes entre si, tienen un ángulo de 90° y son congruentes porque N está a la mitad del segmento BD y el punto E también en medio y al doblarlo el punto B y D coinciden $\triangle BEN \cong \triangle DEN$

Figura 4.23 Respuesta escrita de la pregunta 9 del Equipo 2.

- De haber respondido de una manera más acertada (que los triángulos eran congruentes por LAL o en su defecto LLL), inmediatamente hubieran respondido esta pregunta.
- Al principio intentan demostrar que los triángulos son congruentes porque al doblarlos se pegan uno sobre otro, es decir, utilizan el concepto de que ambos triángulos son simétricos. Se presenta la misma situación que tuvo el equipo llamado Gaby y Uriel. No pueden dar como razón esa para determinar que los triángulos MEA y MEC son congruentes.
- Se les guió a través de unas sencillas preguntas, las cuales responden muy bien. En una de ellas Eduardo responde que los segmentos AE y CE son iguales, de acuerdo a la evidencia recabada se dedujo que respondió eso porque midió los segmentos (eso no aparece en el video). En otra, Diana dice que los segmentos MA y MC tienen la misma longitud, explicando en otras palabras que EM era parte del eje de

simetría y por eso M pertenecía a dicho eje, y como el eje divide al segmento AC en dos entonces $AM = CM$.

10. Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes tienen 1 ángulo de 90° AM tiene la misma longitud que MC y CE que AE por que el punto M es el eje de simetría el cual esta a la mitad del segmento AC

$$\triangle CEA \cong \triangle MEA$$

Figura 4.24 Respuesta 10 del Equipo 2 en sus hojas de trabajo.

Contexto

Trataron de responder que los triángulos MEA y MEC eran congruentes usando que eran triángulos simétricos, es decir que uno era espejo de otro, de acuerdo a las características de la figura que los contiene (trapezio) y que habían observado anteriormente. De allí queda claro que los integrantes de este equipo no recuerdan lo que es una congruencia y posiblemente tampoco recuerden los posibles criterios.

Ahora, el siguiente diálogo, mostrará la respuesta que dio el razonamiento usado por los Sexys para responder la misma pregunta 10, así como para comparar si tuvieron dudas o usaron conceptos parecidos a los del equipo de Los MS.

Los Sexys (Luz, Jorge) y Héctor.

Los integrantes de este equipo se encuentran justificando la pregunta 10, en donde responden que los triángulos MEA y MEC son congruentes. Tratan de explicar su respuesta.

Jorge:	¿Cuáles son congruentes aquí?
Luz:	Por eso, allí te va. Ponle...el segmento AE es congruente (observa con atención el artefacto).
Jorge:	¿Cuál?
Luz:	AE es congruente con el segmento CE... y luego el segmento AM es congruente con el segmento CM.
Jorge:	Y ambos comparten (lo interrumpe Luz)...
Luz:	Ambos triángulos comparten el segmento ME...

Héctor:	¿Cuáles triángulos estás tomando en cuenta para responder la pregunta 10?
Jorge:	Éste y éste, estos dos (señala los triángulos MEA y MEC).
Luz:	Estos dos (los señala) y aquí nosotros decimos que los triángulos también son congruentes.
Héctor:	¿Sí?, ¿por qué?
Luz:	Porque ... (Jor la interrumpe)
Jorge:	Porque su lado, su segmento AE y el EC son congruentes, igual que el W, digo el M.
Luz:	El MC y el MA tienen la misma longitud.
Jorge:	Y comparten el ME (lo señala en su dibujo).
Héctor:	¿Y por qué me dicen que el segmento MC y MA tienen la misma longitud? (señalo dichos segmentos)
Jorge:	Pues porque...
Luz:	Pues porque...
Jorge:	El punto M... (es interrumpido por Luz)
Luz:	Está a la mitad del segmento AC.
Héctor:	¿Por qué es la intersección del eje de simetría?
Luz:	Sí.
Héctor:	Ok. En la siguiente pregunta quiero que se auxilien de estas dos que acaban de responder para tratar de contestarla.

Observaciones

- A diferencia del equipo anterior, Jorge y Luz contestaron de una mejor manera la pregunta 9. Respondieron que los triángulos BEN y DEN eran congruentes puesto que todos los lados eran iguales, indicando que lados correspondientes medían lo mismo. De esta manera lograron darse cuenta de que la respuesta a esta pregunta (pregunta 10) era análoga a la anterior.

9. Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes ya que la longitud de sus tres lados son iguales y sus ángulos también son iguales. $AE \cong BE$ el BE $BN \cong DN$ y ambos triángulos comparten el segmento NE

Figura 4.25 Respuesta escrita del Equipo 4.

- Luz le dictaba la respuesta a Jorge para que él la escribiera aunque Jorge también observaba el artefacto y hacía comentarios. Su respuesta quedó muy parecida a la de la pregunta 9.

10. Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes ya que la longitud de sus tres lados son iguales y sus ángulos también son iguales. $AE \cong CE$ y $AM \cong CM$ y ambos comparten el segmento ME. el segmento AM y CM iguales ya que en es el eje de simetría.

11. Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los

Figura 4.26 Respuesta escrita de la pregunta 10 del Equipo 4.

Construcción de la respuesta

Los integrantes de este equipo demostraron saber lo que es una congruencia, aunque posiblemente no recuerden los distintos criterios. Algo importante fue que se auxiliaron de la medición de segmentos y por esta razón, en esta pregunta y en la anterior respondieron que los triángulos en cuestión eran congruentes por LLL.

Observemos detalladamente el análisis de la respuesta dada por Los Sexys a la pregunta 11, de la cual su enunciado es el siguiente: Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Justifica tu respuesta.

Los Sexys (Luz, Jorge) y Héctor.

Ahora responden la pregunta 11 y tratan de justificar por qué los triángulos AEB y CED son congruentes. Se auxilian con algunas de las respuestas anteriores.

Luz:	Estos triángulos son congruentes.
Héctor:	¿Sí?, ¿por qué?
Luz:	Porque... (la interrumpe Jorge)
Jorge:	Porque sus segmentos AE y EC son congruentes igual que el BD y el ED (los señala en su dibujo).

Luz:	Y la longitud de estos segmentos es la misma, es igual (señala los segmentos CD y AB).
Héctor:	¿Y cómo dedujeron que estos lados eran iguales? (señalo los segmentos CD y AB).
Luz:	¿Cómo que eran iguales?
Jorge:	¿Qué éste y éste son iguales? (señala los segmentos EC y EA).
Héctor:	Ajá.
Luz:	Ahhh... pues....
Jorge:	Pues se supone que miden lo mismo.
Luz:	No, espérate.
Héctor:	Sí, pero las preguntas anteriores ¿qué les dicen?
Jorge:	Ah pues porque en la pregunta anterior pusimos que éste y éste son congruentes (señala los segmentos AE y CE), igual también pusimos que éste y éste son congruentes (señala los segmentos BE y DE).
Héctor:	¿Y cómo saben que el AB y CD miden lo mismo?
Luz:	Ah pues porque...
Jorge:	Por que ya lo habíamos medido y tienen la misma longitud.

Objetivos de la actividad

- Aquí se espera que los alumnos consideren las respuestas anteriores: en la pregunta 9 obtienen que $BE \cong DE$, y de la 10 conocen que el lado $AE \cong CE$, y como ya midieron los segmentos, saben que el segmento $AB \cong CD$ (LLL). Algo más rígido nos diría que se trata de una congruencia LAL puesto que conocemos que $BE \cong DE$, los ángulos BEA y DEA son opuestos por el vértice, de donde se deduce que los ángulos BEA y DEA son congruentes y como conocemos que $AE \cong CD$ se cumple la congruencia.

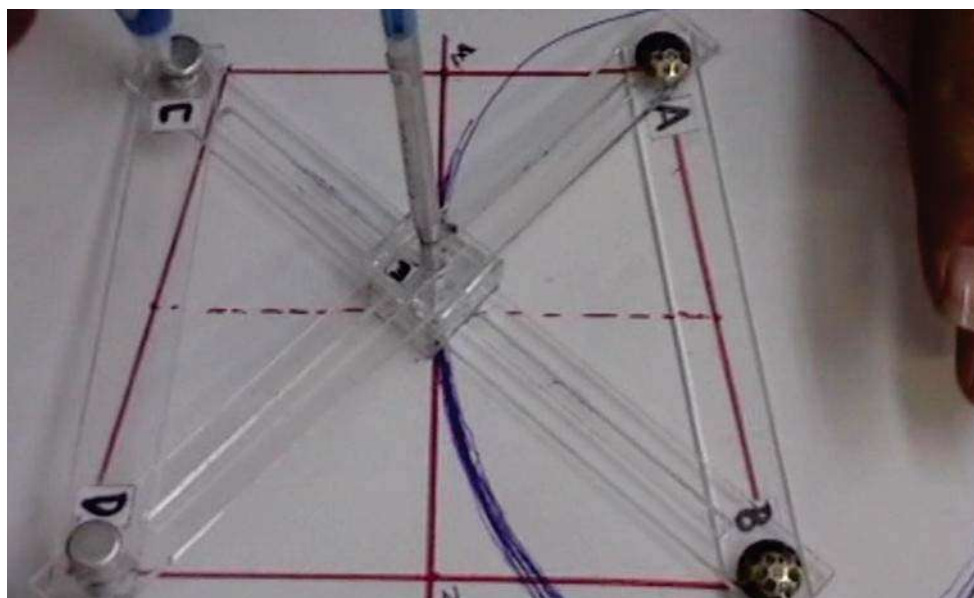


Figura 4.27 Manera en que los integrantes del Equipo 4 hicieron las comparaciones de los triángulos pedidos en las preguntas 9, 10 y 11.

- Jorge y Luz sí se auxiliaron de las dos respuestas de las preguntas anteriores, y comienzan por decir que los triángulos son congruentes porque sus segmentos AE y CE eran congruentes (respuesta 10) y que la longitud de AB era igual que la de CD. Se les preguntó que cómo saben que $AB = CD$ y responden que porque ya los habían medido. Después se les sugirió que se fueran en orden y contesten con lo que ya saben, responden que $AE \cong CE$, $BE \cong DE$ y que los segmentos AB y CD son congruentes porque ya los habían medido.

11. Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Justifica tu respuesta.

Son congruentes porque el segmento AB y el CD tienen la misma longitud. AE y CE $AE \cong CE$ ya que habían sido medidos estos segmentos $EB \cong DE$ ya que también habían sido medidos.

Figura 4.28 Respuesta correspondiente a la pregunta 11 del Equipo 4.

C???

Lograron enlazar las preguntas anteriores para poder responder esta, además de ayudarse con la observación de su artefacto. Descubrieron por respuestas anteriores que ya tenían garantizados dos lados congruentes. Por último ellos ya sabían que los segmentos AB y CD medían lo mismo, lo que hizo que respondieran adecuadamente. Hubo una buena dinámica entre los integrantes de este equipo.

Hagamos una comparación entre lo razonado por el equipo anterior y el proceso realizado por el siguiente equipo en la pregunta 11:

??Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.

Los integrantes tratan de responder la pregunta 11. En esta ocasión intentan comparar los triángulos AEB y CED, en donde se les sugiere que se auxilien de preguntas anteriores. Gabriela menciona que son triángulos congruentes y trata de explicar la congruencia, pero en ello se equivoca confundiendo conceptos y obligando a que se le guíe recordando lo que ya conoce de las respuestas anteriores. De esta manera pudieron deducir la congruencia correspondiente.

Héctor:	A ver ¿en qué pregunta van?
Gabriela:	En la once.
Héctor:	¿Qué triángulos les pide allí?
Gabriela:	Éste y éste (señala los triángulos CED y AEB en su hoja de dibujo).
Héctor:	Allí les pido que se ayuden de respuestas anteriores.
Gabriela:	Sí.
Héctor:	En las respuestas anteriores tú me dijiste que estos dos triángulos eran congruentes (BNE y DNE).
Gabriela:	Ajá, porque eran lado ángulo lado (refiriéndose a la congruencia).
Héctor:	Si, ¿pero recuerdas que te explique qué se necesita para ser una congruencia? O sea sí, ese criterio funciona, pero cuando te dije que un triángulo era congruente a otro cuando tenían sus lados iguales y ángulos iguales. De la forma en que tu dijiste, que era lado ángulo lado tu ya me garantizas de que por ejemplo este lado (BE) tiene que medir una cierta distancia y no puede cambiar debido a este ángulo (BNE). Por ejemplo si tuvieras el ángulo más abierto (BNE), si no fuera de 90°, el lado BE tendría que ser mayor ¿no?
Uriel:	Sí.
Héctor:	Igual si lo cierras (me refiero al ángulo BNE) tendría que ser más chiquito (el lado BE), pero como tu ya tienes una congruencia lado ángulo lado entonces ya no te queda más que sea de un cierto tamaño ese lado (el lado BE) y en éste triángulo pasa lo mismo (señalo el triángulo DEN), tienes este lado igual (DN=BN), éste es

	igual para los dos (NE) y un ángulo. Entonces de esas congruencias tu ya dedujiste que estos lados son iguales (DE=BE) por lo anteriormente mencionado. Ahora éste...
Gabriela:	Se supone que éste ángulo es igual a éste (señala los ángulos ECD y EAB), éste es igual a éste (ángulos EDC y EBA) y estos dos son iguales (señala los ángulo DEC y BEA).
Héctor:	¿Por qué?
Gabriela:	Estos están opuestos por el eje (señalando los ángulos DEC y BEA) y entonces estos son...ay es que nuestro maestro no recuerdo como nos había dicho... pero el chiste es que tenemos esto así y estos son iguales (hace un dibujo donde muestra ángulos opuestos por el vértice)... son ángulos complementarios, en este caso (los remarca en su dibujo y señala cuales son iguales entre sí)...
Héctor:	¿Qué necesitas para que sean complementarios? Su suma debe de ser de 180° y allí, ¿crees que midan 180° ?
Gabriela:	No.
Uriel:	No creo.
Héctor:	¿Entonces? A ver, ya sabes que estos dos lados son iguales (DE y BE). En la otra pregunta tú me dijiste... ¿qué respondiste?
Gabriela:	Lo mismo que en la otra (en la 9) nada más le cambie las letras porque son los mismos triángulos nada más que volteados.
Héctor:	Entonces por la misma razón ya sabes que éste lado es igual a éste (CE=AE) y entonces ya tienes dos lados iguales (en sus triángulos CED y AEB correspondientes a esta pregunta).
Gabriela:	¿Se puede decir que los dos triángulos son simétricos?
Héctor:	No, pero a ver, al principio me dijiste que había dos barras que eran iguales ¿no?
Gabriela:	Sí... estas tenían el mismo tamaño (señala las barras BA y DC).
Héctor:	Entonces ¿qué puedes deducir ya de todo eso, ya revisando las preguntas anteriores?
Gabriela:	Que son del mismo tamaño.
Uriel:	Estos dos (señala los triángulos DEC y BEA).
Gabriela:	Es que los dos triángulos son del mismo tamaño, sus lados tienen la misma longitud, tienen el mismo perímetro, la misma área, tienen todo igual.
Héctor:	Entonces ¿cómo serían estos triángulos?...
Gabriela:	Son congruentes por lado lado lado (LLL).

O???????????

- Se le guía a Gabriela para que pueda responder que los triángulos AEB y CED también son congruentes. Se trata de hacerlo recordándole lo que ya conoce de sus dos respuesta anteriores (fueron el único equipo que respondió que los triángulos de las preguntas 9 y 10 eran congruentes por LAL).
- Se les explica y se espera que quede claro lo que es una congruencia LAL. Se les dice que cuando tienen un lado en común congruente y un ángulo congruente entre dicho lado y otro lado congruente (el ángulo está formado por esos dos

lados) el tercer lado ya queda dado por default puesto que no puede medir más. Se les muestra con un ejemplo, de que el ángulo formado por los dos lados congruentes es de 90° , que si ese ángulo se abriera y midiera más de 90° entonces el tercer lado que no conocemos aumentaría de tamaño, y que si el ángulo midiera menos de 90° entonces el tercer lado disminuiría.

- Gabriela comprende bien lo anterior y señala que entonces los ángulos de los triángulos AEB y CED son iguales y los señala a pares ECD y EAB, EDC y EBA, DEC y BEA, se le pregunta por qué y responde que están opuestos por el eje. No recordaba como le había dicho su maestro que se llamaban pero dijo que eran suplementarios. En esta ocasión el profesor investigador cometió un error al no corregirla y decirle que eran ángulos opuestos por el vértice, pues de haber sido así ella hubiera respondido que se trataba de una congruencia LAL. Sin embargo en lugar de eso, se le aclaró que para formar ángulos suplementarios se necesita que su suma sea de 180° .

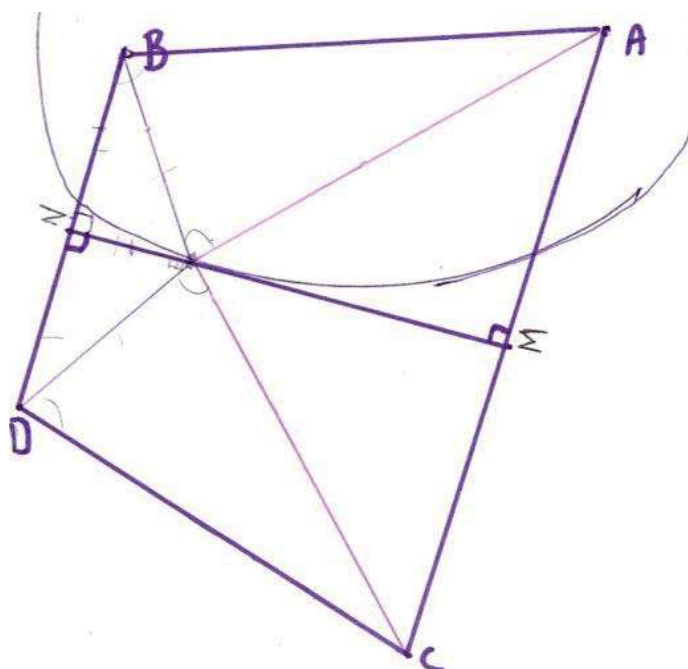


Figura 4.29 Dibujo hecho por el equipo 3 donde se muestran los triángulos analizados así como algunos otros trazos y marcas.

- Se continuó con la postura de guiarlos a partir de lo que conocían de respuestas anteriores y desesperada Gabriela pregunta si puede decir que se trata de triángulos simétricos, a lo que se le responde que no, pero se le recuerda que al principio de la actividad habían mencionado que las barras AB y CD tenían la misma longitud. Al final de todo, respondió que los triángulos eran congruentes por LLL.

11. Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores. ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Justifica tu respuesta. Son triángulos congruentes ya tienen todos sus lados iguales, en la pregunta 9 nos dimos cuenta que BE es igual ED, en la pregunta 10 dijimos que AE = EC en la pregunta 4 deducimos que AB y CD son iguales por estas razones sabemos que son iguales ya que los segmentos conforman los triángulos.

Figura 4.30 Respuesta de la pregunta 11 del Equipo 3.

Conclusiones

Este equipo respondió las preguntas 9 y 10 bien, por lo que podrían haberse ayudado de esas respuestas para responder sin mayores complicaciones la 11, sin embargo, casi logran responderla de la misma manera que las anteriores. Hay diferentes confusiones de conceptos, como la que hay entre congruencia y simetría. La confusión principal se dio cuando Gabriela confundió ángulos opuestos por el vértice con ángulos suplementarios, aún cuando se trata de conceptos completamente distintos. Esto quiere decir que algunas de las bases que los alumnos necesitan para ir subiendo de nivel, están por debajo de lo esperado y debería de retomarse un trabajo más serio para tratar de solucionar estos detalles.

En las preguntas 12 los equipos debían medir la suma de los segmentos $AE + EB$ y ver si con cualquier posición del artefacto dicha suma era constante. En la 13 debían verificar de respuestas anteriores si hay alguna barra del artefacto que midiera lo mismo que la suma anterior.

El punto clave corresponde a la pregunta 14, la cual dice lo siguiente: Reflexiona sobre tus respuestas anteriores y escribe con tus palabras que es una Elipse. Aquí los alumnos deben ver las respuestas anteriores y unirlos para construir por sí mismos la definición formal de elipse a partir de la manipulación y observación que los alumnos hicieron del artefacto, así como de la medición de algunos de sus segmentos.

Veamos las respuestas de algunos de los equipos, observemos algunos errores que cometieron así como aciertos que tuvieron al responder dicha pregunta, además de su pensamiento y dificultades a las que se enfrentaron.

Los MS (Diana, Eduardo) y Héctor.

Se encuentran tratando de responder la pregunta 14, intentando decir con sus palabras la definición de elipse. Se les menciona que pueden auxiliarse a través de las preguntas que previamente respondieron. Discuten entre ellos tratando de llegar a tal definición y hacen varios comentarios donde se aprecia que tienen una idea la cual no es muy clara. Al final son capaces de dar una definición de elipse mencionando algunas de sus características obtenidas mediante el movimiento del artefacto.

Héctor:	Este punto al moverse (el punto K) va dibujando una figura, ¿qué figura es?
Diana:	La elipse.
Eduardo:	La elipse.
Héctor:	En otras preguntas han respondido que la suma de estas dos distancias es igual en cualquier posición.
Eduardo:	Ah, sí es cierto.
Héctor:	Esto les da vueltita ¿no? (muevo el artefacto a partir del punto K).
Eduardo:	Sí.
Héctor:	Y sigue dibujando, entonces va a ser la suma igual, entonces ¿qué sería la elipse? A ver trata de definirla a partir de allí...
Diana:	Es una figura que tiene...
Eduardo:	Este... son dos...

Diana:	Es una figura que tiene dos focos y en la cual su suma siempre es igual.
Héctor:	Siempre es igual, pero ¿a qué?
Diana:	¿Al... punto móvil?
Eduardo:	O sea su... siempre es la... ¿cómo se llama?
Héctor:	A ver ¿qué pasa?
Eduardo:	Es que no se como definirlo.
	... (Los alumnos se quedan un tiempo pensativos y animándose entre ellos).
Eduardo:	Que al moverse, o sea los dos puntos son fijos (señala los puntos A y B) y la distancia... la suma de aquí a aquí (de A a K) y de aquí a aquí (de B a K) es lo mismo...
Diana:	Aumenta cuando disminuye éste y éste disminuye cuando el otro aumenta.
Eduardo:	Entonces si hacemos esto (moviendo el artefacto), esto aumenta y si hacemos esto acá éste aumenta y éste disminuye (en el movimiento señala qué segmento aumenta y cuál va disminuyendo) pero siempre tienen la misma distancia.
Diana:	Ajá, éste aumenta.
Héctor:	Entonces, ¿la conclusión es?
Diana:	Esa ja ja.
Eduardo:	Que tienen la misma distancia.
Diana:	Es que ¿qué viene siendo el punto E?
Eduardo:	Exactamente, eso yo no lo vi en el tema de la elipse, o sea por eso no se...
Diana:	A ver, ¿qué es el punto E? (me pregunta Diana).
Héctor:	Mande.
Diana:	¿Cómo consideramos al punto E?, ¿como qué?
Héctor:	Como al punto móvil, como al punto que traza.
Eduardo:	Entonces por ejemplo, las preguntas pasadas dicen...
Diana:	Es una elipse.
Eduardo:	No, no, no, estas (las señala en sus hojas de trabajo), dice: mide las distintas barras que conforman el artefacto, ¿hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual?... no... esa pues, la que te dije yo, de por ejemplo si uno aumentaba otro disminuía (refiriéndose a los segmentos), pero no sé como se le llama a eso...
	...(Se quedan pensativos un buen tiempo)
Eduardo:	Es una figura... en la que los focos siempre van a dar la distancia de la elipse (pone sus dedos sobre los focos)
Diana:	Donde hay diez y siete centímetros.
	... (Se quedan pensativos y de repente Diana comienza a hablar)
Diana:	Los focos vienen siendo A y B y que E es un...
Eduardo:	Es el punto móvil.
Diana:	Es el punto móvil al cual siempre los segmentos AE y BE (Eduardo la interrumpe).
Eduardo:	Siempre van a dar (Diana lo interrumpe).
Diana:	Su suma siempre es igual.
Eduardo:	Ahí está.
	...(Comienzan a escribir su respuesta en sus hojas de trabajo)

Observaciones:

- Los integrantes de este equipo tuvieron serias dificultades para tratar de encadenar algunas de las respuestas de las preguntas que habían respondido con

anterioridad, las cuales les brindaban características esenciales de la elipse a partir de la manipulación y la observación del artefacto.

- Los integrantes de este equipo no sabían qué hacer con el punto E, es decir no hallaban la manera de introducirlo en su definición, no sabían cómo nombrarlo.
- Identificaron pronto que los puntos fijos actúan como focos así como que la suma de las distancias de los focos al punto E siempre es la misma (eso trataron de dar a entender).
- Utilizaron la nomenclatura del artefacto para definir el concepto de elipse, como por ejemplo que los focos son A y B y que el punto móvil es el punto E.

14. Reflexiona sobre tus respuestas anteriores y escribe con tus palabras que es una Elipse.

Una elipse es una figura geométrica ovalada la cual tiene 2 ejes de simetría, 2 puntos fijos llamados focos, una excentricidad 2 lados rectos, un centro. Los puntos A y B son los focos y el punto E es el punto móvil el cual está unido forma un segmento del punto A y B y la suma de estos segmentos siempre es igual.

Figura 4.31 La definición de elipse del Equipo 2 en la pregunta 14.

C?????P????

El artefacto resulta útil para que a partir de la observación y la manipulación los alumnos puedan ubicar en él las diferentes características de la elipse que vieron en su clase de Geometría Analítica. Sin embargo les costó trabajo enlazar las respuestas de preguntas anteriores para dar una definición de elipse.

Los dos diálogos siguientes muestran la respuesta a la misma pregunta 14, pero ahora dada por parte del equipo denominado Los Sexys seguido por el equipo de Gabi y Uriel.

Los Sexys (Luz, Jorge)

Tratan de dar con sus palabras la definición de elipse (pregunta 14). Ambos aportan buenas ideas y al final Luz dice la posible definición que podrían anotar en sus hojas de trabajo.

Luz:	Es una figura... formada por... bueno que tiene dos focos y que tiene... un punto... no sé ¿pues qué?... que la suma de los dos segmentos de...
Jorge:	Una elipse es una figura ovalada.
Luz:	No.
Jorge:	Que tiene dos focos, ¿Cómo no? (le reclama a Luz quien duda acerca de la afirmación de Jorge).
Luz:	Bueno síguele.
	... (Observan el artefacto).
Luz:	Pues podemos decir que la suma de los segmentos relacionados con el punto que gira y que forma la elipse siempre es constante (dice eso mientras mueve el artefacto). O sea en cualquier punto que lo muevas la suma de este a este (de A a E) más la de este a este (de E a B) va a ser constante. Eso para mi es elipse.
Jorge:	Sí (hace una seña de aceptación).
Luz:	Escríbelo tú.

O

- Este equipo también tuvo algunas complicaciones para definir con sus palabras el concepto de elipse.
- Identificaron rápidamente los elementos del artefacto que participan en la definición de elipse.
- No usaron la nomenclatura del artefacto para escribir su definición de elipse.

C

Los alumnos pasan desapercibido en más de una ocasión lo que sucede cuando mueven el artefacto y no toman en cuenta las respuestas que dieron anteriormente para tratar de ayudarse y dar una definición de elipse a partir de allí.

Gabi y Uriel (Gabriela) y Héctor.

Están a punto de concluir la actividad y se encuentran escribiendo la respuesta de la pregunta 14, es decir, deben de definir con sus palabras lo qué es una elipse. Gabriela me dice su definición.

Héctor:	¿Puedes repetírmelo por favor?
Gabriela:	Tiene dos puntos fijos llamados focos y uno móvil que va trazando la elipse, la suma

	de sus focos al punto móvil es una constante.
Héctor:	¿En cualquier posición?
Gabriela:	Sí.

Por último, la pregunta 15 dice lo siguiente: **Si el artefacto cumple la definición de Elipse, ¿Por qué? Esta pregunta hace que los alumnos comparen la definición de elipse que se les brinda en un anexo con su artefacto.**

En el siguiente diálogo se observó claramente las ideas que los alumnos obtuvieron de su artefacto:

Los Sexys (Luz, Jorge)

Intentan comparar su artefacto con la definición de elipse como lugar geométrico. En esta parte los alumnos intentan verificar que dicha definición se cumple con el artefacto.

Jorge:	Sí cumple.
Luz:	Porque este es un lugar geométrico (señala la elipse), porque tenemos un punto que está en movimiento... muy bien.
Jorge:	Porque tenemos un punto que está en movimiento.
Luz:	Bueno y aquí nosotros tenemos dos puntos fijos llamados focos (señalándolos).
Jorge:	Vendrían siendo los focos.
Luz:	Y la suma de esta distancia, la suma al punto móvil, de los focos al punto móvil ese, siempre es lo mismo, una constante positiva.
Jorge:	Por lo tanto sí cumple.
Luz:	Sí cumple.
Jorge:	Sí cumple la definición de elipse.

Observaciones:

- Los integrantes de este equipo comparan lo que dice la definición formal de elipse con los componentes de su artefacto, señalan cada similitud que encuentran y concluyen que el artefacto cumple la definición.

15. Solicita a tu coordinador el Anexo 2 para responder lo siguiente.

Explica si el artefacto cumple la definición de Elipse y ¿Por qué?

Si cumple ya que en todo momento la suma de la distancia a los focos es una constante positiva de 17cm.

Figura 4.32 Respuesta 15 del Equipo 4 en sus hojas de trabajo.

Conclusiones

Al hacer una comparación entre la definición formal de elipse como lugar geométrico con el movimiento del artefacto, los alumnos logran unir algunas respuestas para llegar a dar dicha definición. El Anexo 2 les sirve a los alumnos para ubicar cada punto en su artefacto, moverlo y saber que el artefacto cumple con lo allí mencionado.

CAPÍTULO 2

2.1. INTRODUCCIÓN

Después de analizar la información obtenida en las actividades del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards y del Antiparalelogramo articulado de van Schooten, se tratará de responder las preguntas de investigación que se plantearon al inicio de este trabajo.

- ¿Es posible construir una gran variedad de artefactos mecánicos que sean útiles no sólo para que el estudiante trabaje con el concepto de elipse, sino también con los conceptos de parábola e hipérbola. Hay muchos artefactos interesantes que no pueden elaborarse físicamente debido a su complejidad y a algunas limitaciones de movimiento así como inconvenientes que surgen con las correderas, que impiden un rendimiento óptimo de éstos. Una vez que se decide el material a usarse para construir los artefactos el proceso de llevarlos a cabo se simplifica.

Sí, es posible construir una gran variedad de artefactos mecánicos que sean útiles no sólo para que el estudiante trabaje con el concepto de elipse, sino también con los conceptos de parábola e hipérbola. Hay muchos artefactos interesantes que no pueden elaborarse físicamente debido a su complejidad y a algunas limitaciones de movimiento así como inconvenientes que surgen con las correderas, que impiden un rendimiento óptimo de éstos. Una vez que se decide el material a usarse para construir los artefactos el proceso de llevarlos a cabo se simplifica.

Cabe mencionar que con las barras de acrílico que se mandaron construir, pueden construirse distintos artefactos como los mencionados en este trabajo de investigación, por lo que la gama de estos para otras posibles investigaciones con grupos de bachilleratos es muy amplia.

- ¿Es posible construir una gran variedad de artefactos mecánicos que sean útiles no sólo para que el estudiante trabaje con el concepto de elipse, sino también con los conceptos de parábola e hipérbola. Hay muchos artefactos interesantes que no pueden elaborarse físicamente debido a su complejidad y a algunas limitaciones de movimiento así como inconvenientes que surgen con las correderas, que impiden un rendimiento óptimo de éstos. Una vez que se decide el material a usarse para construir los artefactos el proceso de llevarlos a cabo se simplifica.

Claro que sí, puesto que varios de los estudiantes al manipular los distintos artefactos logran darse cuenta que el trazo realizado corresponde al de una elipse. Muchos de ellos nombran a los artefactos como “compás”. Al hacer sus primeros trazos se motivan y tratan de encontrar la razón por la cual dichos artefactos dibujan una elipse y no algo más.

Con el Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards pueden trazarse distintas elipses (pueden variar su excentricidad), de acuerdo a la distancia que halla entre los puntos fijos A y C (focos), inclusive entre menor sea la distancia anteriormente mencionada el trazo se va haciendo circular, y es una circunferencia cuando el punto A es colocado sobre el punto C.

En el caso del Antiparalelogramo articulado de van Schooten no puede modificarse la distancia entre los puntos fijos A y B (focos), por lo que siempre se trazará la misma elipse.

- 

Con el trabajo llevado a cabo con una población pequeña de estudiantes de bachillerato y a partir de la evidencia recabada, podemos decir que a través de la manipulación del artefacto así como con la ayuda de las actividades didácticas, pudieron llegar a construir el concepto de elipse por sí mismos. Esto fue consecuencia del análisis que hicieron los estudiantes durante la manipulación, así como de la manera en la que enlazaron sus respuestas. Aunque también dependió de que los alumnos tuvieran el conocimiento sobre algunos conceptos previamente aprendidos, como lo son el de congruencia, eje de simetría, clasificaciones de triángulos, cuadriláteros y trapecios, además de sus características, de lo contrario no hubieran podido darse cuenta de algunos

detalles fundamentales, como que los triángulos sugeridos para compararse son congruentes y que eso los llevaría a que la suma de dos de los segmentos involucrados en los últimos triángulos de comparación siempre es constante.

Se puede decir que sin la guía de preguntas, para los estudiantes hubiera sido difícil obtener el modelo involucrado para que dicho artefacto trace una elipse, puesto que ellos ponen atención a lo que están observando, de acuerdo a los cuestionamientos que tratan de responder. Sin ellos, los alumnos podrían dejar de lado aspectos importantes para llegar a comprender el modelo implícito en dicho artefacto.

En la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards, tres de los cuatro equipos participantes pudieron escribir con sus palabras una definición aproximada a la definición formal de la elipse como lugar geométrico, mientras que el otro equipo sólo respondió con algunas de sus propiedades, las que recordaban de su curso de Geometría Analítica.

En la actividad del Antiparalelogramo articulado de Van Schooten los 4 equipos pudieron dar una definición muy cercana a la formal.

- En la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de inwards, tres de los cuatro equipos participantes pudieron escribir con sus palabras una definición aproximada a la definición formal de la elipse como lugar geométrico, mientras que el otro equipo sólo respondió con algunas de sus propiedades, las que recordaban de su curso de Geometría Analítica.

Por lo observado en nuestra investigación podemos afirmar que es posible, sin embargo, se requiere la labor conjunta de manipular el artefacto, así como, de una lista de preguntas que vaya guiando a los alumnos, de no ser así esta pregunta de investigación sería respondida en forma negativa.

Por otro lado, también depende de los conceptos que el alumno requiera para llegar a dicha demostración, puesto que se observó que los estudiantes olvidan muchas cosas de un semestre a otro. Por consiguiente, los alumnos deben de estar familiarizados con los conceptos involucrados.

- Los resultados obtenidos en la investigación muestran que la metodología empleada en esta investigación es la adecuada.

Sustentado con los resultados obtenidos se considera que la metodología empleada en esta investigación es la adecuada.

Cabe destacar, que cada una de las actividades propuestas tiene una duración de dos horas en promedio, por lo que llevar a cabo las actividades en una sesión de trabajo, puede ser difícil.

- Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

En varias ocasiones mientras movían el artefacto en cuestión seguían el movimiento con sus dedos, trataban de medir los cambios de segmentos con los dedos, en ocasiones sólo miraban fijamente el artefacto o lo cambiaban de posición.

Un aspecto importante observado, es la transmisión de ideas que se da entre los estudiantes cuando tratan de responder las preguntas de sus hojas de trabajo. En la mayoría de los equipos se observó que tienen poco manejo de conceptos matemáticos, algunas veces no lograban transmitir sus ideas a los demás compañeros, o lo hacían de manera errónea confundiendo conceptos. En raras ocasiones y sólo en ciertos equipos se dio lo que podrían llamarse fragmentos de debates científicos.

En cuanto a la manipulación del artefacto, al principio les costó trabajo moverlo, lo cual se vio reflejado en sus trazos, los cuales quedaban muy chuecos. Después de realizar varios trazos, los alumnos obtenían práctica y las elipses les comenzaron a quedar bien. Un problema para los alumnos fue que en ocasiones se salían las tachuelas con las que se fijaban los puntos fijos (focos) y esto les perjudicaba en la estética de sus dibujos.

3.3. RESULTADOS DE LA OBSERVACIÓN

Las actividades anteriores están hechas con la intención de que los alumnos puedan construir el concepto de elipse mediante la manipulación del artefacto, una estrategia de trabajo y unas hojas de actividades. Para ello es necesario evocar algunos conceptos, como es el de congruencia, eje de simetría, ángulos opuestos por el vértice, clasificaciones de triángulos, cuadriláteros y trapecios además de sus características, entre algunos otros. Aquí la duda en cuestión es ¿qué actividades pueden llevarse a cabo o qué preguntas pueden agregarse a las actividades previamente diseñadas para introducir los conceptos mencionados e integrarlos a ellas? Lo anterior con la finalidad de facilitar la construcción del concepto de elipse por parte de los alumnos.

Los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en equipo, por lo que muchas veces no pueden aceptar las ideas de sus compañeros o no logran complementar y enriquecer sus respuestas con ellas.

BIBLIOGRAFIA

Artobolevski, I. (1964). *Mechanisms for the Generation of Plane Curves*. Pergamon Press, New York.

Artobolevski, I. (1975). *Mecanismos en la t cnica moderna*. Tomo 2, parte 1. Ed. Mir.

Bartolini Bussi, M. (2007) *Experimental mathematics and the teaching and learning of proof*. Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.

Bartolini, Maria G. et al (2004) *The use of a laboratory of geometrical instruments*. Comunicazione orale all'interno del minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale.

Bartolini Bussi, M. et al. (2003) *Learning mathematics with tools*. U.M.I. (the association of school and university teachers of Mathematics), The paper is a part of the book that is presented at ICME.

Coolidge, J. (1945). *A history of the conic sections and quadric surfaces*. The Clarendon press, Oxford.

Dennis, D. (1995). *Historical Perspectives for the Reform of mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions*. PhD Dissertation, Cornell University.

Dubinsky (1998). *Applying a Piagetian Perspective to Post-Secondary mathematics Education*. Georgia State University, Atlanta, Georgia, USA.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pens e humaine*. Ed. Peter Lang S.A. 1995. Traducci n Universidad del Valle, Instituto de Educaci n y Pedagog a 2001.

D rer, A. (1605). *Institutionum geometricarum libri quatuor*. Arnheimiae in Ducatu Geldriae : Ex officina Iohannis Iansonii.

Dyck, W. (1994). *Katalog mathematischer und mathemisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Georg Olms Verlag, Zurich, New York.

Easton, J.B. (1963). *John de Witt kinematical constructions of the conics. The mathematics teacher*, pp. 632-635.

Horsburgh, E. M., editor, *Modern Instruments and Methods of Calculation, A Handbook of the Napier Tercentenary Exhibition*, G. Bell and Sons and The Royal Society of Edinburgh, London, available online at:

<http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=03640002&seq=7>

Hoyos, V. (2006). *Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria*. ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 2006, 24(1), pp. 31–42.

Hoyos y Falconi. (2005). *Instrumentos y matemáticas: historia, fundamentos y perspectivas educativas*. Ed. UNAM.

Hoyos, V., Capponi, B. y G  nev  s, B. (1998). *Simulation of drawing machines on the abacus and its dual algebraic symbolization...*, en *Proceedings of CERME E1*, <<http://www.fimn.uniosnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>>. Alemania: Universidad de Osnabrueck.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures*. ISBN: 0465027725.

Jill, Vincent, et al. (2002). *Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: a comparison of two environments*. PME 26. Pp 313-320.

Jorgensen, L. (1999). *Involving idle Students in research design*. Proceedings of CSCL99.

Kempe, A. B. (1877). *How to draw a Straight Line*. London, England: Macmillan and Co.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry: Theorems in Contexts from History and Epistemology to Cognition*, en *Proc. 1997 PME Int. Conf.*, 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.

Maschietto, M. y Martignone, F. *Activities with mathematical machines Pantographs and curve drawers*. Research funded by MIUR (PRIN 2005019721).

Piaget, J. (1950). *Introducci  n a la Epistemolog  a Gen  tica. "El pensamiento matem  tico"*. Buenos Aires: Paid  s, 1975.

Piaget, J. (1970). *Science of Education and the Psychology of the Child*. Orion Press, New York.

Piaget, J. (1976). *To understand is to Invent*. Penguin Books, New York.

Schooten, F. van (1657). *Exercitationu^m mathematicaru^m liber I^{us} sive de organica conicarum sectionu^m in plano descriptione*. Lugd. Batav ex officina J. Elsevirii.

Schooten, F. van (1659-60). *Mathematische oeffeningen begrepen in vijf boeken*. Amsterdam : Gerrit van Goedesbergh.

Taimina, Diana. *Historical Mechanisms for Drawing Curves*. Supported by National Science Foundation grant DUE-0226238.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995) *Cognition and Artefacts: Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity*. European Journal of Psychology of Education 10(1), pp. 77-101.

Weisstein, Eric W. "Hypotrochoid." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid.html>

Pergolla, M. (1999. 27 de abril). En Laboratorio Macchine Matematiche. Recuperado el 15 de enero de 2010, de http://www.museo.unimo.it/theatrum/machine/_00lab.htm

(1997. 11 de julio). En Macchine Matematiche. Recuperado el 20 de enero de 2010, de <http://www.museo.unimo.it/labmat/drawers.htm>

<http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2084&bodyId=2608>

?



?

?

□ □ □ □ □ □ □

? ?

[?] [?] [?][?][?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?] [?]

□?□?□? □?□?□? □?□?□? □?□? □?

QUESTION

- 12?

2. Al manipular el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian su longitud durante el movimiento?
3. Mueve el punto E y observa la figura formada por los puntos C, B, E y D. ¿Qué figura se forma?, ¿Cambió su perímetro durante el movimiento?
4. Mueve el punto E y observa los segmentos del artefacto. ¿Cuáles fueron los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
5. Del punto anterior ¿Qué longitudes de segmentos son iguales?
6. ¿Cuáles son las características de la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB?
7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? ¿por qué?

8. Deja fijo el artefacto y traza el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Argumente su respuesta.

9. ¿Cuánto equivale la distancia $AK+KC$?, ¿Siempre se cumple la equivalencia de la suma de $AK+KC$?, ¿Por qué se cumple?

10. Reflexiona sobre las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.

11. Explica si el instrumento cumple la definición de elipse y ¿por qué?

12. ¿Crees que la elipse se modificaría si los segmentos BE, ED, DC y CB fueran más grandes o más pequeños?

13. Ahora, acerca el punto A al punto C y manipula el artefacto. ¿Cómo se comporta este trazo?

14. Ahora, aleja el punto A del punto C y manipula el artefacto. ¿Cuál es el comportamiento de este trazo?

15. ¿Qué puedes deducir del acercamiento y el alejamiento del punto A con el C?

?

?

HOJA DE TRABAJO PARA LA MANIPULACIÓN DEL ANTIPARALELOGRAMO (Van Schooten)

?

?

?

?

?

?

?

?

?? Se te proporcionará un artefacto, el cual está etiquetado en ciertos puntos. Así mismo, un lápiz y una regla.

2) Fija los artefactos sobre la tabla.

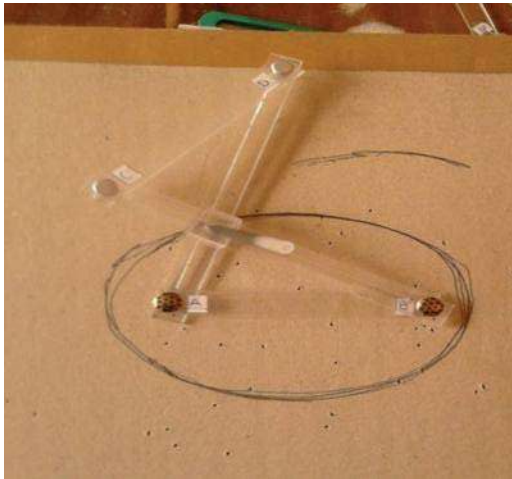
3) Para manipular el artefacto (una vez fijo), tendrás que girarlo a partir del punto C y D.

4) El punto E, es la intersección entre los segmentos AD y BC. Este punto se tomará sobre las deslizaderas, en donde se colocará el lápiz que previamente se te entregó.

5) Observa con atención el movimiento realizado por los puntos C y D, principalmente el lugar geométrico trazado por el punto E.

6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso del artefacto.

7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. ?? ()



?

Este artefacto tiene tres puntos que pueden trazar curvas: C, D y E. Responde las siguientes preguntas:

?

?

1? ¿De cuantas barras rígidas está conformado el artefacto?

2? Mueve el punto D y observa atentamente lo que ocurre con los demás puntos, así como en los segmentos. Durante la manipulación del artefacto, ¿qué figuras geométricas forman dichas barras?

3? ¿Cuáles son los puntos que están fijos sobre el plano?

?? ¿Cuáles son los segmentos del artefacto que no cambian de longitud durante el movimiento?

?? ¿Cuáles son los segmentos que cambian de longitud durante el movimiento?

?? ¿Cuáles de los segmentos de longitud variable son iguales?

Ahora deje el artefacto inmóvil de manera que los segmentos AB y CD no sean paralelos y responda lo siguiente:

?? Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características.

?? Observe la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cuál es la propiedad del eje de simetría?

?? ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

1?? Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Argumente su respuesta.

11? Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Argumenta tu respuesta.

12? Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Argumente su respuesta.

13? ¿En qué segmentos de longitud variable, su suma es constante? ¿Cuál es esta suma? ¿Hay algún elemento del artefacto cuya longitud sea igual a la suma anterior?

1?? Al manipular el artefacto, en cualquier posición, ¿siempre se cumple la equivalencia de la pregunta anterior?

1?? ¿Cuál es la propiedad de la curva descrita por el punto E? ¿Conoces esta curva?

1?? Reflexiona sobre las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.

1?? Explica si el instrumento cumple la definición de Elipse y ¿Por qué?

?

?

HOJA DE TRABAJO PARA LA MANIPULACIÓN DEL ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS

?

?

?

?

?

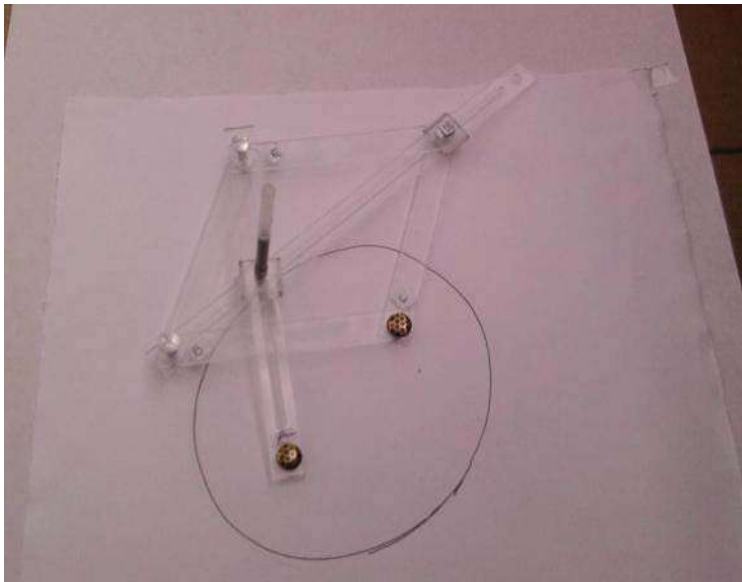
?

?

?

?

- 1) Se te proporcionará un artefacto, un lápiz, un pincelín y una regla.
- 2) El punto K es el punto de la intersección de los segmentos AE y BD.
- 3) Coloca el lápiz en el punto K, puesto que este es el punto que realiza el trazo.
- 4) Podrás mover el artefacto mediante el punto E o bien mediante el lápiz que se inserta en el punto K. Analiza con mucha atención el lugar geométrico trazado por el punto K, así como el movimiento en general del artefacto.
- 5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.
- 6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso de la manipulación del artefacto.
- 7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. $\overline{AB}$ ()



?

?

?

?

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto? Escribe la longitud de cada una de ellas, nombrando a cada barra con los puntos de cada uno de sus extremos (por ejemplo barra AE).

2. Mueve el artefacto y observa sus diferentes puntos durante el movimiento.
Cuando moviste el artefacto, ¿Cuáles fueron los puntos que se mantuvieron fijos?
3. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?
4. Mueve el artefacto y observa sus segmentos. ¿Cuáles fueron los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
5. De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles tienen la misma longitud entre ellos?
6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?
7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

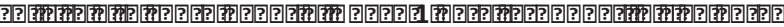
8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

9. Suma la distancia de los segmentos AK+KC. ¿A cuánto equivale la distancia AK+KC? , ¿Siempre se cumple la equivalencia en cualquier posición del artefacto? Justifica tu respuesta.

10. Auxiliándote de la respuesta de la pregunta 1, ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma de AK + KC?, ¿cuál es dicha barra?

11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad?

12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.

13.  Explica si el instrumento cumple la definición de elipse y ¿por qué?

HOJA DE TRABAJO PARA LA MANIPULACIÓN DEL ANTIPARALELOGRAMO (Van Schooten)

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?

?? Se te proporcionará un artefacto, el cual está etiquetado en ciertos puntos. Así mismo, un lápiz, un pincelín y una regla.

2) El punto E, es la intersección entre los segmentos AD y BC. Este punto se tomará sobre las deslizaderas, en donde se colocará el lápiz que previamente se te entregó.

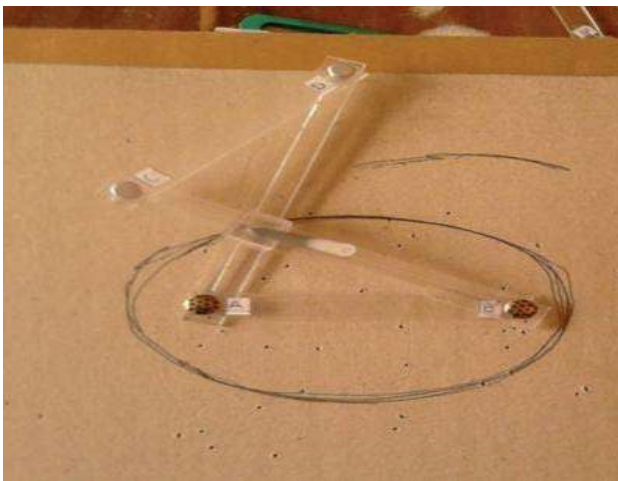
3) Para manipular el artefacto (una vez fijo), tendrás que girarlo a partir del punto C y D o bien, sólo debes manejarlo con el lápiz.

4) Observa con atención el artefacto durante el movimiento, principalmente el lugar geométrico trazado por el punto E.

5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.

6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso del artefacto.

7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. ?? ()



?

?

?

?

?

1? ¿De cuántas barras está conformado el artefacto?

2? Mueve el artefacto y observa atentamente lo que ocurre con todos sus segmentos. Durante el movimiento del artefacto, ¿qué figuras geométricas forman dichos segmentos (incluyendo los segmentos AC y BD)?

3? ¿Cuáles son los puntos que están fijos sobre el plano durante el movimiento del artefacto?

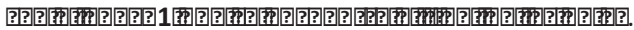
?? Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?

?? Mueve el artefacto y observa sus segmentos ¿Cuáles son los segmentos que cambian de longitud durante el movimiento?

?? De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles segmentos son iguales entre sí?

Ahora deje el artefacto inmóvil de manera que los segmentos AB y CD no sean paralelos y responda lo siguiente:

?? Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características.

?? 

Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

?? Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

1?? Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

11? Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Justifica tu respuesta.

12 Realiza la suma de los segmentos $AE + EB$. ¿A cuánto equivale la suma de $AE + EB$, ¿siempre se cumple dicha suma en cualquier posición del artefacto?

13 Mide las distintas barras que conforman el artefacto. ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma anterior?, ¿cuál es dicha barra?

14 Reflexiona sobre tus respuestas anteriores y escribe con tus palabras que es una Elipse.

15 Explica si el artefacto cumple la definición de Elipse y ¿Por qué?



Una línea que atraviesa una figura de tal manera que cada lado es el espejo del otro. Si dobláramos la figura en la mitad a lo largo del Eje de Simetría, tendríamos que las dos mitades son iguales, quedarían parejas.

El eje de simetría es la mediatriz del segmento cuyos extremos son puntos simétricos.

