

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez



VALUACIÓN DE ANUALIDADES Y UN
PROBLEMA DE TEORÍA DEL RIESGO

T E S I S

Que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias
Físico Matemáticas

Presenta:

ROCÍO MARÍN GABRIEL

Director:

Dr. Eugenio P. Balanzario Gutiérrez

DICIEMBRE 2010, MORELIA MICHOACÁN, MÉXICO

A mi padres Jaime y Adelina
por su apoyo y confianza.

A mi esposo Nozair y a mi hijo Gael,
por su paciencia y cariño.

Agradecimientos

Muchas gracias a mi asesor el Dr. Eugenio Balanzario Gutiérrez, por su dedicación, su apoyo, sus consejos, por todo lo que me enseñó, y por ayudarme a realizar la tesis.

A mis revisores; Dr. Mario Cesar, Dr. Gerardo Tinoco, Dr. F. Mota, Dra. Maria Luisa y Dra. Karina, por sus consejos y el tiempo que dedicaron a revisar la tesis. Todas sus observaciones ayudaron a que la tesis mejorará y a prepararme mejor para la presentación de ella.

Gracias a mis profesores de fismat por compartir su conocimiento. A Malu por que siempre se preocupa por que todos aprendamos, a Sepulveda y Elmar Wagner por su apoyo en el último semestre, y por preocuparse por mi pequeño Gael. A Tinoco y Mario César por su amabilidad. Gracias a todos los que me dieron clase por su ayuda para concluir la carrera.

Gracias a mis padres por sus consejos, han sido los más importantes de mi vida, sin ellos no sería tan feliz como lo soy ahora. Gracias por que siempre me han tenido confianza y porque nunca dejan de cuidarme. Gracias a mis hermanos Cesar y Ale por todos los momentos que hemos compartido, son muy, muy importantes en mi vida.

Gracias a mis amigos de la facultad por su compañía y su ayuda. A Anabel y Tere por su amistad, por ser tan sinceras y sencillas, y siempre acordarse de mi. A Piza porque se que siempre seremos amigos. A Daniel, por siempre preguntar por mi y mi bebe. A Rodrigo por que aun sin ser amigos cuando lo necesite me ayudo con mucho gusto.

Gracias a mi mejor amigo de toda la vida Nozair, por su apoyo, confianza, paciencia, consejos, cariño, compañía, por ser tan buena gente conmigo y con quienes lo rodean, porque siempre, de verdad siempre está cuando lo necesito.

Gracias a Gael y J. Damian por traer más alegría y felicidad a todos, por su sonrisa y sus abrazos.

Gracias a mis suegros, por cuidar el puesto, y por cuidarme también a mi sin quejarse nunca.

Índice general

Prefacio	IV
Resumen	VI
1. Problema introductorio	1
2. Conceptos Básicos	4
2.1. Teoría básica del interés	4
2.2. Valor presente	7
2.3. Flujos de efectivo	8
2.3.1. Hipotecas	9
2.3.2. Préstamo	14
2.3.3. Compra de bonos	15
3. Anualidades	17
3.1. Tablas de mortalidad	18
3.2. Función de sobrevivencia	20
3.3. Función de riesgo	21
3.4. Ejemplos de funciones de riesgo	24
3.5. Valor esperado de T_x	27
3.6. Costo de una anualidad	29
3.7. Valor de anualidades conjuntas	32
3.8. Simulaciones	35
3.9. Duración de una anualidad	36
4. Teoría de la ruina	39
4.1. Procesos estocásticos	39
4.2. Filtraciones y tiempos de paro	43
4.3. Proceso de Poisson	46
4.4. Martingalas	48
4.5. Modelo clásico de Cramér-Lundberg	52

4.6. Probabilidad de ruina	56
4.7. Exponente de Lundberg	59
4.8. Simulaciones	65
5. Conclusiones	67
Bibliografía	69

Prefacio

Una de las herramientas analíticas principales en el ámbito financiero es la teoría de la probabilidad. La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas que se puede aplicar directamente en el ámbito social, es decir se utiliza para plantear y resolver problemas que atañen a la sociedad en general. En esta tesis, dicha teoría se aplicará en 2 temas principales, anualidades y teoría del riesgo, los cuales se desarrollan a lo largo de 4 capítulos.

Uno de los problemas que aquejan a la sociedad actualmente, es la planeación para el retiro. Hay muchas personas en edad de retiro que no cuentan con plan de jubilación oficial, y por lo tanto ellas mismas tienen que encargarse de planear su retiro. Entonces con la ayuda de la probabilidad se plantea a las anualidades como una opción para estas personas. Mediante las herramientas de la probabilidad se explicará con detalle cómo funcionan, cuál es y cómo se calcula su costo. En general, en esta tesis se provee de conceptos que ayudarán a tomar mejores decisiones financieras.

Una de las aplicaciones principales de la teoría de probabilidad es en la teoría del riesgo. Las compañías de seguros se ven afectadas por los eventos catastróficos como los terremotos e inundaciones entre muchos otros. Frecuentemente las compañías de seguros no contaban con las reservas necesarias para solventar los gastos generados por tales catástrofes. Es por eso que es muy importante que una compañía aseguradora analice cuidadosamente las reclamaciones que afronta, y la teoría de la ruina ofrece las herramientas necesarias para hacerlo. Se busca entonces exponer un poco de dicha teoría para estudiar la solvencia de la compañía aseguradora basándonos en el modelo clásico de Cramér-Lundberg.

En el capítulo 1 se presenta un problema simple a manera de introducción, con la finalidad de ejemplificar cómo funcionan las anualidades y la importancia de conocer la solvencia de cualquier compañía. Los siguientes dos capítulos desarrollan la teoría relacionada con las anualidades. El capítulo

2 introduce los conceptos básicos relacionados con las matemáticas de las finanzas. Se incluyen conceptos básicos como el interés simple y compuesto, los cuales son usados después para desarrollar conceptos más complejos como el de préstamo e hipoteca. En el capítulo 3, se desarrolla ampliamente el tema de las anualidades. En el capítulo 4 se describe el modelo de Cramér-Lundberg, se dan las definiciones referentes a la probabilidad de ruina y ésta se estudia para cuando las reclamaciones tienen cola ligera. Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones.

Resumen

Una anualidad es un contrato en el cual una compañía de seguros ofrece un flujo periódico de pagos a una persona por el resto de su vida, a cambio de una prima pagada con anterioridad. Una anualidad es una manera de garantizar un ingreso futuro al momento del retiro, principalmente para las personas que no cuentan con plan de jubilación oficial. Es importante conocer cómo se calcula el costo de una anualidad, es decir, el pago que se debe realizar para tener el derecho a recibir el flujo de los pagos, ya que por ejemplo, nos puede ayudar a entender mejor qué herramientas y cálculos utilizan las compañías de seguros para valorar una anualidad determinada, y así entonces, elegir la mejor opción.

En la primera parte de la tesis se analiza con detalle los factores que se deben tomar en cuenta para darle el valor adecuado a una anualidad determinada, ya que claramente, no se le puede cobrar lo mismo a una persona de edad avanzada, que a una persona demasiado joven. A lo largo de dicho análisis se utilizan solamente herramientas de la probabilidad así como herramientas básicas del cálculo.

Otra cuestión de importancia para una compañía de seguros es saber el riesgo que tienen de llegar a la ruina, entendiendo por ruina el hecho de no contar con el capital necesario para solventar los gastos que puedan generarle los contratos otorgados, es decir, el cobro de un seguro de vida. Dicha cuestión también se analiza utilizando la teoría de la probabilidad, y se describe en el penúltimo capítulo.

Es de interés para la compañía tener la mayor información posible acerca de cómo cambia su capital a lo largo del tiempo, es decir cuánto ingreso y cuánto egreso se tiene por unidad de tiempo, utilizando para ello la información actual de la empresa; capital inicial, ingreso por primas, y egreso por reclamaciones. Tomando en cuenta obviamente que éste último tiene comportamiento aleatorio, es decir, el tiempo en que ocurren y el monto de cada una

de ellas varía cada vez. El análisis desarrollado en la presente tesis, describe un proceso estocástico, denominado proceso de riesgo, que intenta reflejar la evolución temporal del capital de una compañía, tomando en cuenta los datos anteriores y utilizando un proceso de Poisson para modelar el número de reclamaciones que llegan a la compañía hasta el tiempo t . Es un modelo sencillo que intenta describir el balance de la compañía para cada tiempo t .

Es importante para la compañía conocer su probabilidad de ruina, en la tesis se analiza dicha probabilidad basándonos en el modelo clásico de Cramér-Lundberg, se describe una fórmula para calcularla y se enuncia el Teorema de Lundberg, el cual la acota superiormente. El teorema de Lundberg es válido solamente para ciertos tipos de distribución de los montos de las reclamaciones. En general no se tiene una expresión para la probabilidad de ruina, sólo se dan valores aproximados, ya que ésta depende directamente de la distribución que tengan los montos de las reclamaciones.

Las distribuciones para las cuales se puede aplicar el teorema de Lundberg, se les llama distribuciones de cola ligera. Las distribuciones para las cuales no es válido se les denomina distribuciones de colas largas, las cuales no se abarcan en la tesis, pero con la información desarrollada en ella, se podrían comenzar a estudiar también.

Además para cada caso, anualidades y probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg, se realizan simulaciones sencillas sobre lo que podría suceder en cada situación, en el primer caso se simula que se venden anualidades a personas de diferentes edades, se simula el tiempo de vida restante de cada persona y se comparan el egreso total por pagos de todas las anualidades con el ingreso que se tiene por concepto de cobro de cada una de ellas. Para el segundo caso se simula un número determinado de veces el modelo de riesgo para distintos valores de sus parámetros y para distintos intervalos de tiempo, registrando en cada caso el número de veces en que el proceso toma un valor negativo, esto con la finalidad de comparar la probabilidad de ruina teórica con la probabilidad encontrada en la práctica. Las simulaciones se realizaron en el programa Mathematica y los resultados se presentan en tablas en los capítulos correspondientes.

Capítulo 1

Problema introductorio

En este primer capítulo vamos a presentar un problema sencillo, sobre el funcionamiento de un negocio pequeño y su probabilidad de ruina. Este problema nos va a introducir en los temas centrales que se van a tratar en los capítulos siguientes como son; anualidades y teoría de la ruina.

Vamos a suponer que manejamos un negocio que cuenta con 100 clientes, los cuales realizaron un pago inicial y ahora por nuestra parte reciben un pago diariamente. El valor de dicho pago es aleatorio. Denotemos mediante X_i , con $i \in [1, 100]$, el valor del pago realizado a cada uno de los 100 clientes. Supongamos que dichas variables se distribuyen exponencialmente con parámetro $\lambda = 1$. Ésto es, la función de densidad de X_i es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para que el negocio se mantenga, es muy importante estimar cuál es la cantidad de dinero que garantiza el pago a todos los clientes en un día dado. Con este fin, calculamos

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{100}).$$

Puesto que

$$E(X_1) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1,$$

entonces

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = 100.$$

Ésto nos dice que si llevamos \$100 vamos a poder cumplir en promedio con los pagos a todos nuestros clientes. No quiere decir que siempre nos va a alcanzar,

pero sí nos da una idea muy cercana de lo que se necesita. Sin embargo, esto no nos es suficiente, para el negocio es importante tener una seguridad mayor de que el dinero que se lleve va a alcanzar para satisfacer todas las demandas. Nos interesa responder preguntas como la siguiente: ¿Cuánto dinero se debe llevar al negocio, para que con una probabilidad de .95 se puedan satisfacer las reclamaciones de todos los clientes?.

Con la finalidad de resolver la cuestión anterior, vamos a representar mediante X la suma del monto de cada pago, esto es

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}.$$

Nos interesa calcular ξ tal que

$$P\{X \leq \xi\} = 0.95,$$

o de forma equivalente

$$P\{X > \xi\} = 0.05.$$

Tenemos que X , es la suma de 100 variables aleatorias con función de distribución exponencial. Entonces la función de densidad de X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{99}}{99!} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto ξ ha de cumplir con que

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{x^{99}}{99!} e^{-x} dx = 0.05.$$

Resolviendo la integral numericamente encontramos que ξ es aproximadamente 117. Es decir si llevamos \$117, tenemos una seguridad del 95 % de satisfacer las demandas.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos mediante una simulación realizada sobre lo que podría suceder en el negocio diariamente. La simulación se realiza para 5,000 y 10,000 días, suponiendo nuevamente que el negocio cuenta con 100 clientes. El objetivo es calcular la frecuencia con la que X supera cierta cantidad y compararla con la probabilidad teórica de que en un día se supere la misma cantidad. Por ejemplo, la tabla muestra que si llevamos solamente \$100, entonces aproximadamente el 49 % de los clientes no van a recibir su pago.

Tabla 1. *Resultados de simulación.*

Cant	Teoría	5000 días	10,000 días
100	0.486701	0.4718	0.4837
110	0.158279	0.147	0.1579
120	0.0278637	0.02460	0.0270
130	0.00275041	0.0034	0.0029
140	0.00016105	0.00040	0.0003
150	5.92454×10^{-6}	0	0

En muchos casos, la ley de distribución de la variable aleatoria de interés no es conocida. Supongamos que conocemos solamente la esperanza de las X_i y su varianza, y ambos tienen valor 1. Con estos valores, se obtiene entonces que la esperanza y varianza de X tienen valor 100.

Utilizando estos datos calculemos nuevamente la cantidad necesaria para asegurar el pago a los clientes con una probabilidad del 95 %. Con el fin de lograrlo, vamos a utilizar la desigualdad de Chebishev, la cual nos dice que

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} < \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

Nuestro objetivo es encontrar ϵ que cumpla

$$P\{|X - 100| \geq \epsilon\} < \frac{100}{\epsilon^2} \leq .05.$$

Resolviendo la desigualdad encontramos que la ϵ que cumple es igual a

$$\epsilon = 44.72.$$

Dicho resultado nos dice que si llevamos al negocio la cantidad de \$144.72 nos aseguramos en un 95 % de cumplir con los pagos requeridos.

Como se puede observar obtenemos una cantidad mayor en comparación a la obtenida cuando conocíamos la distribución de la variable aleatoria. Ésto nos dice que una cantidad de información mayor sobre la variable aleatoria de interés nos permite realizar predicciones más precisas.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

2.1. Teoría básica del interés

Comenzaremos estableciendo los conceptos básicos con respecto a la teoría del interés. Sea A_0 la cantidad inicial de dinero que se va a invertir en un banco y sea r la tasa de interés nominal (es decir la tasa anual que ofrece el banco). Si $A(t)$ denota la cantidad acumulada al tiempo t , tenemos que después de 1 año el valor de la inversión es

$$A(1) = A_0 + rA_0 = A_0(1 + r).$$

Después de 2 años se convierte en

$$A(2) = A(1) + rA(1) = A_0(1 + r) + rA_0(1 + r) = A_0(1 + r)^2.$$

Por lo tanto, $A(t)$, la cantidad después de t años está dada por

$$A(t) = A_0(1 + r)^t. \tag{2.1}$$

Aquí el interés se compone cada año sobre la cantidad inicial y sobre los intereses ganados, pero el interés suele componerse con mayor frecuencia, con el fin de aumentar el valor de la inversión. Así por ejemplo el interés se puede componer de manera semianual, mensual, diaria e incluso continuamente.

Si queremos componer los intereses con mayor frecuencia debemos ajustar la tasa de interés r , ya que dicha tasa está adaptada para una frecuencia anual. Para hacer esto, dividimos la tasa de interés anual r por el número de periodos por año. Por ejemplo, supongamos que el interés se compone n veces al año, esto significa que los intereses se reinvierten n veces al año. En

este caso la tasa de interés se ajusta de r a $\frac{r}{n}$ y se tienen nt periodos de composición en t años. Entonces el valor de la inversión en t años será

$$A_n(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \quad (2.2)$$

Ejemplo 1. Supongamos que se invierten \$1000 a una tasa de interés anual del 5 %, entonces después de 10 años la inversión vale

$$A(10) = 1000(1.05)^{10} = 1628.89.$$

Ejemplo 2. Supongamos ahora que los \$1000 se invierten con la misma tasa de interés, pero compuesta mensualmente, entonces después de 10 años el valor de la inversión es

$$A_{12}(10) = 1000 \times \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12 \times 10} = 1647.01.$$

Ejemplo 3. Supongamos que se invierten los \$1000 a una tasa de interés anual del 5 %, pero el interés se compone diariamente, entonces después de 10 años la inversión vale

$$A_{365}(10) = 1000 \times \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365 \times 10} = 1648.66.$$

Podemos observar que mientras más frecuentemente componemos los intereses, mayor es el valor final de la inversión. Por lo cual es deseable que se pudieran componer continuamente con la finalidad de maximizar los intereses ganados.

Es entonces interesante examinar el valor de la inversión cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 1. Para la cantidad $A_n(t)$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 e^{rt}. \quad (2.3)$$

Demostración. Primero calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

Realizamos el cambio de variable $h = \frac{1}{n}$ y obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_0 e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} A_0 e^{\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}} = A_0 e^{\ln'(1)} = A_0 e.$$

Haciendo otro cambio de variable $\frac{r}{n} = \frac{1}{y}$ obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{y \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ry} = \lim_{y \rightarrow \infty} A_0 \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^r = A_0 e^r.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 e^{rt}.$$

□

Tenemos entonces que la proposición 1 nos dice cómo calcular el valor final de una inversión si la composición de los intereses fuera continua. En este caso vamos a denotar dicho valor final con $A_c(t)$.

Ejemplo 4. Si depositamos los \$1000 en una cuenta bancaria que paga un interés del 5 % con composición continua (o instantanea) entonces después de 10 años el valor de la inversión es

$$A_c(t) = 1000 \times e^{(0.5)} = 1648.72.$$

Tabla 2. Valor de $A_0 = 1000$ compuesto n veces al año.

Frecuencia	$A_n(10)$	$\%A_c(10)$
Anual	1628.89	98.797
Mensual	1647.01	99.896
Diaria	1648.66	99.996
Continua	1648.72	100.000

Un concepto importante que nos va a permitir comparar tasas de interés compuestas a distintas frecuencias es el concepto de tasa de interés efectiva.

Definición 1. La tasa de interés efectiva anual, denotada con r_e , es aquella tasa de interés que nos produce la misma ganancia que la tasa de interés nominal compuesta m veces al año. Así entonces, si tenemos una tasa de interés nominal r y la componemos m veces al año, obtenemos que la tasa de interés efectiva anual r_e debe satisfacer

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = 1 + r_e. \quad (2.4)$$

De la misma manera, supongamos que componemos la tasa de interés nominal r de manera continua, entonces la tasa de interés efectiva anual es aquella que satisface

$$1 + r_e = e^r. \quad (2.5)$$

Ejemplo 5. Supongamos que el banco nos ofrece una tasa de interés nominal del 8 %, y decidimos invertir componiendo los intereses de manera continua. Entonces después de un año la inversión tiene un crecimiento de $e^{0.08} = 1.0833$, por lo tanto, en este caso la tasa de interés efectiva anual sería del 8.33 %

En la siguiente tabla se presenta una comparación del interés nominal compuesto diariamente contra el interés efectivo anual correspondiente.

Tabla 3. *Interés nominal contra interés efectivo.*

r	r_e	% cambio
0.050	0.0513	2.53
0.075	0.0779	3.83
0.100	0.1052	5.16
0.125	0.1331	6.50

El interés no es siempre un valor conocido, hay muchas tasas de interés que cambian diariamente. La tasa de interés se aplica de acuerdo a la circunstancia, a la clase social de la persona y al periodo de tiempo. Muchas tasas de interés se determinan de acuerdo a la demanda del mercado en el cual son aplicadas.¹

2.2. Valor presente

El tema anterior nos dice cómo calcular el valor de una inversión en el futuro. Ahora lo que haremos será calcular cuánto vale hoy dinero que se recibirá en t años. Para esto introducimos el importante concepto de valor presente.

Definición 1. El valor presente de un pago de x pesos que se realizará al tiempo $t > 0$, es igual a la cantidad y de pesos que depositada hoy (tiempo 0) en un banco que paga un interés de r %, al tiempo t produce x pesos.

La fórmula para calcular el valor presente de un pago depende de la tasa de interés y su composición.

Ejemplo 6. Supongamos que por alguna razón tenemos la obligación de pagar \$100 en exactamente un año. Para calcular el valor presente de esta obligación, debemos calcular cuánto dinero necesitamos el día de hoy para cumplir con dicha obligación. Supongamos que la tasa de interés es de r %, entonces necesitamos $\frac{100}{1+r}$. Ya que si depositamos esa cantidad de dinero en el banco el día de hoy, al final del año crecerá a \$100. En conclusión el valor presente de la obligación es $\frac{100}{1+r}$.

Ejemplo 7. Calculemos el valor presente y de x pesos recibidos dentro de t años. Supongamos que la tasa de interés es de r % y se compone continuamente. Para este fin nótese que si el día de hoy depositamos xe^{-rt} pesos en

¹Para mayor información sobre la teoría del interés se puede consultar Investment Science, de David G. Luenberger

el banco, dentro de t años tendremos exactamente x pesos. Es decir,

$$y = xe^{-rt}. \quad (2.6)$$

Ejemplo 8. Supongamos que la tasa de interés es del 7% y se compone de manera continua. Supongamos también que debemos escoger una de las siguientes opciones: a) Recibir \$100 dentro de un año, b) Recibir \$95 el día de hoy.

Para poder elegir la mejor opción, lo que podemos hacer es calcular el valor futuro de los \$95 y así entonces poder comparar las 2 cantidades. Si hoy depositamos en el banco los \$95, dentro de un año el banco nos regresa la cantidad de

$$95(e^{0.07}) = 101.89.$$

Puesto que 101.89 es mayor que 100, entonces vemos que la opción b es mejor.

Existe una relación inversa entre la tasa de interés r y el valor presente de cierta cantidad. Si r se incrementa entonces el valor presente disminuye, y éste también decrece si aumentamos el tiempo t . Por ejemplo, cuando $r = 0.05$ y se compone continuamente, y $t = 10$ años el valor presente de \$1 es igual a 0.6065, pero cuando $r = 0.03$ y $t = 10$ años el valor presente es igual a 0.7408.

Otra cuestión que podemos responder utilizando el concepto de valor presente es la siguiente ¿Cuánto tiempo debe pasar para que \$1 invertido a una tasa de interés r , duplique, triplique o cuadriplique su valor, si se supone una composición continua? Con la finalidad de responderla, debemos resolver

$$e^{rT} = C \iff T = \frac{1}{r} \ln[C],$$

donde C representa la cantidad a la que queremos que crezca nuestra inversión. Por ejemplo si $r = .12$, debemos esperar cerca de 5.78 años para que se duplique, mientras que si $r = .04$ debemos esperar 17.33 años.

2.3. Flujos de efectivo

Definición 2. Le llamamos flujos de efectivo a las cantidades de dinero que se transfieren de y hacia un inversionista en el tiempo. Generalmente estos flujos de efectivo (positivos o negativos) ocurren en tiempos específicos y conocidos. Por ejemplo al inicio de cada mes.

Hay diversas formas para representar un flujo de efectivo. Un flujo de efectivo se puede describir mediante una lista donde se especifique cuánto

dinero se transfiere por cada unidad de tiempo, si es que dichas cantidades son conocidas. Por ejemplo en los recibos de una cuenta bancaria o los pagos de un préstamo. Una inversión se podría representar así $(-1, 1.10)$, donde la inversión inicial es \$1 y al final del año recibimos \$1.10.

Los flujos de efectivo también se pueden representar mediante un diagrama, que consiste en una línea horizontal que representa el tiempo, y un flujo de efectivo en un tiempo específico se representa mediante una línea vertical en ese tiempo, además la longitud de dicha línea debe ser proporcional a la magnitud del flujo. Una línea hacia arriba representa dinero que recibe el inversionista y hacia abajo un pago que realiza. Si la magnitud de un pago se desconoce, se utiliza una representación más compleja.

Toda inversión se puede representar en términos de flujos de efectivo. Los flujos de efectivo pueden realizarse n veces al año, de esta manera en t años tendríamos un total de nt pagos.

Algunos ejemplos de flujos de efectivo son; las hipotecas, compra de bonos, préstamos y las anualidades.

2.3.1. Hipotecas

El primer ejemplo de flujo de efectivo que vamos a examinar son las hipotecas. Hablamos de hipoteca cuando se otorga un préstamo y el dinero es destinado para adquirir una casa. La deuda adquirida se liquida mediante pagos fijos y periódicos.

En esta sección vamos a determinar cómo se calcula el valor de los pagos fijos y periódicos que se deben realizar. Consideremos que P_0 denota la deuda inicial, es decir el valor de la hipoteca, r es la tasa de interés nominal, con T denotemos el tiempo de amortización (es decir el tiempo en el cual la hipoteca será pagada) y hacemos que x sea el pago periódico y fijo a calcular. Los pagos x pueden realizarse anualmente, mensualmente, semanalmente, etc.

Entonces, nuestro objetivo es determinar la cantidad x que nos permita pagar la hipoteca en T años. Para comenzar consideremos que los pagos se realizan anualmente. Hacemos $P(i)$ igual al valor de la deuda después de i años y recordamos que P_0 denota la deuda inicial, es decir $P(0) = P_0$. Tenemos que

$$P(i+1) = P(i)(1+r) - x, \quad i \in \mathbf{N} \cup 0.$$

Por lo tanto, para $i = 0$ obtenemos

$$P(1) = P(0)(1+r) - x = P_0(1+r) - x. \quad (2.7)$$

Para $i = 1$ tenemos

$$P(2) = P(1)(1+r) - x = (P_0(1+r) - x)(1+r) - x = P_0(1+r)^2 - x(1+r) - x.$$

Generalizando obtenemos la fórmula para calcular $P(T)$, la deuda acumulada después de T años.

Proposición 2. Para cualquier $T \in \mathbf{N}$,

$$P(T) = P_0(1+r)^T - x \left[\sum_{i=0}^{T-1} (1+r)^i \right]. \quad (2.8)$$

Demostración. Usamos el principio de inducción matemática. La ecuación 2.7 establece que la ecuación 2.8 es válida para el caso $T = 1$. Suponemos que también es válida para $T = n$ y consideramos el caso $T = n+1$, entonces

$$P(n+1) = P(n)(1+r) - x.$$

Usando 2.8 para $P(n)$ obtenemos

$$P(n+1) = \left\{ P_0(1+r)^n - x \left(\sum_{i=0}^{n-1} (1+r)^i \right) \right\} (1+r) - x.$$

Simplificando obtenemos que

$$P(n+1) = P_0(1+r)^{n+1} - x \left\{ \sum_{i=0}^n (1+r)^i \right\},$$

que es la fórmula esperada. Por lo tanto, por el principio de inducción la ecuación 2.8 es válida para toda $T \in \mathbf{N}$. $\square$

Recordemos que hemos denotado mediante x el valor fijo y periódico que el tenedor de la hipoteca debe pagar, usando la Proposición 2 vamos a determinar el valor de x . Para ésto, primero vamos a simplificar 2.8 utilizando la fórmula para una suma geométrica,

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{para } q \neq 1.$$

Con $q = (1 + r)$ y $n = T - 1$, obtenemos que,

$$\sum_{i=0}^{T-1} (1 + r)^i = \frac{(1 + r)^T - 1}{r}, \quad \text{con } r \neq 0.$$

Tenemos entonces que 2.8 se puede expresar así,

$$P(T) = P_0(1 + r)^T - [(1 + r)^T - 1] \frac{x}{r}. \quad (2.9)$$

Para determinar cuánto hay que pagar anualmente, de manera que la deuda sea liquidada en T años, hacemos $P(T) = 0$ y resolvemos para x . Con lo cual obtenemos que

$$x = \frac{P_0 r (1 + r)^T}{(1 + r)^T - 1}, \quad (2.10)$$

que es el valor del pago anual que se tendría que realizar.

Supongamos ahora que los pagos se realizan m veces al año, entonces el valor del pago para este caso es

$$x_m = \frac{P_0 \frac{r}{m} (1 + \frac{r}{m})^{mT}}{(1 + \frac{r}{m})^{mT} - 1}. \quad (2.11)$$

Ejemplo 9. Supongamos que una agencia de bienes raíces ofrece una propiedad valuada en \$100,000.00 a cambio de pagos mensuales de \$610.39 durante 25 años. La tasa de interés nominal es de 5.5 %. Sin embargo al calcular los pagos mediante la ecuación 2.11, obtenemos que el valor de los pagos mensuales es igual a

$$x_{12} = \frac{100000 \frac{0.055}{12} (1 + \frac{0.055}{12})^{(12)25}}{(1 + \frac{0.055}{12})^{(12)25} - 1} = 614.09.$$

La razón de ésto se debe a que la compañía, al momento de calcular los pagos utiliza una tasa de interés efectiva anual r_e compuesta 12 veces al año, correspondiente a una hipoteca que se paga semianualmente. Es decir r_e está dada por

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{r_e}{12}\right)^{12}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de $r = 0.055$, obtenemos que $r_e \approx 0.05438 < r$. Calculando nuevamente x_{12} utilizando el valor de r_e , obtenemos el valor que anuncia la empresa.

Si observamos la tabla 3 que se presentó en la sección 2.1, podemos ver que para una composición diaria, la tasa de interés efectiva anual es mayor que la tasa de interés nominal. Ésto nos dice que para pagos frecuentes la tasa de interés efectiva se incrementa. Por esta razón algunas compañías de bienes raíces (como la del ejemplo) que utilizan una tasa de interés efectiva para calcular los pagos, con la finalidad de evitar esta variabilidad en el valor de r_e , componen todas las hipotecas de manera semianual.

Finalmente para componer la hipoteca de manera continua, utilizamos la relación encontrada en la proposición 1,

$$A_c(t) = A_0 e^{\rho t},$$

donde ρ denota una tasa de interés correspondiente a una tasa de interés anual efectiva dada por

$$e^\rho = 1 + r_e.$$

Es decir, como en el ejemplo 9, la empresa que efectúa la hipoteca normalmente no utiliza la tasa de interés nominal al momento de calcular el valor de los pagos, sino una tasa de interés efectiva que se calcula dependiendo de la frecuencia de los pagos de la hipoteca.

Asumimos entonces que los pagos se van a realizar continuamente. Hacemos $x > 0$ igual al valor del pago fijo a realizar por unidad de tiempo, $P(t)$ el valor de la deuda al tiempo t y ρ denota la tasa de interés.

Así entonces, asumiendo que la hipoteca se va a liquidar continuamente, tomamos Δt pequeño y calculamos el valor de la deuda al tiempo $t + \Delta t$,

$$P(t + \Delta t) \approx P(t) + [\rho P(t) - x]\Delta t$$

o de forma equivalente

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx \rho P(t) - x.$$

Tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y denotando la derivada como $P'(t)$ obtenemos

$$P'(t) - \rho P(t) = -x. \quad (2.12)$$

Con la finalidad de resolver para $P(t)$, multiplicamos la ecuación obtenida por el factor de integración $e^{-\rho t}$ lo cual nos da

$$[P'(t) - \rho P(t)]e^{-\rho t} = \frac{d}{dt}[P(t)e^{-\rho t}] = -xe^{-\rho t}.$$

Integrando ambos lados de 0 a T obtenemos,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[P(t)e^{-\rho t}]dt = \int_0^T -xe^{-\rho t}dt.$$

Evaluable ambas integrales nos da,

$$P(T)e^{-\rho T} - P_0 = \frac{x}{\rho}e^{-\rho T} - \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\rho}(e^{-\rho T} - 1).$$

Resolviendo para $P(T)$ obtenemos

$$P(T) = P_0e^{\rho T} - \frac{x}{\rho}(e^{\rho T} - 1),$$

que es el valor de la deuda al tiempo T . Para determinar el valor de los pagos x que nos van a permitir pagar la deuda en T años hacemos $P(T) = 0$ y resolvemos para x . Por lo tanto la fórmula para los pagos es

$$x_c = \frac{P_0\rho e^{\rho T}}{e^{\rho T} - 1}. \quad (2.13)$$

Hasta ahora hemos tomado una tasa de interés ρ que no cambia con el tiempo, sin embargo en muchos casos la tasa de interés varía en función del tiempo. Supongamos entonces que ρ es variable y tomemos nuevamente un tiempo de amortización T . Con la finalidad de liquidar la deuda dentro del tiempo T , debemos ajustar el valor de los pagos a realizar, los pagos también debe depender del tiempo, esto es $x = x(t)$, ya que cada vez que cambia el valor del interés debemos actualizarlo, así como el tiempo restante y el capital pendiente. Si no se realiza dicho ajuste se corre el riesgo de no liquidar la deuda dentro del tiempo de amortización T .

Recordemos que la fórmula 2.13 nos da el valor del pago a realizar para cuando utilizamos una tasa de interés constante. Usando entonces un interés variable $\rho(t)$ la ecuación 2.13 toma la forma

$$x(t) = P(t) \frac{\rho(t)e^{\rho(t)(T-t)}}{e^{\rho(t)(T-t)} - 1}, \quad \text{con } 0 \leq t < T \quad (2.14)$$

donde $x(t)$ es el valor instantaneo del pago. Ahora reescribimos la ecuación 2.12 utilizando un interés variable $\rho(t)$, sustituimos x por $x(t)$ y lo pasamos al lado izquierdo, lo cual nos da

$$P'(t) - \rho(t)P(t) + P(t) \frac{\rho(t)}{1 - e^{-\rho(t)(T-t)}} = 0.$$

Agrupando términos semejantes y ordenando obtenemos

$$P'(t) + \rho(t) \frac{e^{-\rho(t)(T-t)}}{1 - e^{-\rho(t)(T-t)}} P(t) = 0. \quad (2.15)$$

Hacemos

$$\alpha(t) = \rho(t) \frac{e^{-\rho(t)(T-t)}}{1 - e^{-\rho(t)(T-t)}}, \quad (2.16)$$

y entonces podemos expresar la ecuación 2.15 como

$$P'(t) + \alpha(t)P(t) = 0.$$

Para resolver para $P(t)$, multiplicamos por el factor de integración $e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}$ y obtenemos

$$P'(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} + \alpha(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} P(t) = \frac{d}{dt}(P(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}) = 0.$$

Después integramos de 0 a t , lo cual nos da

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(P(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}) dt = P(t)e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} - P_0 = 0.$$

Resolviendo para $P(t)$ y sustituyendo el valor de α obtenemos que

$$P(t) = P_0 e^{-\int_0^t \rho(\tau) \frac{e^{-\rho(\tau)(T-\tau)}}{1 - e^{-\rho(\tau)(T-\tau)}} d\tau}.$$

Concluimos entonces que $P(t)$ nos da el valor de la deuda al tiempo t y mediante $x(t)$ podemos calcular el valor del pago a realizar en el tiempo t . Por construcción $\lim_{t \rightarrow T} P(t) = 0$ lo que nos dice que la deuda ha sido liquidada.

2.3.2. Préstamo

Otro ejemplo de flujo de pago es el préstamo. Cuando se nos otorga un préstamo adquirimos la responsabilidad de pagarlo mediante pagos fijos y periódicos. Como ya vimos en la sección anterior una hipoteca es un tipo de préstamo. Entonces los pagos a realizar se calculan de manera similar.

En esta sección vamos a suponer un pago constante x , una tasa de interés variable $\rho(t)$ y vamos a calcular el tiempo en el que el préstamo será liquidado. Para ésto comenzamos con la siguiente expresión

$$P'(t) - \rho(t)P(t) = -x.$$

Multiplicamos la expresión anterior por el factor de integración $e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau}$ y obtenemos

$$e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau} P'(t) - \rho(t) e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau} P(t) = \frac{d}{dt} [e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau} P(t)] = -x e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau}.$$

Después integramos de 0 a t , ordenamos y llegamos a la siguiente expresión

$$P(t) e^{-\int_0^t \rho(\tau) d\tau} = P_0 - x \int_0^t e^{-\int_0^\tau \rho(\sigma) d\sigma} d\tau. \quad (2.17)$$

El préstamo será liquidado cuando $P(T) = 0$ para alguna T , por lo tanto para dicha T obtenemos

$$P_0 = x \int_0^T e^{-\int_0^\tau \rho(\sigma) d\sigma} d\tau, \quad (2.18)$$

una ecuación trascendental de T , que puede resolverse numericamente si ρ es conocida. El caso más sencillo es para ρ constante.

Ejemplo 10. Supongamos que se nos ha otorgado un préstamo y consideremos que se maneja una tasa de interés que varía linealmente con el tiempo, esto es $\rho(t) = at + b$, con $a = .001$ y $b = .04$. Suponemos que el valor del préstamo es igual a \$10,000.00 y el valor de los pagos es de \$660. Nos interesa calcular el tiempo T dentro del cual será liquidada la deuda. Con esta finalidad resolvamos la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} 10,000 &= 660 \int_0^T e^{-\int_0^\tau \rho(\sigma) d\sigma} d\tau \\ &= 660 \int_0^T e^{-\frac{a\tau^2}{2} + b\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Resolviendo numericamente encontramos que $T = 26.99$. Es decir la deuda se liquidará en 26.99 años.

2.3.3. Compra de bonos

El último ejemplo de flujo de efectivo que vamos a analizar en este capítulo es la compra de un bono. La compra de un bono nos da el derecho de recibir un flujo de pagos en efectivo. Supongamos que cada año recibimos n pagos. Así en t años tendríamos un total de $N = nt$ pagos. También supongamos que para cada j tal que $1 \leq j \leq N$ tenemos derecho a recibir un pago de b_j pesos en el tiempo j . El valor presente de este pago es $b_j e^{-\frac{r}{n}j}$. Así el valor

presente del bono que genera los N pagos es igual a

$$P = \sum_{j=1}^N b_j (e^{-\frac{r}{n}j}) \quad (2.19)$$

Esta cantidad corresponde a lo que habría que pagar por el flujo de los N pagos $b_1, b_2 \dots, b_N$.

Ejemplo 11. Calcular el costo de un bono que cada semestre paga \$100 y que da derecho a 4 pagos en total. Suponga que la tasa de interés es del 4%.

En este caso $r = 0.04$, $n = 2$, $N = 4$. Por lo tanto el costo del bono es

$$P = \frac{100}{e^{.02}} + \frac{100}{e^{.04}} + \frac{100}{e^{.06}} + \frac{100}{e^{.08}} = 329.079$$

Capítulo 3

Anualidades

En este capítulo se trata principalmente el tema de las anualidades como una alternativa para las personas que quieren planear su retiro y no cuentan con un plan de jubilación o beneficios de retiro en el lugar donde trabajan. Es decir, ellos mismos son responsables de administrar su dinero y generar ingresos para cuando se retiren, de manera que cuando dejen de trabajar tengan lo suficiente para vivir. Lo primero que se presenta son las herramientas analíticas necesarias para entender cómo funcionan las anualidades, y con ésto poder tomar buenas decisiones al momento de ahorrar e invertir el dinero, con el fin principal de mantener una vida confortable en los años de retiro.

Definición 3. Una anualidad es un contrato en el cual una compañía de seguros hace una serie de pagos en intervalos regulares de tiempo a cambio de una prima ó primas que ya han sido pagadas por el comprador. Las anualidades usualmente son adquiridas para representar un ingreso futuro al momento del retiro.

Las anualidades son otro ejemplo de flujo de efectivo y las vamos a analizar ampliamente en este capítulo. Las anualidades difieren de los préstamos y de la compra de bonos. En una anualidad se invierte una cantidad fija de dinero con una compañía de seguros y a cambio de ésto, quien invierte recibe un flujo constante de efectivo por el resto de su vida. La diferencia de las anualidades con respecto a los préstamos y bonos radica en que ahora el tiempo de vida de las personas es una variable aleatoria (no todos viven el mismo tiempo) que se debe tomar en cuenta al momento de calcular el valor de una anualidad, es decir el valor de la prima que el comprador debe pagar a cambio del flujo constante de efectivo. Otra diferencia es que ahora no sabemos la cantidad de pagos que se van a realizar, ya que dicha cantidad dependerá de

la cantidad de años que viva el comprador, y en el caso de los préstamos y compra de bonos la cantidad de pagos a realizar es conocida.

Quien adquiere una anualidad generalmente busca un ingreso garantizado para el futuro. Para adquirir una anualidad es importante tomar en cuenta la edad del comprador, cuánto ingreso es necesario para alcanzar una razonable jubilación, así como el interés que se maneja y por cuanto tiempo está garantizada. Por ejemplo hay anualidades con garantía de 10 años, en las cuales un beneficiario recibe dinero si el comprador de la anualidad muere dentro de los 10 años, es decir el beneficiario seguirá recibiendo los pagos hasta que se cumplan los 10 años. Incluso hay un tipo de anualidad en la cual los pagos periódicos se realizan hasta que el comprador y beneficiario mueren. Claro, en estos casos, a cambio de una misma prima, los pagos periódicos serían menores.

Otra característica importante de las anualidades es que a mayor edad del comprador, mayor es el pago que se recibe a cambio de una misma prima. Ésto es porque la esperanza de vida de la persona de mayor edad es menor y entonces el valor de la prima debe ser regresado en un periodo menor de tiempo. También, a cualquier edad, las mujeres siempre reciben un pago menor que los hombres. Ésto es, porque las mujeres viven más tiempo en promedio y entonces la compañía de seguros realizaría una cantidad mayor de pagos.

Lo que vamos a realizar en este capítulo es calcular el costo de las anualidades. Para ésto, vamos a analizar la variable aleatoria que nos da el tiempo en que ocurre el evento "la persona muere". El método que vamos a utilizar para este análisis consiste en suponer que ese tiempo sigue una determinada distribución dada por una función matemática. Es decir, se va a especificar un modelo de probabilidad para el tiempo de supervivencia de las personas. Para ello primero se plantea un modelo de cómo evoluciona en función del tiempo la tasa instantánea de mortalidad. Una vez determinada se calcula a partir de ella, la función de supervivencia. Resulta fundamental elegir la función que mejor se adapte y represente adecuadamente la mortalidad, y ésto se hace según los datos observados o estableciendo ciertas hipótesis.

3.1. Tablas de mortalidad

La base de todo sistema de pensiones y herramienta principal para valorar el costo de pólizas de seguros y anualidades son las tablas de mortalidad. Una tabla de mortalidad relaciona a un grupo de edad x con su probabilidad

q_x de morir durante el siguiente año. Claramente $0 \leq q_x \leq 1$ y $q_N = 1$ para $N \simeq 120$. Existen diversas tablas de mortalidad. La siguiente tabla muestra parte de una tabla de mortalidad correspondiente a miembros sanos de un plan de pensiones.

Tabla 4. *Tabla de mortalidad.*

Edad	Mujer q_x	Hombre q_x
50	0.002344	0.005347
55	0.003531	0.005905
60	0.006200	0.008196
65	0.010364	0.013419
70	0.016742	0.022206
75	0.028106	0.037834
80	0.045879	0.064368
85	0.077446	0.110757
90	0.121682	0.183408
95	0.194509	0.267491
100	0.237467	0.344556
105	0.293116	0.397886
110	0.364617	0.400000
115	0.400000	0.400000
120	1.000000	1.000000

Fuente. Sociedad de Actuarios, RP2000

Las probabilidades son pequeñas para los más jóvenes y se incrementan con la edad. Después saltan a $q_N = 1$ al final de la tabla.

Las tablas de mortalidad nos dan la probabilidad de muerte o la probabilidad de sobrevivir dentro de cualquier año. También nos permiten calcular la probabilidad condicional de sobrevivir n años más. Ésto es: si un individuo actualmente tiene una edad x , entonces su probabilidad de sobrevivir n años más se denota y define mediante

$${}_n p_x = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i}).$$

Se puede observar que si fijamos la edad x , entonces la probabilidad ${}_n p_x$ disminuirá conforme n aumente, ya que las probabilidades de sobrevivir en edades avanzadas disminuyen conforme se aumenta la edad. De la misma manera, si fijamos n e incrementamos x , ${}_n p_x$ también disminuirá conforme se aumente la edad. En términos de notación, en adelante se usará $n \leq N$ para

edades discretas y $t \leq T$ para edades continuas.

Hay varios factores que tienen un impacto directo en las probabilidades de sobrevivencia durante el retiro. Por ejemplo; el género y la edad de retiro, que afectan directamente las tasas de mortalidad. Además el consumo excesivo de alcohol, cigarro y el incremento en la obesidad aumentan las tasas de mortalidad.

Las tablas de mortalidad son útiles para ayudar a diseñar las funciones que modelen el tiempo de sobrevivencia de las personas. Es importante tomar en cuenta que la tasa de mortalidad no es homogénea entre la población y una tabla de mortalidad no es definitiva en nuestra probabilidad particular de sobrevivir.

3.2. Función de sobrevivencia

Hagamos que T_x represente la variable aleatoria que nos da el tiempo de vida restante de un individuo de edad x , es decir el tiempo en que ocurre el evento "la persona muere". T_x es una variable continua y no negativa. Para analizar T_x nos vamos a valer de 3 funciones que caracterizan su distribución; la función de sobrevivencia, que es la probabilidad de un individuo de vivir al tiempo t ; la función de riesgo, que describe la probabilidad de que un individuo de edad t esté vivo al siguiente instante; y la función de densidad de probabilidad.

Las funciones mencionadas anteriormente son usadas para ilustrar las distintas características de la distribución de T_x y son las que nos van a permitir calcular el costo de las anualidades. Si conocemos alguna de las 3 funciones entonces las otras 2 se pueden determinar de manera única. Comenzaremos estudiando la función de sobrevivencia.

La cantidad básica utilizada para describir el tiempo de ocurrencia de un evento, que en este caso sería la muerte de una persona, es la función de sobrevivencia, que como ya mencionamos es la probabilidad de que un individuo de edad x esté vivo al tiempo $x + t$, o más generalmente, la probabilidad de que el evento de interés no ocurra al tiempo t . Esta función se define como

$$S_x(t) = P\{T_x > t\}. \quad (3.1)$$

Tenemos que, $S_x(t)$ es el complemento de la función de distribución acumulativa de T_x , $F_x(t)$, es decir

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) \quad \text{con } F_x(t) = P(T_x \leq t). \quad (3.2)$$

En consecuencia, la función de densidad de probabilidad de T_x , $f_x(t)$, está dada por

$$f_x(t) = F'_x(t) = -S'_x(t). \quad (3.3)$$

Como consideramos a T_x como una variable aleatoria continua, entonces, $S_x(t)$ es una función continua y decreciente, ésto es $S_x(t_1) > S_x(t_2)$ para $t_1 < t_2$.

Hay varios tipos de curvas de sobrevivencia, pero todas ellas poseen características comunes. Todas son monótonas, no crecientes, igual a 1 en el valor 0 y a 0 al tiempo que se aproxima a ∞ , esto es, $S_x(0) = P\{T_x > 0\} = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} S_x(t) = 0$ (nadie puede vivir eternamente).

3.3. Función de riesgo

Otra cantidad básica y fundamental en el análisis de sobrevivencia y que caracteriza la distribución de T_x es la función de riesgo o tasa instantanea de ocurrencia del evento "la persona muere". La función de riesgo es particularmente útil para describir la manera en que la probabilidad de experimentar un evento cambia con el tiempo. Hagamos que t mida el tiempo de vida de un individuo elegido al azar. Entonces la función de riesgo se define como

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{A | B\}}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

donde A es el evento de que el individuo muera dentro del periodo de tiempo $(t, t + \Delta t)$, B es el evento de que el individuo esté vivo al tiempo t , y Δt representa un incremento en el tiempo.

El numerador de la expresión anterior es la probabilidad condicional de que el evento ocurra en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ dado que no ha ocurrido antes, y el denominador es la longitud del intervalo. Al dividirlos obtenemos la tasa de ocurrencia del evento por unidad de tiempo, y tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos la tasa instantanea de ocurrencia del evento de interés.

Al observar la ecuación 3.4 podemos ver que $h(t)\Delta t$ podría interpretarse como la probabilidad aproximada que tiene un individuo de edad t , de experimentar el evento en el siguiente instante, es decir de morir en el intervalo de t a $(t + \Delta t)$.

La función de riesgo presenta varias formas. La única restricción es que $h(t)$ es no negativa, es decir $h(t) \geq 0$. Las funciones de riesgo para la ocurrencia de un evento particular pueden presentar las siguientes características; ser creciente, decreciente, constante, con forma de bañera o forma de joroba.

Ejemplo 12. Las funciones de riesgo crecientes pueden utilizarse cuando se tiene un proceso de desgaste natural. Por ejemplo, una función de riesgo creciente puede describir bien el proceso humano de envejecimiento. Una función de riesgo creciente nos dice que a mayor edad existe un riesgo mayor de morir en el siguiente instante.

Ejemplo 13. Las funciones de riesgo decrecientes son mucho menos comunes, pero se utilizan ocasionalmente cuando se quiere describir un proceso en el cual existe la probabilidad de morir en un periodo corto de tiempo. Por ejemplo, en pacientes que acaban de experimentar un trasplante y corren el riesgo de infección o de que su cuerpo no se adapte al órgano transplantado. Al transcurrir el tiempo, el riesgo de infección disminuye y el cuerpo se acostumbra, lo que indica que la probabilidad de morir decrece.

Ejemplo 14. La mayoría de las veces, las funciones de riesgo con forma de bañera se adecuan para describir los datos de mortalidad obtenidos de algunas poblaciones. Este tipo de función nos dice que durante un periodo temprano, las muertes son principalmente a causa de enfermedades en niños, después de esto la tasa de mortalidad se estabiliza, y finalmente le sigue una tasa de mortalidad creciente, correspondiente al proceso natural de envejecimiento.

Ejemplo 15. Finalmente, si la función de riesgo es creciente al principio y eventualmente comienza a decaer (como una función cuadrática), se dice que tiene forma de joroba. Este tipo de función se utiliza frecuentemente para describir la probabilidad de sobrevivir después de una cirugía, donde existe un incremento inicial en el riesgo de morir, originado por una infección, hemorragia u otras complicaciones justo después de la cirugía. Después de esto le sigue un descenso estable, que indica que el riesgo de morir disminuye conforme el paciente se recupera.

Lo que vamos a realizar ahora es encontrar una expresión que nos relacione la función de sobrevivencia con la función de riesgo. Esto con la finalidad de

poder obtener una a partir de la otra, y entonces construir un modelo de probabilidad para T_x .

Calculamos entonces

$$S_x(t + \Delta t) = P\{T_x > t + \Delta t\} = P\{\bar{U}V\}, \quad (3.5)$$

donde $\bar{U}$ denota el evento de que el individuo esté vivo al tiempo $(x+t) + \Delta t$, y V el evento de que el individuo esté vivo al tiempo $x+t$. En consecuencia, de acuerdo a la definición de probabilidad condicional, podemos expresar la ecuación anterior como

$$S_x(t + \Delta t) = P\{\bar{U} \mid V\} \cdot P\{V\}. \quad (3.6)$$

Tenemos que la función de sobrevivencia se conecta con la función de riesgo mediante la relación

$$S_x(t + \Delta t) - S_x(t) = P\{\bar{U} \mid V\} \cdot P\{V\} - P\{V\},$$

donde $S_x(t + \Delta t)$ se ha definido mediante la ecuación 3.6. Agrupando términos semejantes e identificando $P\{V\}$ con $S_x(t)$ obtenemos que

$$S_x(t + \Delta t) - S_x(t) = (P\{\bar{U} \mid V\} - 1)S_x(t) = -(P\{U \mid V\})S_x(t).$$

Donde U denota el evento de que el individuo muera en el intervalo de tiempo de $(x+t, (x+t) + \Delta t)$. Sustituyendo $P\{U \mid V\}$ utilizando la función 3.4 para $(x+t)$, la igualdad anterior se convierte en

$$S_x(t + \Delta t) - S_x(t) = (-h(x+t)\Delta t)S_x(t) + o(\Delta t).$$

Reordenando, obtenemos que

$$\frac{S_x(t + \Delta t) - S_x(t)}{S_x(t)\Delta t} = -h(x+t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, encontramos que

$$\frac{S'_x(t)}{S_x(t)} = -h(x+t). \quad (3.7)$$

Ahora con la finalidad de resolver para $S_x(t)$ integramos de 0 a t ,

$$\ln S_x(t) - \ln S_x(0) = - \int_0^t h(x+\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Resolviendo la ecuación 3.8 para $S_x(t)$ nos da que

$$S_x(t) = e^{-\int_0^t h(x+\tau) d\tau}. \quad (3.9)$$

Finalmente recordemos que, $f_x(t)$, la función de densidad de probabilidad de T_x , está dada por la ecuación 3.3, y vamos a reescribirla sustituyendo $S'_x(t)$ por 3.7. Obtenemos con ésto una nueva expresión para $f_x(t)$ que la relaciona con la función de riesgo y con la función de sobrevivencia. Dicha expresión es

$$f_x(t) = h(x+t)S_x(t). \quad (3.10)$$

3.4. Ejemplos de funciones de riesgo

Los siguientes son ejemplos de diferentes funciones de riesgo con su correspondiente función de sobrevivencia, función de distribución acumulativa, y la función de densidad de probabilidad, calculadas a partir de las ecuaciones 3.9, 3.2 y 3.10 respectivamente.

Ejemplo 16. La función de riesgo más simple es la función constante, ésto es, $h(t) := \lambda$, donde λ es una constante no negativa. La función de sobrevivencia para este caso es

$$S_x(t) = e^{-\int_0^t h(x+\tau) d\tau} = e^{-\int_0^t \lambda d\tau} = e^{-\lambda t}.$$

Para este caso, la edad actual de la persona no afecta la probabilidad de sobrevivencia. Sólo importa el valor que tenga λ , es decir, $S_x(t)$ es igual a $S_y(t)$ para cualesquiera x y y .

A esta función de sobrevivencia se le llama distribución exponencial con parámetro λ . La función de distribución acumulativa es $F_x(t) = 1 - S_x(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, y la función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_x(t) = h(x+t)S_x(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Elegir una función de riesgo constante para describir la mortalidad humana es una opción irreal, y ésto nos lleva a predicciones que no van de acuerdo a la realidad; sin embargo, es útil para realizar análisis teórico. Los siguientes ejemplos muestran funciones más comunmente utilizadas en la práctica.

Ejemplo 17. La función de riesgo Weibull se define como

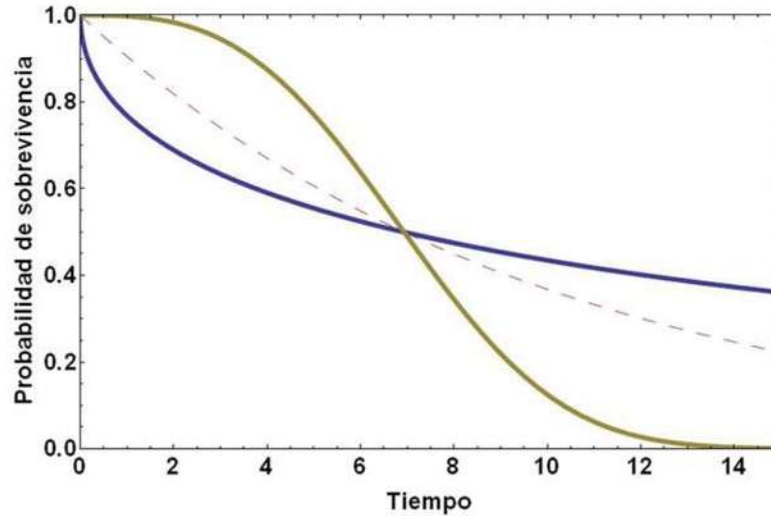
$$h(t) := \alpha \beta t^{\beta-1} \quad \text{para } \alpha, \beta > 0. \quad (3.11)$$

La forma de la función de riesgo viene dada por el parámetro β . En el caso concreto de $\beta = 1$ la función de riesgo es constante, con valor α , lo que corresponde a una función de supervivencia exponencial. Para $\beta < 1$ la función de riesgo disminuye con el tiempo, y para $\beta > 1$ la función de riesgo aumenta con el tiempo y además es no acotada.

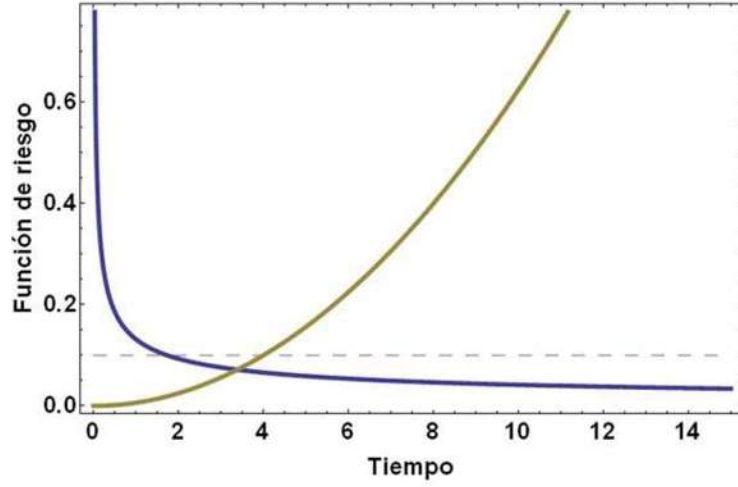
La función de supervivencia correspondiente a la función de riesgo Weibull viene dada por la fórmula $S_x(t) = e^{-\alpha((x+t)^\beta - x^\beta)}$ y la función de distribución acumulativa $F_x(t) = 1 - e^{-\alpha((x+t)^\beta - x^\beta)}$. Ésto implica que la función de densidad de probabilidad es

$$f_x(t) = \alpha \beta (x+t)^{\beta-1} e^{-\alpha((x+t)^\beta - x^\beta)}.$$

En la figura siguiente se muestran funciones de supervivencia tipo Weibull para $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.26328$; $\beta = 2$, $\alpha = 0.1$; y $\beta = 3$, $\alpha = 0.00208$.



En la figura siguiente se muestran las correspondientes funciones de riesgo.



Weibull es un modelo muy utilizado, debido a que con la elección adecuada de sus parámetros se ajusta a una gran variedad de situaciones.

Ejemplo 18. La función lineal de riesgo se define como

$$h(t) := \alpha + \beta t \quad \text{donde } \beta > 0.$$

Para este caso $S_x(t) = e^{-t\alpha - \frac{\beta(t+x)^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2}}$, lo que implica que la función de distribución acumulativa $F_x(t) = 1 - e^{-t\alpha - \frac{\beta(t+x)^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2}}$ y la función de densidad de probabilidad es

$$f_x(t) = (\alpha + \beta(t+x))e^{-t\alpha - \frac{\beta(t+x)^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2}}.$$

Ejemplo 19. La función de riesgo Gompertz se define como $h(t) := \frac{1}{b}e^{\frac{t-m}{b}}$ con parámetros m y $b \in \mathbf{R}$. A m se le conoce como el valor modal de vida y a b como el coeficiente de dispersión. Los valores típicos para los parámetros son $m = 82.3$ y $b = 11.4$. Podemos pensar en m y b , como parámetros flexibles, cuyos valores se eligen de forma que se ajusten a probabilidades de sobrevivencia de cualquier edad dada. La función de sobrevivencia correspondiente es,

$$S_x(t) = \exp\left\{e^{\frac{x-m}{b}} - e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right\}$$

y

$$F_x(t) = 1 - \exp\left\{e^{\frac{x-m}{b}} - e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right\}$$

y

$$f_x(t) = \left(\exp\left\{e^{\frac{x-m}{b}} - e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right\}\right)\left(\frac{1}{b}e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right).$$

La función de supervivencia Gompertz establece que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades (y a fallecer por causas naturales) decreciente en función de la edad, por lo que la tasa de mortalidad aumenta con la edad.

Posteriormente a Gompertz, Makeham enunció 2 leyes de supervivencia. La primera ley considera la tasa instantánea de mortalidad: añade una constante arbitraria a la función de Gompertz, que representa la mortalidad accidental (azar) y es independiente de la edad. Por lo tanto según Makeham, la muerte de un individuo es consecuencia de 2 causas coexistentes: el azar y una resistencia cada vez más débil a la muerte conforme aumenta la edad.

Ejemplo 20. La función Gompertz-Makeham se define como

$$h(t) = \lambda + \frac{1}{b}e^{\frac{t-m}{b}}, \quad \lambda > 0.$$

De acuerdo a esta función la tasa instantánea de mortalidad es igual a una constante más una curva exponencial dependiente del tiempo. La constante λ intenta representar la componente de la tasa de mortalidad que se atribuye a los accidentes, mientras que la exponencial refleja las muertes por causa natural. Esta función se incrementa con el tiempo y se va a ∞ conforme $t \rightarrow \infty$. La correspondiente función de supervivencia es

$$S_x(t) = \exp\left\{-\lambda t + e^{\frac{x-m}{b}} - e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right\},$$

y $F_x(t)$ y $f_x(t)$ se pueden calcular como en los ejemplos anteriores.

La función de riesgo Gompertz-Makeham ofrece buenos ajustes en edades intermedias (adultas), pero presenta algunos problemas en edades extremas, principalmente en más jóvenes, ya que en edades infantiles la mortalidad es decreciente, por lo cual Makeham enunció la segunda ley que añade otro sumando proporcional a la edad. La mayoría de las veces se utiliza $\lambda = 0$, que sería el caso Gompertz, debido a que λ tiende a tener un valor muy pequeño en la práctica.

3.5. Valor esperado de T_x

En esta sección vamos a calcular la esperanza de T_x , es decir, el tiempo de vida esperado de un individuo de edad x . Para esto vamos a utilizar la función de riesgo y las funciones que de ella derivamos.

Vamos a calcular el tiempo de vida esperado de una persona de edad x mediante

$$E(T_x) = \int_0^\infty t f_x(t) dt, \quad (3.12)$$

donde $E(T_x)$ denota la esperanza matemática de T_x , y T_x , tiene una función de densidad $f_x(t)$. Utilizando la ecuación 3.3, la ecuación anterior se puede escribir como

$$E(T_x) = - \int_0^\infty t S'_x(t) dt.$$

Integrando la ecuación anterior por partes obtenemos que

$$E(T_x) = (-t S_x(t))|_0^\infty + \int_0^\infty S_x(t) dt.$$

Asumiendo que $S_x(t)$ cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t S_x(t) = 0$$

(es decir, que nadie vive para siempre), podemos expresar la esperanza de vida como

$$E(T_x) = \int_0^\infty S_x(t) dt. \quad (3.13)$$

Ahora vamos a encontrar la varianza de T_x , la cual vamos a denotar con $Var(T_x)$, para ésto primero calculamos

$$E(T_x^2) = \int_0^\infty t^2 f_x(t) dt = - \int_0^\infty t^2 S'_x(t) dt = 2 \int_0^\infty t S_x(t) dt.$$

Entonces obtenemos que la varianza se relaciona con la función de sobrevivencia mediante

$$Var(T_x) = 2 \int_0^\infty t S_x(t) dt - \left[\int_0^\infty S_x(t) dt \right]^2. \quad (3.14)$$

La teoría que se ha desarrollado hasta el momento aún incluye la posibilidad de obtener un tiempo de vida esperado no acotado. Ésto podría ocurrir si la función de riesgo utilizada fuera tal que $\int_0^\infty h(t) dt < \infty$, en este caso $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) > 0$ y necesariamente se tendría que $E(T_x) = \infty$. Los cálculos que acabamos de realizar no se aplican a este caso, ya que asumimos que todo individuo tiene que morir, lo cual no se cumpliría aquí. En dichos casos, se tendría que usar la función de distribución acumulativa y proceder a partir de ahí. Sin embargo para elecciones realistas de la función de riesgo dicho problema no se presenta.

Otro valor que vamos a definir, es la mediana de T_x , $M[T_x]$, la cual se relaciona con T_x mediante

$$P\{T_x < M[T_x]\} = 0.5.$$

Otra forma de pensar en la mediana es considerando

$$P\{T_x \geq M[T_x]\} = 0.5.$$

La probabilidad de vivir más allá de mediana es del 50 %.

Ejemplo 21. El valor $E(T_x)$ para una distribución exponencial es

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}.$$

Sí $\lambda = 0.10$ entonces $E(T_x) = 10$, y para $\lambda = 0.05$, $E(T_x) = 20$.

La mediana la podemos obtener integrando la función de densidad, $f_x(t)$, de 0 a $M[T_x]$ y resolviendo para $M[T_x]$,

$$Pr\{T_x \geq M[T_x]\} = \frac{1}{2} = \int_{M[T_x]}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda M[T_x]} \Rightarrow M[T_x] = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Para $\lambda = 0.05$, la mediana vale $M[T_x] = 13.862$ años.

Supongamos ahora, una distribución Gompertz, en este caso el valor de $E(T_x)$ se calcula mediante

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{e^{\frac{x-m}{b}} - e^{\frac{(x+t)-m}{b}}\right\} dt.$$

En la tabla 5 se presentan ejemplos numéricos del tiempo de vida esperado $E(T_x)$, para valores de $m = 82.3$ y $b = 11.4$.

Tabla 5. $E(T_x)$ Distribución Gompertz.

Edad (x)	$E(T_x)$
30	46.3043
40	36.8885
50	27.9787
60	19.9006
70	13.0503

3.6. Costo de una anualidad

Finalmente, vamos a analizar cómo se calcula el costo de una anualidad. Supongamos que la compañía de seguros va a pagar al comprador de una anualidad la cantidad z de dinero de manera periódica hasta que muere.

Asumiendo que se maneja una tasa de interés ρ , vamos a calcular el valor presente, Y , de dicha anualidad,

$$Y = \int_0^{T_x} z e^{-\rho t} dt = \frac{z}{\rho} (1 - e^{-\rho T_x}), \quad (3.15)$$

donde $\frac{z}{\rho}$ sería el valor presente de una anualidad que se paga en perpetuidad. (Claramente $\frac{z}{\rho} \geq Y$).

Examinemos ahora la probabilidad de que, Y , el valor presente sea menor o igual a un valor y ,

$$P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{z}{\rho}(1 - e^{-\rho T_x}) \leq y\right\},$$

o de forma equivalente

$$P\{Y \leq y\} = P\left\{T_x \leq -\frac{1}{\rho} \ln\left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)\right\}.$$

La función de distribución acumulativa, $F_Y(y)$, de Y , está entonces dada por

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = \begin{cases} 1 - S_x\left(-\frac{1}{\rho} \ln\left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)\right) & \text{si } \rho y \leq z, \\ 1 & \text{si } \rho y > z. \end{cases}$$

Y la función de densidad, $f_Y(y)$, es

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{z - \rho y} S'_x\left(-\frac{1}{\rho} \ln\left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)\right) & \text{si } \rho y \leq z, \\ 0 & \text{si } \rho y > z. \end{cases}$$

Recordando que $f_x(t) = -S'_x(t)$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{z - \rho y} f_x\left(-\frac{1}{\rho} \ln\left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)\right) & \text{si } \rho y \leq z, \\ 0 & \text{si } \rho y > z. \end{cases} \quad (3.16)$$

Supongamos ahora que la compañía de seguros vende miles de anualidades a diferentes personas, todas de edad x , por ejemplo. Algunas de estas personas van a vivir por largo tiempo, y entonces la compañía de seguros tendrá que pagar más. Otros clientes no van a vivir tanto y el número de pagos va a ser menor. Podemos pensar que en promedio, la compañía de seguros va a pagar

a cada cliente una cantidad que puede ser calculada tomando la esperanza de la ecuación 3.15, ésto es,

$$A = E(Y), \quad (3.17)$$

donde A denota el valor de la prima que se deberá pagar por el flujo periódico de los pagos z .

Ejemplo 22. Supongamos que T_x se distribuye exponencialmente, ésto implica que $S_x(t) = e^{-\lambda t}$ y la correspondiente función de densidad es $f_x(y) = \lambda e^{-\lambda y}$. Después de sustituir ésta última en la ecuación 3.16 y simplificar obtenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{z} \left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}-1} & \text{si } \rho y \leq z, \\ 0 & \text{si } \rho y > z. \end{cases}$$

Usando esta relación, obtenemos que el valor esperado de Y , $E(Y)$, es

$$E(Y) = \frac{\lambda}{z} \int_0^{\frac{z}{\rho}} y \left(1 - \frac{\rho y}{z}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}-1} dy, \quad (3.18)$$

lo cual sustituyendo $w = \frac{\rho y}{z}$ e integrando por partes nos da

$$A = E(Y) = \frac{z}{\lambda + \rho}. \quad (3.19)$$

Como era de esperarse el valor de la anualidad es mayor cuando la probabilidad de que el cliente muera se aproxima a 0 ($h(t) \equiv 0$). En este caso $E(Y) = \frac{z}{\rho}$, que es el valor presente de una anualidad que se paga en perpetuidad. También podemos observar que solamente importa la suma de ρ y λ , y no los valores individuales al momento de calcular el valor de la anualidad.

Una manera alternativa de calcular $E(Y)$ es como sigue:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\int_0^{T_x} z e^{-\rho t} dt\right) \\ &= E\left(\int_0^\infty z e^{-\rho t} 1_{\{T_x \geq t\}} dt\right) \\ &= \int_0^\infty z e^{-\rho t} E(1_{\{T_x \geq t\}}) dt \\ &= \int_0^\infty z e^{-\rho t} S_x(t) dt. \end{aligned}$$

Otro valor que es muy importante calcular para las compañías de seguros es la varianza del valor esperado de una anualidad, ésto con la finalidad de

evaluar el riesgo que adquiere la compañía al vender anualidades. Tenemos que

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2. \quad (3.20)$$

Ejemplo 23. Supongamos nuevamente que T_x se distribuye exponencialmente, ésto quiere decir que $h(t) = \lambda > 0$. Calculemos para este caso el valor de la varianza. Usando las ecuaciones 3.19 y 3.20, obtenemos que la varianza está dada por

$$Var(Y) = \int_0^{\frac{z}{\lambda + \rho}} y^2 f_Y(y) dy - \left(\frac{z}{\lambda + \rho}\right)^2,$$

la cual, sustituyendo el valor apropiado para $f_Y(y)$ e integrando por partes se convierte en

$$Var(Y) = \frac{\lambda z^2}{(\lambda + \rho)^2(\lambda + 2\rho)}.$$

3.7. Valor de anualidades conjuntas

Como se mencionó al principio, hay un tipo de anualidad llamada conjunta en la cual el comprador de la anualidad nombra un beneficiario. Cuando el comprador de la anualidad muere, el beneficiario continuará recibiendo los pagos correspondientes a la anualidad, es decir los pagos terminan cuando ambos, comprador y beneficiario mueren. En este caso la variable aleatoria consiste en el máximo de los 2 tiempos de vida.

En la anualidad conjunta, a cambio de una misma prima, se recibe un pago menor en comparación con el caso individual. La razón es clara, en el caso individual los pagos finalizan cuando el comprador de la anualidad muere, pero en la anualidad conjunta, el comprador y beneficiario deben morir para que los pagos finalicen, por tal razón, los pagos deben ser menores.

En la tabla siguiente se muestran las probabilidades de sobrevivencia para mujeres y hombres de 65 años. Son valores muy optimistas y se obtuvieron utilizando la ley de mortalidad de Gompertz, bajo los parámetros $m = 88.18$ y $b = 10.5$ para los hombres y $m = 92.63$ y $b = 8.78$ para las mujeres.

Tabla 5. *Probabilidad de sobrevivencia a los 65 años*

Sobrevivir a los	Hombre	Mujer
70	0.935	0.967
75	0.839	0.912
80	0.705	0.823
85	0.533	0.686
90	0.339	0.497
95	0.164	0.281
100	0.023	0.103

Imaginemos una pareja de casados, ambos de 65 años, y supongamos que desean adquirir una anualidad conjunta. Nos interesa calcular su probabilidad conjunta de sobrevivencia. Es decir, la probabilidad de que ambos sobrevivan t años más. Si hacemos $t = 25$, de acuerdo a la tabla, la probabilidad conjunta estaría dada por

$$(0.339)(0.497)=16.84 \text{ \%}.$$

Dicho resultado se obtiene si asumimos que son eventos independientes (aunque algunos investigadores han observado que, en algunos casos, la muerte de un miembro de la pareja incrementa el riesgo de muerte del sobreviviente).

Ahora nos interesa calcular la probabilidad de que al menos uno de los 2 sobreviva 25 años más. Dicha probabilidad es

$$1-((1-0.339)(1-0.497))=66.76 \text{ \%},$$

que es casi 4 veces mayor. Aquí sólo se excluye el evento de que ambos mueran.

Notemos que en general, la probabilidad de que un hombre de x años viva t años más, denotada con $S_x(t)$, y la probabilidad de que una mujer de y años viva t años más, denotada con $S_y(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} S_x(t)S_y(t) &= \exp - \left\{ \int_0^t h^{hombre}(x+s)ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t h^{mujer}(y+s)ds \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t (h^{hombre}(x+s) + h^{mujer}(y+s))ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Finalmente podemos concluir que las 2 funciones de riesgo pueden combinarse en una sola función que represente la función de riesgo conjunta, esto es

$$h^{conjunta}(s) = h^{hombre}(x + s) + h^{mujer}(y + s). \quad (3.22)$$

Además, asumiendo que las muertes son independientes una de la otra, podemos expresar la probabilidad de que al menos un miembro de la pareja esté vivo en t años como

$$\begin{aligned} S_{x,y}(t) &= 1 - (1 - S_x(t))(1 - S_y(t)) \\ &= 1 - (1 - S_y(t) - S_x(t) + S_x(t)S_y(t)) \\ &= S_x(t) + S_y(t) - S_x(t)S_y(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

En resumen para obtener la probabilidad conjunta, sumamos las probabilidades individuales y después restamos el producto de ellas.

Utilizamos los subíndices x, y para definir el costo de una anualidad conjunta que pague una cantidad z continuamente como

$$\begin{aligned} A_{x,y} &:= \int_0^\infty e^{-\rho s} S_{x,y}(s) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho s} S_x(s) ds + \int_0^\infty e^{-\rho s} S_y(s) ds \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-\rho s} S_x(s) S_y(s) ds, \end{aligned} \quad (3.24)$$

lo cual se sigue directamente de la ecuación 3.23. El costo de la anualidad conjunta es igual a la suma de los costos de las anualidades individuales de un hombre de edad x y una mujer de edad y , menos el costo de una anualidad hipotética que adquiere una persona cuya probabilidad de sobrevivencia es igual al producto de las 2 probabilidades individuales.

Ejemplo 24. Supongamos que ambos tienen un tiempo de vida que sigue la ley exponencial, esto es, $S_x(t) = e^{-t\lambda_x}$ y $S_y(t) = e^{-t\lambda_y}$, donde λ_x y λ_y denotan la función de riesgo correspondiente para el hombre de edad x y la mujer de edad y , respectivamente. Para este caso $S_x(t)S_y(t) = e^{-t(\lambda_x + \lambda_y)}$, por lo tanto, utilizando 3.24 obtenemos que

$$A_{x,y} = \frac{1}{\lambda_x + \rho} + \frac{1}{\lambda_y + \rho} - \frac{1}{\lambda_x + \lambda_y + \rho}.$$

Esto es, el valor de la anualidad conjunta es igual a la suma de los valores individuales menos el costo de una anualidad hipotética, en la cual, la función de riesgo es la suma de las 2 funciones de riesgo individuales.

3.8. Simulaciones

En esta sección vamos a presentar los resultados obtenidos de una simulación de lo que podría suceder al vender anualidades, con la finalidad de verificar la teoría obtenida. En la simulación suponemos que vendemos cierta cantidad de anualidades a personas de diferentes edades. Dichas edades las obtuvimos aleatoriamente. Generamos primero una variable aleatoria Z con distribución uniforme en el intervalo $(0, 20)$, y se definió la variable $X = 75 - Z$ como la edad de la persona. La simulación se realizó para 10,000 y 100,000 clientes.

Se calculó una función de sobrevivencia por cada cliente, utilizando la distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{75-x}$, donde 75 es la esperanza de vida de un individuo en México hasta el año 2009, y x representa la edad de cada cliente. Es decir,

$$S_x(t) = e^{-(\frac{1}{75-x})t}.$$

Después de esto, calculamos cuál sería el costo de una anualidad que les pague \$1 periódicamente hasta su muerte, utilizando una tasa de interés $\rho = .05$. Para esto utilizamos la fórmula 3.19 obtenida en el ejemplo 22.

Finalmente se simuló el tiempo de vida restante de cada persona, utilizando una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{75-x}$, correspondiente a cada una de ellas.

En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos. Se comparó el ingreso vía prima total con el total de lo que la compañía de seguros pagaría (de acuerdo a la simulación de los tiempos de vida restante) por las anualidades vendidas. Los resultados que se muestran son los totales divididos por el número de clientes.

Tabla 6. *Resultados de simulación*

	10,000 clientes	100,000 clientes
Ingreso vía prima	6.38762	6.42242
Egreso vía prima	6.40329	6.43144
Ingreso vía prima	6.42825	6.41345
Egreso vía prima	6.42682	6.41265
Ingreso vía prima	6.40832	6.41719
Egreso vía prima	6.40507	6.41894
Ingreso vía prima	6.40635	6.40092
Egreso vía prima	6.41896	6.42297
Ingreso vía prima	6.40635	6.41146
Egreso vía prima	6.41896	6.41281

Como se puede observar, los valores para el ingreso difieren poco en comparación con los valores para el egreso. Además las menores diferencias se encuentran para cuando se suponen 100,000 clientes.

3.9. Duración de una anualidad

En esta sección queremos analizar cómo cambia el valor de una anualidad cuando hay un pequeño cambio en el valor del interés ρ . Estamos interesados en conocer cómo cambia el valor de la anualidad, cuando ρ se incrementa o decrece por una cantidad $\Delta\rho$. Con este fin vamos a definir el concepto de duración de una anualidad. Dicho concepto es muy importante para las compañías financieras, ya que les permite protegerse contra pequeños cambios en la tasa de interés.

Consideremos el caso de una empresa que debe hacer un flujo de pagos $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$. Por ejemplo cuando la empresa realiza los pagos correspondientes a varias anualidades. Con objeto de asegurar los pagos, la empresa se propone comprar 2 bonos A y B con pagos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$. Se dice que la empresa tiene un portafolio con 3 activos (F, A, B) .

Ahora la empresa debe determinar la cantidad x de bonos A y la cantidad y de bonos B que debe comprar para asegurar los pagos. Con la finalidad de resolver esta cuestión calculamos el valor presente del flujo de pagos $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$

$$V_F = \sum_{j=1}^N f_j e^{-\frac{\rho_0}{n} j},$$

donde n es el número de pagos al año. Escribamos también

$$D_F = -\frac{d}{d\rho_0}V_F = \sum_{j=1}^N \frac{j}{n} f_j e^{\frac{-\rho_0}{n}j}.$$

A la cantidad $\frac{D_F}{V_F}$ le llamamos duración del flujo de pagos F . Se debe notar que en las dos ecuaciones anteriores se ha escrito ρ_0 en lugar de ρ . La razón de ésto es que nos interesa conocer las consecuencias para la empresa, del hecho de que la tasa de interés ρ cambie de valor. Así entonces mantenemos a ρ_0 fijo y hacemos que ρ sea variable.

Si x es la cantidad de bonos A y y la cantidad de bonos B , se requiere que

$$\begin{aligned} -V_F &= xV_A + yV_B, \\ -D_F &= xD_A + yD_B. \end{aligned} \tag{3.25}$$

La primera de las ecuaciones nos dice que el valor $xV_A + yV_B$ de lo invertido en bonos debe ser igual al valor presente $-V_F$ de nuestras obligaciones. Ésto es, el valor del portafolio es igual a 0.

Veamos ahora que si las dos ecuaciones en 3.25 se cumplen, entonces la empresa se asegura contra pequeños cambios en la tasa de interés ρ_0 . Supongamos que la tasa de interés ρ_0 cambia su valor a un nuevo valor ρ . Para este caso el valor del portafolio ya no sería igual a cero. Sin embargo notemos que podemos escribir el nuevo valor del portafolio como

$$\sum_{j=1}^N e^{-\frac{\rho}{n}j} (xa_j + yb_j - f_j) = \sum_{j=1}^N e^{-\frac{\rho_0}{n}j} (xa_j + yb_j - f_j) e^{-\frac{\rho - \rho_0}{n}j}.$$

Utilizando que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$, vemos que el valor del portafolio es igual a

$$\sum_{j=1}^N e^{-\frac{\rho_0}{n}j} (xa_j + yb_j - f_j) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\rho - \rho_0}{n} \right)^k \frac{j^k}{k!}.$$

Cambiando el orden de las sumas obtenemos que el valor del portafolio es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\rho - \rho_0}{n} \right) \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^N e^{-\frac{\rho_0}{n}j} (xa_j + yb_j - f_j) j^k.$$

Puesto que las ecuaciones en 3.25 se cumplen, tenemos que los términos correspondientes a $k = 0$ y $k = 1$ se anulan, y entonces podemos escribir lo anterior como

$$(\rho - \rho_0)^2\alpha + (\rho - \rho_0)^3\beta + (\rho - \rho_0)^4\gamma + \dots$$

De la expresión anterior para el valor del portafolio, podemos ver que si $\rho - \rho_0$ es pequeño, entonces el valor del portafolio es casi igual a cero, ya que las cantidades $(\rho - \rho_0)^k$ para $k \geq 2$ son muy pequeñas. Ésto nos dice que la empresa queda protegida en el sentido de que el valor del portafolio no se desvía mucho de su valor nulo deseable cuando hay un cambio pequeño en la tasa de interés.

Antes de concluir notemos que la duración de un flujo de pagos se puede escribir como

$$\frac{D_F}{V_F} = -\frac{1}{V_F} \frac{d}{d\rho} V_F = \sum_{j=1}^N \frac{j}{n} w_j,$$

en donde las cantidades w_j son iguales a

$$w_j = \frac{e^{-\frac{\rho}{n}j}}{V_F} f_j \quad \text{y por lo tanto} \quad \sum_{j=1}^N w_j = 1$$

Por esta razón, se dice que la duración $\frac{D_F}{V_F}$ de un flujo de pagos, es la suma ponderada de los tiempos $\frac{j}{n}$ en donde ocurren los pagos f_j . Se dice que w_j , son los pesos o ponderaciones.

Finalmente escribimos la duración D de una anualidad

$$D := \frac{-\frac{\partial}{\partial \rho} A}{A}. \quad (3.26)$$

Ejemplo 25. Supongamos que se utiliza una distribución exponencial, para este caso el costo de la anualidad es igual a $\frac{1}{r+\lambda}$. Entonces la duración de la anualidad es igual a

$$D = \frac{-\frac{\partial}{\partial r} A}{A} = \frac{\frac{1}{(r+\lambda)^2}}{\frac{1}{r+\lambda}} = \frac{1}{r+\lambda}.$$

Para este caso, el valor de la duración es igual al valor de la anualidad. Ésto nos dice que un pequeño cambio en el interés ρ cambiaría el valor de la anualidad por un factor de $(-\Delta r)(A)$.

Capítulo 4

Teoría de la ruina

En este capítulo se presenta una breve introducción a la teoría del riesgo, particularmente a la teoría de la ruina. La teoría de la ruina ofrece herramientas matemáticas para llevar a cabo un análisis cuidadoso del tratamiento financiero de las reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. La teoría de la ruina se relaciona con el proceso de reclamaciones, ya que es de gran interés para una compañía aseguradora estimar lo mejor posible lo que ocurrirá en el futuro a partir de la información actual: el capital inicial, el ingreso vía prima, el tamaño de las reclamaciones y su tiempo de ocurrencia. Donde los tiempos y montos de las reclamaciones se comportan de manera aleatoria.

En la teoría de la ruina se han desarrollado procesos estocásticos para reflejar lo que ocurre con las reclamaciones. A lo largo del capítulo se describe el proceso estocástico correspondiente al modelo de riesgo clásico de Cramér-Lundberg, y algunos aspectos elementales sobre la probabilidad de ruina en tal modelo. El modelo de Cramér-Lundberg tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg. En este trabajo presenta el proceso de Poisson compuesto. En 1930 Cramér retoma el trabajo de Lundberg, y lo pone en el contexto de los procesos estocásticos, que en ese entonces era de reciente creación.

4.1. Procesos estocásticos

En esta sección se presenta una breve introducción al tema de los procesos estocásticos. Se mencionan algunos conceptos y propiedades generales. Supondremos como elemento base para desarrollar el tema, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definición 4. Un espacio de probabilidad asociado a un experimento es la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde

1. Ω es el espacio muestral, es decir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
2. $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de Ω , con estructura de σ -álgebra:
 - $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
 - $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
 - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
3. P es una función que asocia un número $P(A)$ a cada $A \in \mathcal{F}$, con las siguientes propiedades:
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - $P(\Omega) = 1$
 - Para cualquier sucesión $A_1, A_2, \dots$ tal que $j \neq k \Rightarrow A_j \cap A_k = \emptyset$ se tiene,

$$P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{A_j\}. \quad (4.1)$$

A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{F}$ les llamamos eventos y a la función P medida de probabilidad.

Definición 5. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Al conjunto T , se le llama espacio parametral. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución, las cuales pueden estar relacionadas o no.

Al conjunto T se le suele interpretar como un conjunto de tiempos, y a X_t como el estado o posición del proceso estocástico al tiempo t . En caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, por ejemplo, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, se dice que el proceso es a tiempo discreto. En este caso el proceso consiste de una sucesión infinita de variables aleatorias. Cuando el conjunto de parámetros consiste de un subintervalo de $\mathbb{R}$, por ejemplo, $T = [0, \infty)$, se dice que el proceso es a tiempo continuo. En general se consideran procesos estocásticos a tiempo continuo. En este caso, un proceso estocástico es una función de 2 variables $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada

$t \in T$, la función $\omega \mapsto X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, mientras que para cada ω en Ω , la función $t \mapsto X_t(\omega)$ es una trayectoria del proceso.

Para que un proceso estocástico este completamente definido se debe determinar completamente a las variables aleatorias, ésto es, determinar la distribución de probabilidad asociada a cada una de ellas.

Definición 6. Se denomina conjunto de estados, al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$.

Ejemplo 26. Supongamos un juego en el que lanzamos una moneda varias veces, si la moneda cae cara ganamos 1 ficha, si cae cruz perdemos una ficha. Estamos interesados en conocer el número de fichas con las que contamos después de n lanzamientos. Podemos entonces modelar la evolución del juego mediante un proceso estocástico.

Hagamos que X_n sea el número de fichas después de n lanzamientos, con $n = 1, 2, \dots$ y representemos con 1 el resultado de obtener cara y con -1 el de obtener cruz. Tenemos entonces que el espacio muestral del proceso estocástico X es

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_j \in \{-1, 1\}\}.$$

Definimos cada X_n por

$$X_n(\omega) = \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{para cada } \omega \in \Omega.$$

Tenemos que X es un proceso discreto, porque el conjunto paramétrico es $\{1, 2, 3, \dots\}$. El posible conjunto de estados es

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

En adelante, vamos a representar con $\bullet$ y $\star$ el 1 y -1 respectivamente.

Estudiemos la trayectoria de X , tomemos $\omega = (\bullet \bullet \star \star \star \dots) \in \Omega$, y

estudiemos el proceso hasta $t = 5$,

$$\begin{aligned}X_1(\omega) &= 1 \\X_2(\omega) &= 2 \\X_3(\omega) &= 1 \\X_4(\omega) &= 0 \\X_5(\omega) &= -1.\end{aligned}$$

También podemos calcular la distribución de cualquier X_n . Hagamos $n = 3$, y calculemos su distribución. Para ésto, hay que observar los posibles resultados de los primeros 3 lanzamientos:

$$\begin{aligned}(\bullet \bullet \bullet \dots) \\(\bullet \bullet \star \dots) \\(\bullet \star \bullet \dots) \\(\star \bullet \bullet \dots) \\(\star \star \bullet \dots) \\(\star \bullet \star \dots) \\(\bullet \star \star \dots) \\(\star \star \star \dots).\end{aligned}$$

Observamos que si se diera el primer caso tendríamos una ganancia igual a 3, es decir $X_3 = 3$. Si se obtuviera alguno de los siguientes 3 casos, donde se obtienen 2 caras, se obtendría que $X_3 = 1$ Mientras que para los 3 casos donde se obtienen 2 cruces tendríamos $X_3 = -1$, y para el último caso, tendríamos $X_3 = -3$. Ésto nos dice que el conjunto de estados de X_3 es igual a $\{-3, -1, 1, 3\}$, y

$$\begin{aligned}P\{X_3 = 3\} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \\P\{X_3 = 1\} &= 3\frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}, \\P\{X_3 = -1\} &= 3\frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}, \\P\{X_3 = -3\} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Tenemos entonces que, X_3 se distribuye $Bin(3, \frac{1}{2})$, aunque tomando otros valores distintos a 0, 1, 2, 3.

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que se desarrollan a lo largo del tiempo. En general se trabaja con procesos estocásticos en cualquier caso en que se intente ajustar un modelo teórico que nos permita hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso.

4.2. Filtraciones y tiempos de paro

Definición 7. Dada una σ -álgebra $\mathcal{F}$, decimos que una variable aleatoria X es $\mathcal{F}$ -medible, si dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se tiene que

$$X^{-1}(a, b) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a, b)\} = \{a \leq X \leq b\} \in \mathcal{F}.$$

Una familia de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una filtración si para $0 \leq s \leq t$, se cumple que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Al espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado. Se dice que un proceso es adaptado a una filtración $\mathcal{F}_t$ si para cada $t \geq 0$, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Todo proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ determina una filtración natural dada por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, es decir la σ -álgebra más pequeña sobre el espacio muestral que contiene todas las preimágenes de intervalos (a, b) , con $a \leq b$, para tiempos desde 0 hasta t . Tenemos que todo proceso es adaptado a su filtración natural. En este caso, a la σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ se le interpreta como la historia del proceso al tiempo t , pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento. Más precisamente, dado $A \in \mathcal{F}_t$ siempre es posible al tiempo t decidir si el evento A ha ocurrido o no.

Ejemplo 27. Recordemos el proceso descrito en el ejemplo 26, y calculemos la filtración natural que genera. Vamos a considerar como espacio parametral $T = \{1, 2, 3\}$. Se tendría entonces que el espacio muestral es:

$$\Omega_3 = \left\{ (\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star) \right. \\ \left. (\star \star \star) (\star \star \bullet) (\star \bullet \star) (\star \bullet \bullet) \right\}.$$

El posible conjunto de estados de X_1 es $E_1 = \{1, -1\}$, ésto nos permite escribir $\mathcal{F}_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \sigma\{X_1\} \\ &= \left\{ \{(\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star)\} \right. \\ &\quad \{(\star \star \star) (\star \star \bullet) (\star \bullet \star) (\star \bullet \bullet)\} \\ &\quad \left. \emptyset \quad \Omega \right\}.\end{aligned}$$

Es decir $\mathcal{F}_1$ está formada por el $\emptyset, \Omega$ y los eventos $X_1 = 1$ y $X_1 = -1$.

El conjunto de estados de X_2 es $E = \{-2, 0, 2\}$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 &= \sigma\{X_1, X_2\} \\ &= \sigma\left\{ \{(\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star)\} \right. \\ &\quad \{(\star \star \star) (\star \star \bullet) (\star \bullet \star) (\star \bullet \bullet)\} \\ &\quad \{(\star \bullet \bullet) (\star \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star)\} \\ &\quad \{(\star \star \star) (\star \star \bullet)\} \\ &\quad \{(\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star)\} \\ &\quad \left. \emptyset \quad \Omega \right\}.\end{aligned}$$

Es decir $\mathcal{F}_2$ está generada por los mismos eventos de $\mathcal{F}_1$ más los eventos $X_2 = 0, X_2 = -2$ y $X_2 = 2$.

Finalmente, tenemos que el conjunto de estados de X_3 es $E_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$, entonces para generar $\mathcal{F}_3$ agregamos los eventos $X_3 = -3, X_3 = -1, X_3 = 1$

y $X_3 = 3$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 &= \sigma\{X_1, X_2, X_3\} \\
&= \sigma\left\{ \{(\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star)\} \right. \\
&\quad \{(\star \star \star) (\star \star \bullet) (\star \bullet \star) (\star \bullet \bullet)\} \\
&\quad \{(\star \bullet \bullet) (\star \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\bullet \star \star)\} \\
&\quad \{(\star \star \star) (\star \star \bullet)\} \\
&\quad \{(\bullet \bullet \bullet) (\bullet \bullet \star)\} \\
&\quad \{(\bullet \bullet \star) (\bullet \star \bullet) (\star \bullet \bullet)\} \\
&\quad \{(\star \star \bullet) (\star \bullet \star) (\bullet \star \star)\} \\
&\quad \{(\bullet \bullet \bullet)\} \\
&\quad \{(\star \star \star)\} \\
&\quad \left. \emptyset \Omega \right\}.
\end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3$.

La filtración natural es en cierto sentido, la filtración más simple disponible para estudiar el proceso estocástico dado. Toda la información relativa al proceso y sólo esa información se encuentra en ella.

Definición 8. Un tiempo de paro respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, es una función $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$.

En otras palabras, un tiempo de paro es una variable aleatoria no negativa con posible valor infinito, tal que puede determinarse la ocurrencia o no ocurrencia del evento $(\tau \leq t)$ sólo con la información del proceso hasta el tiempo t . Por ejemplo, el tiempo aleatorio que transcurre hasta la ocurrencia de cierto evento es un tiempo de paro. Dicho tiempo aleatorio podría ser el tiempo que transcurre hasta la llegada de la n -ésima reclamación a una compañía de seguros.

Un tiempo de paro, también se utiliza como una estrategia para salirse de un juego de manera que las ganancias sean favorables al jugador, y para decidir qué jugada es la adecuada, sólo se puede disponer de los resultados de los juegos anteriores.

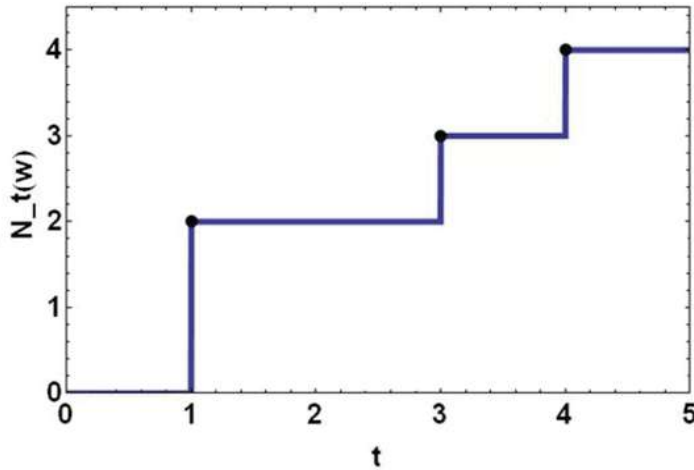
4.3. Proceso de Poisson

Uno de los procesos estocásticos de mayor importancia es el proceso de Poisson.

Definición 9. Un proceso estocástico de tiempo continuo $\{N_t : t \geq 0\}$, y con espacio de estados el conjunto discreto $\{0, 1, \dots\}$, es un proceso de Poisson de parámetro o intensidad $\lambda > 0$, si cumple las siguientes propiedades:

- a) $N_0 = 0$.
- b) Tiene incrementos independientes.
- c) $N_{t+s} - N_s$ tiene distribución $\text{Poisson}(\lambda t)$, para cualesquiera $s \geq 0, t > 0$.

El proceso de Poisson se utiliza para modelar situaciones de conteo de ocurrencias de un evento particular en un intervalo de tiempo dado. Por ejemplo, N_t puede representar el número de llamadas telefónicas que se reciben en una central telefónica, o el número de accidentes ocurridos en un cierto lugar, o el número de clientes que llegan a un banco durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, etc. El promedio de sucesos que ocurren en la unidad de tiempo se llama intensidad del flujo de sucesos λ . En particular $E(N_t) = \lambda t$ y $\text{Var}(N_t) = \lambda t$. Una posible trayectoria de un proceso de Poisson se muestra en la figura siguiente.



El proceso de Poisson será utilizado para modelar el número de reclamaciones que llegan a una compañía de seguros hasta el tiempo t .

Ejemplo 28. Supongamos que las reclamaciones a una compañía de seguros siguen un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 5$, suponemos también que la unidad de tiempo es un día, es decir en promedio llegan 5 reclamaciones por día. Calcular la probabilidad de que

- a) No se reciba ninguna reclamación un día cualquiera.
- b) Se reciban más de 10 reclamaciones un día cualquiera.

Con la finalidad de encontrar las probabilidades que se piden, recordamos que para una variable aleatoria que se distribuye Poisson con parámetro λt la probabilidad de que tome un valor determinado se calcula mediante

$$P\{N_t = j\} = \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j,$$

y calculamos

$$P\{N_1 = 0\} = e^{-5},$$

que es la respuesta al inciso a), para resolver b) calculamos

$$P\{N_1 \geq 11\} = \sum_{j=11}^{\infty} \frac{1}{j!} e^{-5} 5^j.$$

Uno de los objetos de estudio acerca de este proceso son los tiempos de interarribo T_k , definidos como el tiempo que transcurre entre el evento $k-1$ y el evento k , es decir el tiempo que transcurre entre 2 reclamaciones sucesivas. Sobre este conjunto de variables aleatorias se conoce el resultado siguiente.

Proposición 3. *Los tiempos $T_1, T_2, \dots$ son variables aleatorias independientes y cada una de ellas tiene distribución $\exp(\lambda)$.*

Demostración. Calculamos

$$P\{T_1 > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t},$$

lo que indica que T_1 se distribuye exponencial con parámetro λ . Calculamos ahora

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} &= P\{\text{No haya reclamaciones en } (s, s+t) \mid T_1 = s\} \\ &= P\{N_{t+s} - N_s = 0 \mid N_r = 0 \text{ para } r < s, N_s = 1\} \\ &= P\{N_{t+s} - N_s = 0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Por lo tanto T_2 es independiente de T_1 . Generalizando para $T_1, T_2, \dots$ se demuestra entonces que los tiempos de interarribo son independientes y se distribuyen exponencial con parámetro λ

□

4.4. Martingalas

Las martingalas son tipos de procesos estocásticos que aparecen con frecuencia tanto en la teoría general de procesos estocásticos como en las aplicaciones de esta teoría. Con la finalidad de introducirnos en la teoría de martingalas, presentamos primero el importante concepto de esperanza condicional.

Definición 10. Sea X variable aleatoria integrable definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea $\mathcal{G}$ una σ -álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Se define la esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ como una variable aleatoria denotada por $E(X | \mathcal{G})$ que cumple las siguientes 3 propiedades:

1. Es $\mathcal{G}$ -medible.
2. Tiene esperanza finita.
3. Para cualquier evento $G \in \mathcal{G}$, se cumple

$$E(E(X | \mathcal{G})1_G) = E(X1_G). \quad (4.2)$$

Puede demostrarse que la esperanza condicional existe y es única (salvo modificaciones en conjuntos de probabilidad cero). Esto significa que si existe otra variable Z con las características anteriores, entonces con probabilidad uno tenemos que $Z = E(X | \mathcal{G})$.

Para el caso particular, en que X es una variable aleatoria discreta que toma n valores y la σ -álgebra $\mathcal{F}$ esté generada por una variable aleatoria Y que toma m valores, ésto es, $\sigma(Y) = \mathcal{F}$, se tendría que $\mathcal{F}$ estaría generada por una partición finita $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$. En este caso la esperanza condicional $E(X | \mathcal{F})$ es una variable aleatoria discreta que toma un valor constante en cada F_i . Es decir dado $x \in \mathcal{F}_j$

$$E(X | \mathcal{F})(x) = E(X | \mathcal{F}_j) = \frac{1}{P\{F_j\}} \sum_{x_k \in \mathcal{F}_j} x_k P\{X = x_k\}. \quad (4.3)$$

Definición 11. Un proceso $\{M_t : t \geq 0\}$ que es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ e integrable es una martingala si para $0 \leq s \leq t$ se cumple

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s. \quad (4.4)$$

En caso de que el proceso estocástico sea de tiempo discreto se ha de cumplir que

$$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n. \quad (4.5)$$

Las martingalas son procesos que están relacionados con los juegos justos. Podemos pensar en M_t como la cantidad de dinero acumulado al tiempo t por un jugador que está apostando continuamente en un juego justo, entonces la igualdad anterior se puede interpretar del siguiente modo: En promedio la fortuna del jugador al tiempo t dada toda la historia del juego hasta el tiempo $s \leq t$ es igual a la fortuna del jugador al tiempo s , es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Cuando en lugar de 4.4 se cumple que $E(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ se dice que el proceso es una supermartingala, se trata entonces de un juego desfavorable al jugador pues en promedio su fortuna disminuye. Finalmente, si la desigualdad es al contrario el proceso se llama submartingala, y se trata entonces de un juego favorable al jugador.

Notemos que podemos reescribir 4.4 de la siguiente forma,

$$E(M_t - M_s | \mathcal{F}_s) = 0, \quad (4.6)$$

la cual podemos interpretar del siguiente modo: Las ganancias esperadas en el siguiente juego $M_t - M_s$ tienen media condicional cero en el pasado.

Ejemplo 29. Consideremos el proceso estocástico definido mediante el juego de los volados en el ejemplo 26 con $T = \{1, 2, 3\}$ y verifiquemos que define una martingala. Claramente es adaptado a la filtración natural descrita en el ejemplo 27 y es integrable, resta verificar la tercera propiedad. Para ello debemos calcular $E(X_2 | \mathcal{F}_1)$ y $E(X_3 | \mathcal{F}_2)$ y verificar que son iguales a X_1 y X_2 respectivamente.

Tenemos que $E(X_2 | \mathcal{F}_1)$ es $\mathcal{F}_1$ -medible, por lo cual, es constante en los eventos $X_1 = 1$ y $X_1 = -1$, los cuales denotaremos por A y B respectiva-

mente. Utilizando la igualdad 4.3, se obtiene que para todo $a \in A$

$$\begin{aligned}
E(X_2 \mid \mathcal{F})(a) &= E(X \mid A) \\
&= \frac{1}{P\{A\}} \sum_{a_k \in A} a_k P\{X = a_k\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} 2 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

y para todo $b \in B$

$$\begin{aligned}
E(X_2 \mid \mathcal{F})(b) &= E(X \mid B) \\
&= \frac{1}{P\{B\}} \sum_{b_k \in B} b_k P\{X = b_k\} \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (-2) \\
&= -1,
\end{aligned}$$

Claramente $E(X_1 \mid \mathcal{F}_1)$ coincide con X_1 . De manera similar se calcula $E(X_2 \mid \mathcal{F}_2)$.

Ejemplo 30. Sean $\xi_1, \xi_2, \dots$ variables aleatorias independientes con $E(\xi_i) = 0$, para cada $i \in \mathbf{N}$. Entonces $M_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ define una martingala de tiempo discreto con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Puesto que

$$E(|M_n|) = E(|\xi_1 + \dots + \xi_n|) \leq E(|\xi_1|) + \dots + E(|\xi_n|) < \infty,$$

entonces M_n es integrable. Además, notemos que

$$\begin{aligned}
E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E(M_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\
&= E(M_n \mid \mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\
&= M_n + E(\xi_{n+1}) \\
&= M_n
\end{aligned}$$

Al tomar esperanza de 4.4, se obtiene que la $E(M_t) = E(M_s)$. Ésto quiere decir que todas las variables aleatorias que conforman una martingala tienen

la misma esperanza. En particular, si la variable inicial M_0 es cero o su esperanza es cero, entonces $E(M_t) = 0$ para cualquier $t \geq 0$.

Ahora vamos a enunciar un importante teorema de la teoría de martingalas, el cual usaremos para estimar la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg. Vamos a denotar con $x \wedge y$ el valor mínimo entre x y y .

Proposición 4. *Teorema de paro de martingalas. Sea $\{M_t : t \geq 0\}$ una martingala respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ y sea τ un tiempo de paro con respecto a la misma filtración. Entonces $\{M_{t \wedge \tau} : t \geq 0\}$ es también una martingala, es decir para cualesquiera $0 \leq s \leq t$,*

$$E(M_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s) = M_{s \wedge \tau}. \quad (4.7)$$

Antes de demostrar el teorema de paro de martingalas, vamos a dar una definición y una proposición que nos van a auxiliar en tal demostración. La demostración se realizará para el caso discreto solamente, y con eso bastará para darnos una idea clara de qué es lo que nos dice el teorema de paro de martingalas.

Definición 12. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$, una filtración. Un proceso $\{\alpha_t : t \geq 1\}$ de tiempo discreto es predecible con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$, si α_t es $\mathcal{F}_{t-1}$ medible para cada $t \in \mathbf{N}$.

Proposición 5. *Sea $\{\alpha_t : t \geq 1\}$, un proceso predecible respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$. Suponga que existe $K \geq 0$ tal que $|\alpha_t(\omega)| \leq K$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $t \in \mathbf{N}$. Sea M_t una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$. Se cumple entonces que*

$$g_n = \alpha_1 M_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j (M_j - M_{j-1})$$

es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$.

Demostración. Como $|\alpha_t(\omega)| \leq K$, entonces g_n es integrable. Por otro lado

$$E(g_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(g_n \mid \mathcal{F}_n) + E(\alpha_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n).$$

Como g_n es $\mathcal{F}_n$ medible, tenemos que $E(g_n \mid \mathcal{F}_n) = g_n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(g_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= g_n + \alpha_{n+1} E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) \\ &= g_n. \end{aligned}$$

□

Procedemos ahora con la demostración del teorema de paro de martin-galas.

Demostración. Definimos

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \geq t, \\ 0 & \text{si } \tau < t, \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$M_{\tau \wedge t} = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 (M_2 - M_1) + \dots + \alpha_t (M_t - M_{t-1}).$$

Veamos que $\{\alpha_t\}$ es predecible, tomamos (a, b) intervalo de los reales, se tienen los siguientes casos:

si $0, 1 \notin (a, b)$, entonces $\alpha_t^{-1}(a, b) = \emptyset \in \mathcal{F}_{t-1}$,
 si $0, 1 \in (a, b)$, entonces $\alpha_t^{-1}(a, b) = \Omega \in \mathcal{F}_{t-1}$,
 si $0 \notin (a, b)$ y $1 \in (a, b)$, $\{\alpha_n = 1\} = \{\tau \geq n\} = \{\tau > n - 1\} \in \mathcal{F}_{t-1}$,
 si $0 \in (a, b)$ y $1 \notin (a, b)$, $\{\alpha_n = 0\} = \{\tau < n\} = \{\tau \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_{t-1}$.

Por lo tanto podemos aplicar la proposición 5.

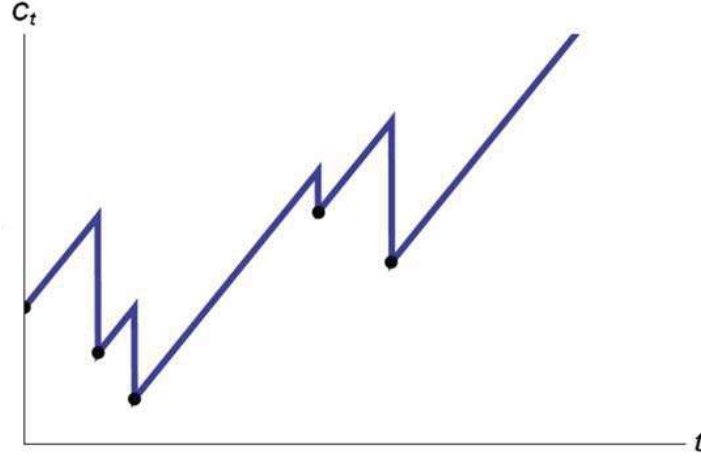
□

4.5. Modelo clásico de Cramér-Lundberg

El modelo clásico de Cramér-Lundberg se basa en el proceso a tiempo continuo $\{C_t : t \geq 0\}$ denominado proceso de riesgo, o proceso de superávit, el cual está dado por

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j,$$

en donde u es el capital inicial de la compañía de seguros, ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva, Y_j es el monto de la j -ésima reclamación, y N_t es un proceso de Poisson con parámetro λ . La variable C_t representa un balance sencillo de ingresos menos egresos de una compañía de seguros. El proceso C_t , tiene trayectorias como las que se muestran en la figura siguiente:



Las trayectorias comienzan siempre en u , que es el capital inicial. En periodos donde no hay reclamaciones son continuas y tienen un crecimiento de la forma ct . Cuando se efectua una reclamación, la trayectoria presenta una discontinuidad, presenta un salto hacia abajo de tamaño igual al tamaño de la reclamación dada por la variable Y_j .

En lo que sigue vamos a suponer que los montos $Y_1, Y_2, \dots$ son variables aleatorias independientes, no negativas e idénticamente distribuidas con función de distribución F , y función generadora de momentos $M_Y(r) := E(e^{ry}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} f(y) dy$. Los momentos son $\mu_n = E(Y^n)$, y en particular μ denota el primer momento μ_1 , y $\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2$, denota la varianza.

Proposición 6. *Sea $C(t)$ un proceso de riesgo, para el modelo clásico de Cramér-Lundberg tenemos que*

$$E(C(t)) = u + ct - \lambda\mu t, \quad \text{Var}(C_t) = \lambda\mu_2 t. \quad (4.8)$$

Demostración. Para la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} E(C(t)) &= E\left(u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right) \\ &= u + ct - E\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right), \end{aligned}$$

y considerando que el número de reclamaciones y el monto de cada una de ellas son independientes, calculamos la esperanza como sigue:

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right) &= E\left(E\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j \mid N_t\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \mid N(t) = k\right) P\{N(t) = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^k Y_j\right) P\{N(t) = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^k E(Y_j) P\{N(t) = k\} \\
&= \mu \sum_{k=0}^{\infty} k P\{N(t) = k\} \\
&= \mu E(N_t)
\end{aligned}$$

Para el modelo clásico N_t se distribuye Poisson con parámetro λ . Se tiene entonces que $E(N_t) = \lambda t$, por lo tanto

$$E(C(t)) = u + ct - \mu \lambda t.$$

Para la varianza, tenemos que:

$$Var(C(t)) = Var\left(u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_j\right) = Var\left(\sum_{k=1}^{N_t} Y_j\right),$$

y considerando nuevamente que el número de reclamaciones y el monto de cada una de ellas son independientes, calculamos la varianza como sigue:

$$\begin{aligned}
Var\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right) &= E\left(\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right)^2\right) - E^2\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right) \\
&= E\left[E\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j^2 \mid N_t\right)\right] - \mu^2 E^2(N_t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^k Y_j^2 \mid N_t = k\right) P\{N_t = k\} - \mu^2 E^2(N_t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k E(Y_i^2) + 2 \sum_{j \neq i} E(Y_i Y_j)\right) P\{N_t = k\} - \mu^2 E^2(N_t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k(\sigma^2 + \mu^2) + k(k-1)\mu^2) P\{N(t) = k\} - \mu^2 E^2(N_t) \\
&= (\sigma^2 + \mu^2) E(N(t)) + \mu^2 E(N(t)^2) - \mu^2 E(N(t)) - \mu^2 E^2(N(t)) \\
&= \sigma^2 E(N(t)) + \mu^2 Var(N(t)) \\
&= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2).
\end{aligned}$$

□

Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(C(t))}{t} = c - \lambda\mu. \quad (4.9)$$

Además se tiene casi seguramente, por la ley fuerte de los grandes números que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = c - \lambda\mu \quad .$$

Podemos ver entonces que si $c < \lambda\mu$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} < 0$, lo que indica que la compañía no cuenta con los recursos necesarios para solventar las reclamaciones que pueda haber.

Del análisis anterior podemos concluir que, una condición necesaria para la solvencia de la compañía es que

$$c > \lambda\mu, \quad (4.10)$$

a lo que se le conoce como la condición de ganancia neta. Ésta se puede interpretar de la siguiente manera: En promedio la entrada por primas c es mayor que el total $\lambda\mu$ de reclamaciones por unidad de tiempo.

La variable aleatoria $C(t)$ se puede interpretar como el capital de la compañía aseguradora al tiempo t y por razones naturales es importante que $C(t)$ permanezca arriba de cierto nivel mínimo. La trayectoria promedio de $C(t)$ es la línea recta que inicia en $u > 0$ y tiene pendiente $c - \lambda\mu$, la cual es positiva por la condición de ganancia neta $c > \lambda\mu$.

4.6. Probabilidad de ruina

Al hablar de ruina, nos referimos al momento en el cual el proceso de riesgo toma un valor negativo o cero, ésto es $C(t) \leq 0$. La ruina casi nunca sucede en la práctica, es sólo un término técnico que produce alguna toma de decisión, por ejemplo, una nueva inversión de capital. No necesariamente significa que la compañía haya quebrado. El conocimiento sobre la probabilidad de ruina es útil para determinar la solvencia de la empresa.

El objetivo de esta sección y la siguiente es analizar la probabilidad de ruina, así como acotarla, con la finalidad de minimizar el riesgo de ruina para una compañía de seguros.

La probabilidad de ruina depende del comportamiento del proceso de riesgo, el cual, se puede analizar en forma discreta o continua. Dentro del análisis discreto se analiza $C(t)$ y la suma del monto de las reclamaciones en intervalos de igual longitud a través del tiempo. En el análisis continuo se detecta con mayor precisión el instante donde se necesite una nueva inversión, lo que no ocurre tan fácil en el caso discreto. Para tener un análisis en tiempo continuo, se requieren muchos recursos financieros y humanos, lo que genera un fuerte egreso para la compañía, por lo que en la mayoría de los casos no se realiza. Regularmente se lleva a cabo cada mes, y se realiza un informe anual.

En esa sección nos interesa calcular o estimar la probabilidad de una eventual ruina en el modelo de Cramér-Lundberg. Para ello definimos el tiempo de ruina

Definición 13. El tiempo de ruina está dado por

$$\tau = \inf\{t > 0 : C_t \leq 0\}, \quad (4.11)$$

en donde definimos $\inf \emptyset = \infty$.

Analizando el proceso de riesgo en tiempo continuo, definimos la probabilidad de ruina en tiempo continuo como sigue

Definición 14. La probabilidad de ruina en tiempo continuo en el intervalo $[0, t]$ o probabilidad de ruina con horizonte finito, es

$$\psi(u, t) = P\{\tau \leq t \mid C_0 = u\}. \quad (4.12)$$

Mientras que la probabilidad de ruina con horizonte infinito, o simplemente probabilidad de ruina, es

$$\psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = P\{\tau < \infty \mid C_0 = u\}. \quad (4.13)$$

Algunas relaciones útiles entre las probabilidades de ruina en tiempo continuo són:

1. $\psi(u, t) \leq \psi(u)$
2. $\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2)$ cuando $t_1 \leq t_2$.

Se presentan ahora 3 resultados generales sobre la probabilidad de ruina. En lo que sigue vamos a denotar por F , la función de distribución de una reclamación Y cualquiera.

Proposición 7. Sea $Q(u) = 1 - \psi(u)$. Entonces

1. $Q'(u) = \frac{\lambda}{c}[Q(u) - \int_0^u Q(u-y)dF(y)]$.
2. $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$.
3. $\psi(u) = \frac{\lambda}{c}[\int_u^\infty (1-F(y))dy + \int_0^u \psi(u-y)(1-F(y))dy]$.

Demostración. Tenemos que $Q(u)$ se interpreta como la probabilidad de que no ocurra la ruina. Entonces condicionando sobre el momento y monto de la primera reclamación se tiene

$$\begin{aligned} Q(u) &= P\{\text{"No ruina en } [0, \infty)\text{"} \mid C_0 = u\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P\{\text{"No ruina en } [0, \infty)\text{"} \mid T_1 = t, Y_1 = y\} dF(y) dF_{T_1}(t) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P\{\text{"No ruina en } [0, \infty)\text{"} \mid T_1 = t, Y_1 = y\} dF(y) dF_{T_1}(t) \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P\{\text{"No ruina en } [t, \infty)\text{"} \mid T_1 = t, Y_1 = y\} dF(y) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} Q(u+ct-y) dF(y) dt. \end{aligned}$$

Hacemos $s(t) = u + ct$. Entonces

$$Q(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{(s-u)}{c}} \int_0^s Q(s-y) dF(y) ds.$$

Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Integrando esta ecuación diferencial entre 0 y u se obtiene

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(0) &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^x Q(x-y) dF(y) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_y^u Q(x-y) dx dF(y) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} Q(x) dx dF(y) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} Q(x) dF(y) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u Q(x) (1 - F(u-x)) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u Q(u-x) (1 - F(x)) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty Q(u-x) (1 - F(x)) 1_{[0,u]}(x) dx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Después hacemos que u tienda a infinito. En tal caso, $Q(u)$, tiende a uno. Además el integrando del lado derecho es una función monótona creciente en u , cuyo límite es la función integrable $(1 - F(x))$. Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$1 - Q(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Por lo tanto

$$\psi(0) = 1 - Q(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{4.15}$$

Obteniendo así el segundo resultado. Finalmente de 4.14 y 4.15 se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\mu - \int_0^u (1 - \psi(u-x)) (1 - F(x)) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_u^\infty (1 - F(x)) dx + \int_0^u \psi(u-x) (1 - F(x)) dx \right]. \end{aligned}$$

□

La última expresión nos da un método recursivo para encontrar la probabilidad de ruina. En general este tipo de ecuaciones no son fáciles de resolver, por lo cual, con regularidad sólo se realizan aproximaciones de dichas probabilidades. Para el caso en que las reclamaciones tienen distribución exponencial el sistema se puede resolver con facilidad.

Ejemplo 31. Consideremos el modelo de Cramér-Lundberg, y supongamos que las reclamaciones tienen distribución exponencial con parámetro α . Tenemos que $E(Y) = \frac{1}{\alpha}$. De acuerdo a la proposición anterior la probabilidad de no ruina cumple

$$Q'(u) = \frac{\lambda}{c} [Q(u) - \int_0^u Q(u-y) \alpha e^{-\alpha y} dy],$$

Haciendo $x = u - y$, obtenemos

$$Q'(u) = \frac{\lambda}{c} [Q(u) - e^{-\alpha u} \int_0^u Q(x) \alpha e^{\alpha x} dx].$$

Derivando esta expresión obtenemos

$$Q''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \alpha\right) Q'(u),$$

resolviendo encontramos

$$Q(u) = a + b e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}, \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes.}$$

Usando las condiciones $\psi(0) = \frac{\lambda}{\alpha c}$ y $\psi(\infty) = 0$, se encuentra que $a = 1$ y $b = \frac{-\lambda}{\alpha c}$. Entonces

$$Q(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u},$$

y por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}.$$

4.7. Exponente de Lundberg

El coeficiente de ajuste o coeficiente de Lundberg es un número que aparece en el problema de calcular las probabilidades de ruina. En la mayoría de los casos no es fácil encontrar una expresión analítica para el mismo, ya que depende de la distribución que tengan los montos de las reclamaciones. Existen varias maneras de definir el exponente de Lundberg. Damos primero

una definición que nos va a permitir definir este coeficiente.

Sea $M_Y(r) = E(e^{rY})$ y sea

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr,$$

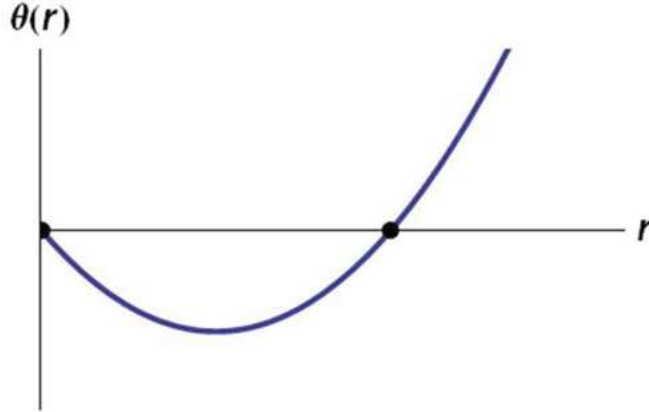
esta función está bien definida para valores de r , tales que $M_Y(r)$ existe. Si suponemos diferenciabilidad, tenemos que

$$\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c$$

y

$$\theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}).$$

Además, tenemos que $M_Y''(r)$ es positiva, por lo tanto $\theta(r)$ es una función estrictamente convexa tal que $\theta(0) = 0$, y por la condición de ganancia neta, $\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0$. Entonces existe un valor $R > 0$, tal que $\theta(R) = 0$. Una gráfica mostrando R , se muestra en la siguiente figura



Definición 15. A la posible solución $R > 0$ de la ecuación

$$\theta(R) = \lambda(M_Y(R) - 1) - cR = 0,$$

se le llama coeficiente de ajuste, o exponente de Lundberg.

Aquellas distribuciones para las cuales el coeficiente de ajuste existe se les llama distribuciones de colas ligeras, y la razón de ello es que la función de densidad decae a cero exponencialmente rápido, asignando probabilidades pequeñas a reclamaciones grandes.

Ejemplo 32. Vamos a suponer que las reclamaciones se distribuyen exponencialmente con parámetro α . Entonces

$$\begin{aligned} M_Y(r) &= E(e^{rY}) \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{ry} e^{-\alpha y} dy \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{y(r-\alpha)} dy \\ &= \alpha \left(\frac{e^{y(r-\alpha)}}{r-\alpha} \right) \Big|_0^\infty. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que para el caso exponencial la función generadora de momentos, $E(e^{rY})$, existe para cuando $r < \alpha$ y es igual a

$$\frac{\alpha}{\alpha - r}.$$

Calculamos ahora $\theta(r)$,

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) - cr \\ &= \left(\frac{\lambda}{\alpha - r} - c\right)r, \end{aligned}$$

de modo que $\theta(r) = 0$ cuando $r = 0$, o cuando $\frac{\lambda}{(\alpha - r)} - c = 0$. Despejando de la segunda condición obtenemos que $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$.

Además, por lo encontrado en el ejemplo 31, podemos escribir la probabilidad de ruina de la siguiente forma

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru} < e^{-Ru},$$

la desigualdad es consecuencia de la condición de ganancia neta. Este tipo de cota superior para la probabilidad de ruina será demostrada en general, para cualquier distribución de las reclamaciones para las cuales exista el coeficiente de ajuste.

Proposición 8. Sea $C(t)$ el proceso de riesgo, y sea $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$. Entonces el proceso $\{e^{-rC_t - \theta(r)t} : t \geq 0\}$ es una martingala.

Demostración. Que el proceso sea adaptable es evidente, pues implícitamente se usa la filtración natural. Para ver que es integrable, se tienen los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t - \theta(r)t}) &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(u+ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} E(e^{r \sum_{j=1}^{N_t} Y_j}) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} E(e^{rS_t}) \quad \text{con} \quad S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} M_{S_t}(r) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} e^{\lambda t(M_Y(r) - 1)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos la propiedad de martingala. Para $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t - \theta(r)t} \mid \mathcal{F}_s) &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(C_t - C_s) - rC_s} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s} E(e^{-r(C_t - C_s)} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s} E(e^{-r(C_t - C_s)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s} E(e^{-r(c(t-s) - \sum_{j=N_s+1}^{N_t} Y_j)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s - rc(t-s)} E(e^{r \sum_{j=1}^{N_t-s} Y_j}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s - rc(t-s)} e^{\lambda(t-s)(M_Y(r) - 1)} \\
&= e^{-rC_s - \theta(r)s}.
\end{aligned}$$

□

En particular, si el coeficiente de ajuste existe, es decir si $\theta(R) = 0$, entonces el proceso e^{-RC_t} es una martingala, resultado clave para demostrar la siguiente cota para la probabilidad de ruina.

Proposición 9. Desigualdad de Lundberg. *Si el coeficiente de ajuste R existe, entonces*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (4.16)$$

Demostración. Sea τ el tiempo de paro correspondiente al primer tiempo de

ruina. Entonces el proceso $e^{-RC_{t \wedge \tau}}$ es también una martingala por lo cual

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= e^{-RC_0} \\
&= E(e^{-RC_{t \wedge \tau}}) \\
&= E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} \mid \tau > t)P\{\tau > t\} \\
&\quad + E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} \mid \tau \leq t)P\{\tau \leq t\} \\
&\geq E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} \mid \tau \leq t)P\{\tau \leq t\} \\
&= E(e^{-RC_\tau} \mid \tau \leq t)P\{\tau \leq t\}.
\end{aligned}$$

Haciendo que $t \rightarrow \infty$, por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &\geq E(e^{-RC_\tau} \mid \tau < \infty)P\{\tau < \infty\} \\
&\geq E(1 \mid \tau < \infty)P\{\tau < \infty\} \\
&= P\{\tau < \infty\} \\
&= \psi(u).
\end{aligned}$$

□

El coeficiente de ajuste no siempre existe, y aún cuando sepamos su existencia no es fácil calcularlo. La siguiente proposición proporciona algunas cotas para dicho coeficiente.

Proposición 10. *Si el coeficiente de ajuste R existe, entonces cumple las siguientes desigualdades:*

$$\frac{1}{M} \ln\left(\frac{c}{\lambda\mu}\right) < R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2},$$

en donde la primera desigualdad es válida bajo la hipótesis adicional de que $Y \leq M$, c.s. para alguna constante $M > 0$.

Demostración. Consideremos nuevamente la función $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$, para $r > 0$. Recordamos además que, $\theta'(r) = \lambda M'_Y(r) - c$, y $\theta''(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}) > \lambda E(Y^2) = \lambda\mu_2$. Entonces

$$\theta(r) = \theta'(0) + \int_0^r \theta''(s)ds > (\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 r.$$

Por lo tanto

$$\theta(r) = \theta(0) + \int_0^r \theta'(s)ds > (\lambda\mu - c)r + \lambda\mu_2 \frac{1}{2}r^2.$$

Evaluando la última desigualdad en R obtenemos

$$0 > (\lambda\mu - c)R + \lambda\mu_2 \frac{1}{2} R^2 = [(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 \frac{1}{2} R]R.$$

Como $R > 0$ se tiene que $(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 \frac{1}{2} R < 0$. Despejando de esta última R , se obtiene la cota superior.

Supongamos ahora que $Y \leq M$ c.s. y sea $h(x) = \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1)$. Entonces $h''(x) = -R^2 e^{Rx} < 0$. Por lo tanto h es cóncava con $h(0) = h(M) = 0$. Lo cual nos dice que $h(x) > 0$, es decir para $0 < x < M$

$$\frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1) > 0,$$

o bien

$$(e^{Rx} - 1) \leq \frac{x}{M}(e^{RM} - 1). \quad (4.17)$$

Hagamos $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Tenemos que $g'(x) = xe^x > 0$ cuando $x > 0$, esto es $g(x)$ es creciente para cuando $x > 0$. En particular, $g(RM) = RM e^{RM} - e^{RM} + 1 > 0$. Por lo tanto

$$\frac{e^{RM} - 1}{RM} < e^{RM}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, usando 4.16,

$$\begin{aligned} M_Y(r) - 1 &= \int_0^M (e^{Rx} - 1) dF(x) \\ &\leq \int_0^M \frac{x}{M} (e^{RM} - 1) dF(x) \\ &= \frac{1}{M} (e^{RM} - 1) \int_0^M x dF(x) \\ &= \frac{\mu}{M} (e^{RM} - 1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando 4.18 y 4.19 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(M_Y(R) - 1) - cR \\ &\leq \frac{\lambda\mu}{M} (e^{RM} - 1) - cR \\ &< \lambda\mu R e^{RM} - cR \\ &= (\lambda\mu e^{RM} - c)R. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda\mu e^{RM} - c > 0$. Despejando R obtenemos la desigualdad buscada. $\square$

4.8. Simulaciones

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de una simulación realizada sobre lo que podría suceder con el proceso de riesgo, considerando los supuestos del modelo clásico de Cramér-Lundberg. La finalidad es comparar los valores teóricos con lo que podría suceder en la práctica, es decir comparar la probabilidad de ruina teórica (que para el caso exponencial tiene una forma cerrada) con la probabilidad calculada muestralmente.

La simulación consistió en generar las variables para los tiempos de reclamaciones, así como para el monto de las reclamaciones, obteniendo con estos datos una trayectoria para el proceso de riesgo en un tiempo finito. Suponemos que el monto de las reclamaciones se distribuyen exponencialmente con parámetro $\frac{1}{\mu}$.

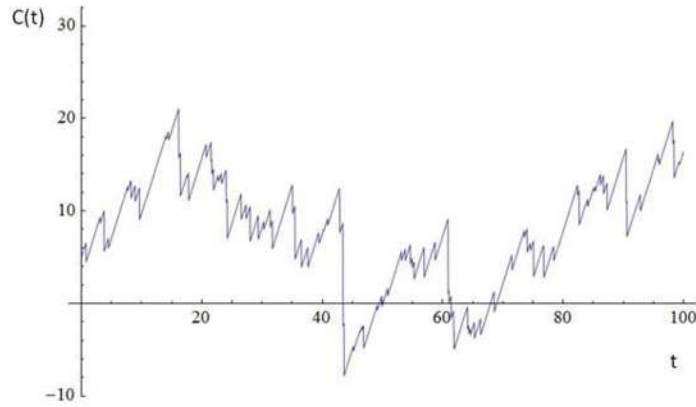
En la tabla 7 se muestran algunos resultados obtenidos, los parámetros utilizados se eligieron indistintamente, cuidando solamente que cumplieran con la condición de ganancia neta. Dichos parámetros són; $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $c = 2.1$ y un capital inicial de 5 unidades monetarias. Para el cálculo de la probabilidad de ruina muestral se llevo un conteo en cada prueba del proceso de riesgo en el que toma por lo menos un valor negativo en el proceso de análisis. Se realizaron 1000 y 5000 pruebas.

Tabla 7. *Probabilidad de ruina.*

t	Pruebas	$\psi(u, t)$	$\psi(u)$
50	1000	0.6700	0.845491077
50	5000	0.6808	0.845491077
100	1000	0.7450	0.845491077
100	5000	0.7408	0.845491077
300	1000	0.8090	0.845491077
300	5000	0.8116	0.845491077
500	1000	0.8160	0.845491077

De la tabla podemos observar que la probabilidad de ruina calculada se acerca a la probabilidad de ruina teórica conforme el periodo de tiempo en el que se analiza el proceso crece, y también conforme el número de pruebas se aumenta.

La figura siguiente muestra una trayectoria del proceso de riesgo obtenida con los parámetros de la tabla anterior.



En la tabla 8 se muestran los resultados obtenidos de 7 corridas, cada una con 1000 pruebas. Se dan los valores para los parámetros, así como la probabilidad calculada y la probabilidad teórica. Se trató de dar valores a los parámetros de forma que pudieran revelar lo que sucedería en distintos casos, por ejemplo, cuando se tiene un capital inicial bajo o un promedio grande de reclamaciones.

Tabla 8. *Resultados de simulación.*

u	λ	μ	c	t	$\psi(u, t)$	$\psi(u)$
6	1	2.3	3	100	0.4220	0.417112
6	4	2.0	9	100	0.6210	0.636916
6	4	4.0	17	100	0.8500	0.861689
8	6	4.0	25	200	0.8880	0.886191
80	7	3.5	26	200	0.2320	0.252056
10	5	4.0	21	300	0.8570	0.845491
0	3	1.25	5	300	0.7620	0.750000

Podemos observar que en general las probabilidades encontradas muestralmente son muy cercanas a la probabilidad teórica calculada para cada caso. Podemos observar que hay una probabilidad menor de ruina cuando se tiene un capital inicial alto, y una probabilidad mayor de ruina para cuando el promedio de reclamaciones es alto.

Capítulo 5

Conclusiones

De acuerdo a los cálculos realizados para valuar una determinada anualidad, podemos ver que los dos factores más importantes a tomar en cuenta són; la edad de la persona, y la distribución que tenga la variable aleatoria que nos da el tiempo de vida esperado de una persona de edad x . El costo final de una anualidad, $A = \int_0^\infty ze^{-\rho t} S_x(t) dt$, depende directamente de éstos dos factores. Entonces, el trabajo más importante a realizar para determinar el costo de la anualidad es elegir una función de riesgo adecuada, es decir, la que mejor describa T_x y se apegue a la realidad.

Las compañías ofrecen diferentes tipos de anualidades, de acuerdo a las distintas necesidades y posibilidades de la población en la cual son ofrecidas. Es una buena opción para garantizar un ingreso en el futuro. Actualmente las personas viven más tiempo en promedio, y entonces gastan un mayor tiempo en el retiro, por lo cual uno de los problemas en crecimiento para la sociedad son que no se tienen planes de jubilación adecuados. Además las personas que no cuentan con plan de jubilación oficial tienen que encargarse ellos mismos de planear su retiro, es decir, generar ingresos para cuando ya no sean económicamente activos. El funcionamiento de las anualidades es sencillo y es una buena opción para dichas personas, ellas puedan ahorrar una parte de su salario cuando se encuentran trabajando y cuando dejen de hacerlo pueden invertir dichos ahorros en una anualidad y entonces puedan vivir sin preocupación sus años de retiro.

En cuanto al modelo de Cramér-Lundberg, podemos ver que es un modelo idealizado sobre la realidad, ya que no se toman en cuenta factores que en la realidad son de mucha importancia, como són; los gastos de la empresa por concepto de administración, o las ganancias por intereses de la empresa, sin embargo el modelo permite encontrar aproximaciones para las probabilidades

de ruina, además es un punto de partida para el desarrollo de modelos más completos y que permitan tener un mayor conocimiento del modelo asegurador.

La probabilidad de ruina depende directamente del exponente que tengan los tiempos de interarribo, el capital inicial y el valor promedio del monto de las reclamaciones. Lo cual también se observa en los datos obtenidos de la simulación.

Uno de los resultados principales que se describen en la tesis es el teorema de Lundberg, el cual nos da una cota para la probabilidad de ruina, para el caso en que las reclamaciones se distribuyan con cola ligera, además se encuentra que para el caso en que éstas tienen distribución exponencial se tiene una expresión cerrada para la probabilidad de ruina. De esto podemos concluir que la probabilidad de ruina depende directamente de cómo se distribuyan las reclamaciones, y para cada caso se tendría que hacer un análisis particular, ya que por ejemplo, para las distribuciones de cola pesada el teorema de Lundberg no nos ofrece nada de información sobre la probabilidad que se tendría en dichos casos.

Bibliografía

- [1] Balanzario, Eugenio P. *Notas de Análisis Real*, notas de clase. Morelia, Michoacán, 2008.
- [2] Durrett, Richard. *Essentials of Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [3] Illner Reinhard; Bohum, C. Sean; Mc. Collum, S. *Mathematical Modelling: A case studies approach*, The American Mathematical Society, 2005.
- [4] Klein, J. P.; Moeschberger, M. L. *Techniques for censored and truncated data*, Springer, New York, 2010.
- [5] Luenberger, David G. *Investment Science*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [6] Martínez, Adriana. *Análisis y simulación de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg*, Tesis, Facultad de Ciencias UNAM, 2007.
- [7] Milevski, M. A. *The calculus of retirement income*, Cambridge University Press, 2006.
- [8] Mina Valdez, Alejandro. *Funciones de supervivencia*, Notas.
- [9] Rincón, Luis. *Introducción a la teoría del riesgo*. Notas de clase, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, México, 2007.
- [10] Rodriguez, Teodoro. *Introducción a los métodos estadísticos, numéricos y probabilísticos*, Notas, Colegio Marista, Cristo Rey, US.