

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

**Localización de la gravedad 4D en un mundo
membrana generado por un campo escalar**

Tesis que presenta

Lenin González Arroyo

Para obtener el título de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Asesor: Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Coasesor: Dr. Nandini Barbosa Cendejas

Morelia, Michoacán

enero de 2011

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por todo el apoyo incondicional, a lo largo de todos estos años.

A mi padre por el ejemplo de trabajar en lo que uno ama. A mi hermana Perla por la confianza depositada. A mi hermana Estefanía por crecer y ver por mis hermanos pequeños. A mi hermano Gilberto por su ejemplo de no dejarse. A mi hermana Diana por ser hasta cierto punto racional y poner su toque en la vida familiar.

Agradezco a mi asesor el Dr. Alfredo Herrera Aguilar, por el tiempo, la dedicación a su trabajo, por su actitud siempre responsable y humana, y su energía dedicada a la comprensión de cada detalle.

Agradezco a mi asesora la Dra. Nandini Barbosa Cendejas por tanta ayuda en los conceptos físicos y sobre todo en su emoción al hablar de ellos.

Agradezco a mis amigos Carlos Alberto, Carlos Axel y Juan Carlos que son personas modelo de la sociedad y compañeros de momentos incomparables.

A mis amigas Nydia, Lorena y Citlali, inteligentes y tenaces, que siempre te empujan para ir hacia adelante.

Prefacio

La presente tesis trata de un modelo de universo en más de las 4 dimensiones habituales de la física del modelo estándar. Los intentos de formular universos con dimensiones extra tienen gran diversidad y amplitud en sus enfoques. Al utilizar 5 dimensiones en este trabajo se emplearán análogos físicos de nuestros conceptos en 4 dimensiones. Las 5 dimensiones nos darán la libertad de meter nuestro espaciotiempo adentro como una superficie de 4 dimensiones (hipersuperficie). La forma en que estará dentro de este espacio con una dimensión adicional será el de una “membrana”. Hay varios trabajos con membranas idealizadas con el límite de su anchura igual a cero, las llamadas membranas delgadas. Nuestro trabajo será en un caso un poco menos idealizado el de las membranas anchas. La motivación principal del trabajo es el análisis de la gravedad, responder a las preguntas de si el comportamiento físico restringido a nuestra membrana o nuestra hipersuperficie es recuperado y si se reproducen las ecuaciones de la física que aceptamos y usamos de manera cotidiana. Hay que resaltar que este modelo considera únicamente la gravedad, no se analizará el comportamiento de la materia. Trabajos realizados por otros físicos han tratado el comportamiento de la materia y han encontrado que se localiza dentro de modelos de membrana de nuestro tipo. El análisis comienza con una densidad lagrangiana en 5 dimensiones, a la que se le aplicará una variación, después se obtendrán las ecuaciones de campo. Llegado esto se buscará la dinámica de las fluctuaciones al perturbar la métrica para analizar como se comporta la gravedad. La perturbación nos llevará a una ecuación diferencial tipo Schrödinger. Este tipo de ecuaciones diferenciales han sido estudiadas ampliamente en varios ámbitos de la física: Mecánica cuántica el más común. Esta familiaridad con este tipo de ecuación diferencial nos ayuda a la interpretación de la información física contenida en ella.

Una parte importante de la tesis es el de encontrar soluciones de la ecuación diferencial que estén de acuerdo a la física del problema. Se identificó el tipo de ecuación como una ecuación Confluente de Heun (CHE). La ecuación de Heun es una generalización de la hipergeométrica. Así al contener más parámetros que la hipergeométrica hace a la ecuación la más Heun general de este tipo. Al ser más general que la hipergeométrica se vuelve más compleja ya que la incluye y a muchas otras.

Al encontrar unas soluciones con comportamiento cualitativo físicamente acept-

able, se analizó su comportamiento en los puntos al infinito y con los parámetros con significado físico, por ejemplo, se analizó la solución con la masa igual a cero. Finalmente se obtuvo la gravedad localizada y la función del gravitón, lo que nos recupera nuestra gravedad 4D. Es importante resaltar que las aplicaciones físicas de este tipo de ecuaciones diferenciales son escasas y hasta hace poco inexistentes. Una vez más soluciones matemáticas sin aplicación son usadas y encajan en modelos físicos.

El seguimiento lógico del trabajo es la solución explícita de los modos másivos de nuestra ecuación diferencial, con la cual se podrían hacer predicciones de correcciones a la ley de Newton que se comprobarían con experimentos, por ejemplo en los aceleradores de partículas.

Índice general

Índice general	1
1. Introducción	1
1.1. Conceptos físicos y matemáticos básicos	3
1.2. Conceptos de Mecánica Clásica	4
1.3. Nociones de Relatividad General	6
1.4. Modelos con dimensiones extra	10
1.5. Mundos membrana	13
2. Mundo Membrana con Campo Escalar en 5D	16
2.1. Variación con respecto a la métrica	16
2.2. Variación con respecto al campo escalar	17
2.3. Ecuaciones de campo y su solución	18
2.4. Métrica conformemente plana	19
3. Localización de la Gravedad 4D en el Mundo Membrana	20
3.1. Perturbaciones de la métrica de fondo	20
3.2. Solución particular y ecuación confluyente de Heun	22
3.3. Solución a la ecuación confluyente de Heun	23
3.4. Interpretación física del espectro de masas del gravitón	24
4. Conclusiones	26
Bibliografía	28

Capítulo 1

Introducción

La física es una ciencia que tiene un desarrollo muy veloz en estos tiempos. Al comparar la cantidad de avances de los siglos XVII y anteriores, con los de los siglos XVIII y XIX, y éstos a su vez con los avances en las últimas décadas, vemos como se ha incrementado rápidamente la producción de las ciencias exactas. Todos estos avances son resultado del esfuerzo de muchos investigadores y de la necesidad humana por conocer y entender. Necesidad que afrontamos con las armas que nos dió la evolución, que son nuestra capacidad de observar y aprender. Pero se resalta sobre todo, la capacidad de los primates superiores de enseñar lo que se aprende a los demás de nuestra especie. Al aprender cada vez más y transmitir el conocimiento en todos y cada uno de los ámbitos, crece de una manera acelerada no solamente el número de respuestas que obtenemos o el número de metas alcanzadas, sino también crece la cantidad de preguntas y dudas que nos hacemos de lo que todavía ignoramos en nuestra realidad. La tarea es ardua ya que los grandes logros del siglo XX nos han dejado una diversificación amplia de las ramas del saber. Especialmente en la física: la mecánica cuántica, la relatividad y cosmología aumentaron enormemente el campo de estudio de esta ciencia.

La comprensión que tenemos de la naturaleza es expresada en física generalmente por medio de leyes. Estas leyes buscan tener una estructura y una unidad lógica que permitan sintetizar el conocimiento que se tiene del comportamiento de los fenómenos naturales, es decir, del universo mismo. Así el fin último de la física es entender el comportamiento de una sola cosa: el universo. Este objetivo del cual la parte más importante es la búsqueda y el descubrimiento, acciones que nos avanza y desarrollan un poco cada vez, aunque no se distinga cercanamente la meta o a lo lejos el final de esta travesía.

Podemos imaginar el desarrollo actual de esta ciencia como un muro de una determinada altura, construido por físicos y científicos del pasado. Lo que les permite a los investigadores actuales subirse en el desarrollo anterior y poner un pequeño tabique para aumentar su altura. La analogía continúa: si los cimientos de lo contruido anteriormente es fuerte, durará, si no, habrá que tirar un poco y

volverlo a construir para que resista. Ideas que parecieron en su momento soportar el futuro desarrollo, son mejoradas o a veces sustituidas por otras que al menos parecen soportar más peso. Todas estas ideas nacen para estar siempre sujetas al análisis y a una lucha con las que quieren reemplazarlas.

Es importante hacer notar que las aplicaciones obtenidas de cualquier rama de la física son enormes, al caminar hacia el entendimiento se desarrolla la tecnología y nos brinda muchos servicios y comodidades para aprovecharlos en la vida diaria.

Así comenzamos con un pequeño esbozo de lo que trató el trabajo aquí realizado. El cual está dividido en 4 capítulos, los tres primeros tratan de la física y la matemática utilizadas a lo largo de la tesis para ir de los conocimientos generales a los más específicos. El cuarto capítulo tratará de las conclusiones particulares que se pudo obtener del trabajo de tesis.

Más detalladamente el primer capítulo de introducción trata de conectar algunos conceptos físico-matemáticos básicos con algunos un poco más complejos pero que se derivan de ellos en una forma natural. Su contenido está dividido en 5 secciones, la primera es para resaltar la importancia de la geometría en la física. El desarrollo de la física necesitaba la creación de nuevas geometrías no era suficiente la geometría desarrollada por los grandes geometras griegos. La unión de geometría y álgebra, después la creación de nuevas geometrías dotaron a los modelos físicos de un lugar donde desarrollarse. La segunda sección trata de la evolución en los conceptos de la mecánica. De su peregrinar desde las ideas de Galileo, sus transformaciones, las ecuaciones de Newton que formularon la primeras leyes de la Gravitación. El desarrollo de diferentes enfoques como el enfoque de Lagrange y el enfoque de Hamilton. Equivalentes a las ecuaciones de Newton pero que no contienen el problema de cambiar de forma al cambiar de sistema cartesiano de coordenadas. La tercera sección de este capítulo nos da una noción de la física desarrollada a principios del siglo XX, la Relatividad General. Se destaca el uso de la geometría diferencial, los tensores, los espacios curvos para la formulación del modelo (Relatividad General) que describe el comportamiento de nuestro universo. De lo general de los conceptos anteriores se llega a algo más particular. Se describe en la cuarta sección algo de historia de los modelos con dimensiones mayores a 4. Dando algunas ideas y objetivos que siguen estas teorías, algunas y algunos de los cuales comporte nuestro modelo. Pasando finalmente a la última sección del primer capítulo donde se describe los modelos base del que aquí se trabaja. Al describir estos modelos que son los más cercanos se dibuja en la mente las características principales que compartan con nuestro modelo, como las importantes diferencias entre ellos.

El segundo capítulo da una propuesta de un universo pentadimensional, se da la acción, concepto físico que se define en el primer capítulo. Esta acción contendrá un campo escalar y un potencial que depende del campo escalar. La acción dependerá del campo escalar y de la geometría de nuestro espacio de 5 dimensiones. A lo largo de las cuatro secciones del segundo capítulo se estudiará la geometría de nuestro espacio y la física que obtenemos del principio de “mínima

acción”, tratando de obtener expresiones para nuestra métrica, nuestro campo y nuestro potencial de autointeracción. Las primeras dos secciones de este capítulo tratan de la variación de la acción en cada uno de sus dependencias, primero variando sobre la geometría y después sobre el escalar. Al combinar las expresiones de las variaciones se obtienen las ecuaciones de campo. Que se tratarán de resolver para un Ansatz para el tensor métrico. Este tensor métrico contiene un factor que multiplica la parte tiempoespacio de nuestro universo, el cual depende de la coordenada extra. Después de nuestro ansatz para la métrica y después para su factor de deformación resolveremos la funcionalidad del campo escalar en terminos del factor de deformación y del potencial en terminos del campo escalar.

El tercer capítulo trata de nuestro objetivo principal, entender el comportamiento de la gravedad en nuestro modelo de mundo membrana. Para ello se perturbará la métrica y se hará un análisis de las perturbaciones que contienen la información física. Obtendremos nuestros mismos objetos del capítulo uno, pero ahora perturbados. La parte perturbada nos llevará a una ecuación diferencial. Para su mejor interpretación física la llevaremos a una ecuación tipo Schrödinger. Esta ecuación es tratada en muchos problemas de mecánica cuántica. Eso da la ventaja de que se comprensión al menos cualitativamente es grande comparado con las otras ecuaciones diferenciales. Finalmente la obtención de las soluciones físicas de la ecuación diferencial nos llevará a una forma no muy común de ecuación diferencial. El análisis de la solución con un parámetro de masa cero nos llevará hasta nuestro objetivo, la localización de la gravedad.

1.1. Conceptos físicos y matemáticos básicos

Las leyes físicas se valen de las matemáticas para expresar cuantitativamente muchos de los comportamientos físicos. Así empezó esta relación entre física y matemáticas con el desarrollo de la geometría euclídea en el siglo tercero antes de nuestra era. Estas matemáticas fueron creadas de la observación y la experiencia diaria, con una estructura en forma de postulados que permitía un entendimiento claro de ella. Tenemos un concepto muy importante en la geometría euclídea que es uno de los tabiques importantes de nuestro saber. Este concepto se llama distancia. Esta distancia plana viene expresada en el teorema de Pitágoras. Este teorema hasta podría ser una definición de lo que es la geometría euclídea. Gracias al desarrollo de las coordenadas cartesianas, se pudo hacer un puente entre la geometría y el álgebra. Si expresamos la distancia “ l ” en un sistema cartesiano (x, y, z) y tenemos otra expresión para otro sistema cartesiano (x', y', z') (o sistema referencia cartesiano), podemos ver que su valor no cambia

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (1.1)$$

Con esto llegamos a otro concepto importante en la física: el invariante; la distancia es un invariante a diferencia de las coordenadas cartesianas individ-

uales. Como su nombre lo indica el invariante no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones. Las coordenadas individuales pueden verse también como las proyecciones sobre los ejes. Si por un momento imagináramos un sistema de coordenadas tiempo-espacio las proyecciones en el eje tiempo y en los ejes espaciales serían relativas, es decir, dependientes del sistema de referencia escogido. Este invariante de la distancia en particular ha evolucionado y sobrevivido hasta nuestros días, ahora es el intervalo espacio-temporal, que unifica el tiempo y el espacio, y está definido a través del tensor métrico para un espacio con curvatura. Estos conceptos de tensor y curvatura serán de gran importancia en el desarrollo posterior de nuestro trabajo y serán vistos de nuevo a lo largo de las siguientes secciones, donde podrá quedar más claro su significado. Queda resaltar que los invariantes nos permiten medir cantidades físicas en todos los sistemas de referencias con un mismo valor. Por lo tanto es lógico asociar significados físicos a estos invariantes y viceversa: buscar invariantes a las medidas físicas. Esto establece una relación clara entre la geometría y la física.

La geometría euclídea se basa en 5 postulados, durante muchos años el desarrollo en la geometría no fue grande. En el siglo XVIII las cosas empezaron a cambiar, pues se comenzaron a explorar las consecuencias de la negación del quinto postulado. Tentativas de explorar geometrías no euclídeas fueron hechas por Saccheri, Lambert y Legendre. Fue sólo hasta comienzos del siglo XIX que el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky dio el paso revolucionario: construyó la geometría de Lobachevsky, también descubierta por el matemático húngaro Bolyai y por Gauss. Es una geometría no euclídea en 2 dimensiones.

1.2. Conceptos de Mecánica Clásica

En tiempos anteriores Newton utilizó la geometría de su tiempo (euclídea) para describir las leyes de la mecánica clásica. La primera de ellas, la de la inercia, fue descubierta por Galileo.

Las leyes de Newton son expresadas en forma vectorial, en un espacio de 3 dimensiones. Al expresar estas ecuaciones en otro sistema de referencia con velocidad constante Newton observó que la forma de la ecuación no cambiaba, es decir se mantenía invariante con respecto a estas transformaciones. Lo anterior es el principio de relatividad de Galileo. Estas transformaciones son llamadas de Galileo, ya que fue Galileo el primero que las formuló al hacer experimentos sobre el movimiento de los cuerpos.

La física de Newton contiene independencia del tiempo con respecto al sistema de referencia. El espacio y el tiempo son cosas separadas, no forman un único espacio tetradimensional. En nuestra actual teoría el tiempo y el espacio forman el espacio en que vivimos. Newton no define la relación que existe entre el sistema de referencia y la distribución de materia. En realidad, era imposible hacerla con la física que se conocía hasta entonces. Tenía que esperarse también un desarrollo

matemático que todavía no existía en ese entonces. La formulación de Newton de la mecánica describía muy bien el comportamiento de los fenómenos. Este formalismo explicaba e iba de acuerdo a la mayoría de los fenómenos mecánicos de la naturaleza que podíamos observar en nuestra realidad de todos los días. En éste se obtiene otro concepto importante, el principio de equivalencia, donde se hacen equivalentes dos masas en principio diferentes: la masa gravitatoria, una cualidad propia de los objetos, sobre ella hace efecto la fuerza de atracción gravitatoria, y la masa inercial, la masa que determina la aceleración del objeto al sufrir fuerzas externas. También Newton utilizó conceptos de tiempo absoluto (duración) y de espacio absoluto. Lo que hay que resaltar es el gran avance en la concepciones que tuvo la física gracias a las leyes de Newton, que sirvieron y sirven en muchísimas aplicaciones en nuestra vida. Durante los siglos XVII y XIX se desarrollaron métodos analíticos en la mecánica clásica. Estos buscaban la formulación más general de la mecánica. En su mecánica analítica Joseph Lagrange obtiene sus famosas ecuaciones. Las ecuaciones de Newton tenían el inconveniente que al transformarse en sistemas de coordenadas diferentes de los cartesianos diferían esencialmente en forma. Lagrange introdujo las coordenadas generalizadas $(q^\lambda, \dot{q}^\lambda)$, que junto con el lagrangiano $L = L(q, \dot{q}, t)$ permitieron formular las ecuaciones de la Mecánica de manera genérica. Estas son las ecuaciones de Lagrange que expresamos por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

El estado de un sistema físico es determinado por las coordenadas generalizadas y las velocidades. Este “lagrangiano” clásico contiene toda la información que se obtiene de las ecuaciones de Newton en sistemas sin ligaduras. La forma de la ecuación de Lagrange tiene la ventaja de que es independiente de cómo se escojan las coordenadas generalizadas.

Buscando la formulación más general de las leyes del movimiento, se llegó al principio de mínima acción. La acción “S” está definida de la siguiente manera

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.3)$$

En un sistema de un número finito de grados de libertad la acción física se define como una integral de línea sobre las trayectorias del movimiento. Utilizando “cálculo variacional” se llega al principio de mínima acción en el que la naturaleza parece expresar su tendencia a la “economía” o al ahorro, este principio también llamado de Hamilton nos dice que esta acción es tal que la variación de esta acción es nula $\delta S = 0$. Es es,

$$\delta S = \delta \int L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (1.4)$$

Así también se desarrolló un formalismo equivalente muy usado actualmente

en la mecánica, el formalismo Hamiltoniano, que tiene cualidades similares al de Lagrange.

El formalismo óptimo no sólo se buscaba en mecánica, varias ramas de la física trataban de mejorar y obtener el suyo. La electrodinámica es otra rama de la física que se desarrolló fuertemente en el siglo XVIII, lo que provocó que descubrimientos en este campo sirvieran para toda la física en general. Las leyes de transformación que conservan la forma de las ecuaciones en este campo de la física deberían conservarla también en todos los demás, lo cual no sucedía. Siguiendo los descubrimientos de Faraday, Maxwell combinó en sus famosas ecuaciones, la electricidad, el magnetismo y la óptica. Al formular sus ecuaciones Maxwell utilizó una geometría euclídea tridimensional con tiempo absoluto y espacio absoluto. Él no sospechaba que la esencia de un espacio-tiempo se encontraba dentro de ellas. Las transformaciones de Galileo no conservaban la forma de las leyes de Maxwell. El principio de relatividad de Galileo no se cumplía.

En 1904 Lorentz da un importante paso al demostrar que las ecuaciones de onda de la electrodinámica permanecen invariantes en su forma al aplicar una cierta transformación de coordenadas. En esta transformación lo más destacable era que el tiempo no se mantenía inalterado. Esta es una transformación entre un sistema de referencia y otro. La conclusión a la que nos lleva es que cada sistema de referencia tiene que introducir su propio tiempo. Idea a la que no llegó Lorentz, que consideraba en esos años que el tiempo real era el del primer sistema de referencia, el otro tiempo sólo era parte de un truco matemático. Poincaré y Einstein sí identificaban cada tiempo como real, relacionándolo con cada uno de los sistemas de referencia.

Poincaré demostró que las transformaciones de Lorentz junto con las rotaciones espaciales, forman un grupo, es decir, que son un conjunto que bajo cierta operación cambian de un elemento a otro, y tienen diferentes cualidades distributivas y asociativas. Esta operación en la mayoría de los casos es llamada suma $+$ o multiplicación $*$. Además, fue el primero en introducir la noción de tetradiimensionalidad para una cantidad física, así como descubrió muchos invariantes de este tipo de transformaciones [1]. Después Minkowski desarrolló esto en un espacio pseudo-euclídeo que lleva su nombre.

1.3. Nociones de Relatividad General

La matemática esencial de la Teoría General de la Relatividad es la geometría diferencial. Esta rama de las matemáticas trabaja con “variedades” diferenciales. Para entender la física se necesita ver simplemente la geometría diferencial como una extensión del álgebra lineal y el cálculo vectorial. Los vectores son objetos con dirección y magnitud, los cuales forman un álgebra lineal (espacio vectorial). Ahora definamos también lo que es una uno-forma: es una función que toma un vector y lo manda a un escalar (número). Habiendo definido lo anterior, definamos

lo que es un tensor. Un tensor de rango (m, n) también es una función de n uno-formas y m vectores que es lineal en todos ellos. De esto se sigue que un tensor de rango $(0,0)$ es un escalar, los vectores son tensores de rango $(1,0)$, una uno-forma (covector) es un tensor de rango $(0,1)$, etcétera.

Las reglas de transformación para diversos tensores al cambiar de las coordenadas x^i a las coordenadas $\bar{x}^i$ son:

Tensor tipo $(2,0)$

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl},$$

tensor tipo $(1,1)$

$$\bar{M}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} M_l^k,$$

tensor tipo $(0,2)$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} S_{kl}.$$

Cuando hay índices repetidos uno de arriba y otro de abajo, contravariante y covariante, representan una suma sobre todos sus valores (notación de Einstein). Los tensores sobre los que no se suman son índices libres. Cuando en un tensor todos los índices indican una suma, es decir no queda ninguno libre, éste es un escalar. Al hacer esta suma de un índice contravariante y uno covariante nos da un tensor disminuido en su orden por 2, el orden covariante y contravariante disminuyen en 1, respectivamente. A este proceso se le llama contracción. Al tener un vector y una uno-forma se puede obtener un escalar o un invariante (por producto interno). Ahora, cuál es el equivalente para 2 vectores o dos uno-formas. Se podría escoger cualquier tensor $(2,0)$, esto nos daría un escalar a partir de dos vectores.

Hay un tensor especial del este tipo $(0,2)$ que es importante para nosotros, ya hemos mencionado su nombre, es el tensor métrico covariante

$$g_{ij}.$$

El tensor métrico contravariante relacionado con éste es de tipo $(0,2)$ y se denota por g^{ij} . Ambos tensores son inversos mutuamente, ya que satisfacen la siguiente relación:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i.$$

Los tensores métricos nos sirven de esta manera para contraer índices. También se puede bajar índices contravariantes usando el tensor métrico covariante y subir índices covariantes por medio del tensor métrico contravariante:

$$b_{jk}^l = g^{il} b_{ijk}, \quad (1.5)$$

$$b_{lmp} = g_{il} g_{jm} g_{kp} b^{ijk}. \quad (1.6)$$

El tensor métrico nos permite definir nuestro invariante principal, el intervalo:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.7)$$

Hay que hacer notar que x^i no se transforma como un vector, pero dx^i sí cumple las reglas de transformación de un tensor (1,0).

El tensor métrico también define una función de densidad w :

$$w = \sqrt{-\det(g_{ij})} = \sqrt{-g}. \quad (1.8)$$

Definición. Sea g_{ij} la matriz formada por las componentes de una métrica y sea g^{ij} la matriz inversa o las componentes del tensor contravariante. Se llaman símbolos de Christoffel a las cantidades

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Los símbolos de Christoffel no se transforman como tensores, por lo tanto no son tensores. Estos símbolos de Christoffel nos sirven para definir el transporte paralelo de un vector sobre una superficie curva, su derivada covariante, así como la curvatura misma de la superficie.

Para comprender la estructura de esta geometría debemos definir ahora lo que es el tensor de curvatura. El cual nos dice cuando un espacio es curvo. Es una generalización de la curvatura de Gauss que mide la curvatura intrínseca en cada punto regular de una superficie. La curvatura Gaussiana varía de un punto a otro de la superficie. El tensor de curvatura es un tensor de tipo (1,3) y se representa:

$$R^r_{smn} = \partial_m \Gamma_{ns}^r - \partial_n \Gamma_{ms}^r + \Gamma_{ml}^r \Gamma_{ns}^l - \Gamma_{nl}^r \Gamma_{ms}^l. \quad (1.9)$$

Su contracción define otro tensor de tipo (0,2) el tensor de Ricci

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad (1.10)$$

donde en el segundo miembro la suma sobre k está implícita. Podemos contraer nuevamente, obteniendo el escalar de curvatura:

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i^i, \quad (1.11)$$

que representa un invariante geométrico.

La derivada también tiene su equivalente en este espacio. Así la derivada covariante de un vector es:

$$\begin{aligned} \nabla_j v^i &= v_{;j}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k, \\ \nabla_i v_i &= v_{i;j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k v_k. \end{aligned}$$

Hay que resaltar algunas cualidades de los tensores anteriores como el lema de Ricci o condición de metricidad:

$$g_{ij;k} = g^{ij}{}_{;k} = 0.$$

Una colaboración de Einstein con el matemático Grossman le guió para el año 1913 a la idea de que el campo gravitacional debería identificarse con las 10 componentes del tensor métrico del espacio tiempo de Riemann.

Una formulación lagrangiana de la Relatividad General es posible al igual que se realizó con la mecánica clásica de Newton. Por eso no es sorpresa que se puedan obtener las ecuaciones de Einstein de un enfoque lagrangiano tetradimensional, lo que requiere el cumplimiento de un principio de mínima acción [2]. Por ejemplo, para un campo escalar dicha acción está dada por:

$$S[\phi] = \int L[\phi] d^4x. \quad (1.12)$$

Aquí S es otra vez la acción y L es llamada densidad lagrangiana. La definición de campo escalar es una función que a cada punto del espacio le asocia un número. Su noción entonces es comprensible viendo sus ejemplos: en la magnitud campo electrostático, la magnitud del campo gravitatorio y la temperatura.

De regreso a la ecuación, las dependencias en el diferencial de volumen d^4x y de toda la acción nos muestran que la densidad lagrangiana en el vacío es

$$L = \sqrt{-g}R, \quad (1.13)$$

donde g es el determinante del tensor métrico y R es el escalar de curvatura del espaciotiempo. De este modo, la acción queda

$$S[g^{\mu\nu}] = \int dV \sqrt{-g}R. \quad (1.14)$$

Un ejemplo de ecuaciones de campo en un espacio curvo para un campo escalar ϕ , son las ecuaciones del campo de Klein-Gordon. La densidad lagrangiana:

$$L_{KG} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\{-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + m^2\phi^2\} \quad (1.15)$$

deriva en las ecuaciones de Klein-Gordon después de aplicar el método variacional:

$$\begin{aligned} \square\phi + m^2\phi &= 0, \\ g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + m^2\phi &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + m^2\phi &= 0, \end{aligned}$$

donde m es la masa del campo escalar y $\square$ es el operador D'Alambertiano en $4D$.

1.4. Modelos con dimensiones extra

En la búsqueda de soluciones a varios problemas fundamentales en diversos campos de la física surge la idea de un espacio con más de tres dimensiones espaciales, que parece ser un buen modelo para el universo físico en que vivimos. Algunos de los problemas que intenta solucionar un espacio con más de tres dimensiones son: el de la constante cosmológica, la materia oscura, el problema de la jerarquía de masas, entre otros. El problema de la unificación y sus teorías, que contienen a la gravedad tetradimensional, son creadas naturalmente en espacios tiempo con más de cuatro dimensiones.

La parte crucial y oscura de esta opción de un universo con dimensiones extra es la no observación de ellas por parte de nuestros sentidos. Así cada modelo del universo susceptible de ser aceptado debe tener alguna explicación por la cual las dimensiones extra están ocultas. Lo que además nos provoca la siguiente pregunta: ¿cuáles son las consecuencias de las dimensiones extra en nuestra realidad tretradimensional 3+1 (espacio y tiempo)? En la actualidad no existe una respuesta a esta pregunta. Muchas líneas de investigación diversas se desarrollan tratando de ver cuál es el mecanismo por medio del cual las dimensiones extra se esconden. Por otro lado las líneas de investigación fenomenológicas buscan la forma en que estas dimensiones se manifiestan.

Uno de los primeros pasos en esta historia fue dado en el trabajo: “Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen” que es el título original en alemán del artículo de 1914 de Gunnar Nordström [3], que en español sería: “Sobre la posibilidad de unir el campo electromagnético y el campo gravitatorio”. En éste se muestra que existe un tratamiento para unir el campo electromagnético y la gravedad si uno considera el espacio tiempo tetradimensional como una superficie de un espacio pentadimensional. Lo que en ese entonces llamo “Weltfläche” (mundo superficie) es lo que ahora se conoce como mundo membrana. Cuando Nordström estaba trabajando en sus artículos las únicas fuerzas que se conocían eran la electromagnética y la gravitatoria, y la relatividad general de Einstein estaba en su gestación final. La idea básica era la de extender el formalismo de la teoría electromagnética de Maxwell a un espacio pentadimensional donde el mundo físico es una hipersuperficie.

El desarrollo de las teorías de gravedad comienza con la publicación del artículo de Kaluza en 1921, seguido por el de Klein, que dieron origen a las llamadas teorías de Kaluza–Klein (KK) [4]. En ellas se proponía una gravitación 5-dimensional que consistía en una gravitación tetradimensional de Einstein acoplada al electromagnetismo de Maxwell y a un campo escalar. En este tipo de teorías las dimensiones extra son compactas y esencialmente homogéneas. La forma de solucionar el problema del por qué están ocultas estas dimensiones, es teniendo espacios tiempo de tamaños de muchos órdenes de magnitud mayores que los tamaños de las coordenadas extra, siendo necesario que la geometría en 4 dimensiones no dependa de las coordenadas extra. Esto pudo hacerse de varias

maneras, rechazando las ecuaciones en el vacío, la compactificación espontánea de las dimensiones extra, entre otros. El orden de las dimensiones resulta ser microscópico, y el sentido común nos indica que deben ser del tamaño de la escala de Planck, demasiado pequeñas para ser observadas, lo que un intento por demostrar la existencia de este tipo de dimensiones parece no tener esperanzas.

Un enfoque diferente de atacar el problema es el llamado “mundo membrana”. En esta teoría las dimensiones pueden ser extendidas e incluso infinitas. Dado esto, la posibilidad de encontrar evidencia experimental de la existencia de estas dimensiones es muy grande. De acuerdo a este esquema las partículas correspondientes a las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes son confinadas a una hipersuperficie (llamada membrana) la cual está inmersa en un espacio multidimensional. Sólo la gravedad y otro tipo de materia exótica podrían propagarse en el espacio multidimensional. En esta teoría se supone que nuestro universo es un objeto tipo membrana con 4 dimensiones espaciales y una temporal. Las ideas prototipo de los mundos membrana aparecieron mucho tiempo atrás. Actualmente el término “modelo membrana” agrupa diferentes formas de solucionar algunos problemas fundamentales de la física de altas energías. Estos modelos han sido construidos fenomenológicamente y en ellos se consideran en especial a las “membranas anchas” por ser más realistas que las membranas delgadas, en las que el espacio tiempo posee singularidades desnudas en los puntos en los que éstas residen.

Varios problemas físicos han sido considerados en modelos pentadimensionales (también multidimensionales) en el enfoque de los mundos membrana. El interés en los mundos membrana resurgió con la publicación de los trabajos de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (escenario ADD) [5] y los más destacados modelos de Gogberashvili, Randall y Sundrum y sus extensiones (escenario RS) [6]–[7]. La característica de los llamados “modelos Randall–Sundrum” es la de una métrica no factorizable donde la parte tetradimensional está multiplicada por un factor que cambia rápidamente y que además depende de la dimensión extra. Continuando en este camino se han probado escenarios con una quinta dimensión infinita y en la cual la teoría recupera la gravedad tetradimensional. Esto gracias a que la métrica de fondo contiene un estado ligado del gravitón pentadimensional localizado en la membrana de cuatro dimensiones, es decir, que está confinado a una región finita de dicho espacio tiempo. La existencia del gravitón se puede obtener de pequeñas fluctuaciones de la métrica. Estas fluctuaciones tienen una dinámica de la que se extrae una ecuación tipo Schrödinger. Al solucionarla para el caso no masivo se obtiene una función de onda normalizable y estable que corresponde a este gravitón 4D. En muchos de estos trabajos se aproxima la membrana a un espesor infinitamente delgado. Aunque en esta aproximación se han obtenido muchos resultados interesantes, en algunas situaciones los efectos del espesor no pueden ser despreciables.

Desde un punto de vista realista una membrana debe tener anchura. Está también ampliamente considerado que la teoría más fundamental debería tener una

longitud de escala mínima. La inclusión del espesor de la membrana nos da nuevas posibilidades y nuevos problemas en este sentido. En muchas teorías de campo acopladas a la gravedad hay soluciones de defectos topológicos del espacio. Estas soluciones son asociadas a un mundo membrana, lo que ha llevado a tener una gran variedad de posibilidades para construir estos modelos. Finalmente, todas las soluciones membrana pueden clasificarse en dos grandes grupos, soluciones estáticas y soluciones dependientes del tiempo, mismas que son usadas para atacar diferentes problemas de la física moderna como el problema de la jerarquía de masas y aspectos cosmológicos, respectivamente.

Ecuaciones de Einstein

El confinamiento que vamos a realizar se va a producir en un espacio riemanniano. Las matemáticas generales para estudiar geometrías curvas, que son una generalización de la geometría euclídea, se llamaron con el tiempo bajo el nombre de geometría de Riemann y fueron desarrolladas por el alemán Bernhard Riemann, discípulo de Gauss. Al principio de su desarrollo, en todo el siglo XIX el estudio de los espacios curvos se consideró como una rama matemática sin muchas aplicaciones. En este tipo de espacios también llamadas variedades riemannianas se pueden extender los conceptos de longitud de una curva, área de una superficie, (hiper)volumen o ángulo entre dos curvas. Todo esto se logra definiendo el tensor métrico que es la forma de medir las distancias de un punto a otro. Un concepto importante dentro de los espacios curvos es el de las curvas geodésicas. Son una generalización de las líneas rectas y son curvas que conectan localmente sus puntos a lo largo de las trayectorias más cortas.

Por su parte la teoría de la relatividad general da una nueva interpretación a las fuerzas gravitatorias. En su formulación la masa curva el espacio que la rodea y los cuerpos cercanos a ella sienten los efectos de la deformación del espacio. De ahí que vivimos en un espacio tiempo curvo. Estos efectos se expresan como una fuerza de atracción hacia la masa que deformó el espacio. En las ecuaciones de Einstein se expresa lo anterior y otras cosas. Se establece una relación entre la curvatura del espacio y distribución de masa y energía en un punto. La ecuación de campo de Einstein se expresa de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Otra forma equivalente es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

en que el primer miembro describe la geometría del espacio tiempo y el segundo representa la distribución de masa y energía.

1.5. Mundos membrana

Una característica de las teorías de mundos membrana es que la gravedad se propaga o extiende en todo el espacio multidimensional, en cambio, las interacciones de modelo estándar electromagnética, débil y fuerte se encuentran confinados en la membrana. Estos modelos son construídos son inspirados en cuerdas y son teorías de confinamiento. Así entendemos que los campos electromagnético, débil y fuerte junto con la materia se encuentran “localizados” (atrapados) dentro de la membrana. Esto explica por qué las dimensiones extra no son visibles para energías pequeñas. En nuestro modelo sólo tendremos gravedad y veremos su comportamiento.

Escenario ADD

Al parecer existen dos escalas de energía fundamentales en la naturaleza: la electrodébil $M_{ew} \sim 10^3$ GeVs y la de Planck $M_{Pl} = G_N^{-\frac{1}{2}} \sim 10^{18}$ GeVs en la que la gravedad es tan fuerte como las interacciones de norma. En las últimas décadas una de las tareas más relevantes es la construcción de teorías que vayan más allá del modelo estándar consiste en explicar por qué la pequeñez de la jerarquía $\frac{M_{ew}}{M_{Pl}} \sim 10^{-17}$ así como su estabilidad radiativa. En el escenario propuesto por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali, las interacciones gravitacionales se unifican con las del modelo estándar (interacciones de norma) a la escala electrodébil de energías, que es considerada como la escala fundamental a distancias pequeñas en la naturaleza, gracias a la existencia de dimensiones extra grandes. Este modelo se asemeja a KK en que las dimensiones extra son compactas, pero añade la posibilidad de que puedan ser de tamaño grande. Aquí se obtiene una ecuación, salvo un factor de orden uno, para la masa tetradimensional de Planck M_{Pl}

$$M_{Pl} = M(MR)^{\frac{d}{2}}, \quad (1.18)$$

donde M es la escala multidimensional de la gravedad, R es el tamaño y d el número de las dimensiones extra, respectivamente.

Así, asumiendo que la escala fundamental es del orden de la escala electrodébil $M \sim 1$ TeV, la escala de Planck es muy grande debido simplemente a lo enorme de las nuevas dimensiones. Entonces el problema de la jerarquía de masas es debido al tamaño de las dimensiones extra. El problema ahora consiste en explicar por qué R es grande.

Así por la ecuación anterior uno puede aproximar el tamaño de R ,

$$R \sim M^{-1} \left(\frac{M_{Pl}}{M} \right) \sim 10^{\frac{32}{d}} \cdot 10^{-17} \text{ cms}; \quad (1.19)$$

sustituyendo d por las dimensiones extras nos da un valor muy grande para R cuando $d = 1$. Un caso interesante es cuando $n=2$ donde $R \sim 1$ mm, lo que

ocasiona la búsqueda experimental en este rango de distancias de desviaciones de la gravitación de Newton, es decir, el paso de $\frac{1}{r^2}$ a $\frac{1}{r^4}$ en las interacciones gravitatorias.

Escenario Randall–Sundrum

En el modelo de Randall–Sundrum se considera el caso de una sola dimensión extra y, al contrario que en el modelo ADD, hay una densidad de energía γ o tensión por unidad de trivolumen o membrana delgada. El modelo está dado por la siguiente acción asociada:

$$S = S_{\text{gravidad}} + S_{mb} + S_{mb'} \quad (1.20)$$

donde

$$S_{\text{gravidad}} = \int d^4x \int dy \sqrt{-g} \{-\Lambda + 2M^3 R\} \quad (1.21)$$

y

$$S_{mb} = \int d^4x \sqrt{-g_{mb}} \{V_{mb} + L_{mb}\}. \quad (1.22)$$

Las ecuaciones se pueden obtener directamente de variar esta acción. Estás son las ecuaciones de Einstein estándares en cinco dimensiones con una constante cosmológica Λ . El término de la tensión da origen a “las condiciones de juntura de Israel” en la superficie de la membrana. Este conjunto de ecuaciones nos permite tener una solución que preserva la invariancia de Poincaré. Este hecho ya ha sido extensamente discutido en otro contexto, el de las D-membranas. En este trabajo se consideran métricas no factorizables de la siguiente forma

$$ds^2 = a^2(z) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.23)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica tetradimensional de Minkowski y el factor de curvatura tiene la forma:

$$a(z) = e^{-k|z|}, \quad (1.24)$$

de tal modo que la membrana está localizada en $z = 0$.

Esta métrica es no factorizable a pesar de que aparece en los escenarios usuales de Kaluza-Klein, no corresponde al producto de un espacio de Minkowski por una variedad de las dimensiones extra.

Hay muchos enfoques que han usado esta solución. Uno de ellos ha hecho la dimensión extra compacta mediante el uso de una configuración de dos membranas: una con tensión positiva γ ubicada en $z = 0$ y otra con tensión negativa en $z = z_c$. Al analizar el espectro que se obtiene de esta configuración, vemos que existe un modo cero $m^2 = 0$. Este modo describe la gravedad usal tetradimensional. A

diferencia de las teorías de geometría factorizable tipo Kaluza-Klein, la función de onda del modo cero no depende trivialmente de z y decrece en dirección a $z = z_c$. Esto nos sugiere un acoplamiento gravitacional entre partículas mayor en la membrana de tensión negativa comparada con la membrana de tensión positiva, hecho que resuelve de manera alternativa el problema de la jerarquía de masas.

Materia en la membrana de tensión negativa

Consideremos que la materia ordinaria reside en la membrana de tensión negativa (escenario RS1). Nos interesa la interacción gravitatoria de esta materia a grandes distancias. Entonces la contribución dominante en la atracción gravitatoria se debe al modo cero del gravitón. Al sustituir la expresión de la perturbación sin masa del gravitón en la acción en cinco dimensiones e integrar con respecto a la quinta dimensión, se puede inferir la constante de Newton efectiva tetradimensional [8]

$$G_{(4)} = G_{(5)} k \frac{1}{e^{2kz_c} - 1}, \quad (1.25)$$

lo que significa que a una distancia relativamente grande z_c , la interacción gravitatoria de materia residente en la membrana de tensión negativa es débil. Esta observación abre una nueva posibilidad para tratar el problema de jerarquía de masas. Desde el punto de vista de un observador en la membrana de tensión negativa, los gravitones de KK tienen masas del orden de TeVs a diferencia del escenario ADD.

Materia en la membrana de tensión positiva

Otra opción es tener la materia convencional en la membrana de tensión positiva. El análisis es similar al caso anterior y también nos da una constante de Newton efectiva tretadimensional. Ésta no nos da una gran jerarquía entre la escala de la gravedad en 5 dimensiones y el radio del espacio. Esto no significa que la jerarquía exponencial no pueda ser generada y la masa de los gravitones este otra vez en el rango de TeVs.

Si removemos la membrana con tensión negativa a infinito, el modo cero del gravitón es normalizable. Esto significa que la gravedad es localizable con solamente la membrana de tensión positiva y una dimensión extra infinita, lo que nos lleva a considerar la configuración llamada RS2. La materia reside en la membrana positiva y se experimenta la gravedad tetradimensional a largas distancias gracias al intercambio del modo cero del gravitón.

Capítulo 2

Mundo Membrana con Campo Escalar en 5D

Los campos escalares han sido considerados ampliamente en la literatura [9]–[11]. Ellos han aparecido en ciertos modelos de inflación, han sido propuestos como candidatos a materia oscura [12] y también aparecen en teorías de supergravedad que admiten soluciones tipo de Sitter [13]–[14].

En nuestro modelo consideramos la siguiente acción para un campo escalar ϕ con potencial de autointeracción $V(\phi)$ acoplado a la Relatividad General [9]–[10]:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.1)$$

que después de aplicarle el principio variacional, nos da las ecuaciones base para nuestro análisis físico.

2.1. Variación con respecto a la métrica

Por medio de la variación de esta acción

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \\ &= \int d^5x \left(\delta \sqrt{-g} \right) \left[\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + \sqrt{-g} \left(\delta \left[\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \right) \end{aligned}$$

se pueden obtener las ecuaciones de Einstein:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + g_{MN} (\nabla\phi)^2 - 2 \nabla_M \phi \nabla_N \phi + 2 g_{MN} V(\phi) = 0. \quad (2.2)$$

De la forma general de estas ecuaciones

$$T_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R$$

vemos que

$$T_{MN} = -g_{MN}(\nabla\phi)^2 + 2\nabla_M\phi\nabla_N\phi - 2g_{MN}V(\phi). \quad (2.3)$$

Estas ecuaciones nos ayudarán a encontrar los tensores de Ricci en términos del campo escalar y del potencial.

2.2. Variación con respecto al campo escalar

La segunda variación de la acción es respecto del campo escalar:

$$\delta S = \delta \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.4)$$

o

$$\delta S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}\delta(\nabla\phi)^2 - \delta V(\phi) \right]. \quad (2.5)$$

De aquí se extrae una ecuación entre el campo escalar y el potencial que es la siguiente:

$$(\nabla^2\phi) = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.6)$$

Tensores de Ricci. Las componentes del tensor de Ricci están relacionadas con la métrica, así que utilizando el siguiente ansatz tipo (1.23) que conserva la invariancia de Poincaré en 4 dimensiones

$$ds_5^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.7)$$

de la ecuación (2.3) y las relaciones entre el tensor energía-impulso de materia, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$R_{\mu\nu} = 8V(\phi)e^{2A}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

$$R_{55} = 2\nabla_5\phi\nabla_5\phi + 8V(\phi). \quad (2.9)$$

Al calcular los tensores de Ricci mediante los símbolos de Christoffel, llegaremos a las igualdades siguientes:

$$R_{MN} = \Gamma_{MN,P}^P - \Gamma_{AM,N}^A + \Gamma_{MN}^P\Gamma_{PQ}^Q - \Gamma_{MQ}^P\Gamma_{NP}^Q,$$

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2}g^{PD}(g_{DM,N} + g_{DN,M} - g_{MN,D}),$$

$$\Gamma_{\mu 5}^\rho = \delta_\mu^\rho \partial_5 A,$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 = \partial_5 A \eta_{\mu\nu} e^{2A(y)},$$

dando como resultado:

$$R_{\mu\nu} = -e^{2A}[\partial_5^2 + 4(A')^2]\eta_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$R_{55} = -4[\partial_5^2 A + (\partial_5 A)^2], \quad (2.11)$$

y el escalar de curvatura resulta adoptar la forma:

$$R = -8\partial_5^2 A - 20(\partial_5 A)^2. \quad (2.12)$$

2.3. Ecuaciones de campo y su solución

Ahora estamos a un sólo paso de obtener un sistema de ecuaciones que relaciona nuestra función A con el campo escalar y el potencial. El sistema nos da las tres ecuaciones siguientes, donde la prima $'$ significa derivación con respecto a y :

$$\begin{aligned} \phi'' + 4A'\phi' &= \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \\ A'' &= -\frac{2}{3}(\phi')^2, \\ (A')^2 &= -2V(\phi) + \frac{1}{6}(\phi')^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ansatz. Aquí haremos una propuesta de inicio para el factor $e^{2A(y)}$ que aparece en la métrica. Con esto obtendremos expresiones para las derivadas de la función A , el campo escalar y el potencial. Todo con la meta de obtener el potencial V en términos de ϕ . Entonces dada la siguiente elección:

$$A = -b \ln[2 \cosh(ay)], \quad (2.14)$$

donde a y b son constantes arbitrarias, y el dominio de la quinta dimensión es $-\infty < y < \infty$. Calculemos sus derivadas con respecto a la dimensión extra

$$\begin{aligned} A' &= -ab \tanh(ay), \\ A'' &= -a^2 b \operatorname{sech}^2(ay). \end{aligned} \quad (2.15)$$

De regreso a la relación $A'' = -\frac{2}{3}(\phi')^2$ se procede a obtener:

$$\phi = \sqrt{6b} \arctan \left[\tanh \left(\frac{ay}{2} \right) \right].$$

La forma del factor de deformación junto con el carácter real del campo escalar, nos indican que los valores de b que tienen sentido físico son los positivos $b > 0$.

De este modo, el potencial de autointeracción del campo escalar adopta la forma siguiente:

$$V(\phi) = \frac{a^2 b}{8} \left[-4b + (1 + 4b) \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) \right]. \quad (2.16)$$

Esta solución puede ser interpretada como una membrana gruesa localizada en el punto z_0 en la quinta dimensión con dos parámetros libres: uno que está relacionado con el grueso o espesor de la membrana a , y el otro con el escalar de curvatura caracterizado por ab [9].

2.4. Métrica conformemente plana

Más adelante necesitaremos llevar la métrica (2.7) a una forma conformemente plana para poder manipular mejor los cálculos involucrados en el estudio de la dinámica de las fluctuaciones lineales de la métrica de fondo. Con este fin es necesario llevar a cabo la transformación de coordenadas siguiente:

$$z = \int e^{-A(y)} dy.$$

Cabe señalar que no siempre es posible invertir esta transformación para expresar la coordenada y en términos de z . Por tal razón consideraremos el caso particular $b = 1$, de tal modo que el cambio de variable anterior nos da:

$$z = \int 2 \cosh(ay) dy = \frac{2}{a} \sinh(ay),$$

es decir,

$$y = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{az}{2}\right)$$

y por lo tanto, el factor de deformación adquiere la forma siguiente en términos de la nueva coordenada

$$A = -\ln \left[2 \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{az}{2}\right)\right) \right] = -\ln \left(\sqrt{4 + a^2 z^2} \right), \quad (2.17)$$

por lo tanto, sus derivadas se pueden calcular fácilmente:

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{a^2 z}{4 + a^2 z^2}, \\ A'' &= \frac{2a^4 z^2}{(4 + a^2 z^2)^2} - \frac{a^2}{4 + a^2 z^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta forma del factor de deformación será de gran utilidad en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Localización de la Gravedad 4D en el Mundo Membrana

En el capítulo anterior se encontró una familia de soluciones para la teoría de la que se pueden obtener los mundos membrana. En este capítulo se estudiará la localización de la gravedad 4D para la solución particular (2.14) que consideraremos como mundo membrana. Recordando la estructura de estos modelos, sabemos que la gravedad se propaga en las cinco dimensiones, mientras que la materia está confinada a la membrana en 4D, de tal manera que es de vital importancia recuperar la gravedad como se conoce en la membrana que representa a nuestro universo.

3.1. Perturbaciones de la métrica de fondo

El estudio de las perturbaciones de la métrica de fondo en cinco dimensiones nos permite determinar si la gravedad 4D puede o no estar localizada en nuestras membranas anchas, es decir, si el modelo pentadimensional recupera la gravedad tal como la conocemos en nuestro universo.

Para recuperar la gravedad en 4D debemos estudiar las perturbaciones de la métrica de fondo; este estudio nos da información que determina si la gravedad 4D puede o no estar localizada en nuestras membranas anchas. En la literatura existen diferentes modelos de localización de la gravedad 4D en membranas anchas, como se puede ver en las referencias [15]–[16].

En este capítulo seguiremos el tratamiento considerado en los trabajos de Randall y Sundrum [7] y de Wolfe *et al.* [10], donde las fluctuaciones h_{mn} de la métrica de fondo (2.7) están dadas por el elemento de línea perturbado

$$ds_5^2 = e^{2A(y)}[\eta_{mn} + h_{mn}(x, y)]dx^m dx^n + dy^2. \quad (3.1)$$

En general, las fluctuaciones del mundo membrana tienen un tratamiento complicado, pues se deben considerar de manera simultánea las fluctuaciones de

la métrica de fondo y las del campo escalar, ya que ambas están acopladas; sin embargo, de Wolfe y sus colaboradores mostraron (ver [10]) que existe un sector de la métrica de fondo que se desacopla del campo escalar. Este hecho es el que nos permite hacer un estudio de la dinámica de estas fluctuaciones de manera analítica considerando sólo el sector de fluctuaciones de la métrica desacoplado de las del campo escalar.

El sector de las fluctuaciones de la métrica de fondo que se desacopla del campo escalar se denota por h_{mn}^T y corresponde a los modos transversos de traza nula (mttn):

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0 \quad (3.2)$$

en la denominada norma axial

$$h_{\mu 5} = 0.$$

Siguiendo los trabajos de Randall y Sundrum [7], y de Gremm [9], para hacer el análisis de las fluctuaciones de la métrica de fondo debemos hacer el cambio de coordenadas

$$dz = e^{-A} dy \quad (3.3)$$

que nos lleva a una métrica conformemente plana y a la ecuación de onda que describe la dinámica de los mttn:

$$(\partial_z^2 + 3A'\partial_z + \square)h_{mn}^T = 0, \quad (3.4)$$

donde $\square$ es el operador de onda en cuatro dimensiones. La invariancia 4D de Poincaré nos brinda la garantía de tener una solución correspondiente al gravitón sin masa en 4D $h_{mn}^T = C_{mn}e^{ipx}$, donde C_{mn} son constantes de normalización y $p^2 = m^2 = 0$. Este gravitón no masivo corresponde al estado base permitiendo de esta manera tener un gravitón libre de modos taquiónicos.

Para obtener soluciones analíticas de la ecuación (3.4) es conveniente reescribirla como una ecuación de Schrödinger. Esto se logra introduciendo el siguiente anstatz

$$h_{mn}^T = e^{ipx} e^{\frac{-3A}{2}} \Psi_{mn}(z)$$

en la ecuación (3.4) para finalmente escribir

$$[\partial_z^2 - V_{MC}(z) + m^2]\Psi = 0, \quad (3.5)$$

donde hemos quitado los subíndices de Ψ , m corresponde a la masa de los modos de KK que un observador en 4D ve, y el potencial mecánico cuántico $V_{MC}(z)$ está definido por el factor de deformación de la variedad pentadimensional

$$V_{MC}(z) = \frac{3}{2}\partial_z^2 A + \frac{9}{4}(\partial_z A)^2. \quad (3.6)$$

En otras palabras el factor de deformación determina la dinámica de los modos de Kaluza–Klein que provienen de las fluctuaciones de la métrica. Ahora, en el

contexto de la mecánica cuántica el espectro de los valores propios para la masa que se obtienen de la ecuación de Schrödinger (3.5) parametriza al espectro de masas del gravitón que un observador en cuatro dimensiones localizado en $z = 0$ ve.

3.2. Solución particular y ecuación confluyente de Heun

Consideremos la solución (2.14) con el parámetro $b = 1$. Después de aplicar la transformación de coordenadas (3.3), el potencial mecánico cuántico adopta la siguiente forma

$$V_{MC}(z) = \frac{3a^2}{4} \frac{5a^2 z^2 - 8}{(4 + a^2 z^2)^2}. \quad (3.7)$$

La forma que adquiere es la un potencial tipo volcán con un fondo finito y que asintóticamente tiende a cero. Este comportamiento del potencial es característico de los modelos membrana y ha sido bien estudiado en la literatura [11, 17]. La forma asintótica del potencial nos indica que existe un solo modo normalizable y que el espectro de masas del gravitón es continuo, es decir, no contiene un salto como el que se presenta en [18]–[21] para esta solución particular.

Ahora, para obtener la solución de la ecuación

$$[\partial_z^2 - \frac{3a^2}{4} \frac{5a^2 z^2 - 8}{(4 + a^2 z^2)^2} + m^2]\Psi = 0, \quad (3.8)$$

aplicamos la siguiente transformación del parámetro $a = i\alpha$, y ahora la quinta coordenada estará dada por la relación

$$w = \alpha^2 z^2 / 4,$$

donde el dominio de la nueva coordenada es $0 \leq w < \infty$, asimismo, es conveniente transformar la función de onda como

$$\Psi = (1 - w)^{-3/4} U(w). \quad (3.9)$$

La ecuación de Schrödinger (3.5) se puede resolver de manera analítica para todo $m > 0$ si la expresamos como el límite Ince–Wittaker de la ecuación confluyente de Heun [22] o de la ecuación de onda esferoidal generalizada [23, 24]:

$$w(w - w_0) \frac{d^2 U}{dw^2} + (B_1 + B_2 w) \frac{dU}{dw} + [B_3 + q(w - w_0)] U = 0, \quad q \neq 0, \quad (3.10)$$

con $w_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = -1$, $B_3 = 0$ y $q = m^2/\alpha^2$; de tal forma que esta ecuación adopte la siguiente forma

$$w(w - 1) \frac{d^2 U}{dw^2} - \left(\frac{1}{2} + w\right) \frac{dU}{dw} + \frac{m^2}{\alpha^2} (w - 1) U = 0, \quad (3.11)$$

donde $w = 0$ y $w = w_0 = 1$ son singularidades regulares y el infinito es una singularidad irregular [25]. Aquí debemos señalar que el límite de Ince de la ecuación de onda esferoidal generalizada requiere la existencia de soluciones (con un parámetro de masa arbitrario $m > 0$) que se comporten asintóticamente como las denominadas soluciones subnormales de Thomé [26]:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} U(w) \sim e^{\pm 2i\sqrt{qw}} w^{(1/4)-(B_2/2)} = e^{\pm 2i\frac{m}{|\alpha|}\sqrt{w}} w^{3/4}, \quad (3.12)$$

en contraste con las soluciones de las ecuaciones confluentes y confluentes dobles de Heun que poseen un comportamiento asintótico normal de Thomé [22, 24]. Este comportamiento particular de las soluciones subnormales corresponde físicamente a que la función de onda (3.9) describa ondas planas al infinito de la dimensión extra como veremos más adelante. De hecho, estos modos masivos generan pequeñas correcciones a la ley de Newton provenientes de las dimensiones extra. De este modo, el hecho de tener expresiones analíticas para estas magnitudes resulta ser extremadamente útil a la hora de calcular dichas correcciones.

3.3. Solución a la ecuación confluyente de Heun

Figueiredo construyó varios pares de soluciones para este tipo de ecuaciones diferenciales en [23]. Una de las soluciones de cada par está dada por una serie de funciones hipergeométricas y converge para todo valor finito de la variable independiente w , mientras que la otra está dada en términos de una serie de funciones modificadas de Bessel y converge para $|w| > |w_0|$, donde $w_0 = 1$ denota una singularidad regular, como se mencionó anteriormente. Estas soluciones poseen un parámetro de fase arbitrario y son *dobles* en el sentido de que tienen un índice que indica suma n que corre de $-\infty$ to ∞ . Sin embargo, si existe un parámetro arbitrario en la ecuación diferencial, uno puede usar el parámetro de fase para truncar la serie y obtener soluciones *simples* con $n \geq 0$ (véanse [23, 24] para mayores detalles y ejemplos ilustrativos). Aquí consideraremos una de esas soluciones *simples*, la denominada *cuarta solución* en el trabajo de investigación [23], para la cual $(B_2/2) + (B_1/w_0) \neq (n+1)/2$:

$$U^0 = (w - w_0)^{1-B_2-\frac{B_1}{w_0}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F\left(-n, n+1-B_2-\frac{2B_1}{w_0}; 2-B_2-\frac{B_1}{w_0}; 1-\frac{w}{w_0}\right),$$

$$U^\infty = (w - w_0)^{1-B_2-\frac{B_1}{w_0}} w^{\frac{B_1}{w_0}+\frac{B_2}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n K_{2n+1-B_2-(2B_1/w_0)}(\pm 2i\sqrt{qw}),$$

donde el súper índice ‘cero’ indica que la serie converge en cualquier sector finito del plano complejo, mientras que el súper índice ‘infinito’ significa convergencia para todo $|w| > |w_0|$ y, finalmente, los coeficientes b_n obedecen una relación de recurrencia de tres términos:

$$\alpha_n b_{n+1} + \beta_n b_n + \gamma_n b_{n-1} = 0, \quad n \geq 0, \quad b_{-1} = 0, \quad (3.13)$$

y pueden ser calculados con la ayuda de las siguientes cantidades:

$$\alpha_n = \frac{qw_0 (n+1) \left(n - \frac{B_1}{w_0}\right)}{\left(n+1 - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right) \left(n + \frac{3}{2} - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right)},$$

$$\beta_n = 4B_3 - 2qw_0 + 4 \left(n - \frac{B_1}{w_0}\right) \left(n - B_2 + 1 - \frac{B_1}{w_0}\right) - \frac{2qw_0 \left(\frac{B_2}{2} - 1\right) \left(\frac{B_2}{2} + \frac{B_1}{w_0}\right)}{\left(n - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right) \left(n+1 - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right)},$$

$$\gamma_n = \frac{qw_0 \left(n+1 - B_2 - \frac{B_1}{w_0}\right) \left(n - B_2 - \frac{2B_1}{w_0}\right)}{\left(n - \frac{1}{2} - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right) \left(n - \frac{B_2}{2} - \frac{B_1}{w_0}\right)},$$

si $(B_2/2) + (B_1/w_0) \neq 0, 1/2$. En nuestro caso $(B_2/2) + (B_1/w_0) = -1$ y ambas condiciones sobre estos parámetros se satisfacen.

De este modo, el par de soluciones adopta la siguiente forma:

$$U^0 = (w-1)^{5/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n F\left(-n, n+3; \frac{7}{2}; 1-w\right),$$

$$U^\infty = (w-1)^{5/2} w^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n K_{2n+3}\left(\pm 2i \frac{m}{|\alpha|} \sqrt{w}\right), \quad (3.14)$$

con

$$\alpha_n = \frac{m^2(n+1) \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\alpha^2 (n+2) \left(n + \frac{5}{2}\right)}, \quad (3.15)$$

$$\beta_n = -2 \frac{m^2}{\alpha^2} + 4 \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{5}{2}\right) - \frac{3m^2}{\alpha^2 (n+1) (n+2)}, \quad (3.16)$$

$$\gamma_n = \frac{m^2 \left(n + \frac{5}{2}\right) (n+2)}{\alpha^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) (n+1)}. \quad (3.17)$$

3.4. Interpretación física del espectro de masas del gravitón

El modo cero puede ser fácilmente calculado mirando la solución (3.14) para el caso en el que la masa es nula $m = 0$ ($q = 0$). De esta manera, los parámetros α_n y γ_n se anulan y todos los parámetros restantes β_n son distintos de cero, un hecho que implica que todos los coeficientes $b_n = 0$. Por otro lado, la ecuación (3.11) nos dice que cuando $m = 0$ la función $U(w)$ puede ser una constante puesto que la integración se define salvo una constante arbitraria. De este modo, el único estado ligado del sistema está dado por la siguiente función propia

$$\Psi_0 = \frac{k_0}{(4 + a^2 z^2)^{3/4}}, \quad k_0 = \text{const.} \quad (3.18)$$

y corresponde al gravitón tetradimensional normalizable, libre de inestabilidades taquiónicas, como era de esperarse a partir de la solución de la ecuación de Schrödinger sin masa $\Psi_0 \sim e^{3A/2}$.

Cabe señalar que puesto que la solución (3.14) presenta un comportamiento subnormal de Thomé en el infinito espacial (3.12), entonces, cuando regresamos a la función de onda original Ψ por medio de la transformación (3.9) y retornamos al lenguaje del parámetro a y la coordenada z , el comportamiento asintótico de nuestra solución a la ecuación de Schrödinger (3.5), corresponde a ondas planas como era de esperarse:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z) \sim e^{\pm imz} z^{3/2} (4 + a^2 z^2)^{-3/4} \sim e^{\pm imz}. \quad (3.19)$$

De este modo nuestro análisis físico nos indica claramente que el modo sin masa representa un gravitón tetradimensional localizado en el pozo del potencial mecánico cuántico (3.7) que, a su vez, tiende asintóticamente a cero a lo largo de la quinta dimensión del sistema, hecho que implica que no hay salto alguno en el espectro de masas de las fluctuaciones gravitatorias o, equivalentemente, de los modos excitados de Kaluza–Klein del campo gravitatorio. Así, los modos masivos empiezan a existir a partir de una vecindad muy cercana al modo cero sin masa, pero estos modos están suprimidos por la barrera de potencial que flanquea al gravitón tetradimensional y a medida que se alejan al infinito de la dimensión extra se comportan como ondas planas (ver, por ejemplo, [10], [27] y [28]).

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de investigación se consideró un mundo membrana suave o grueso generado por un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad en cinco dimensiones. La familia de soluciones usada posee dos parámetros que se relacionan con el inverso del ancho de la membrana ($a^{-1} \sim \Delta$) y con el escalar de curvatura de la teoría (ab).

Al suavizar las singularidades en la posición de la membrana ancha, estas configuraciones de campo no restringen el espaciotiempo pentadimensional a tener una estructura de tipo orbifold (singular) y, además, evitan la introducción artificial (a mano) de las membranas delgadas en la teoría.

Esta configuración de campo libre de singularidades es una generalización del célebre modelo Randall–Sundrum que constituye un mundo membrana en el que nuestro mundo y sus leyes físicas están confinados a una membrana delgada tetradimensional del tipo función delta de Dirac y que, por lo tanto, posee singularidades en la posición de la misma a lo largo de la quinta dimensión.

En este mundo membrana se hizo un análisis de la dinámica de las fluctuaciones lineales de la métrica que se desacoplan de las fluctuaciones del campo escalar, es decir, de los modos transversos de traza nula de las perturbaciones métricas. Resulta que estas fluctuaciones obedecen una ecuación de onda que se puede reescribir como una ecuación de Schrödinger bajo una separación de variables adecuada para la función de onda correspondiente.

Esta ecuación se puede resolver analíticamente para cualquier valor del parámetro de masas $m^2 > 0$ y la solución se puede expresar por pares de funciones válidas en diferentes sectores de la quinta dimensión. Una de las soluciones de cada par está dada por una serie de funciones hipergeométricas que converge para todo valor finito de la variable independiente w , mientras que la otra está dada en términos de una serie de funciones modificadas de Bessel y converge para $|w| > |w_0|$, donde $w_0 = 1$ denota una singularidad regular a lo largo de la dimensión extra.

Asimismo, esta solución también nos permite obtener una expresión explícita para la función propia de energía más baja del sistema que representa el único

estado ligado de la teoría, el modo cero (sin masa), mismo que puede ser interpretado como un gravitón tetradimensional localizado en la posición de la membrana ancha y que carece de inestabilidades taquiónicas con cuadrados de masa negativos $m^2 < 0$.

Puesto que el potencial mecánico cuántico de la ecuación de Schrödinger que se obtiene después de linealizar las fluctuaciones de la métrica en 5D asintóticamente tiende a cero, inmediatamente después del estado ligado sin masa existe todo un espectro continuo de modos masivos que asintóticamente se comportan como ondas planas. Al acercarse a la posición de la membrana, en la que se encuentra localizado el gravitón 4D, éstos decaen rápidamente debido a que éste se está protegido por las barreras del potencial mecánico cuántico.

Una de las perspectivas de desarrollo en esta área del conocimiento radica en considerar dos partículas de prueba y estudiar su interacción en el límite newtoniano, es decir, en el caso en que las partículas se mueven a velocidades muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, con la finalidad de calcular las correcciones a la ley de Newton provenientes de la dimensión extra.

Otras líneas de investigación prometedoras consisten en considerar modelos con más dimensiones extra o proponer un intervalo pentadimensional más complejo que dependa del tiempo para poder hacer estudios cosmológicos.

Bibliografía

- [1] H. Poincaré, The present and future of mathematical physics, *Talk to Congress of arts and science at Saint-Louis*, Bulletin des Sciences Mathématiques **28** (1904) 302.
- [2] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984) 491 pp.
- [3] G. Nordstrom, On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields, *Physik Z.* **15** (1914) 504; On a theory of electricity and gravitation, ArXiv: physics/0702222.
- [4] T. Kaluza, On the Problem of Unity in Physics, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.)* **1921** (1921) 966; O. Klein, Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity, *Z. Physik* **37** (1926) 895; *Surveys High Energ. Phys.* **5** (1986) 241.
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV, *Phys. Lett. B* **436** (1998) 257.
- [6] M. Gogberashvili, Hierarchy problem in the shell universe model, *Int. J. Mod. Phys. D* **11** (2002) 1635.
- [7] L. Randall and R. Sundrum, An alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690; A large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev Lett.* **83** (1999) 3370.
- [8] V.A. Rubakov, Large and infinite extra dimensions: An introduction, *Phys. Usp.* **44** (2001) 871; *Usp. Fiz. Nauk* **171** (2001) 913.
- [9] M. Gremm, Four-dimensional gravity on a thick domain wall, *Phys. Lett. B* **478** (2000) 434; Thick domain walls and singular spaces, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 044017.

- [10] O. De Wolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, Modeling the fifth dimension with scalars and gravity, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 046008.
- [11] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, Universal Aspects of gravity localized on thick branes, *Nucl. Phys. B* **581** (2000) 309.
- [12] J.E. Lidsey, T. Matos and L.A. Ureña-López, The inflaton field as self-interacting dark matter in the brane world scenario, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 023514; J.A.R. Cembranos, A. Dobado and A.L. Maroto, Brane world dark matter, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 241301; X. Chen and S.-H. Henry Tye, Heating in brane inflation and hidden dark matter, *JCAP* **06** (2006) 011; C.G. Boehmer and T. Harko, Galactic dark matter as a bulk effect on the brane, *Class. Quantum Grav.* **24** (2007) 3191.
- [13] M.K. Parikh and S.N. Solodukhin, De Sitter brane gravity: From close-up to panorama, *Phys. Lett. B* **503** (2001) 384; A. Wang, Thick de Sitter 3 branes, dynamic black holes and localization of gravity, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 024024; M. Minamitsuji, W. Naylor and M. Sasaki, Quantum fluctuations on a thick de Sitter brane, *Nucl. Phys. B* **737** (2006) 121.
- [14] I.P. Neupane, Accelerating universe from warped extra dimensions, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 195008; Extra dimensions, warped compactifications and cosmic acceleration, *Phys. Lett. B* **683** (2010) 88; The Warping of extra spaces accelerates the expansion of the universe, arXiv:1004.0254 [gr-qc].
- [15] J. Garriga and T. Tanaka, Gravity in the brane world, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2778; R. Maartens, Brane world gravity, *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 07.
- [16] D. Bazeia, F.A. Brito and A.R. Gomes, Locally localized gravity and geometric transitions, *JHEP* **11** (2004) 070; O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, Localizing gravity on exotic thick three-branes, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 104029; N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, Localizing gravity on thick branes: A Solution for massive KK modes of the Schroedinger equation, *J. Phys. Conf. Ser.* **68** (2007) 012021.
- [17] R. Koley and S. Kar, Exact bound states in volcano potentials, *Phys. Lett. A* **363** (2007) 369.
- [18] O. Arias, R. Cardenas and Israel Quiros, Thick brane worlds arising from pure geometry, *Nucl. Phys. B* **643** (2002) 187.
- [19] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, 4D gravity localized in non Z_2 -symmetric thick branes, *JHEP* **10** (2005) 101.

- [20] N. Barbosa–Cendejas and A. Herrera–Aguilar, Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 084022; Erratum-ibid. **77** (2008) 049901.
- [21] N. Barbosa–Cendejas, A. Herrera–Aguilar, M.A. Reyes and C. Schubert, Mass gap for gravity localized on Weyl thick branes, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 126013.
- [22] *Heun's differential equations*, Edited by A. Ronveaux (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [23] B.D.B. Figueiredo, "Ince's limits for confluent and double-confluent Heun equations", *J. Math. Phys.* **46** (2005) 113503.
- [24] B.D.B. Figueiredo, "Generalized spheroidal wave equation and limiting cases", *J. Math. Phys.* **48** (2007) 013503.
- [25] Yu. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*, (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [26] F.W.J. Olver, *Asymptotics and special functions*, (Academic, New York, 1974).
- [27] D. Bazeia, A.R. Gomes and L. Losano, Gravity localization on thick branes: a numerical approach, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 1135.
- [28] D. Bazeia, F.A. Brito and J.R. Nascimento, Supergravity brane worlds and tachyon potentials, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 085007; R. Koley and S. Kar, Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 753; D. Bazeia and L. Losano, Deformed defects with applications to braneworlds, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 025016; C. Bogdanos and K. Tamvakis, Brane Cosmological Evolution With Bulk Matter, *Phys. Lett. B* **646** (2007) 39; A.A. Saharian, A.L. Mkhitarian, Wightman function and vacuum densities for a $Z(2)$ -symmetric thick brane in AdS spacetime, *JHEP* **08** (2007) 063; V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, K. Myrzakulov and R. Myrzakulov, Thick brane in 7D and 8D spacetimes, *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 131; A. Herrera–Aguilar, D. Malagón–Morejón, R.R. Mora–Luna, U. Nucamendi, Aspects of thick brane worlds: 4D gravity localization, smoothness, and mass gap, *Mod. Phys. Lett. A* **25** (2010) 2089; A. Herrera–Aguilar, D. Malagón–Morejón and R.R. Mora–Luna, Localization of gravity on a de Sitter thick braneworld without scalar fields, *JHEP* **11** (2010) 015.