



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

Mapeo a una Mecánica Cuántica SUSY para
la ecuación de Dirac en el Plano

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

SAÚL FERNANDO HERNÁNDEZ ORTIZ

ASESOR

DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO

MORELIA, MICH., FEBRERO 2011



Mapeo a una Mecánica Cuántica SUSY para la ecuación de Dirac en el plano

Saúl Fernando Hernández Ortiz

13 de febrero de 2011

Índice general

1. Introducción	5
2. Oscilador Armónico Cuántico	7
2.1. Construcción del Hamiltoniano Bosónico	7
2.1.1. Funciones de Onda y Normalización	9
2.2. Oscilador Fermiónico	11
2.2.1. Funciones de Onda	12
3. Oscilador Armónico Cuántico SUSY	15
3.1. Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY-QM)	15
3.2. Oscilador Armónico SUSY	18
4. Ecuación de Dirac en (3+1) dimensiones	21
4.1. Ecuación de Klein-Gordon	21
4.2. Ecuación de Dirac	22
4.2.1. Las Matrices Gamma (γ^μ)	23
4.2.2. Conservación de Corriente	23
4.3. Partícula en Reposo	24
4.4. Partícula en Movimiento	26
4.4.1. Normalización	28
4.5. Interpretación de las soluciones en términos del Espín.	28
5. Ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones	31
5.1. Representación Irreducible	31
5.1.1. Primera Representación Irreducible (A)	32
5.1.2. Segunda Representación Irreducible (B)	33
5.1.3. Interpretación de las Soluciones en términos del Espín	33
5.2. Representación Reducible	35
5.2.1. Transformaciones Quirales	36
5.2.2. Soluciones de la Representación Reducible y m_0	38
6. Fermiones en Campos Magnéticos	41
6.1. Primera Representación	41
6.1.1. Niveles de Landau	43
6.2. Segunda Representación	44

6.2.1. Niveles de Landau	45
7. Teoría SUSY de Dirac	47
7.1. SUSY-QM vía la ED	47
7.2. Representación Reducible	49
7.2.1. Niveles de Landau	50
7.3. Los Operadores $Z_{\pm}$	51
8. Conclusiones	55

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de Dirac es una de las piedras fundamentales de la física contemporánea. Esta ecuación de onda surge ante la necesidad de conciliar de manera consistente los postulados de la Relatividad Especial de Einstein por un lado con la interpretación probabilística de la teoría de Schrödinger de la Mecánica Cuántica por el otro, dando origen al moderno paradigma de la existencia de la Antimateria. Sus aplicaciones abarcan muchas áreas de la física, como la Física de Partículas Elementales, Cosmología, Física Nuclear, Física del Estado Sólido, entre otras.

La estructura que posee esta ecuación de onda, postulada por el británico Paul Adrian Dirac en 1927 y de quien toma su nombre, es interesante desde varios puntos de vista. Matemáticamente, dicha ecuación responde a la pregunta de encontrar un operador diferencial lineal definido en un cierto espacio, el llamado operador de Dirac, cuyo cuadrado corresponde al operador de Laplace en dicho espacio. Desde el punto de vista físico, describe de manera adecuada la dinámica de los fermiones (partículas de espín $1/2$), entre los que se incluyen los leptones y los quarks, que son los componentes fundamentales de la materia de nuestro universo.

En esta tesis, estudiamos varios aspectos de la ecuación de Dirac, restringiendo a los fermiones a moverse en una superficie bidimensional [1]. Esto es más que una simplificación teórica, basta con recordar que el Premio Nobel de Física de 2010 fue otorgado a Andrei Geim y Konstantin Novoselov, quienes por primera vez aislaron muestras de grafeno [2]. Este es un cristal, formado por átomos de carbono, genuinamente bidimensional en el cual los portadores de carga se comportan como fermiones de Dirac ultrarelativistas (no masivos). Consideramos el caso en que los fermiones no interactúan entre sí pero que se mueven bajo la influencia de un campo magnético uniforme alineado perpendicularmente a su plano de movimiento. Bajo estas condiciones, es sabido que la ecuación de Dirac posee una estructura supersimétrica en el sentido de la Mecánica Cuántica (SUSY-QM)[3].

En este contexto, en el Capítulo 2 de este trabajo resolveremos el problema del Oscilador Armónico Cuántico, el cual nos servirá como herramienta básica para el desarrollo de la tesis. Con la intención de encontrar un mapeo a una Mecánica Cuántica SUSY para la ecuación de Dirac [4, 5], resolvemos el problema del Oscilador Armónico Cuántico SUSY en el Capítulo 3. Teniendo en mente el objetivo de resolver la ecuación de Dirac en el plano, es necesario conocer la estructura e interpretación física de dicha ecuación en $(3+1)$ dimensiones – 3 espaciales y 1 temporal –, tarea que se realiza en el Capítulo 4 para el caso de fermiones libres. Los resultados son trasladados al caso $(2+1)$ dimensional en el Capítulo 5, enfatizando las similitudes y peculiaridades que se encuentran en el caso planar, entre las que se encuentran varias posibles representaciones inequivalentes de las matrices de Dirac y términos de masa que son sólo posibles de considerar en dos dimensiones espaciales [6].

En el Capítulo 6 son obtenidas las soluciones para el problema de fermiones cargados libres que se mueven en el plano bajo la influencia de un Campo magnético Uniforme. Este problema fue estudiado en [7] y [8], con la intención de explorar diferentes métodos para resolver la Ec. de Dirac. Nosotros estudiamos las ecuaciones de movimiento resultantes que son comparadas con las que resultan en el problema del Oscilador Armónico Cuántico de los Capítulos 2 y 3. Mi contribución original en este trabajo consiste en implementar un mapeo a una Mecánica Cuántica SUSY del problema descrito en el Capítulo 6, de una manera más sencilla e innovadora que explota las peculiaridades de la ecuación de Dirac en el plano, en particular de los términos de masa adicionales que pueden considerarse en este caso, esto en el Capítulo 7. Las implicaciones de los resultados de este trabajo se presentan en el Capítulo 8, con el cual concluye esta tesis.

Capítulo 2

Oscilador Armónico Cuántico

En este capítulo repasaremos aspectos importantes de la mecánica cuántica, así como también realizaremos un análisis a uno de los problemas fundamentales y más importantes de la misma, el Oscilador Armónico. La discusión se puede encontrar en libros de texto por ejemplo [9]. El Oscilador Armónico es de suma importancia, ya que supone una buena primera aproximación, para el estudio de cualquier sistema en el que exista un potencial que presente un mínimo local.

2.1. Construcción del Hamiltoniano Bosónico

El Hamiltoniano, clásicamente es una función que describe el estado de un sistema mecánico y tiene la forma típica[9]:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x). \quad (2.1)$$

Una Cuantización es un procedimiento matemático que sirve para construir un modelo cuántico para un sistema físico a partir de su descripción clásica. La primera cuantización en mecánica cuántica es un procedimiento que asigna a una magnitud física un operador, obtenido por sustitución de las variables dinámicas por operadores hermíticos, que actúan sobre estados en un espacio de Hilbert abstracto y promueve los paréntesis de Poisson a conmutadores entre los operadores.

$$\{A, H\}_{pp} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}].$$

El operador hermítico corresponde a la observable de energía es

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (2.2)$$

Nos interesa analizar las soluciones a esta ecuación para el potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante elástica, es decir,

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{X}^2. \quad (2.3)$$

A partir de ahora trabajaremos en unidades naturales ($\hbar = c = 1$) y con la convención $2m = 1$, recordemos que $k = \omega^2/m$, por lo que el Hamiltoniano (2.3) se reescribe como

$$\hat{H} = \hat{P}^2 + \frac{1}{4}\omega^2 \hat{X}^2, \quad (2.4)$$

donde ω es la frecuencia del oscilador. Para facilitarnos la descripción del problema, redefinimos las siguientes cantidades de modo que

$$H = \mathcal{H}\omega, \quad P = \omega^{\frac{1}{2}}p, \quad X = \omega^{-\frac{1}{2}}x.$$

Entonces se tiene que

$$\mathcal{H} = p^2 + \frac{x^2}{4}. \quad (2.5)$$

Introducimos los operadores de ascenso y descenso, también llamados operadores de escalera

$$a = \frac{x}{2} + ip, \quad a^\dagger = \frac{x}{2} - ip,$$

donde a y $a^\dagger$ cumplen que:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [\mathcal{N}, a] = -a, \quad [\mathcal{N}, a^\dagger] = a^\dagger.$$

Calculemos $\mathcal{H}$ en términos de los operadores $a_B, a_B^\dagger$ (agregamos el subíndice B para referirnos a operadores Bosónicos):

$$\begin{aligned} a_B^\dagger a_B &= \left(\frac{x}{2} - ip\right) \left(\frac{x}{2} + ip\right) = \frac{x^2}{4} + p^2 - \frac{1}{2}, \\ a_B a_B^\dagger &= \left(\frac{x}{2} + ip\right) \left(\frac{x}{2} - ip\right) = \frac{x^2}{4} + p^2 + \frac{1}{2}, \\ \Rightarrow \mathcal{H} &= a_B^\dagger a_B + \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \mathcal{H} = a_B a_B^\dagger - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

por lo que la ecuación (2.5) se reescribe como

$$\left(a_B^\dagger a_B + \frac{1}{2}\right) \psi = E\psi, \quad (2.7)$$

o

$$\left(a_B a_B^\dagger - \frac{1}{2}\right) \psi = E\psi. \quad (2.8)$$

Utilizando la definición del operador de número $\mathcal{N}_B$ ($\mathcal{N}_B \equiv a_B^\dagger a_B$), obtenemos

$$\left(\mathcal{N}_B + \frac{1}{2}\right) \psi = E\psi, \quad (2.9)$$

que es la conocida Ecuación de Schrödinger para el Oscilador Armónico Bosónico (ESOAB) con eigenvalor

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \quad (2.10)$$

donde n corresponde al eigenvalor del operador $\mathcal{N}_B$ ($\mathcal{N}_B |\psi_n\rangle = n |\psi_n\rangle$), que puede tomar valores $n = 0, 1, 2, \dots$

En la teoría de muchos cuerpos refleja el hecho de que en cada nivel de energía se pueden acomodar un n número arbitrario de bosones.

Usando que
 $\mathcal{N} = a^\dagger a$
 Operador de Número

2.1.1. Funciones de Onda y Normalización

Calculemos ahora las funciones de onda para la ESOAB. Partiendo del hecho de que el estado base o estado de mínima energía $|\psi_0\rangle$ debe satisfacer $a_B |\psi_0\rangle = 0$ (el operador a_B ha "aniquilado" al estado base), se tiene que en la representación de coordenadas,

$$\langle x | \left(\frac{x}{2} + ip \right) |\psi_0\rangle \Rightarrow \frac{x}{2} \psi_0(x) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x}{2} \psi_0(x) = \frac{d\psi_0(x)}{dx}.$$

Resolviendo la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \ln(\psi_0) &= -\frac{x^2}{4} + A' \Rightarrow \psi_0 = e^{-\frac{x^2}{4}} e^{A'}, \\ \therefore \psi_0 &= A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

El resto de los estados se obtienen aplicando el operador de ascenso

$$\begin{aligned} \langle x | \psi_1 \rangle &= \langle x | a_B^\dagger |\psi_0\rangle \Rightarrow \psi_1 = A'_1 \left(\frac{x}{2} \psi_0 - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0 \right), \\ &= A'_1 A_0 \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{4}} \right), \\ &= A_1 \left(\left[\frac{x}{2} - \left(-\frac{2x}{4} \right) \right] e^{-\frac{x^2}{4}} \right), \\ \therefore \psi_1 &= A_1(x) e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \langle x | \psi_2 \rangle &= \langle x | a_B^\dagger |\psi_1\rangle \Rightarrow \psi_2 = A'_2 \left(\frac{x}{2} \psi_1 - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1 \right), \\ &= A'_2 A_1 \left(\frac{x}{2} x e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{d}{dx} \left(x e^{-\frac{x^2}{4}} \right) \right), \\ &= A_2 \left(\frac{x^2}{2} - x \left(-\frac{x}{2} \right) - 1 \right) e^{-\frac{x^2}{4}}, \\ \therefore \psi_2 &= A_2 (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \langle x | \psi_3 \rangle &= \langle x | a_B^\dagger |\psi_2\rangle \Rightarrow \psi_3 = A'_3 \left(\frac{x}{2} \psi_2 - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2 \right), \\ &= A'_3 A_2 \left(\frac{x}{2} (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{4}} \right] \right), \\ &= A_3 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} - 2x - (x^2 - 1) \left(-\frac{x}{2} \right) \right) e^{-\frac{x^2}{4}}, \\ \therefore \psi_3 &= A_3 (x^3 - 3x) e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notemos que en las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) los polinomios que se encuentran entre paréntesis poseen una estructura similar a los polinomios de Hermite.¹ Esto es, para $n > 2$, podemos expresar recursivamente estos polinomios denotados por $I_n(x)$ como,

$$I_n(x) = x I_{n-1}(x) - (n-1) I_{n-2}(x), \quad (2.15)$$

¹Relación de recurrencia de los Polinomios de Hermite: $H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)$.

por lo que las funciones de onda del oscilador armónico son de la forma:

$$\psi_n = A_n I_n \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right). \quad (2.16)$$

Procedamos a verificar que los operadores a_B , $a_B^\dagger$ están debidamente normalizados. Sabemos que

$$\begin{aligned} a_B |\psi_n\rangle &= C_n |\psi_{n-1}\rangle \Rightarrow |\psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{C_n} a_B |\psi_n\rangle, \\ a_B^\dagger |\psi_n\rangle &= D_n |\psi_{n+1}\rangle \Rightarrow |\psi_{n+1}\rangle = \frac{1}{D_n} a_B^\dagger |\psi_n\rangle. \end{aligned}$$

Además, la función de onda está debidamente normalizada, esto es, $\langle \psi_{n-1} | \psi_{n-1} \rangle = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{C_n^2} \langle \psi_n | a_B^\dagger a_B |\psi_n\rangle = \frac{1}{C_n^2} \langle \psi_n | N |\psi_n\rangle = \frac{n}{C_n^2} \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \frac{n}{C_n^2} \\ \therefore a_B |\psi_n\rangle &= \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Análogamente, para $a_B^\dagger$:

$$a_B^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle. \quad (2.18)$$

Ahora tenemos los elementos para calcular la constante de normalización A_n . Empecemos calculando A_0

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A_0^2 \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} A_0^2 \frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-u} du, \\ \Rightarrow \quad 1 &= (A_0^2) 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = A_0^2 \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = A_0^2 \sqrt{2\pi}, \\ \therefore A_0 &= (2\pi)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Para calcular A_n , recordemos que

$$\psi_n = A_n \left(a_B^\dagger\right)^n e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Usando que

$$a_B^\dagger \psi_{n-1} = \sqrt{n} \psi_n,$$

es fácil verificar que:

$$\psi_n = A_n \sqrt{n!} e^{-\frac{x^2}{4}} \Rightarrow \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A_n \sqrt{n!}\right)^2 \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= n! A_n^2 \left(\sqrt{2\pi} \right) \\
\implies 1 &= n! A_n^2 \left(\sqrt{2\pi} \right), \\
\therefore A_n &= \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}},
\end{aligned}$$

por lo que de la ecuación (2.16) finalmente obtenemos que las funciones de onda del Oscilador Armónico Bosónico propiamente normalizadas son:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}} I_n \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right). \quad (2.19)$$

Sabemos que los bosones poseen ciertas propiedades que los caracterizan como que poseen espín entero, que implica que no cumplen con el Principio de Exclusión de Pauli. En la siguiente sección, analizaremos como es que en estas propiedades recae la importancia de distinguir entre bosones y fermiones.

2.2. Oscilador Fermiónico

Para esta discusión seguiremos de cerca el razonamiento en [10]. De la relación de conmutación que cumplen los operadores de escalera a_B , $a_B^\dagger$ obtenemos que

$$[a_B, a_B^\dagger] = 1 \implies a_B^\dagger a_B = a_B a_B^\dagger - 1.$$

Entonces, $\mathcal{H}$ lo podemos expresar como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (2a_B^\dagger a_B + 1) = \frac{1}{2} (a_B^\dagger a_B + a_B a_B^\dagger).$$

Esta estructura simétrica, es reflejo del hecho de lidiar con partículas bosónicas, por lo que en consecuencia los estados deben tener una estructura simétrica.

Los estados fermiónicos por otro lado son antisimétricos, por lo que, proponemos $\mathcal{H}_F$ para el oscilador fermiónico:

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2} (a_F^\dagger a_F - a_F a_F^\dagger). \quad (2.20)$$

Si a_F y $a_F^\dagger$ fueran simétricos, $([a_F, a_F^\dagger] = 1)$, la Ec. (2.20) quedaría

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2} (a_F^\dagger a_F - (a_F^\dagger a_F + 1)) = -\frac{1}{2}$$

lo que implicaría que $\mathcal{H}_F$ sería una constante por lo que no habría dinámica asociada a este Hamiltoniano. Asumamos entonces que a_F , $a_F^\dagger$ satisfacen relaciones de anticonmutación:

$$\{a_F, a_F\} = 0, \quad \{a_F^\dagger, a_F^\dagger\} = 0, \quad \{a_F, a_F^\dagger\} = \{a_F^\dagger, a_F\} = 1. \quad (2.21)$$

Definamos el operador de número fermiónico ($\mathcal{N}_F$) como $\mathcal{N}_F = a_F^\dagger a_F$, de la Ec. (2.21) notemos

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_F^2 &= a_F^\dagger a_F a_F^\dagger a_F = a_F^\dagger (1 - a_F^\dagger a_F) a_F, \\ &= a_F^\dagger a_F - a_F^\dagger a_F^\dagger a_F a_F, \\ \Rightarrow \mathcal{N}_F^2 &= \mathcal{N}_F \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_F (\mathcal{N}_F - 1) = 0,\end{aligned}$$

por lo que los únicos eigenvalores posibles para el operador de $\mathcal{N}_F$ son 1 y 0 lo que es consistente con el principio de exclusión de Paulli. En la teoría de muchos cuerpos, esto implica que los estados fermionicos pueden estar desocupados ($\mathcal{N}_F = 0$) u ocupados por un sólo fermión ($\mathcal{N}_F = 1$). Así la Ecuación de Schrödinger para el Oscilador Armónico Fermiónico (ESOAF) es, [10]

$$\mathcal{H}_F \psi = \left(\mathcal{N}_F - \frac{1}{2} \right) \psi = E \psi, \quad (2.22)$$

cuyo estado base para la energía es:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_F |\psi_0\rangle &= a_F^\dagger a_F |\psi_0\rangle, \\ \Rightarrow \mathcal{H}_F |\psi_0\rangle &= \left(\mathcal{N}_F - \frac{1}{2} \right) |\psi_0\rangle = -\frac{1}{2} |\psi_0\rangle, \\ \therefore \quad E_0 &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Es importante notar que el estado base del oscilador fermiónico es de signo contrario al del bosónico.

2.2.1. Funciones de Onda

Observemos que sólo modificamos el álgebra de los operadores y no los operadores como tales, por lo que ψ_0 y ψ_1 se calculan de igual forma que en el oscilador bosónico.

$$\langle x | \left(\frac{x}{2} + ip \right) |\psi_0\rangle \Rightarrow \frac{x}{2} \psi_0(x) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x}{2} \psi_0(x) = \frac{d\psi_0(x)}{dx}.$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\ln(\psi_0) = -\frac{x^2}{4} + A' \Rightarrow \psi_0 = e^{-\frac{x^2}{4}} e^{A'},$$

$$\therefore \psi_0 = A_0 \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right). \quad (2.23)$$

calculemos el resto de los estados construyéndolos con el operador de ascenso $|\langle x | \psi_1 \rangle = \langle x | a_F^\dagger |\psi_0\rangle \Rightarrow \psi_1 = A'_1 \left(\frac{x}{2} \psi_0 - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0 \right)$,

$$\begin{aligned}
&= A_1' A_0 \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{4}} \right), \\
&= A_1 \left(\left[\frac{x}{2} - \left(-\frac{2x}{4} \right) \right] e^{-\frac{x^2}{4}} \right), \\
&\therefore \psi_1 = A_1 x e^{-\frac{x^2}{4}}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_F |\psi_1\rangle &= \left(\mathcal{N}_F - \frac{1}{2} \right) |\psi_1\rangle. \\
&= \mathcal{N}_F |\psi_1\rangle - \frac{1}{2} |\psi_1\rangle, \\
\therefore \mathcal{H}_F |\psi_1\rangle &= \frac{1}{2} |\psi_1\rangle.
\end{aligned}$$

Una vez analizadas las bases para la descripción del Oscilador Armónico Cuántico y mostrado la importancia de distinguir entre bosones y fermiones, en el siguiente capítulo nos enfocaremos en buscar una forma de acoplar estos osciladores de modo que encontremos una solución conjunta para los mismos.

Capítulo 3

Osilador Armónico Cuántico SUSY

En este capítulo buscaremos realizar un simple mapeo a una SUSY (Supersimetría) observando las relaciones de conmutación y anticonmutación que los operadores bosónicos y fermiónicos cumplen. Seguiremos muy de cerca el trabajo desarrollado en la Referencia [10, 11].

3.1. Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY-QM)

Supersimetría (SUSY) surgió como una herramienta usada por los físicos para obtener una descripción unificada de todas las interacciones fundamentales de la naturaleza. SUSY relaciona grados de libertad bosónicos y fermiónicos combiándolos en supercampos que proveen una descripción más elegante de la naturaleza [11, 12, 13]. El álgebra asociada a SUSY es llamada super álgebra de Lie que se cierra bajo relaciones de conmutación y anticonmutación [13]. Aunque hasta la fecha no se ha encontrado evidencia experimental de la existencia de SUSY, en los últimos cincuenta años, las ideas de SUSY han simulado nuevos enfoques a distintas ramas de la física. Pero siendo optimistas, nos gusta pensar que la mitad del espectro SUSY ya ha sido descubierto.

En particular, SUSY-QM se desarrolló como un modelo de juguete para probar la ruptura de la supersimetría, ya que es difícil de probar en las teorías de campo SUSY si la supersimetría esta rota o no [11]. De modo que esta nueva rama de la Mecánica Cuántica se entendió pronto como un tema interesante. Además si a una SUSY-QM se le hace la segunda cuantización, se obtiene una teoría de campo supersimétrica.

Ahora obtendremos un nuevo Hamiltoniano, que involucre operadores bosó-

nicos y fermiónicos que obedezcan relaciones de conmutación y anticonmutación respectivamente, partiendo del Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_1 = p^2 + V_1(x),$$

y en vez de empezar por un potencial dado $V_1(x)$ y encontrar la función de onda, como lo hacemos típicamente, podemos empezar con una función de onda específica. Una vez conocida dicha función, podemos conocer el potencial $V_1(x)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos escoger el estado base de energía $E_0^{(1)}$ de modo que

$$\langle x | \mathcal{H}_1 | \psi_0 \rangle = 0 | \psi_0 \rangle \quad \Rightarrow \quad -\frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0(x) = 0. \quad (3.1)$$

Esto implica que

$$V_1(x) = \frac{\psi_0''}{\psi_0},$$

lo que nos permite determinar el potencial a partir de la función de onda. La ventaja de elegir la función de onda del estado base es que no tiene nodos. Ahora factorizemos el Hamiltoniano como sigue

$$\mathcal{H}_1 | \psi_0 \rangle = A^\dagger A | \psi_0 \rangle,$$

donde

$$A = \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x),$$

Esto nos permite identificar

$$V_1(x) = W^2(x) - W'(x), \quad (3.2)$$

que es conocida como la ecuación de Ricatti¹. La cantidad $W(x)$ es referida como el superpotencial en SUSY-QM [11]. La solución de $W(x)$ en términos de ψ_0 se puede escribir como

$$W(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}.$$

Esta solución se obtiene mediante el hecho de que una vez que se cumpla $A\psi_0 = 0$, automáticamente se tiene que $\mathcal{H}_1\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0$.

Lo siguiente en la construcción de una teoría supersimétrica es definir el operador $\mathcal{H}_2 = AA^\dagger$. Es fácil notar que este $\mathcal{H}_2$ es un Hamiltoniano pero corresponde a otro potencial

$$\mathcal{H}_2 = AA^\dagger = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x).$$

¹Decimos que una Ec. es de Ricatti si tiene la forma

$$y'(x) + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

para resolverla, se debe hacer la sustitución $y = y_p + \frac{1}{z}$, donde y_p es una solución particular.

Llamemos

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (3.3)$$

Los potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son conocidos como compañeros supersimétricos. Ahora notemos que los eigenvalores de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son positivos o cero, y que para $n > 0$ se tiene que

$$\mathcal{H}_1 \psi_n^{(1)} = A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} \Rightarrow \mathcal{H}_2 (A \psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}). \quad (3.4)$$

Análogamente para $\mathcal{H}_2$

$$\mathcal{H}_2 \psi_n^{(2)} = A A^\dagger \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \Rightarrow \mathcal{H}_1 (A^\dagger \psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (A^\dagger \psi_n^{(2)}). \quad (3.5)$$

De las Ecs. (3.4) y (3.5) y del hecho de que $E_0^{(1)} = 0$, es claro que las eigenfunciones y los eigenvalores de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ están relacionados por

$$E_0^{(1)} = 0, \quad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad (3.6)$$

$$\psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A \psi_{n+1}^{(1)}, \quad (3.7)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \left(E_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} A^\dagger \psi_n^{(2)}. \quad (3.8)$$

Notemos que el operador A (ó $A^\dagger$) no sólo convierte una eigenfunción de $\mathcal{H}_1$ (ó $\mathcal{H}_2$) en una eigenfunción de $\mathcal{H}_2$ (ó $\mathcal{H}_1$) con la misma energía, sino que también destruye (ó crea) un nodo en la función de onda. Además, el estado base de la función de onda de $\mathcal{H}_1$ es aniquilado por el operador A , este estado no tiene compañero SUSY [12]. Por todo esto podemos notar que salvo por $\psi_0^{(1)}$ el resto de los estados son doblemente degenerados, como se muestra en la Figura 3.1.

La verdadera razón de la degeneración de los espectros de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se puede entender más fácilmente de las propiedades de la álgebra SUSY. Es por eso que podemos considerar una matriz SUSY Hamiltoniana de la forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Esta matriz es parte de un álgebra que contiene operadores bosónicos y fermiónicos con relaciones de conmutación y anticonmutación. Consideremos los operadores

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

en conjunto con $\mathcal{H}$ cumplen la siguiente superálgebra

$$[\mathcal{H}, Q] = [\mathcal{H}, Q^\dagger] = 0, \quad (3.12)$$

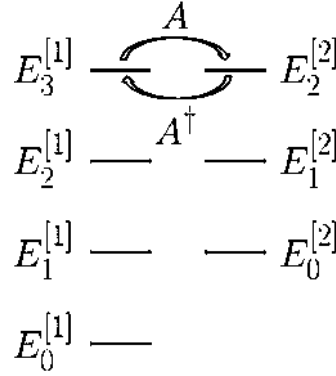


Figura 3.1: Niveles de energía de dos potenciales compañeros SUSY. Se muestra la acción de los operadores A y $A^\dagger$.

$$\{Q, Q^\dagger\} = \mathcal{H}, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \quad (3.13)$$

del hecho de que Q y $Q^\dagger$ conmuten con $\mathcal{H}$ se origina la degeneración del espectro de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Los operadores Q y $Q^\dagger$ pueden interpretarse como operadores que cambian grados de libertad bosónica en fermiónica y viceversa. Usaremos como ejemplo el oscilador cuántico para clarificar esta idea.

3.2. Oscilador Armónico SUSY

Retomemos lo visto para el Oscilador Armónico Bosónico,

$$\mathcal{H}_B = \mathcal{N}_B + \frac{1}{2},$$

y para el Oscilador Armónico Fermiónico,

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{N}_F - \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} [a_B, a_B^\dagger] &= 1, \quad \{a_F, a_F^\dagger\} = 1, \\ [a_B^\dagger, a_B^\dagger] &= [a_B, a_B] = \{a_F, a_F\} = \{a_F^\dagger, a_F^\dagger\} = 0, \\ \mathcal{H}_B \psi_0 &= \frac{1}{2} \psi_0, \quad \mathcal{H}_F \psi_0 = -\frac{1}{2} \psi_0. \end{aligned}$$

Consideremos un sistema que consiste en un Oscilador Armónico Bosónico-Fermiónico con la misma frecuencia ω [10, 11]

$$\begin{aligned} H = \omega \mathcal{H} &= \omega (\mathcal{H}_B + \mathcal{H}_F) = \omega \left(\mathcal{N}_B + \frac{1}{2} + \mathcal{N}_F - \frac{1}{2} \right), \\ \therefore \mathcal{H} &= \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_F. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora definamos los estados para este nuevo hamiltoniano

$$|n_B, n_F\rangle = |n_B\rangle \otimes |n_F\rangle,$$

por lo que podemos verificar que los eigenvalores son

$$\mathcal{H} |n_B, n_F\rangle = (\mathcal{N}_B + \mathcal{N}_F) |n_B, n_F\rangle = (n_B + n_F) |n_B, n_F\rangle, \quad (3.15)$$

donde $n_B = 0, 1, 2 \dots$ y $n_F = 0, 1$. Observemos que para el estado $\psi_0 = |0, 0\rangle$ se tiene que

$$\mathcal{H} |0, 0\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) |0, 0\rangle = 0 |0, 0\rangle,$$

por lo tanto $E_{0,0} = 0$, que concuerda con lo descrito para $\mathcal{H}_1$ en la Ec. (3.1). También observemos de la Ec. (3.15) que para estados diferentes del base, las energías del sistema son doblemente degeneradas

$$\mathcal{H} |n_B, 1\rangle = ((n_B) + (1)) |n_B, 1\rangle \text{ y } ((n_B + 1) + 0) = \mathcal{H} |n_B + 1, 0\rangle.$$

Definamos los operadores de carga Q y $Q^\dagger$

$$Q = a_B^\dagger a_F, \quad Q^\dagger = a_B a_F^\dagger. \quad (3.16)$$

Podemos verificar que

$$\begin{aligned} [Q, \mathcal{H}] &= \left[a_B^\dagger a_F, \left(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F \right) \right], \\ &= a_B^\dagger a_F \left(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F \right) - \left(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F \right) a_B^\dagger a_F, \\ &= \left[a_B^\dagger, \mathcal{N}_B \right] a_F + a_B^\dagger [a_F, \mathcal{N}_F], \\ &= -a_B^\dagger a_F + a_B^\dagger a_F, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Recordemos} \\ [N, a] = -a \\ [N, a^\dagger] = a^\dagger \end{array}$$

$$\therefore [Q, \mathcal{H}] = 0. \quad (3.17)$$

Análogamente para $Q^\dagger$

$$\therefore [Q^\dagger, \mathcal{H}] = 0, \quad (3.18)$$

por lo que estos operadores definen cantidades conservadas del sistema y corresponden a los generadores de simetría en esta teoría. Podemos verificar que

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= \left\{ a_B^\dagger a_F, a_F^\dagger a_B \right\}, \\ &= a_B^\dagger \left\{ a_F, a_F^\dagger \right\} a_B - a_F^\dagger \left[a_B^\dagger, a_B \right] a_F, \\ &= a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F, \\ \{Q, Q^\dagger\} &= \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De las Ecs. (3.17), (3.18) y (3.19) se observa que estos operadores definen una álgebra que considera tanto conmutadores como anticonmutadores. Dicha álgebra se conoce como super álgebra de Lie. Esta define la forma infinitesimal de

las transformaciones supersimétricas.

Ahora analizemos como actúan los operadores de carga en los eigenestados de energía del sistema,

$$\begin{aligned} [Q, \mathcal{N}_B] &= [a_B^\dagger a_F, a_B^\dagger a_B] = [a_B^\dagger, \mathcal{N}_B] a_F, \\ &= -a_B^\dagger a_F, \\ &\quad \therefore [Q, \mathcal{N}_B] = -Q, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} [Q, \mathcal{N}_B] &= [a_B^\dagger a_F, a_F^\dagger a_F] = a_B^\dagger [a_F, \mathcal{N}_F], \\ &= a_B^\dagger a_F, \\ &\quad \therefore [Q, \mathcal{N}_F] = -Q. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Análogamente para $Q^\dagger$

$$[Q^\dagger, \mathcal{N}_B] = Q^\dagger, \quad [Q^\dagger, \mathcal{N}_F] = -Q^\dagger, \quad (3.22)$$

Es decir que Q aumenta el número bosónico y disminuye el fermiónico y $Q^\dagger$ hace lo opuesto. Consideremos que

$$|n_B, n_F\rangle = \frac{(a_B^\dagger)^{n_B}}{\sqrt{n_B!}} (a_F^\dagger)^{n_F} |0, 0\rangle.$$

Se tiene que

$$Q |n_B, n_F\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_B+1} |n_{B+1}, n_{F-1}\rangle & | n_F \neq 0, \\ |0, 0\rangle & | n_F = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

$$Q^\dagger |n_B, n_F\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_B} |n_{B-1}, n_{F+1}\rangle & | n_F \neq 0, \\ |0, 0\rangle & | n_F = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Retomando lo visto al principio de este capítulo, el álgebra para los operadores Q y $Q^\dagger$ coincide con la ya descrita, de modo que si proponemos que los operadores a_F y $a_F^\dagger$ tengan la estructura

$$a_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_F^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a_F, a_F^\dagger] = \sigma_3.$$

y además consideramos la Ec. (3.19) tenemos que

$$\mathcal{H} = \left(p^2 + \frac{x^2}{4} \right) I - \frac{1}{2} \sigma_3, \quad (3.25)$$

o considerando $a_B = ip + W(x)$ donde $W(x) = x/2$ es el superpotencial en la teoría SUSY-QM por lo que el Hamiltoniano queda como

$$\mathcal{H} = (p^2 + W^2) I - W' \sigma_3. \quad (3.26)$$

Esta es la ventaja de SUSY-QM, en una descripción unificada se pueden describir sistemas bosónicos y fermiónicos. Habiendo logrado un buen acoplamiento de los Osciladores Fermiónicos y Bosónicos mediante SUSY, nos enfocaremos en el siguiente capítulo a resolver la ecuación de onda relativista, la llamada Ecuación de Dirac, que describe partículas fermiónicas con espín $1/2$.

Capítulo 4

Ecuación de Dirac en (3+1) dimensiones

En Mecánica Cuántica Relativista, las partículas libres de espín $1/2$ satisfacen la Ecuación de Dirac. En este capítulo, presentamos un análisis detallado de esta ecuación y sus soluciones en (3+1) dimensiones, con el objetivo de realizar comparaciones con los resultados que se obtengan en el capítulo 5. Discusión acerca de este tema se puede encontrar en [14, 15, 16].

4.1. Ecuación de Klein-Gordon

La energía de una partícula de masa m en ausencia de potenciales es

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad (4.1)$$

donde p es el momento lineal de la partícula. En Mecánica Cuántica, las observables físicas se promueven a operadores diferenciales, como ya habíamos visto, (unidades naturales $\hbar = c = 1$):

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = -i \nabla.$$

Entonces la Ec. (4.1) da lugar a la Ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \hbar \frac{\nabla^2 \psi(\vec{r}, t)}{2m} = 0. \quad (4.2)$$

Si consideramos la expresión relativista para la energía $E^2 = p^2 + m^2$, e identificamos con los operadores correspondientes la nueva ecuación de onda relativista es

$$-\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = m^2 \psi(\vec{r}, t). \quad (4.3)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon. Podemos escribir esta ecuación en su forma covariante usando las siguientes definiciones

$$\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla), \quad \partial_\mu = (\partial_t, \nabla),$$

e introduciendo el Operador D'Alambertiano

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,$$

de modo que podemos reescribir la ecuación de Klein-Gordon como:

$$(\square + m^2) \psi = 0. \quad (4.4)$$

La ecuación relativista $E^2 = p^2 + m^2$ sugiere que

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2},$$

por lo que además de la solución de energía positiva, tenemos una de energía negativa. Otro problema que tiene la Ec. de Klein-Gordon es que tiene densidades de probabilidad positivas y negativas, esto debido a que el cuadrivector de densidad de probabilidad es

$$j^\mu = (\psi^* \partial^\mu \psi - \partial^\mu \psi^* \psi),$$

por lo que $\rho = j^0$ es

$$\rho = \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right),$$

que puede ser negativa, por lo que no admite una interpretación en términos de probabilidades positivas. En la siguiente sección estudiaremos una de las soluciones al problema de densidades de probabilidad negativas.

4.2. Ecuación de Dirac

En 1927, el físico Británico Paul Dirac propone una solución para el problema de densidades de probabilidad negativas. Él propone una ecuación lineal en la energía [14]:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) = E^2,$$

donde β y $\vec{\alpha}$ son objetos matriciales. Desarrollando la expresión

$$E^2 = (\alpha_i p_i + \beta m) (\alpha_j p_j + \beta m),$$

$$\Rightarrow E^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \alpha_j \beta) p_i m + \beta^2 m^2,$$

por lo que, para que esta expresión concuerde con $E^2 = p^2 + m^2$ se requiere que:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (4.5)$$

Las matrices de más baja dimensión que satisfacen (4.5) son las matrices 4×4 . Nosotros usaremos la representación de Dirac-Pauli, que es la usada con más frecuencia

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el Hamiltoniano de Dirac queda como

$$H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi. \quad (4.6)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma covariante, como veremos enseguida.

4.2.1. Las Matrices Gamma (γ^μ)

Con el objetivo de obtener la Ec. de Dirac en forma covariante, multipliquemos la Ec. (4.6) por la izquierda por β , entonces obtenemos que

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \alpha \cdot \nabla \psi + m\psi.$$

Podemos describir esta última en su forma covariante

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.7)$$

donde hemos introducido las matrices de Dirac (γ^μ)

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha). \quad (4.8)$$

Entonces la Ec. de Dirac (ED) en su forma covariante es

$$(i \not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (4.9)$$

ó

$$(\not{p} - m)\psi = 0, \quad (4.10)$$

donde estamos utilizando la notación slash de Feynmann ($\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$).

4.2.2. Conservación de Corriente

El complejo conjugado de la ED es:

$$-i \left(\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\dagger - i \left(\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right)^\dagger - m\psi^\dagger = 0.$$

Multiplicando la ecuación anterior por la derecha por γ^0 se tiene que:

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k) \gamma^0 - m\psi^\dagger = 0, \quad (4.11)$$

usando que $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$ e introduciendo el operador adjunto $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, tenemos que la Ec. (4.11) queda como

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (4.12)$$

Ahora tenemos las herramientas necesarias para derivar la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.13)$$

multiplicando la Ec. (4.7) por la izquierda por $\bar{\psi}$ y la Ec. (4.12) por la derecha por ψ y sumándolas

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= 0, \\ \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= 0, \implies j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

que podemos considerar como la densidad de corriente eléctrica si insertamos la carga, de acuerdo a la prescripción de Feynmann-Stückelberg [15]

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.15)$$

por lo que la densidad de probabilidad ρ es:

$$\rho = \psi^\dagger \psi,$$

que es definido positivo, por lo que ya no hay conflictos de interpretación. Exploremos ahora el contenido físico de la ED.

4.3. Partícula en Reposo

Analizaremos primero la ED para el caso de una partícula que está en reposo. En este caso se puede escribir la ecuación como

$$(i\gamma^0 \partial_0 - m) \psi = 0. \quad (4.16)$$

Proponemos una solución de la forma:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix},$$

sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$\left[i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \partial_0 - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Comparando elementos matriciales, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a = m \psi_a, \quad (4.17)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \psi_b = m \psi_b, \quad (4.18)$$

cuyas soluciones son:

$$\psi_a(t) = \psi_a(0) e^{-imt}, \quad \psi_b(t) = \psi_b(0) e^{imt},$$

por lo que la solución en su forma compacta es:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_a(0) e^{-imt} \\ \psi_b(0) e^{imt} \end{pmatrix}.$$

Para $t=0$ tenemos que

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_a(0) \\ \psi_b(0) \end{pmatrix}.$$

Buscamos escoger 4 soluciones de modo que sean linealmente independientes:

Caso(1)

$$\begin{aligned} \psi_a(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_b(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \implies \psi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Caso(2)

$$\begin{aligned} \psi_a(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_b(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \implies \psi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Caso(3)

$$\begin{aligned} \psi_a(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_b(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \implies \psi_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Caso(4)

$$\begin{aligned} \psi_a(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_b(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \implies \psi_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión tenemos cuatro soluciones para la Ec. (4.16), las cuales son:

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad (4.19)$$

$$\psi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad (4.20)$$

$$\psi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad (4.21)$$

$$\psi_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad (4.22)$$

ψ_1 y ψ_2 son las soluciones de energía positiva y ψ_3 y ψ_4 son soluciones de energía negativa.

4.4. Partícula en Movimiento

Para una partícula en movimiento se propone una solución del tipo:

$$\psi(x) = e^{-i(Et - \vec{x} \cdot \vec{p})} u(p), \quad (4.23)$$

entonces de la Ec. (4.9) tenemos que:

$$\partial_\mu \psi(x) = -ip_\mu \psi(x),$$

y como la exponencial nunca es cero, la ecuación de Dirac se puede expresar de la siguiente manera:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0. \quad (4.24)$$

Esta es la ecuación de Dirac en el espacio de momentos y $u(p)$ se llama espinor de Dirac. Ahora, si sustituimos $\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ y simplificamos, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a(p) \\ u_b(p) \end{pmatrix} = 0,$$

donde hemos descompuesto el espinor en dos componentes. Esta se puede expresar como

$$\begin{aligned} (E - m) u_a(p) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_b(p) &= 0, \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_a(p) - (E + m) u_b(p) &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

con

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}.$$

Este sistema posee 4 soluciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= N \begin{pmatrix} \mathcal{X}^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \mathcal{X}^{(s)} \end{pmatrix}, & E > 0, \\ u^{(s+2)} &= N \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \mathcal{X}^{(s)} \\ \mathcal{X}^{(s)} \end{pmatrix}, & E < 0, \end{aligned}$$

donde hemos definido:

$$s = 1, 2 \quad \mathcal{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Explicitamente las soluciones son:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_1(p) e^{-ip \cdot x}, \\ \psi_2(x) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_2(p) e^{-ip \cdot x}, \\ \psi_3(x) &= N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_3(p) e^{-ip \cdot x}, \\ \psi_4(x) &= N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_4(p) e^{-ip \cdot x}. \end{aligned}$$

Con el objetivo de remover las soluciones de energía negativa, definimos

$$v_1(E, \vec{p}) \equiv u_4(-E, -\vec{p}), \quad v_2(E, \vec{p}) \equiv u_3(-E, -\vec{p}),$$

es decir,

$$v_1(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las cuatro soluciones de la ED se pueden escribir como:

$$\psi_1(x) = u_1(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (4.26)$$

$$\psi_2(x) = u_2(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (4.27)$$

$$\psi_3(x) = v_2(p) e^{ip \cdot x}, \quad (4.28)$$

$$\psi_4(x) = v_1(p) e^{ip \cdot x}, \quad (4.29)$$

todas las soluciones con energía positiva. Interpretamos estas soluciones de modo que u_1 y u_2 corresponden al fermión mientras que v_1 y v_2 corresponden al anti-fermión. Aún hay una degeneración que debemos resolver. Las dos soluciones para cada caso representan a las dos direcciones que puede tener el espín de la partícula. A continuación calcularemos el valor de la constante N de normalización.

4.4.1. Normalización

Es fácil ver que $u_r^\dagger u_s = 0$ si $r \neq s$. Ahora, si $r = s$ se puede mostrar que

$$u_1^\dagger u_1 = N^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} = N^2 \left(1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} \right),$$

$$\implies u_1^\dagger u_1 = N^2 \frac{2E}{E+m}. \quad (4.30)$$

Se obtiene el mismo resultado para $r = s = 2$. Estos resultados también se verifican fácilmente para $v^{(s)}$, por lo que podemos resumirlos como:

$$u_r^\dagger u_s = N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs}, \quad (4.31)$$

$$v_r^\dagger v_s = N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs}. \quad (4.32)$$

Como ya habíamos visto en la Ec. (4.14), la densidad de probabilidad es:

$$\rho = j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi, \quad (4.33)$$

si ahora normalizamos considerando que hay $2E$ partículas por unidad de volumen y efectuamos la integral sobre el volumen unitario V , obteniendo:

$$\int_V \rho dV = \int \psi^\dagger \psi dV = u^\dagger u = 2E, \quad (4.34)$$

usando la Ec. (4.26), concluimos que

$$2E = N^2 \frac{2E}{E+m},$$

por lo tanto, podemos escoger la constante de normalización N como

$$N = \sqrt{E+m}, \quad (4.35)$$

ahora con la constante de normalización conocemos todos los elementos de las soluciones a la ED. A continuación aclaramos la degeneración que había quedado pendiente.

4.5. Interpretación de las soluciones en términos del Espín.

Anteriormente vimos que existen dos soluciones con energía E y dos soluciones con energía $-E$, por lo que existe una doble degeneración, de modo que debe existir una observable $\hat{h}$ que conmute con $\hat{H}$ que la remueva.

4.5. INTERPRETACIÓN DE LAS SOLUCIONES EN TÉRMINOS DEL ESPÍN. 29

Sabemos que el momento angular orbital se escribe como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Calculando el conmutador del Hamiltoniano con el momento angular

$$\left[H, \vec{L} \right] = \left[\gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m), \vec{r} \times \vec{p} \right],$$

resulta

$$\left[H, \vec{L} \right] = i\gamma^0 (\vec{\gamma} \times \vec{p}).$$

Por lo tanto, el momento angular no es una cantidad que se conserve. Esto es sorprendente, pues en la discusión siempre ha estado presente una invariancia bajo rotaciones. Si definimos el operador

$$\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

y calculamos el valor de su conmutador con el Hamiltoniano,

$$\left[H, \vec{\Sigma} \right] = \left[\gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m), \vec{\Sigma} \right],$$

obtenemos que

$$\left[H, \vec{\Sigma} \right] = -i\gamma^0 (\vec{\gamma} \times \vec{p}).$$

Entonces si definimos el operador de momento angular total $(\vec{J})$ como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma}$ es fácil notar que el conmutador con el Hamiltoniano es:

$$\left[H, \vec{J} \right] = \left[H, \vec{L} + \vec{\Sigma} \right] = 0,$$

por lo que este nuevo operador es una constante de movimiento, que identificaremos con el momento angular total. Interpretamos a $\vec{\Sigma}$ como el momento angular intrínseco o espín de la partícula que satisface la ED.

Definimos el operador de helicidad de la siguiente manera:

$$\hat{h} = \hat{\Sigma} \cdot \hat{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}.$$

Este operador representa la proyección del espín en la dirección del movimiento de la partícula y quita la degeneración entre las dos soluciones de fermiones y las dos de anti-fermiones. Supongamos que la partícula se mueve sólo en la dirección z , podemos verificar que:

$$\hat{h}u_1(p) = \frac{1}{2}u_1(p), \quad \hat{h}u_2(p) = -\frac{1}{2}u_2(p),$$

$$\hat{h}v_1(p) = -\frac{1}{2}v_1(p), \quad \hat{h}v_2(p) = \frac{1}{2}v_2(p).$$

Así, se observa que las 2 soluciones con energía positiva, u_1 y u_2 describen las dos posibles orientaciones de espín del electrón, mientras que v_1 y v_2 describen las 2 orientaciones de espín del positrón.

En resumen, la Ec. de Dirac describe electrones y positrones con sus dos orientaciones de espín. En el siguiente capítulo estudiaremos la ED en un plano y compararemos los resultados con los de esta sección.

Capítulo 5

Ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones

Nosotros vivimos en un mundo con 3 dimensiones espaciales y una temporal pero existen varios problemas o teorías que son más sencillos de entender en bajas dimensiones, es decir, restringir su dinámica a menos de cuatro dimensiones. Los modelos teóricos 3-dimensionales son muy útiles para entender fenómenos que ocurren en espacios planos, pero estos modelos teóricos, como QED3 (Quantum Electrodynamics in (2+1) dimensions), son interesantes, no sólo porque facilitan su enseñanza, sino porque poseen una interpretación física, que en algunos casos es de suma importancia. En este capítulo estudiaremos a la ED en un modelo 3-dimensional e interpretaremos las diferencias que surgen. Esta ec. se ha estudiado antes en distintos trabajos, por ejemplo [8, 1].

5.1. Representación Irreducible

La ecuación de Dirac en el plano, se obtiene de eliminar la tercera componente espacial de la ecuación en (3+1) dimensiones, por lo que basta con matrices 2×2 para satisfacer las condiciones explicadas en (4.5), así que podemos construir esta representación utilizando las matrices de Pauli. Si hacemos esto, resulta que existen dos representaciones inequivalentes de las matrices γ^μ .

Se puede mostrar que en dimensiones impares arbitrarias el producto de todas las matrices gamma es proporcional a la matriz identidad, por lo que en (2+1) dimensiones se observa que:

$$\mathcal{P} \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = \pm i I.$$

Por lo tanto, una de las matrices γ puede escribirse en término de las otras. Proponemos γ^2 como:

$$\gamma^2 = \pm i \gamma^0 \gamma^1.$$

Así podemos escoger a las matrices γ^μ de la siguiente forma [7]:

$$\gamma^0 = \sigma_3 \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2, \quad (5.1)$$

$$\gamma^0 = \sigma_3 \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = -i\sigma_2. \quad (5.2)$$

Si las dos representaciones son equivalentes matemáticamente, implica, físicamente, que ambas dan la misma información del sistema, por lo que podemos utilizar cualquiera de las dos y obtener el mismo resultado. Si las representaciones no son equivalentes, es decir, que no podemos obtener una a partir de transformaciones elementales de la otra, la información física del sistema no es la misma. A continuación verificaremos la inequivalencia de las 2 representaciones.

5.1.1. Primera Representación Irreducible (A)

Partiendo de la representación dada en (5.1) analizaremos la ED. Nuevamente proponemos una solución de la forma (4.23) y obtenemos en el espacio de momentos que:

$$\left[\begin{pmatrix} E - m & 0 \\ 0 & -E - m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & ip_x + p_y \\ ip_x - p_y & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_a(p) \\ u_b(p) \end{pmatrix} = 0$$

de lo que resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (E - m) u_a(p) - (p_y + ip_x) u_b(p) &= 0, \\ (p_y - ip_x) u_a(p) - (E + m) u_b(p) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si escogemos $u_a = 1$, entonces

$$u_b = \frac{p_y - ip_x}{E + m},$$

mientras que si escogemos $u_b = 1$, entonces

$$u_a = \frac{p_y + ip_x}{E - m},$$

por lo que la solución propuesta toma la forma:

$$\psi_1(x) = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E + m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_1(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (5.4)$$

$$\psi_2(x) = N \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E - m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u'_1(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (5.5)$$

Interpretando la solución $u'_1(p)$ para energía negativa como la antipartícula, con energía positiva la segunda solución se define como:

$$v_1(p) = u'_1(-E, -p) = \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E + m} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

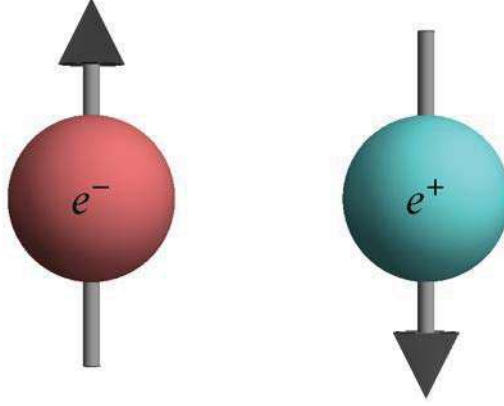


Figura 5.1: Primera Representación

5.1.2. Segunda Representación Irreducible (B)

Para estudiar la representación dada en (5.2), es fácil, partiendo de las entradas en la sección anterior, obtener las soluciones a esta representación, porque cambiar el signo de γ_2 es equivalente que cambiar el signo de p_y . De modo que las soluciones obtenidas son:

$$\phi_1(x) = N \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-p_y - ip_x}{E+m} \end{array} \right) e^{-ip \cdot x} = w_2(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (5.7)$$

$$\phi_2(x) = N \left(\begin{array}{c} \frac{-p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \end{array} \right) e^{ip \cdot x} = s_2(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (5.8)$$

Para establecer que el contenido físico de estas soluciones es distinto al de las Ecs. (5.4) y (5.6) de la representación A, debemos escribir (5.7) y (5.8) en la representación A, lo que equivale a

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= i\gamma^2 \phi_1(x), & \psi_2(x) &= i\gamma^2 \phi_2(x) \\ u_2(p) &= \left(\begin{array}{c} \frac{p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \end{array} \right), & v_2(p) &= \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E+m} \end{array} \right) \end{aligned}$$

En términos de estas funciones si podemos hacer comparaciones de las observables físicas. ⁹En la siguiente sección analizaremos la interpretación que da el espín a estas soluciones.

5.1.3. Interpretación de las Soluciones en términos del Espín

Como la partícula está sujeta a moverse únicamente en el plano, sólo existe una componente de momento orbital angular que puede escribirse como:

$$L_3 = xp_y - yp_x,$$

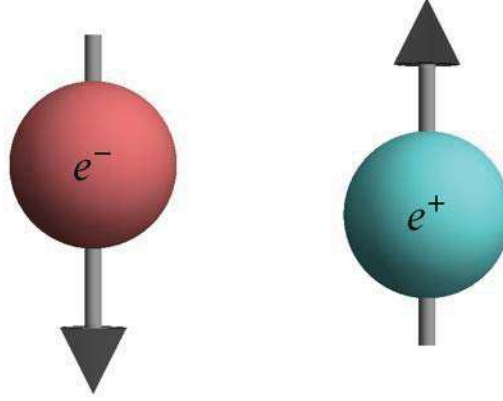


Figura 5.2: Segunda Representación

por lo que el conmutador de L_3 con el Hamiltoniano es:

$$[H, L_3] = -i\gamma^0 (\gamma^1 p_y - \gamma^2 p_x).$$

Ahora, definimos el operador de momento angular intrínseco como

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2}\gamma^0. \quad (5.9)$$

Recordando que el momento angular total es $J_3 = L_3 + \Sigma_3$ entonces el conmutador $[H, J_3] = 0$ lo que implica que J_3 es una cantidad conservada.

El operador Σ_3 puede interpretarse como la helicidad, pues nos da la componente del espín perpendicular al plano de movimiento. Como antes, supongamos que las componentes p_x y p_y son cero, se verifica entonces que:

Representación A

$$\Sigma_3 u_1(p) = \frac{1}{2} u_1(p), \quad \Sigma_3 v_1(p) = -\frac{1}{2} v_1(p).$$

Representación B

$$\Sigma_3 u_2(p) = -\frac{1}{2} u_2(p), \quad \Sigma_3 v_2(p) = \frac{1}{2} v_2(p).$$

Lo que implica que los fermiones tienen sólo una orientación de espín y los anti-fermiones la otra. Para la primera representación los fermiones tienen una orientación de espín positiva ($\uparrow$) y los anti-fermiones una orientación de espín negativa ($\downarrow$), mientras que para la segunda representación los fermiones tienen una orientación de espín negativa ($\downarrow$) y los anti-fermiones una orientación de espín positiva ($\uparrow$). Comparando estos resultados con los obtenidos en la sección (4.1.7), observamos que para que estos concuerden se requiere de las dos orientaciones de espín para fermiones y anti-fermiones. En la siguiente sección buscaremos como acoplar estas representaciones para tener un sistema similar de soluciones.

5.2. Representación Reducible

Habíamos visto que la dimensionalidad mínima que se necesita para construir las matrices γ en $(2+1)$ dimensiones es 2×2 , pero podemos usar una representación de matrices 4×4 para resolver la ED [8, 1]. Definimos para la representación reducible las matrices:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} i\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -i\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

donde $\vec{\gamma}$ contiene componentes γ^1 y γ^2 únicamente. Partiendo de la ED en el espacio de momentos, y descomponiendo el espinor en 2 biespinores de 2 componentes cada uno, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_3 E - i(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y) - m) u_a(p) = 0,$$

$$(-\sigma_3 E + i(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y) - m) u_b(p) = 0.$$

Es importante notar que estas ecuaciones no son acopladas, gracias a la estructura diagonal de las matrices γ^μ . Escribimos $u_a(p)$ y $u_b(p)$ como

$$u_a(p) = \begin{pmatrix} u_{a1}(p) \\ u_{a2}(p) \end{pmatrix}, \quad u_b(p) = \begin{pmatrix} u_{b1}(p) \\ u_{b2}(p) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$(E - m) u_{a1}(p) - (p_y + ip_x) u_{a2}(p) = 0,$$

$$(p_y - ip_x) u_{a1}(p) - (E + m) u_{a2}(p) = 0,$$

$$-(E + m) u_{b1}(p) + (p_y + ip_x) u_{b2}(p) = 0,$$

$$-(p_y - ip_x) u_{b1}(p) + (E - m) u_{b2}(p) = 0.$$

Entonces tenemos cuatro soluciones linealmente independientes

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E + m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_1(p) e^{-ip \cdot x},$$

$$\psi_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E - m} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_2(p) e^{-ip \cdot x},$$

$$\psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E - m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_3(p) e^{-ip \cdot x},$$

$$\psi_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_4(p) e^{-ip \cdot x}.$$

Como no son soluciones acopladas, podemos unir las soluciones dependiendo de su energía de la siguiente manera:

$$\psi_P(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E+m} \\ \frac{p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x},$$

$$\psi_N(x) = \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E-m} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E-m} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x},$$

donde los subíndices P y N indican que se tratan de soluciones positivas y negativas respectivamente. Cambiando $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en las soluciones de energía negativa, obtenemos que:

$$\psi_P(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E+m} \\ \frac{p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \equiv u_P(p) e^{-ip \cdot x} \equiv \begin{pmatrix} \psi_P^a(x) \\ \psi_P^b(x) \end{pmatrix},$$

$$\psi_N(x) = \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E+m} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E+m} \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} \equiv v^N(p) e^{ip \cdot x} \equiv \begin{pmatrix} \psi_N^a(x) \\ \psi_N^b(x) \end{pmatrix}.$$

Estas soluciones se obtienen como resultado de fusionar los dos campos fermiónicos de las dos representaciones irreducibles en uno solo. En este caso, además del término de masa usual de fermiones, puede aparecer un término extra de masa que no es invariante bajo paridad ni inversión temporal. En la siguiente sección analizaremos el origen y sus propiedades [17].

5.2.1. Transformaciones Quirales

Las simetrías son un aspecto fundamental para la descripción de cualquier sistema. El marco idóneo para el análisis de éstas es el formalismo del Lagrangiano, donde las simetrías son transformaciones que dejan el Lagrangiano invariante.

5.2.1.1. Lagrangiano de Dirac

Tanto en Mecánica Clásica, como en Mecánica Cuántica, podemos obtener las ecuaciones que rigen nuestros sistemas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange,¹ donde el Lagrangiano para el caso de la ED, es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi. \quad (5.12)$$

En el plano, el Lagrangiano puede ser sólo una copia del anterior, utilizando la representación irreducible, mientras que para la representación reducible 4×4 de las matrices de Dirac, donde los espinores contienen información de dos campos fermiónicos, uno no puede trabajar con el Lagrangiano (5.12). Esto porque en el plano sólo se necesitan 3 matrices de Dirac para la dinámica, es decir, que existe libertad para construir dos matrices que anticonmuten con γ^0 , γ^1 y γ^2 , las cuales son:

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que se pueden definir dos tipos de transformaciones Quirales:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma^3} \psi, \quad (5.13)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\beta\gamma^5} \psi, \quad (5.14)$$

dado que hay dos transformaciones quirales, se pueden definir dos tipos de términos de masa, estos son:

$$m\bar{\psi}\psi, \quad m_0\bar{\psi}\frac{i}{2}[\gamma^3, \gamma^5]\psi = m_0\bar{\psi}\tau\psi. \quad (5.15)$$

Este nuevo término en la literatura de materia condensada se conoce como término de masa de Haldane [17]. Esto quiere decir que el Lagrangiano de Dirac reducible es:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_e - m_0\tau) \psi. \quad (5.16)$$

Veamos las simetrías de los términos de masa en este Lagrangiano.

5.2.1.2. Simetrías

A partir de ahora, para referirnos a los términos de masa de (5.12) seguiremos la siguiente convención [17]:

- Usual: Término de masa que acompaña a la bilineal $\bar{\psi}\psi$.
- Haldane: Término de masa que acompaña a la bilineal $\bar{\psi}\tau\psi$.

¹Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

En esta sección analizaremos solamente las Simetrías Discretas y Quirales [8].

- *Simetrías Quirales*: El término usual no es invariante bajo las transformaciones Quirales (5.13) y (5.14), pero sí el término de Haldane.
- *Conjugación de Carga*: El Lagrangiano reducible hereda su estructura del Lagrangiano para (3+1), entonces ambos términos de masa son invariantes bajo $\mathcal{C}$.
- *Paridad*: El término usual es invariante bajo $\mathcal{P}$, mientras que el término de Haldane viola esta simetría.
- *Inversión Temporal*: El término usual es invariante bajo $\mathcal{T}$, pero no el término de Haldane.
- *$\mathcal{CPT}$* : El término de masa usual es invariante bajo $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$ separadamente, por lo que lo es también $\mathcal{CPT}$. El término de Haldane, por su parte, es invariante bajo la transformación conjunta $\mathcal{PT}$, y por lo tanto $\mathcal{CPT}$.

Podemos concluir que el Lagrangiano reducible, con el término usual y el término de Haldane, es invariante ante todas estas simetrías. Por lo que es importante analizar las soluciones del Hamiltoniano que se deriva de este Lagrangiano.

5.2.2. Soluciones de la Representación Reducible y m_0

Al aplicar las Ecuaciones de Euler-Lagrange al Lagrangiano reducible, se obtiene que, el Hamiltoniano es:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m_e - m_0 \tau) u(p) = 0,$$

esto en el espacio de momentos. Si como antes descomponemos el espinor $u(p)$ en dos biespinores, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_3 E - i(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y) - (m_e + m_0)) u_a(p) = 0,$$

$$(-\sigma_3 E + i(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y) - (m_e - m_0)) u_b(p) = 0.$$

Nuevamente notemos que las ecuaciones no están acopladas. Esto es porque ahora tenemos las dos especies separadas. Escribamos u_a y u_b como en (5.5), entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(E - m_+) u_{a_1}(p) - (p_y + ip_x) u_{a_2}(p) = 0,$$

$$(p_y - ip_x) u_{a_1}(p) - (E + m_+) u_{a_2}(p) = 0,$$

$$-(E + m_-) u_{a_1}(p) - (p_y + ip_x) u_{a_2}(p) = 0,$$

$$-(p_y - ip_x) u_{a_1}(p) - (E - m_-) u_{a_2}(p) = 0,$$

donde usamos

$$m_+ = m_e + m_0, \quad m_- = m_e - m_0.$$

Las cuatro soluciones linealmente independientes, surgen de proponer los siguientes casos :

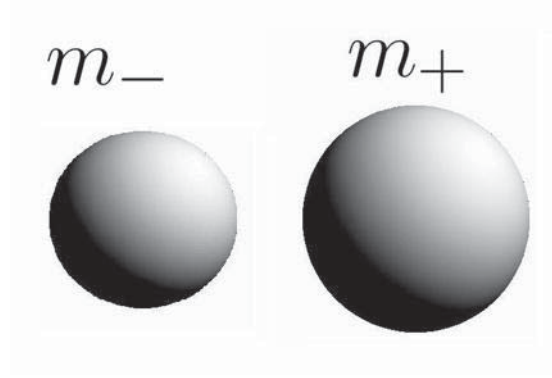


Figura 5.3: Especies de fermiones

$$\begin{aligned}
 \blacksquare u_{a_1} = 1 &\implies u_{a_2} = \frac{p_y - ip_x}{E + m_+} \\
 \blacksquare u_{a_2} = 1 &\implies u_{a_1} = \frac{p_y + ip_x}{E - m_+} \\
 \blacksquare u_{b_1} = 1 &\implies u_{b_2} = \frac{p_y - ip_x}{E - m_-} \\
 \blacksquare u_{b_2} = 1 &\implies u_{b_1} = \frac{p_y + ip_x}{E + m_-}
 \end{aligned}$$

Lo que implica que, explícitamente las soluciones a la ED con el nuevo término de masa son:

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E + m_+} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_1(p) e^{-ip \cdot x}, \\
 \psi_2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{p_y + ip_x}{E + m_+} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} = v_1(p) e^{-ip \cdot x}, \\
 \psi_3(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{p_y - ip_x}{E + m_-} \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} = v_2(p) e^{ip \cdot x}, \\
 \psi_4(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_y + ip_x}{E + m_-} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} = u_2(p) e^{-ip \cdot x},
 \end{aligned}$$

donde se observan soluciones para una especie de fermiones ligera y pesada. En el siguiente capítulo, aplicaremos lo estudiado en este capítulo para resolver

un problema fundamental en la Electrodinámica Cuántica (QED), donde nos enfocaremos en las diferencias que puedan existir al usar una representación u otra.

Capítulo 6

Fermiones en Campos Magnéticos

En este capítulo utilizaremos lo visto en el capítulo anterior para estudiar el movimiento de un fermión en presencia de un campo magnético uniforme. En otros trabajos, [8, 7], se han buscado métodos para obtener estas soluciones. Aquí veremos el tipo de ecuaciones de movimiento que se deben resolver.

6.1. Primera Representación

La Ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético uniforme tiene la siguiente forma:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m) \psi = 0, \quad (6.1)$$

donde hemos utilizado la prescripción para sustitución mínima $\Pi_\mu \rightarrow p - eA_\mu$ para incorporar los efectos del campo de manera que sea invariante de norma. Es de nuestro interés resolver la Ec. (6.1) para un campo magnético uniforme, por lo que proponemos un potencial A_μ , en la norma de Landau, donde toma la forma;

$$A_\mu = (0, -yB, 0)$$

con el fin de estudiar un campo magnético perpendicular al plano. A continuación retomaremos lo visto en la subsección (5.1.1) donde usaremos la representación dada en (5.1), la que llamaremos A , para encontrar la solución ψ para la Ec. (6.1) que nos queda como:

$$\begin{pmatrix} E - m & -(i\Pi_x + \Pi_y) \\ -(i\Pi_x - \Pi_y) & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ \psi_2^A \end{pmatrix} = 0,$$

de lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(i(-i\partial_x + eyB) + p_y) \psi_2^A = (E - m) \psi_1^A, \quad (6.2)$$

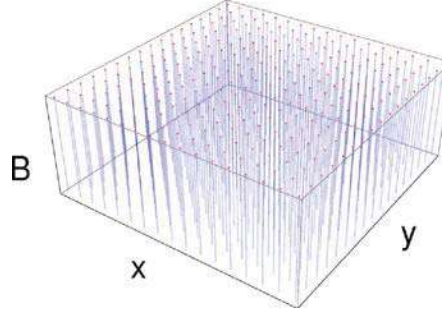


Figura 6.1: Campo Magnético Uniforme $(\nabla \times \vec{A})$

$$(i(-i\partial_x + eyB) - p_y) \psi_1^A = -(E + m) \psi_2^A. \quad (6.3)$$

Anticipando una solución del tipo onda plana proponemos

$$\psi(t, x, y) \sim e^{(-iEt + ipx)} \phi(y),$$

al aplicarlo lo anterior en las ecuaciones (6.2) y (6.3) obtenemos que:

$$(i(p + eyB) + p_y) \phi_2^A = (E - m) \phi_1^A, \quad (6.4)$$

$$(i(p + eyB) - p_y) \phi_1^A = -(E + m) \phi_2^A, \quad (6.5)$$

proponemos el cambio de variable $q = y + y_0$ donde $y_0 = p/eB$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} (p_q + ieBq) \phi_2^A &= (E - m) \phi_1^A, \\ -(p_q - ieBq) \phi_1^A &= -(E + m) \phi_2^A. \end{aligned}$$

Al desacoplar este sistema lineal, obtenemos un sistema de ecuaciones de segundo orden;

$$\begin{aligned} (-\partial_q^2 + (eB)^2 q^2 - eB) \phi_1^A &= (E^2 - m^2) \phi_1^A, \\ (-\partial_q^2 + (eB)^2 q^2 + eB) \phi_2^A &= (E^2 - m^2) \phi_2^A. \end{aligned}$$

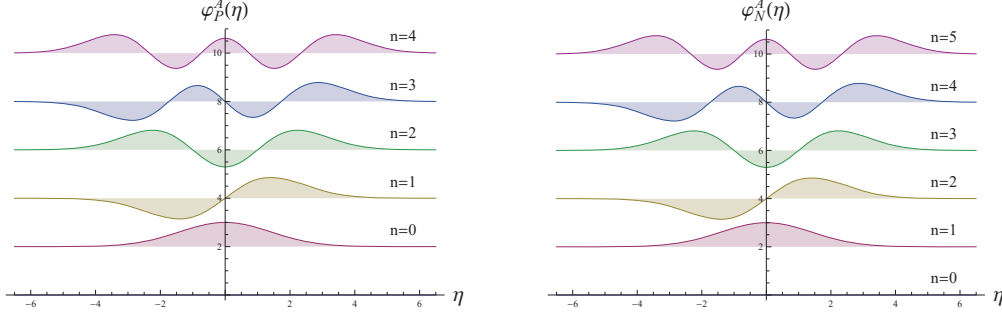
dejando lo independiente de q del lado derecho, resulta lo siguiente

$$\left(-\partial_q^2 + \frac{1}{4}(2eB)^2 q^2\right) \phi_1^A = (E^2 - m^2 + eB) \phi_1^A, \quad (6.6)$$

$$\left(-\partial_q^2 + \frac{1}{4}(2eB)^2 q^2\right) \phi_2^A = (E^2 - m^2 - eB) \phi_2^A. \quad (6.7)$$

donde podemos identificar las ecuaciones (6.6) y (6.7) con la Ecuación del Oscilador Armónico (2.4) con frecuencia $\omega = 2eB$, comparándolas con el eigenvalor de energía $\varepsilon = (n + \frac{1}{2})\omega$ se concluye que [6]:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) 2eB = (E^2 - m^2 + eB) \implies E_n^{1A} = \pm \sqrt{2neB + m^2},$$

Figura 6.2: ϕ^A y sus eigenenergías para varios niveles de Landau

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) 2eB = (E^2 - m^2 - eB) \implies E_n^{2A} = \pm \sqrt{2(n+1)eB + m^2}.$$

Las soluciones correspondientes se pueden escribir como:

$$\psi_P^A = N_n e^{-i|E_n|t - ipx} \begin{pmatrix} (|E_n| + m) I'(n, p, y) \\ -\sqrt{2neB} I'(n-1, p, y) \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\psi_N^A = N_n e^{i|E_n|t - ipx} \begin{pmatrix} \sqrt{2neB} I'(n, -p, y) \\ (|E_n| + m) I'(n-1, -p, y) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

donde la primera corresponde a la solución para fermiones y la segunda a la solución para anti-fermiones. Aquí los $I'_n(n, p, y)$ vienen dados por

$$I'_n(n, p, y) = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} I_n\left(\sqrt{eB}\left(y - \frac{p}{eB}\right)\right) e^{-\frac{eB}{2}\left(y - \frac{p}{eB}\right)^2},$$

$$I'_n(-1, p, y) = 0.$$

donde la última condición asegura la interpretación física correcta del nivel más bajo de Landau.

6.1.1. Niveles de Landau

Veamos ahora que sucede en el nivel más bajo de Landau. Si hacemos en nuestras soluciones $n = 0$ tenemos que;

$$\psi_P^A = N_n e^{-(imt - ipx) - \frac{eB}{2}\left(y - \frac{p}{eB}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_N^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

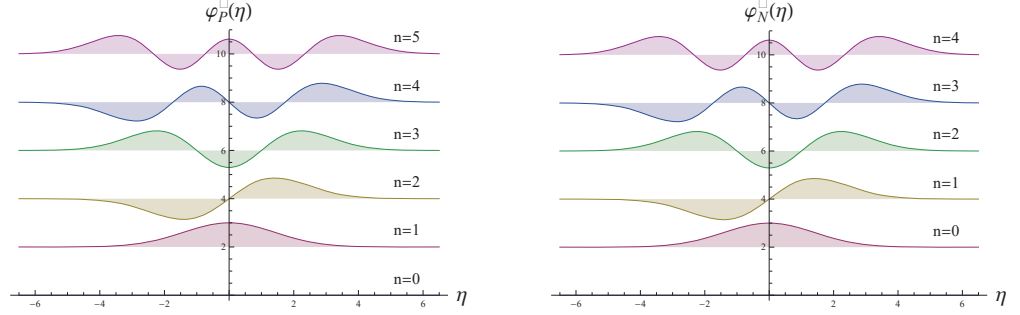


Figura 6.3: ϕ^B y sus eigenenergías para varios niveles de Landau

Esto quiere decir que en el nivel más bajo de Landau, sólo encontramos al fermión, el anti-fermión no vive en el nivel base. Veamos ahora que obtenemos para la segunda representación.

6.2. Segunda Representación

Para la segunda representación la que llamaremos B , usando lo visto para la primera representación, tenemos que las ecuaciones obtenidas son:

$$\left(-\partial_q^2 + \frac{1}{4}(2eB)^2 q^2\right) \phi_1^B = (E^2 - m^2 - eB) \phi_1^B, \quad (6.10)$$

$$\left(-\partial_q^2 + \frac{1}{4}(2eB)^2 q^2\right) \phi_2^B = (E^2 - m^2 + eB) \phi_2^B. \quad (6.11)$$

que nuevamente son del tipo Oscilador Armónico. Sus energías son, para ϕ_1^B ;

$$E_n^{1B} = \pm \sqrt{2(n+1)eB + m^2}, \quad (6.12)$$

y para ϕ_2^B son;

$$E_n^{2B} = \pm \sqrt{2neB + m^2}. \quad (6.13)$$

por lo que las soluciones correspondientes se escriben como:

$$\psi_P^B = N_n e^{-(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2neB} I(n, p, y) \\ (|E_n| + m) I(n-1, p, y) \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\psi_N^B = N_n e^{(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m) I(n, -p, y) \\ \sqrt{2neB} I(n-1, -p, y) \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Nuevamente la primera corresponde a la solución para fermiones y la segunda para anti-fermiones.

6.2.1. Niveles de Landau

Veamos ahora estas soluciones en el nivel más bajo de Landau. Con $n = 0$ tenemos que las soluciones son:

$$\psi_P^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_N^B = N_n e^{(imt-ipx) + \frac{eB}{2}(y + \frac{p}{eB})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ahora tenemos sólo solución para anti-fermión, es decir, el fermión no vive en el nivel base. Esto es distinto a lo que obtuvimos en la primera representación donde teníamos solución de fermión. La estructura de las ecuaciones de movimiento de tipo oscilador armónico, la existencia de un estado base no degenerado y el resto de los estados doblemente degenerados, nos sugiere una estructura SUSY de la ED.

En el siguiente capítulo veremos cómo mapear la Ec. de Dirac en el plano a una SUSY-QM.

Capítulo 7

Teoría SUSY de Dirac

En este capítulo introduciremos un mapeo a la Mecánica Cuántica SUSY por medio de la ED al compararla con lo estudiado en la sección (3.1), para posteriormente utilizar este mapeo en la solución del problema de un fermión en presencia de un campo magnético. Para la representación irreducible, esto es una teoría conocida [18]. En este trabajo extenderemos esas ideas al caso reducible.

7.1. SUSY-QM vía la ED

Partiremos de la ED en (2+1) dimensiones en la primera representación;

$$(\gamma^\mu p_\mu + i\check{W}(y)\sigma_1 - m)\psi = 0,$$

donde hemos introducido el término $\check{W}(y)$, el cual tendrá la información del potencial a estudiar. Descomponemos el espinor ψ en sus dos componentes, de modo que obtengamos:

$$\left[- \begin{pmatrix} -(E - m) & ip_x + p_y + i\check{W}(y) \\ ip_x - p_y + i\check{W}(y) & E + m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7.1)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son de la forma $\psi_i(t, x, y) \sim e^{(-iEt + ipx)}\phi_i(y)$. Entonces con la usual substitución $p_x = -i\partial_x$ y $p_y = -i\partial_y$, la Ec. (7.1) se escribe como un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas,

$$p\phi_2 - i\partial_y\phi_2 + i\check{W}(y)\phi_2 = (E - m)\phi_1, \quad (7.2)$$

$$p\phi_1 + i\partial_y\phi_1 + i\check{W}(y)\phi_1 = -(E + m)\phi_2. \quad (7.3)$$

Proponemos el cambio de variable $W(y) = \check{W}(y) + p$. Desacoplando las Ecs. (7.2) y (7.3) obtenemos un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden;

$$-\partial_y^2\phi_1 + [W^2(y) - W'(y)]\phi_1 = (E^2 - m^2)\phi_1, \quad (7.4)$$

$$-\partial_y^2 \phi_2 + [W^2(y) + W'(y)] \phi_2 = (E^2 - m^2) \phi_2. \quad (7.5)$$

Estas últimas son precisamente las Ecs. de Schrödinger para los compañeros potenciales supersimétricos [10],

$$V_{\pm}(y) \equiv W^2(y) \pm W'(y),$$

donde $W(y)$ se puede identificar con el superpotencial, por lo que el Hamiltoniano SUSY queda como:

$$H_A = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = (p_y^2 + W^2(y)) I - \sigma_3 W'(y).$$

Es fácil verificar que los operadores de supercarga son:

$$Q_A = (p_y - iW(y)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

$$Q_A^\dagger = (p_y + iW(y)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

que satisfacen el álgebra de las Ecs. (3.12) y (3.13). Para la segunda representación tenemos que

$$\left[- \begin{pmatrix} -(E - m) & ip_x - p_y + i\check{W}(y) \\ ip_x + p_y + i\check{W}(y) & E + m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.8)$$

De manera análoga que para la primera representación la Ec. (7.8) se puede escribir como un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden;

$$-\partial_y^2 \phi_1 + [W^2(y) + W'(y)] \phi_1 = (E^2 - m^2) \phi_1, \quad (7.9)$$

$$-\partial_y^2 \phi_2 + [W^2(y) - W'(y)] \phi_2 = (E^2 - m^2) \phi_2. \quad (7.10)$$

Por lo que el Hamiltoniano SUSY queda como:

$$H_B = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = (p_y^2 + W^2(y)) I + \sigma_3 W'(y).$$

Los operadores de supercarga son:

$$Q_B = (p_y + iW(y)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

$$Q_B^\dagger = (p_y - iW(y)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

por lo tanto, observamos que lo que distingue el hamiltoniano de una representación con el de la otra es el signo que acompaña a la matriz σ_3 .

$$\begin{pmatrix} H_A & \\ e^- \uparrow & e^+ \downarrow \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} H_B & \\ e^- \downarrow & e^+ \uparrow \end{pmatrix}$$

A continuación utilizaremos este mapeo para resolver el problema del Cap. 5 para la representación reducible.

7.2. Representación Reducible

En esta sección extenderemos las ideas de SUSY-QM al caso de la ED reducible. Partimos de la Ec. de Dirac para la representación de matrices γ^μ dada en (5.7). Utilizando nuevamente la sustitución mínima:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m_e - m_0 \tau) \psi = 0, \quad (7.13)$$

descomponiendo el espinor de 4 componentes en biespinores, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_3 E - i(\sigma_1 \Pi_x + \sigma_2 \Pi_y) - m_+) \psi^+ = 0, \quad (7.14)$$

$$(-\sigma_3 E + i(\sigma_1 \Pi_x + \sigma_2 \Pi_y) - m_-) \psi^- = 0. \quad (7.15)$$

Resolvamos primero la Ec. (7.14) descompongamos el biespinor ψ^+ en dos de modo que:

$$\begin{aligned} (i(p_x + eBy) + p_y) \psi_2^+ &= (E - m_+) \psi_1^+, \\ (i(p_x + eBy) - p_y) \psi_1^+ &= -(E + m_+) \psi_2^+, \end{aligned}$$

que tienen la forma de las Ecs. (6.2) y (6.3), realizando el mismo análisis que en la sección 6.1 llegamos a:

$$\begin{aligned} (p_q + ieBq) \psi_2^+ &= (E - m_+) \psi_1^+, \\ (p_q - ieBq) \psi_1^+ &= (E + m_+) \psi_2^+. \end{aligned}$$

Identificando $W(q) = 1/2(2eB)q$ de las Ecs. (7.2) y (7.3), obtenemos el siguiente sistema desacoplado;

$$-\partial_q^2 \phi_1^+ + [W^2(q) - W'(q)] \psi_1^+ = (E^2 - m_+^2) \psi_1^+, \quad (7.16)$$

$$-\partial_q^2 \phi_2^+ + [W^2(q) + W'(q)] \psi_2^+ = (E^2 - m_+^2) \psi_2^+. \quad (7.17)$$

Aquí, los potenciales compañeros supersimétricos son

$$V_\pm = \frac{1}{4} (2eB)^2 q^2 \pm eBq,$$

los cuales concuerdan con los vistos en el Cap. 2 para el Oscilador Armónico Cuántico SUSY, en donde los operadores de carga son:

$$Q_+ = (p_q - ieBq) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

$$Q_+^\dagger = (p_q + ieBq) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Estos nos permiten cambiar entre estados $\psi_1^+ \leftrightarrow \psi_2^+$ como en la figura (7.1). Ahora resolvamos la Ec. (7.10). Nuevamente descompongamos el biespinor ψ^- de modo que:

$$(i(p_x + eBy) - p_y) \psi_2^- = (E - m_-) \psi_1^-,$$

$$(i(p_x + eBy) + p_y) \psi_1^- = -(E + m_-) \psi_2^-.$$

Análogamente a ψ^+ , obtenemos un sistema de ecuaciones de segundo orden que podemos identificarlo con el Oscilador Armónico Cuántico SUSY,

$$-\partial_q^2 \psi_1^- + [W^2(q) + W'(q)] \psi_1^- = (E^2 - m_-^2) \psi_1^-, \quad (7.20)$$

$$-\partial_q^2 \psi_2^- + [W^2(q) - W'(q)] \psi_2^- = (E^2 - m_-^2) \psi_2^-, \quad (7.21)$$

nuevamente identificando $W(q) = 1/2(2eB)q$ de las Ecs. (7.2) y (7.3). Entonces los operadores de supercarga son:

$$Q_- = (p_q + ieBq) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

$$Q_-^\dagger = (p_q - ieBq) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Los cuales nos permiten cambiar entre estados $\psi_1^- \leftrightarrow \psi_2^-$ como en la figura (7.1). Por lo que las soluciones a la Ec. (7.13) son:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_n e^{-(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m_+) I'(n, p, y) \\ -\sqrt{2neB} I'(n-1, p, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_n e^{(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} \sqrt{2neB} I'(n, -p, y) \\ (|E_n| + m_+) I'(n-1, -p, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_1^- \end{pmatrix} = N_n e^{-(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2neB} I(n, p, y) \\ (|E_n| + m_-) I(n-1, p, y) \end{pmatrix}, \quad (7.26)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_2^- \end{pmatrix} = N_n e^{(i|E_n|t - ipx)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (|E_n| + m_-) I(n, -p, y) \\ \sqrt{2neB} I(n-1, -p, y) \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Ahora que tenemos nuestras soluciones veamos que interpretación física podemos darles.

7.2.1. Niveles de Landau

Ya que tenemos nuestras soluciones, analicemos sus expresiones en los diferentes niveles de Landau. Para $n > 0$, los niveles de energía son doblemente

degenerados, mientras que para $n = 0$ los dos estados son no degenerados y son de la forma

$$\begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_n e^{-(imt-ipx) - \frac{eB}{2}(y - \frac{p}{eB})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_2^- \end{pmatrix} = N_n e^{(imt-ipx) + \frac{eB}{2}(y + \frac{p}{eB})^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver entonces que en el nivel más bajo de Landau tenemos solución de fermión pesado y de anti-fermión ligero. Esto es lo que físicamente esperábamos encontrar.

No existe razón alguna para suponer que los fermiones o anti-fermiones tienen un papel predominante respecto a sus contrapartes al elegir una representación irreducible u otra para describir su movimiento. Sin embargo, es mejor trabajar siempre una representación reducible, que contiene todo el espectro de soluciones a la ecuación de Dirac y no sólo un sector. Lo interesante ahora sería encontrar dos operadores que nos permitan cambiar entre especies, es decir $\psi_{1,2}^+ \leftrightarrow \psi_{1,2}^-$, para esto utilizaremos el lagrangiano como herramienta para facilitarnos esta tarea.

7.3. Los Operadores $\mathcal{Z}_\pm$

Esta sección expone la contribución original de este trabajo. La idea es usar el Lagrangiano de Dirac “Reducible” para encontrar un operador invariante que nos permita distinguir entre las distintas especies de fermiones presentes. El operador que buscamos es el operador de proyección $\chi_\pm$ ¹;

$$\chi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau),$$

que nos permite analizar el Lagrangiano de modo que:

$$\chi_- (\mathcal{L}_{Dirac}) \chi_+ = \bar{\psi}^+ (i \not{D} - m_+) \psi^+ + \bar{\psi}^- (i \not{D} - m_-) \psi^-,$$

donde ψ^+ y ψ^- vienen dados por

$$\psi^\pm = \chi_\pm \psi.$$

De modo que los dos operadores que nos permiten cambiar entre especies serán aquellos que cumplan las condiciones siguientes:

$$\mathcal{Z}_+ \psi^+(m_+) = 0, \quad \mathcal{Z}_- \psi^-(m_-) = 0, \quad (7.28)$$

¹ $\chi_+ + \chi_- = 1, \quad \chi_\pm^2 = \chi_\pm.$

$$\mathcal{Z}_+ \psi^-(m_-) = \psi^+(m_-), \quad \mathcal{Z}_- \psi^+(m_+) = \psi^-(m_+), \quad (7.29)$$

$$[\mathcal{Z}_\pm, H] = 0. \quad (7.30)$$

Podemos verificar que estos operadores son:

$$\mathcal{Z}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Verifiquemos:

$$\blacksquare \mathcal{Z}_+ \psi^+(m_+) = 0$$

$$\mathcal{Z}_+ \psi_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (|E_n| + m_+) I'(n, p, y) \\ -\sqrt{2neB} I'(n-1, p, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\blacksquare \mathcal{Z}_- \psi^+(m_+) = \psi^-(m_+)$$

$$\mathcal{Z}_- \psi_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (|E_n| + m_+) I'(n, p, y) \\ -\sqrt{2neB} I'(n-1, p, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (|E_n| + m_+) I(n, -p, y) \\ \sqrt{2neB} I(n-1, -p, y) \end{pmatrix} = \psi_2^-.$$

$$\blacksquare [\mathcal{Z}_\pm, H] = 0$$

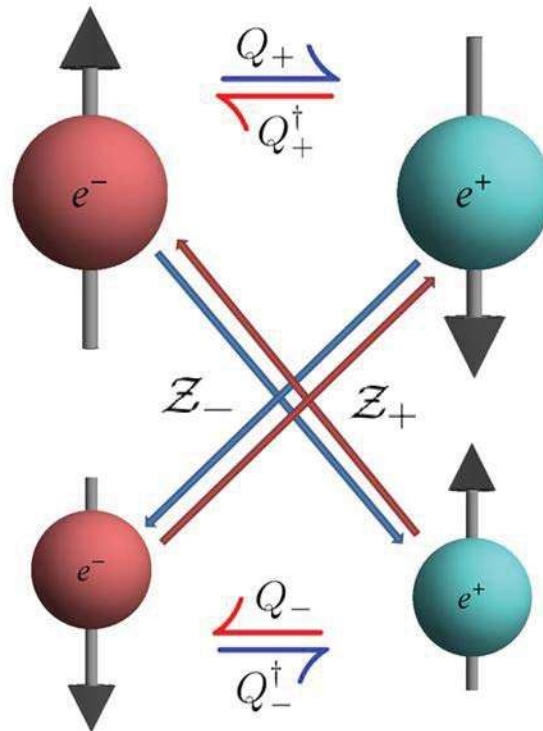
$$\mathcal{Z}_+ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_+ & ip_x + p_y & 0 & 0 \\ ip_x - p_y & m_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_- & -ip_x - p_y \\ 0 & 0 & -ip_x + p_y & m_- \end{pmatrix}$$

$$H \mathcal{Z}_+ = \begin{pmatrix} m_+ & ip_x + p_y & 0 & 0 \\ ip_x - p_y & m_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_- & -ip_x - p_y \\ 0 & 0 & -ip_x + p_y & m_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{Z}_+, H] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_- - m_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_- - m_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [\mathcal{Z}_\pm, H] = 0 \iff m_- = m_+$$

Estos operadores nos proporcionan una buena matriz de cambio de especies para el caso en el que el Lagrangiano no viola paridad, es decir cuando $m_0 = 0$.

Figura 7.1: Diagrama de la acción de $Z_{\pm}$

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado las diferencias que surgen al estudiar a la Ecuación de Dirac en el plano en comparación con lo que ocurre en $(3 + 1)$ dimensiones. Las más importantes las enlistamos abajo:

- Existen dos representaciones irreducibles inequivalentes para las matrices γ^μ .
- En $(3 + 1)$ dimensiones, existen 4 soluciones linealmente independientes. Las cuales se pueden indentificar con; partícula ($\uparrow$), partícula ($\downarrow$), anti-partícula ($\uparrow$) y anti-partícula ($\downarrow$). Mientras que en el plano únicamente existen 2 soluciones linealmente independientes en la representación irreducible. Por lo que, el espectro de soluciones es incompleto hasta que se incluyan las 2 representaciones irreducibles.
- En la representacion irreducible no se puede definir la simetría quiral porque no existe una matriz 2×2 que conmute con todas las matrices γ^μ .

Estas diferencias son la principal motivación para emplear una representación reducible que incluya las dos representaciones irreducibles. Usando esta representación reducible llegamos a las siguientes conclusiones:

- El espectro de soluciones se completa, existen 4 soluciones con la misma interpretación que se tiene en $(3 + 1)$ dimensiones.
- Se pueden definir no una, sino dos transformaciones quirales porque existen 2 matrices (γ^3 y γ^5) que conmutan con todas las matrices γ^μ . Debido a esto se pueden definir dos tipos de términos de masa distintos, por lo que surgen dos especies de fermiones, una especie pesada y una ligera.
- Además cada especie tiene sólo una orientación de espín para fermiones y una para anti-fermiones, i.e.:
 - Fermión con espín $\uparrow$ tendrá masa m_+ .
 - Fermión con espín $\downarrow$ tendrá masa m_- .

- Anti-fermión con espín $\uparrow$ tendrá masa m_- .
- Anti-fermión con espín $\downarrow$ tendrá masa m_+ .

La manera usual de resolver el problema de los fermiones en presencia de un campo magnético uniforme es utilizar las soluciones del oscilador armónico cuántico. Lo novedoso de este trabajo es que hemos introducido una teoría SUSY como herramienta matemática para solucionar dicho problema con grandes beneficios. A continuación mencionaremos brevemente los más importantes:

- Podemos realizar operaciones entre los fermiones de la misma especie, gracias a los operadores de supercarga $(Q_{\pm}$ y $Q_{\pm}^{\dagger})$ que surgen de esta teoría.
- Esta teoría SUSY nos permite distinguir fácilmente entre las soluciones de una especie u otra. Lo cual permitió innovar en la introducción de un nuevo operador $(\mathcal{Z}_{\pm})$ que permite realizar cambios entre especies. Esto es la contribución original de este trabajo.
- En el caso del Grafeno, este operador nos permite cambiar entre las subredes de las redes cristalinas con forma de panal de abeja.

El próximo paso será introducir esta herramienta para otros potenciales y analizar los nuevos operadores que puedan surgir, además de estudiar la acción del operador $\mathcal{Z}_{\pm}$ en sus soluciones. Esto para un futuro.

Bibliografía

- [1] S. Moroz. *Perturbative and non-perturbative aspects of QED₃*. Tesis, (NPI-CUP), (2007).
- [2] K. S. Novoselov y A. K. Glein. *Electric Field Effect in Atomically thin carbon films* Science. J. 306. 5696 pp 666-669.
- [3] M. Moreno y M. R. Méndez-Moreno, *Procc. Workshop on Hihg-Energy, phenomenology* (1992) ed. M.A. Pérez y R. Huerta (Singapore: Word Scientific) pp 365-375
- [4] P. Vahle, B. Ram, Am. J. Phys. 65, 112 (1997).
- [5] S. Bruce. *A supersymmetric Hamiltonian from minimal coupling*. Am. J. Phys. 63. (1995).
- [6] G. Murguia, A. Raya, E. Reyes y A. Sánchez, *The Electron Propagator in External Electromagnetic Fields in low Dimensions* Am. J. Phys. 78. 700 (2010).
- [7] Ma. de J. Anguiano y A. Bashir, *Fermions in Odd Space-Time Dimensions: Back to basics*, (2005)
- [8] E. D. Reyes, *Inestabilidad del Vacío por Campos Electromagnéticos en Bajas Dimensiones*. Tesis, (PCF-UNAM), (2010).
- [9] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, (2004)
- [10] A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*,
- [11] F. Cooper, A. Khare y U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (1995)..
- [12] F. Cooper, A. Khare y U. Sukhatme. *Supersymmetry and Quantum Mechanics*. (1995).
- [13] P. G. Freund. *Introduction to Supersymmetry*. (1986).
- [14] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (2008).

- [15] F. Halzen, A. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (1984)
- [16] J. Bjorken, S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*,
- [17] F. D. M. Haldane, *Model of a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly”*, (1988).
- [18] Matias