



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

Soluciones Múltiples a las Ecuaciones de Schwinger-Dyson para el Propagador del Fermión en QED3

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

KHEPANI RAYA MONTAÑO

ASESOR

DR. ADNAN BASHIR

MORELIA, MICH., FEBRERO DE 2011



Soluciones Múltiples a las Ecuaciones de Schwinger-Dyson

$$\text{---}\bullet\text{---}^{-1} = \text{---}\text{---}^{-1} - \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}$$

Khépani Raya Montaña

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Tesis para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Asesor:

Dr. Adnan Bashir

Febrero, 2010. Morelia, Michoacán

1. Sinodal:

2. Sinodal:

3. Sinodal:

Fecha de Defensa:

Presidente de la mesa de sinodales:

Resumen

Estudiamos la ecuación de Schwinger-Dyson (ESD) para el propagador del fermión en la Electrodinámica Cuántica en el Plano (QED3) en la aproximación arcoiris. El límite quiral exhibe múltiples soluciones nodadas en adición a la solución no-nodal que admite la interpretación física usual de ruptura dinámica de simetría quiral. Arriba de cierto valor crítico m_{cr} de la masa desnuda del fermión, sólo la solución no nodada y la perturbativa sobreviven. Nosotros argumentamos que la mayoría de nuestros resultados son más generales y pueden aplicarse a las ESD de otras teorías.

A mi familia ...

Agradecimientos

Quiero agradecer a...

Índice general

1. Introducción	1
2. Propagadores	3
2.1. Propagador del Fermión	3
2.2. Propagador del Fotón	5
2.3. Lagrangiano	6
2.3.1. Simetrías del Lagrangiano	8
2.4. Reglas de Feynman	9
3. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	13
3.1. Propagador del Fermión	16
3.2. Propagador del Fotón	18
3.3. Propagador del Fermión a un Lazo	18
3.3.1. Función de Masa $M(p)$	19
3.3.2. Renormalización de la Función de Onda $F(p)$	20
3.3.3. Parametrización de Feynman	21
4. Soluciones para el Propagador del Fermión	23
4.1. Enfoque Analítico	23
4.1.1. Despreciando el Término Cuadrático	24
4.1.2. Término no Lineal como Constante	25
4.2. Solución Numérica	26
4.2.1. Implementación	26
4.3. Solución no Perturbativa	28

5. Soluciones Múltiples	30
5.1. Soluciones	31
5.2. Tratamiento Analítico y Numérico	34
5.2.1. Ecuación de Eigenvalores	34
5.2.2. Ecuación Diferencial	36
5.3. Refinamientos	37
5.3.1. Logaritmo Completo	37
5.3.2. Transformaciones LKF	39
5.3.3. Acoplamiento en QED3	42
6. Resultados y Discusión	43
Anexo A - Matrices Gamma	45
Anexo B - Integrales Angulares	48
Referencias	50

1

Introducción

Debido al hecho de que nuestra completa existencia se debe a que la materia existe e interactúa, el estudio de la física de partículas ha crecido considerablemente en las últimas décadas. En particular, preguntas como “¿Cómo es que las partículas de materia se unen para formar las complicadas estructuras compuestas de la naturaleza?” o “¿Cuál es el origen de masa?” sólo pueden ser contestadas en una manera científicamente verificable mediante la física de partículas.

El origen de masa ha sido estudiado por muchos años. El mecanismo de Higgs explica cómo es que de manera espontánea las partículas fundamentales adquieren masa, pero no explica, como es posible adquirir masa mediante las autointeracciones. Por ejemplo, los quarks up y down tienen una masa de alrededor de 5 MeV, pero los protones y neutrones (formados por tres de estos quarks) tienen una masa de casi 1 GeV. Este hecho sólo es explicable mediante la Generación Dinámica de Masas (GDM) [1, 2].

Cuando, por cualquiera de los mecanismos anteriores, las partículas adquieren masa, decimos que ha ocurrido Ruptura de la Simetría Quiral (En el capítulo 2 se explica más a detalle este fenómeno). Si la simetría fue rota de manera espontánea, por el mecanismo de Higgs, se le llama Ruptura Espontánea de la Simetría Quiral. Si fue rota mediante las interacciones, le llamamos Ruptura Dinámica de la Simetría Quiral.

La importancia de la Ruptura de la Simetría Quiral para la interacción fuerte ha sido largamente estudiada [3, 4, 5], pues es a través de este mecanismo que los quarks obtienen su masa efectiva. Sin embargo, la interacción fuerte se estudia mediante la Cromodinámica Cuántica (QCD), que es una teoría muy difícil de resolver en el régimen infrarrojo. Nosotros estudiaremos una teoría más simple, la Electrodinámica Cuántica

en el Plano (QED3), que comparte varias características de QCD como el confinamiento, Generación Dinámica de Masas[2] y formación de estados ligados.

Una manera de estudiar el problema de la GDM es mediante los propagadores, pues el polo del propagador corresponde a la masa de la partícula. Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD), derivadas hace más de cuatro décadas, representan una manera muy natural de estudiar los propagadores en el continuo. Recientemente se ha encontrado que la función de masa de los quarks presenta múltiples soluciones [3]. Nosotros llevamos a cabo un estudio paralelo pero en una teoría más simple QED3, encontrando también múltiples soluciones que desaparecen gradualmente a medida que la masa desnuda m_0 se incrementa. Nuestro estudio fué realizado utilizando la aproximación arcoiris, en la norma de Landau, pero fué refinado sistemáticamente y hemos encontrado resultados en otras normas y truncamientos.

En el segundo capítulo discutiremos como obtener los propagadores libres para el fermión y el fotón, algunas propiedades del lagrangiano de QED y las respectivas reglas de Feynman. En el tercer capítulo haremos una derivación de las ESD para el propagador del fermión y fotón y resolveremos el propagador del fermión a un lazo. En el siguiente capítulo mostraremos distintas maneras de tratar analítica y numéricamente las ESD para el propagador del fermión, y mostraremos las soluciones usuales. En el quinto capítulo mostraremos soluciones no usuales a las ESD, y mediante tratamientos analíticos y numéricos mostraremos como la ESD para el propagador del fermión nos da información sobre la multiplicidad de las soluciones. También hablaremos sobre refinamientos de nuestro trabajo, mostrando como extrapolar nuestros resultados a diferentes normas, acoplamientos y truncamientos. Finalmente mostraremos resultados, conclusiones y discusiones sobre nuestros resultados.

2

Propagadores

Los propagadores son funciones de Green que se usan para representar la contribución de las partículas virtuales en las líneas internas de los diagramas de Feynman. Dan la amplitud para una partícula que viaja entre dos puntos del espacio-tiempo.

2.1. Propagador del Fermión

Los electrones son fermiones de espín 1/2 y por lo tanto satisfacen la ecuación de Dirac. Para un fermión libre de masa desnuda m y función de onda $\psi_0(x)$, la ecuación de Dirac se escribe

$$(i\partial - m)\psi_0(x) = 0 , \quad (2.1)$$

donde $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ y γ^μ son las matrices de Dirac. Si queremos tomar en cuenta la interacción del fermión con el campo electromagnético, realizamos la sustitución mínima, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, y reescribimos la ecuación de Dirac de la siguiente manera

$$\begin{aligned} ((i\partial - e\gamma_\mu A^\mu) - m)\psi(x) &= 0 \\ (i\partial - m)\psi(x) &= e\mathcal{A} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Buscando una solución a la ecuación anterior, el propagador del fermión aparece de una manera muy natural. Resolvemos esta ecuación utilizando el método de la función de Green. Para ello, tenemos que construir una función $G(x, y)$ que satisfaga

$$(i\partial - m)G(x, y) = \delta^4(x - y) . \quad (2.3)$$

Después, uno puede ver que la siguiente función de onda formalmente satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo externo,

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y G(x, y) e\mathcal{A}\psi(y) . \quad (2.4)$$

Notemos ahora que en ambos lados de la ecuación aparece ψ . Así, no podemos predecir la solución sin saberla en primer lugar ¹. Antes de proseguir, verifiquemos que $\psi(x)$ resuelve la ecuación de Dirac

$$(i\partial - m)\psi(x) = \int d^4y (i\partial - m)G(x, y)e\mathcal{A}\psi(y) = \int d^4y \delta^4(x - y)e\mathcal{A} = e\mathcal{A}\psi(x) .$$

Establecido esto, para tener una representación más cómoda, transformamos $G(x, y)$ al espacio de momentos

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip \cdot (x-y)} . \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.3), y escribiendo $\not{p} \equiv i\partial$, obtenemos

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\not{p} - m) S_F(p) e^{-ip \cdot (x-y)} = \delta^4(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} . \quad (2.6)$$

De la última igualdad, concluimos que

$$(\not{p} - m) S_F(p) = 1 \Rightarrow S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} . \quad (2.7)$$

Tener $\not{p}$ en el denominador es un abuso de notación, pues es una matriz. Para evitar este abuso, tenemos que buscar una expresión más conveniente. Esta expresión se obtiene al multiplicar y dividir por $\not{p} + m$.

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} . \quad (2.8)$$

Esta ecuación representa el propagador del fermión a nivel árbol en la teoría de perturbaciones. El polo en la expresión anterior determina la masa física del fermión. En la siguiente sección obtendremos el propagador del fotón. Para ello se utilizará nuevamente el método de Green en la ecuación correspondiente para el fotón.

¹En QED, el acoplamiento e es pequeño y uno puede aplicar la teoría de perturbación iterativamente. Pero en teorías como QCD, este no es necesariamente el caso. El acoplamiento es dependiente del momento y este se vuelve un número grande para momentos pequeños, tal que la teoría de perturbaciones falla en algún punto.

2.2. Propagador del Fotón

El fotón tiene espín 1 y se describe mediante las ecuaciones de Maxwell. Antes de proceder a obtener el propagador del fotón, establezcamos una convención para escribir dichas ecuaciones. Definamos

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\equiv (V, \mathbf{A}) , \\ \mathbf{E} &\equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V , \\ \mathbf{B} &\equiv \vec{\nabla} \times \mathbf{A} , \end{aligned}$$

donde V y $\mathbf{A}$ son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente, y $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ los campos eléctrico y magnético. Establecida esta convención, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell para fotones libres de la siguiente manera :

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 . \quad (2.9)$$

En presencia de cargas y corrientes j^μ externas,

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu . \quad (2.10)$$

Tomando la condición de Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, la ecuación de movimiento para el fotón

$$\square^2 A^\mu = j^\mu . \quad (2.11)$$

Al igual que en el caso del fermión, procederemos mediante el método de Green, es decir, tenemos que buscar una función $G(x, y)$ que satisfaga

$$\square_x^2 G(x, y) = \delta^4(x - y) . \quad (2.12)$$

De esta manera, tenemos que

$$A^\mu(x) = \int d^4y G(x, y) j^\mu(y) . \quad (2.13)$$

Verifiquemos que $A^\mu(x)$ satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\square_x^2 A^\mu = \int d^4y \square_x^2 G(x, y) j^\mu(y) = \int d^4y \delta^4(x - y) j^\mu(y) = j^\mu .$$

Establecido esto, realizamos la transformación de $G(x, y)$ al espacio de momentos

$$G(x, y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(q) e^{-iq \cdot (x-y)} . \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.14) en (2.12), obtenemos

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D(q) \square_x^2 e^{-iq \cdot (x-y)} = \delta^4(x-y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-y)} , \quad (2.15)$$

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D(q) (-q^2) e^{-iq \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-y)} , \quad (2.16)$$

por lo tanto

$$D(q) \cdot (-q^2) = 1 \Rightarrow D(q) = -\frac{1}{q^2} . \quad (2.17)$$

El propagador del fotón se escribe como

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} D(q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} .$$

En una norma ξ covariante arbitraria,

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} . \quad (2.18)$$

La constante ξ es el parámetro que fija la norma. Al igual que en el caso anterior, el polo en el propagador determina la masa física del fotón, en este caso $q^2 = 0$. Los propagadores también pueden ser obtenidos directamente del Lagrangiano.

2.3. Lagrangiano

Al igual que en la mecánica clásica, una vez que hemos obtenido el Lagrangiano, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, encontramos las ecuaciones de movimiento. De esta manera, podemos encontrar, con el Lagrangiano de QED las ecuaciones de movimiento correspondientes. El Lagrangiano de QED incluye la información de los fermiones que interactúan a través de los fotones. Así, tiene una parte que corresponde al Lagrangiano de Dirac y una parte que corresponde al Lagrangiano Electromagnético. La parte correspondiente al Lagrangiano de Dirac, está dada por

$$\mathcal{L}_{DL} = \bar{\psi}_0(x)(i\not{\partial} - m)\psi_0(x) . \quad (2.19)$$

El subíndice DL denota que se trata del Lagrangiano de Dirac para partículas libres. $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ es lo que comunmente se conoce como el adjunto de Dirac. Para introducir el término de interacción del fermión con el campo electromagnético que genera, realizamos la sustitución mínima.

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) . \quad (2.20)$$

El Lagrangiano Electromagnético para fotones libres está dado por

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (2.21)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagnético. De esta manera, el Lagrangiano de QED se escribe como

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \quad (2.22)$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, resolvemos las respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos ψ y A^μ . Comencemos con el campo ψ

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial \psi} &= 0 \\ \partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu) + e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu + m\bar{\psi} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tomando el complejo conjugado a (2.23), obtenemos

$$(i\partial - m)\psi(x) = eA\psi(x) . \quad (2.24)$$

Esto corresponde a la Ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético. Ahora obtengamos las ecuaciones de movimiento para el campo A^μ

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial A_\mu} &= 0 \\ \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= 0 . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Utilizando el hecho que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, reescribimos (2.25)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu . \quad (2.26)$$

Podemos escribir el Lagrangiano de QED (2.22) de una manera más general.

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (2.27)$$

donde ξ es el parámetro de norma. La razón por la que no suele escribirse este último término es por la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Sin embargo, a nivel de operadores, es necesario escribir este término que fija la norma. Nótese que si tomamos el inverso del operador diferencial entre los campos fermiónicos de $\bar{\psi}$ y ψ , obtenemos el propagador del fermión. A continuación veremos algunas simetrías del Lagrangiano de QED.

2.3.1. Simetrías del Lagrangiano

Notemos que el Lagrangiano (2.27) es invariante bajo las transformaciones simultáneas

$$\begin{aligned}\psi(x) \rightarrow \psi'(x) &= \psi(x)e^{ie\Lambda(x)} , \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)} , \\ A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial\Lambda(x) ,\end{aligned}$$

es decir, tiene una simetría de norma local Abeliana $U(1)$, con el fotón como el bosón de norma. Nosotros estamos particularmente interesados en la Ruptura Dinámica de la Simetría Quiral (RDSQ) del Lagrangiano dado en (2.27). Para entender el origen de la simetría quiral, definamos

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 ,$$

que verifica las siguientes propiedades:

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 , \quad (\gamma^5)^2 = I .$$

Si realizamos la transformación $\psi \rightarrow \psi e^{i\theta\gamma^5}$, llamada transformación quiral, en el Lagrangiano de QED, asociada a ella tenemos la corriente quiral $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, que satisface

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi . \quad (2.28)$$

Para el caso no masivo, $m = 0$, la corriente quiral se conserva y esto implica que la simetría quiral es una simetría del Lagrangiano. En capítulos posteriores veremos la manera en que, incluso comenzando con fermiones no masivos, es posible romper de manera dinámica la simetría quiral debido a las autointeracciones, otorgándoles masa a los fermiones. La herramienta necesaria para estudiar esta ruptura de simetría de Lagrangiano son los propagadores. A nivel no perturbativo, una manera de estudiar el problema en el continuo es a través de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson. Para estudiar esto, primero necesitamos establecer los diagramas de Feynman y las reglas matemáticas asociadas con ellos.

2.4. Reglas de Feynman

La derivación matemática más formal de las reglas de Feynman es a partir del Lagrangiano. Nosotros derivaremos las reglas de Feynman de una manera más intuitiva[6], que además nos permitirá analizar mejor el significado físico de cada término. El electrón libre de momento p^μ se describe por una función de onda de cuatro componentes $\psi_0(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}$ que satisface la ecuación de Dirac. Para incluir la interacción del electrón con el campo electromagnético, realizamos la sustitución mínima, como hemos mencionado anteriormente. Reescribamos la ecuación de Dirac de la siguiente manera

$$(i\partial - m)\psi(x) = \gamma^0 V \psi(x) , \quad (2.29)$$

donde la perturbación está dada por

$$\gamma^0 V = e\gamma_\mu A^\mu .$$

De esta forma logramos llevar (2.29) a la forma $(E + \dots)\psi = V\psi$, similar a la ecuación de Schrödinger. Para calcular la amplitud para la dispersión de un fermión en un estado ψ_i a un estado ψ_f , a primer orden de la teoría de perturbación tenemos

$$T_{fi} = -i \int d^4x \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) = ie \int d^4x \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i . \quad (2.30)$$

Definimos

$$j_\mu^{fi} \equiv -e\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i = -e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x} .$$

Entonces podemos reescribir la ecuación (2.30) como

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi} A^\mu . \quad (2.31)$$

El término j_μ^{fi} puede ser asociado a una corriente de transición entre estados iniciales (i) y finales (f). Llamemos $j_\mu^{(1)}$ a la corriente asociada con el fermión y supongamos que el potencial A^μ , está generado por un segundo fermión con corriente asociada $j_{(2)}^\mu$. Entonces se cumple que $\square^2 A^\mu = j_{(2)}^\mu$, cuya solución, para un fotón de momento q , es

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu . \quad (2.32)$$

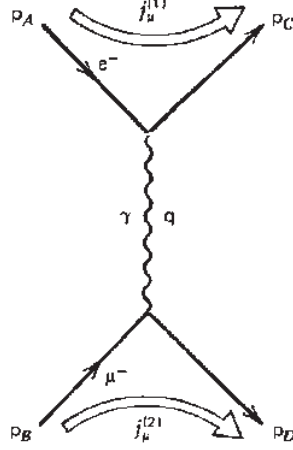


Figura 2.1: Dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ - Podemos pensar que el muón genera un potencial que interactúa con el electrón o viceversa.

Así, la ecuación (2.31) se escribe

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_\mu^{(2)} . \quad (2.33)$$

Analicemos el ejemplo de la dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$.

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int d^4x j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_\mu^{(2)} , \\ &= -i(-e\bar{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D \gamma^\mu u_B) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + P_B - P_C - P_D) . \end{aligned} \quad (2.34)$$

El término $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + P_B - P_C - P_D)$ surge por el hecho de que estamos multiplicando ondas planas sinusoidales. Físicamente representa la conservación de momento. Definamos la amplitud invariante $\mathcal{M}$ como

$$T_{fi} \equiv -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + P_B - P_C - P_D) \mathcal{M} . \quad (2.35)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= (-e\bar{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D \gamma^\mu u_B) \\ -i\mathcal{M} &= [\bar{u}_C (ie\gamma^\mu) u_A] \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) [\bar{u}_D (ie\gamma^\nu) u_B] \end{aligned} \quad (2.36)$$

De la ecuación (2.36), podemos deducir algunas reglas para escribir $-i\mathcal{M}$:

-
1. Para un fermión saliente de momento p' escribimos $\bar{u}(p')$, para un fermión entrante de momento p escribimos $u(p)$.
 2. Las antipartículas en los diagramas pueden ser interpretadas como partículas que se mueven atrás en el tiempo. Para un antifermión entrante de momento p escribimos $\bar{v}(p)$, y para un antifermión saliente de momento p' escribimos $v(p')$.
 3. Por cada vértice escribimos $ie\gamma^\mu$.
 4. Para las líneas internas del fotón (propagador) con momento q , escribimos

$$-i\Delta_{\mu\nu} = i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} . \quad (2.37)$$

Para una norma ξ , covariante y arbitraria, $\Delta_{\mu\nu}$ se escribe como

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^4} ,$$

por lo que la expresión (2.37) corresponde a $\xi = 1$ (norma de Feynman).

La función de onda para un fotón libre A^μ , satisface $\square^2 A^\mu = 0$. Esta función tiene soluciones de la forma

$$A^\mu = \epsilon^\mu(q)e^{-iq \cdot x} , \quad (2.38)$$

donde $\epsilon^\mu(q)$ es el vector de polarización, que se puede comparar con el espinor $u(p)$ para el caso del electrón. Así, podemos intuir una regla más:

- Para fotones entrantes de momento k , escribimos $\epsilon_\mu(k)$. Para fotones salientes de momento k' , escribimos $\epsilon_\mu^*(k')$.

Al igual que los fotones, los electrones también pueden aparecer en las líneas internas (como propagadores), y en este caso escribimos el propagador de la sección (2.1)

$$iS_F(p) = i\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} . \quad (2.39)$$

Para dejar un poco más claras estas últimas dos reglas, escribiremos $-i\mathcal{M}$ para los dos posibles diagramas de la dispersión de Compton.

La amplitud invariante para el primer diagrama será

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p') \left[\epsilon_\nu'^*(k')(ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu(k) \right] u(p) . \quad (2.40)$$

La amplitud invariante para el segundo diagrama es

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p') \left[\epsilon_\mu(k)(ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu'^*(k') \right] u(p) . \quad (2.41)$$

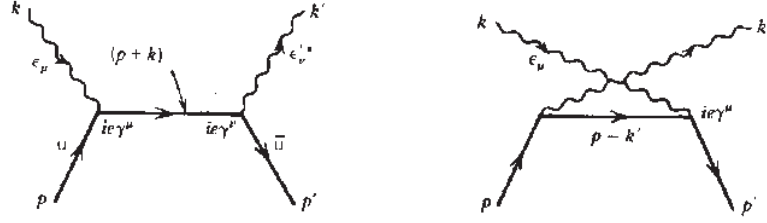


Figura 2.2: Dispersión de Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ - Dos posibles diagramas de la dispersión de Compton.

- **Lazos:** En el caso de que haya lazos, integramos sobre el momento del lazo por

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} . \quad (2.42)$$

Además incluimos un factor de -1 si se trata de un lazo de fermión y tomamos la traza de las matrices γ asociadas.

Hemos visto en este capítulo, que el propagador del fermión escrito en esta sección corresponde solamente al propagador desnudo. Las reglas que hemos derivado en esta sección nos permitirán construir las Ecuaciones de Schwinger-Dyson para el propagador completo del fermión.

3

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

En esta tesis se estudia la Generación Dinámica de Masas (GDM), un fenómeno no perturbativo, mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). El objetivo de este capítulo es explicar como surgen dichas ecuaciones y de qué manera se puede estudiar con ellas el fenómeno de la GDM. Un esquema conveniente para resolver teorías cuánticas de campos es la teoría de perturbaciones, donde se pueden realizar los cálculos necesarios orden por orden de aproximación. Sin embargo, el fenómeno de la GDM es de naturaleza no perturbativa [7, 8], al igual que el confinamiento y el problema de estados ligados. Para el estudio de estos fenómenos, uno puede recurrir a simulaciones de lattice, pero una plataforma que resulta muy conveniente son las ESD. Las ESD son una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de una teoría en estudio, en la que la función de n puntos está relacionada con la función de $n + 1$ y $n - 1$ puntos. Dichas ecuaciones deben truncarse a fin de poder obtener información física relevante [9]. No obstante, con el truncamiento surgen algunos problemas como la pérdida de invarianza de norma. Formalmente, las ESD se derivan mediante integrales de trayectoria en la Teoría Cuántica de Campos [4]. En esta tesis daremos un enfoque más intuitivo [10] para entender el contenido físico de estas ecuaciones en QED. En el capítulo anterior, derivamos mediante las ecuaciones correspondientes, el propagador del fermión. Si sólo consideramos el caso en el que el fermión no emite ni absorbe fotones, al propagador en tal caso se le llama *propagador desnudo*. Los propagadores se modifican mediante autointeracciones, y para el caso fermiónico, al propagador que representa la suma de todas las posibles autointeracciones se le llama el *propagador completo*.

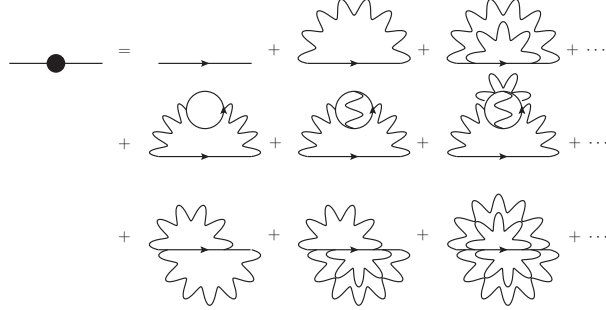


Figura 3.1: Correcciones Radiativas - Diagramas que contribuyen al propagador del fermión.

Las correcciones radiativas que aparecen en los respectivos diagramas de Feynman, se clasifican en tres tipos: Al propagador mismo del fermión, al propagador del fotón y al vértice fermión-fotón. De la manera en la que hemos escrito estas correcciones, nos resulta imposible sumarlas. Para poder sumarlas, definimos la autoenergía, representada por $\Sigma(p)$, que diagramáticamente es

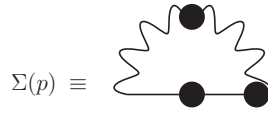


Figura 3.2: Autoenergía - De manera compacta, escribimos las correcciones radiativas.

Así como está representada, la autoenergía involucra todas las correcciones a las funciones de Green, como lo indican los puntos sobre las partes correspondientes en el diagrama. Notemos que no escribimos punto en los dos lados, pues estaríamos contando varios diagramas dos veces. Si escribimos en términos de $\Sigma(p)$ la expansión perturbativa para el propagador del fermión, tenemos

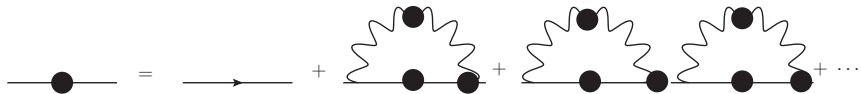


Figura 3.3: Expansión perturbativa - Propagador del fermión en términos de la autoenergía.

La figura (3.3) corresponde a la expansión

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \quad (3.1)$$

$$= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)[S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots] \quad (3.2)$$

donde $S_F(p)$ representa al propagador completo y $S_F^0(p)$ su contraparte desnuda. Sustituyendo (3.1) en la expresión entre corchetes de (3.2), tenemos

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p) \quad (3.3)$$

Para escribir tal ecuación de una manera más fácil de tratar, multiplicamos primero por la derecha por $S_F^{-1}(p)$, donde obtenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p).$$

Ahora, multiplicamos por $(S_F^0(p))^{-1}$ por la izquierda, y despejamos $S_F^{-1}(p)$

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p). \quad (3.4)$$

Hemos escrito la ESD en términos de la autoenergía y el propagador inverso:

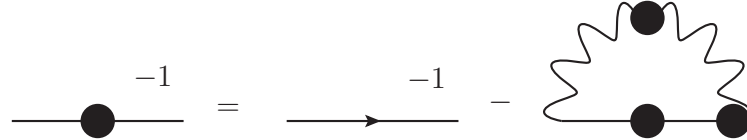


Figura 3.4: ESD Fermión - ESD para el propagador inverso del fermión.

Notemos que para $\Sigma(p)$, las funciones de Green que aparecen obedecen cada una su respectiva ESD. Las ecuaciones correspondientes para el propagador del fotón y el vértice se muestran en las figuras (3.5) y (3.6).

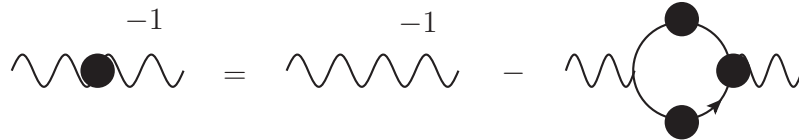


Figura 3.5: ESD Fotón - ESD para el propagador inverso del fotón.

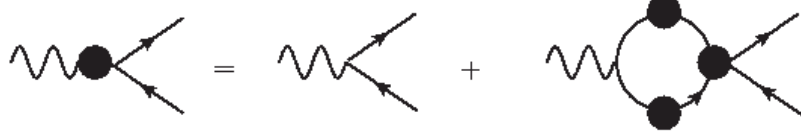


Figura 3.6: ESD vertice - ESD para el vértice fermión-fotón.

Como dijimos anteriormente, debemos truncar esta torre infinita de ecuaciones para poder extraer información física de las ESD. La manera usual de proceder, es truncar las ESD al nivel de los propagadores. En las siguientes secciones discutiremos sobre el propagador no perturbativo del fermión y del fotón.

3.1. Propagador del Fermión

Una manera muy general de escribir el propagador completo del fermión, $S_F(p)$, es expresarlo mediante una combinación lineal de matrices $(4 \times 4)I$ y $\not{p}$

$$S_F(p) = A(p)\not{p} + B(p) .$$

Una expresión equivalente es

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - M(p)} = \frac{F(p)(\not{p} + M(p))}{p^2 - M^2(p)} . \quad (3.5)$$

Llamamos a $F(p)$ la renormalización de la función de onda. $M(p)$ corresponde a la función de masa. Notemos que cuando $M(p) = m$ y $F(p) = 1$, obtenemos el propagador desnudo

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} .$$

La ecuación de Schwinger Dyson para el propagador del fermión es

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p) ,$$

que se representa con la figura (3.4). Utilizando las reglas de Feynman mencionadas en el capítulo anterior, en el espacio de Minkowski, podemos construir la ESD para el propagador del fermión de la siguiente manera

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Gamma^\mu(k, p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q) , \quad (3.6)$$

donde $q = k - p$, $S_F^0(p)$ el propagador desnudo y d es la dimensión del espacio-tiempo. Nuestro estudio tiene lugar en QED3, por lo tanto $d = 3$ y la constante de acoplamiento tiene dimensiones de masa. Para el presente trabajo se utilizaron las siguientes aproximaciones :

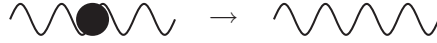


Figura 3.7: Aproximación Apagada - Propagador del fotón sin lazos fermiónicos.

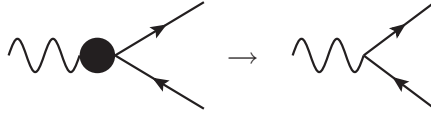


Figura 3.8: Vértice desnudo - El vértice que más contribuye.

A estas dos aproximaciones juntas, se le conoce como *Aproximación Arcoiris*, que tiene la ventaja que la ecuación del propagador electrónico se desacopla. Por lo tanto, la ESD para el propagador del fermión con la que trabajamos es

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^0(q) . \quad (3.7)$$

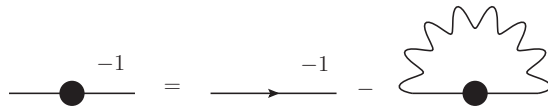


Figura 3.9: Aproximación Arcoiris - ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris.

La figura (3.9) representa diagramáticamente a la ecuación (3.7). En la siguiente sección discutiremos sobre la estructura del propagador del fotón.

3.2. Propagador del Fotón

El propagador completo del fotón consta de una parte transversal y una parte longitudinal

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = -[G(q)\Delta_{\mu\nu}^T + \xi\Delta_{\mu\nu}^L] \quad (3.8)$$

donde $G(q)$ es la renormalización de la función de onda del fotón y ξ es el parámetro de norma.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^L &= \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \\ \Delta_{\mu\nu}^T &= \frac{1}{q^2} [g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}] \end{aligned}$$

De esta manera, el propagador completo se escribe como

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = - \left[\frac{G(q)}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right]. \quad (3.9)$$

$G(q) = 1$ (aproximación apagada) corresponde al propagador desnudo $\Delta_{\mu\nu}^0$, cuya expresión es

$$\Delta_{\mu\nu}^0(q) = -\frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.10)$$

Como podemos notar, este propagador diverge en el infrarrojo, lo que enfatiza que el fotón no tiene masa.

3.3. Propagador del Fermión a un Lazo

En esta sección se escribirán de una manera conveniente y muy general las ecuaciones correspondientes al propagador del fermión, $1/F(p)$ y $M(p)/F(p)$. De manera analítica se resolverán las ecuaciones del propagador del fermión a un lazo. Comenzamos con la ESD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris.

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}^0(q), \quad (3.11)$$

que se puede escribir como

$$\frac{\not{p} - M(p)}{F(p)} = \not{p} - m + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu F(k) \frac{\not{k} + M(k)}{k^2 - M^2(k)} \gamma^\nu \left[\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right]. \quad (3.12)$$

La ecuación anterior es una ecuación matricial de matrices $n \times n$, donde no todas las entradas son linealmente independientes. Para los cálculos siguientes, se utilizarán ciertas propiedades de las matrices de Dirac, que pueden consultarse en el Anexo A. Aparecerán integrales de la forma

$$I_{m,n} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{(p \cdot k)^m}{(q^2)^n}, \quad (3.13)$$

la manera de solucionarlas, y soluciones para algunos valores de m y n pueden consultarse en el Anexo B.

3.3.1. Función de Masa $M(p)$

Para obtener $M(p)/F(p)$, comenzamos tomando la traza a la ecuación (3.12) y dividiendo entre $-d$.

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m - ie^2(\xi + d - 1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} F(k) \frac{M(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{q^2}. \quad (3.14)$$

Llevamos la ecuación (3.14) al Espacio Euclidiano realizando una Rotación de Wick, es decir, realizamos las sustituciones

$$\begin{aligned} k^2 &\rightarrow -k^2 \\ q^2 &\rightarrow -q^2 \\ k \cdot p &\rightarrow -k \cdot p \\ d^n k &\rightarrow id^n k, \end{aligned}$$

así, podemos escribir la ecuación (3.14) de la siguiente manera

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + 4\pi\alpha(\xi + d - 1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} F(k) \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{1}{q^2}, \quad (3.15)$$

donde $\alpha = e^2/4\pi$. Esta es la ecuación de $M(p)/F(p)$ para norma y dimensiones arbitrarias. Nuestro estudio se concentra en el caso de 2+1 dimensiones. Tomando $d = 3$ y considerando $k^\mu = |k|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$, escribimos $d^3 k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$. La ecuación (3.15) para 2 + 1 dimensiones se escribe entonces

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 F(k) \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{q^2}. \quad (3.16)$$

Resolviendo la integral sobre $d\theta$, que corresponde a $I_{0,1}$ obtenemos la expresión

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi p} \int_0^\infty dk k F(k) \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \quad (3.17)$$

Para el caso de 1 lazo, realizamos las siguientes sustituciones

$$M(k) \rightarrow m \quad (3.18)$$

$$F(k) \rightarrow 1. \quad (3.19)$$

De esta manera, tenemos la expresión

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m + m \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi p} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|, \quad (3.20)$$

donde el subíndice l denota que se trata de la corrección a un lazo. Podemos resolver esta ecuación analíticamente reemplazando $p \rightarrow -ip$ y utilizando que

$$\arctan \frac{z}{c} = \frac{i}{2} \ln \frac{c - iz}{c + iz},$$

donde z es un número complejo. La solución de (3.20), con la sustitución $p \rightarrow -ip$,

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m[1 + \alpha(\xi + 2)I(p^2)], \quad (3.21)$$

donde $I(p^2) = (1/\sqrt{-p^2})\arctan(\sqrt{-p^2}/m^2)$. Este resultado, al igual que el de la siguiente sección, ya había sido previamente obtenido por Bashir y Raya [11].

3.3.2. Renormalización de la Función de Onda $F(p)$

Comenzamos multiplicando la ecuación (3.12) por $\not{p}$ y tomando la traza.

$$\begin{aligned} \frac{dp^2}{F(p)} &= dp^2 - ie^2 d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \left(\frac{(d-3)p \cdot k q^2 + (2p \cdot q k \cdot q)}{q^4} \right) \\ &+ ie^2 d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \left(\frac{p \cdot k q^2 - 2p \cdot q k \cdot q}{q^4} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dividimos entre dp^2 y realizamos la Rotación de Wick

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{4\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{(d-3)p \cdot k q^2 + 2p \cdot q k \cdot q}{q^4} \right) \\ &- \frac{4\pi\alpha\xi}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{p \cdot k q^2 - 2p \cdot q k \cdot q}{q^4} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

La ecuación anterior, es una expresión de $1/F(p)$ para dimensiones y norma arbitraria. Tomemos el caso $d = 3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{4\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{2p \cdot qk \cdot q}{q^4} \right) \\ &- \frac{4\pi\alpha\xi}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{p \cdot kq^2 - 2p \cdot qk \cdot q}{q^4} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

La integral angular sobre $p \cdot qk \cdot q/q^4$ se anula, por lo tanto

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{4\pi\alpha\xi}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{p \cdot k}{q^2}, \quad (3.25)$$

la integral angular corresponde a $I_{1,1}$, por lo tanto

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{\alpha\xi}{\pi p^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k)} \left[\frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| - 1 \right]. \quad (3.26)$$

Para el caso de 1 lazo, realizamos las siguientes sustituciones (3.18) y (3.19). De esta manera, tenemos la expresión

$$\frac{1}{F_l(p)} = 1 - \frac{\alpha\xi}{\pi p^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left[\frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| - 1 \right], \quad (3.27)$$

cuya solución es

$$\frac{1}{F_l(p)} = 1 - \frac{\alpha\xi}{2p^2} (m - (m^2 + p^2)I(p^2)). \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.21) y (3.28) forman el propagador completo del fermión a un lazo [11]. En la siguiente sección veremos una manera alternativa de calcular (3.21) utilizando la parametrización de Feynman.

3.3.3. Parametrización de Feynman

Comenzamos con la ESD para el propagador del fermión a un lazo, para norma arbitraria y $d = 3$.

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m + 4\pi\alpha(\xi + 2)m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{q^2}. \quad (3.29)$$

La integral (3.29) puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m + 4\pi\alpha(\xi + 2)m \int_0^1 du \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[u(k-p)^2 + (1-u)(k^2 + m^2)]^2}. \quad (3.30)$$

Con el cambio de variable $k \rightarrow up - k$, obtenemos

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m - 4\pi\alpha(\xi + 2)m \int_0^1 du \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + p^2u(1-u) + m^2(1-u)]^2} . \quad (3.31)$$

La integral sobre d^3k es de la forma

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + s^2(u)]^2} , \quad (3.32)$$

cuya solución es $1/(8\pi s(u))$ [12], y $s^2(u) = p^2u(1-u) + m^2(1-u)$. La ecuación (3.31) la escribimos como

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m - 4\pi\alpha(\xi + 2)m \int_0^1 \frac{du}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2u(1-u) + m^2(1-u)}} . \quad (3.33)$$

Ahora realizamos el cambio de variable $u \rightarrow 1 - u$

$$\frac{M_l(p)}{F_l(p)} = m + \frac{\alpha(\xi + 2)m}{2} \int_0^1 du \frac{1}{\sqrt{(p^2 + m^2) - u^2p^2}} . \quad (3.34)$$

La solución a la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{M_l(p)}{F_l(p)} &= m \left[1 + \alpha(\xi + 2) \frac{1}{p} \arcsen \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right] \\ &= m \left[1 + \alpha(\xi + 2) \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{m} \right] , \end{aligned} \quad (3.35)$$

que reproduce (3.21) cuando se revierte el cambio de variable $p \rightarrow -ip$.

Hemos calculado de manera analítica las correcciones al propagador del fermión a un lazo. Encontrar soluciones a las ecuaciones (3.17) y (3.26), que forman el propagador completo para el fermión, es un problema un tanto más difícil de abordar. En el siguiente capítulo se analizarán diferentes maneras de encontrar soluciones analíticas y numéricas a tales ecuaciones.

4

Soluciones para el Propagador del Fermión

En este capítulo mostraremos varias maneras en las que uno puede resolver la ESD para el propagador del fermión en QED3 de manera analítica, y haremos un estudio amplio de como resolverla de manera numérica, que es el objetivo principal del trabajo. Estaremos trabajando en la norma de Landau ($\xi = 0$), donde $F(p) = 1$ (3.25), y por tanto, la ESD a resolver es

$$M(p) = m + \frac{2\alpha}{\pi p} \int_0^\infty dk \, k \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \quad (4.1)$$

4.1. Enfoque Analítico

De la manera en que está escrita, la ecuación (4.1) no se puede resolver analíticamente. Para poder hacerlo, uno tiene que hacer algunas consideraciones.

1. El término no lineal, $M^2(k)$ es el principal causante de problemas al momento de resolver analíticamente. Sin embargo, para $k^2 \gg M^2(k)$, uno puede despreciar su contribución ($M^2(k) \approx 0$). Uno también puede aproximar $M^2(k) = m_{din}^2$ para $k^2 \rightarrow 0$, es decir, a la masa generada dinámicamente.
2. Lo que más nos interesa, es el comportamiento en el infrarrojo y en el ultravioleta de la función de masa (para momentos muy pequeños o muy grandes). Una aproximación que funciona muy bien para el logaritmo de la ecuación (4.1) es

entonces

$$\ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \approx \frac{2k}{p} \theta(p-k) + \frac{2p}{k} \theta(k-p) . \quad (4.2)$$

Establecido ésto, buscaremos resolver analíticamente la ESD para el propagador del fermión de dos diferentes maneras: (i) despreciando el término cuadrático y aproximando el logaritmo a (4.2), y (ii) tomando $M^2(k) = m_{din}^2$.

4.1.1. Despreciando el Término Cuadrático

Utilizando (4.2), uno puede reescribir (4.1) de la siguiente manera:

$$M(p) = m + \frac{4\alpha}{\pi} \left[\int_0^p dk \frac{k^2}{p^2} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} + \int_p^\infty dk \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \right] , \quad (4.3)$$

ahora intentaremos escribirla como ecuación diferencial [13]. Tomamos la derivada con respecto a p , y despejamos $1/p^3$

$$p^3 M'(p) = -\frac{4\alpha}{\pi} \int_0^p \frac{k^2}{p^2} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} , \quad (4.4)$$

tomamos una vez más la derivada para deshacernos de la integral de la derecha

$$[p^3 M'(p)]' = -\frac{8\alpha}{\pi} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)} . \quad (4.5)$$

Si tomamos $M^2(p) = 0$, tenemos la ecuación

$$p^3 M''(p) + 3p^2 M'(p) + \frac{8\alpha}{\pi} M(p) = 0 , \quad (4.6)$$

que es una ecuación de tipo Bessel, cuya solución general es¹

$$M(p) = \frac{4e^2}{\pi^2 p} \left[C_1 J_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right) - C_2 Y_2 \left(2\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right) \right] , \quad (4.7)$$

donde J_2 y Y_2 son funciones de Bessel de orden 2 del primero y segundo tipo respectivamente. Las condiciones de frontera

$$p^3 M'(p)|_{p=0} \rightarrow 0 ,$$

$$M(p)|_{p \rightarrow \infty} \rightarrow m ,$$

¹En QED3, α tiene unidades de masa. Si fuera adimensional, como en QED4, uno podría encontrar soluciones de la forma $M(p) = p^{-s}$. Esto se discute más a detalla en el siguiente capítulo.

implican que $C_2 = m\pi/2$. La constante C_1 no puede ser determinada con estas condiciones. En el límite $p \rightarrow \infty$, para el caso $m = 0$, vemos que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M(p) = C_1 \frac{4e^2}{p^2 \pi^4} . \quad (4.8)$$

Notemos en la expresión anterior que $M(p)$ cae como $1/p^2$, que es un comportamiento esperado [1, 5, 13]. En el siguiente capítulo, retomaremos esta discusión, en particular (4.8) y se analizará con más detalle. A continuación veremos como resolver analíticamente, estableciendo el término no lineal como constante, es decir, $M^2(k) = m_{din}^2$.

4.1.2. Término no Lineal como Constante

Escribiremos $M(p)$ en función de la masa generada dinámicamente, m_{din} , en el infrarrojo [1]. Comenzamos con la ecuación

$$M(p) = \frac{\alpha}{\pi^2} \int d^3k \frac{M(k)}{(k^2 + M^2(k))q^2} , \quad (4.9)$$

recordemos que $q = k - p$. Una solución trivial es $M(p) = 0$, para buscar soluciones no triviales, definamos $h(p)$ de la siguiente manera

$$M(p) = (p^2 + m_{din}^2)h(p) . \quad (4.10)$$

Por lo anterior, uno puede escribir (4.9) como

$$(p^2 + m_{din}^2)h(p) = \frac{\alpha}{\pi^2} \int d^3k \frac{h(k)}{q} . \quad (4.11)$$

Definiendo la transformada de Fourier de $h(p)$ como

$$\phi(r) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} h(p) e^{ip \cdot r} , \quad (4.12)$$

uno puede ver que satisface la ecuación diferencial

$$\phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) + \left(m_{din}^2 - \frac{2\alpha}{r}\right)\phi = 0 , \quad (4.13)$$

cuya solución es

$$\phi(r) = C e^{-m_{din}r} . \quad (4.14)$$

Haciendo la transformada inversa para volver al espacio de momentos, la constante C se encuentra con la condición de que en el infrarrojo $M(p \rightarrow 0) = m_{din}$. El resultado entonces, para $M(p)$ es

$$M(p) = \frac{m_{din}^3}{m_{din}^2 + p^2} . \quad (4.15)$$

Observemos que al igual que en el caso anterior, decae como $1/p^2$ para $p \rightarrow \infty$.

4.2. Solución Numérica

Linealizar la función de masa (hacer $M^2(p) = 0$) es una opción muy conveniente para tratar analíticamente dicha ecuación. Sin embargo, existen algunos detalles concernientes a la linealización:

1. Hacer $M^2(p) = 0$ se puede sólo si la masa generada es tan pequeña que su cuadrado (y potencias más altas) se pueden despreciar (Análisis de Bifurcación).
2. Esta aproximación resulta en la invariancia bajo reescalamiento de $M(p)$, es decir, si $M(p)$ es solución, también lo es $aM(p)$.
3. Para la ecuación original, en el infrarrojo, el integrando no contribuye. En la ecuación linealizada si lo hace.

Uno puede buscar maneras de remediar estos problemas. Por ejemplo, poniendo un corte infrarrojo κ^2 para solventar (3), y pedir que $M(\kappa^2) = \kappa^2$ para solventar (2). En esta tesis usamos la linealización para el estudio analítico. Por otro lado, dejamos el término no lineal para el cálculo numérico.

4.2.1. Implementación

Comenzamos con la ecuación (4.3), donde hemos aproximado el logaritmo como en (4.2). Para simplificar notación, obviemos el término m_0 . Esto nos lleva a una ecuación integral de la forma

$$M(p) = \int_a^b dk \text{ Ker}(k, M(k); p) , \quad (4.16)$$

donde $Ker(k, M(k); p)$ es el kernel de la ecuación. Así, necesitamos una regla para la cuadratura, que nos permita aproximar

$$M(p) \simeq \sum_{i=1}^{n_{max}} \Delta_i Ker(k_i, M_i; p) , \quad (4.17)$$

donde Δ_i son los pesos de las cuadraturas y k_i los nodos correspondientes. M_i representa $M(k_i)$. Ahora, en lugar de lidiar con $p \in (a, b)$, trabajamos sobre una solución $M(p)$ sobre un número finito de puntos $\{p_j\}$

$$M(p_j) \simeq \sum_{i=1}^{n_{max}} \Delta_i Ker(k_i, M_i; p_j) . \quad (4.18)$$

Si hacemos $p_j = k_j \ \forall j \in \{1, \dots, n_{max}\}$, tenemos un sistema de n_{max} ecuaciones con n_{max} incógnitas. Tenemos ahora que buscar un intervalo (a, b) , tal que a sea lo suficientemente cercano a cero y b lo suficientemente grande, hemos elegido $(10^{-6}, 10^3)$. El siguiente paso es elegir una regla para la cuadratura para realizar la integración. La elección más simple sería elegir una regla trapezoidal y así tener una malla de puntos en el intervalo seleccionado. Una malla logarítmica es más apropiada, pues hay varios ordenes de magnitud involucrados. Queremos

$$n_{max} = [\log_{10}(b) - \log_{10}(a)]\mu + 1 ,$$

donde μ es el número de puntos por década. Los pesos de integración para nuestra cuadratura:

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \frac{1}{2}(p_{j+1} - p_{j-1}) , \ \forall j \in \{2, \dots, n_{max} - 1\} , \\ \Delta_1 &= \frac{1}{2}(p_2 - p_1) , \\ \Delta_{n_{max}} &= \frac{1}{2}(p_{n_{max}} - p_{n_{max}-1}) . \end{aligned}$$

Ahora, estamos listos para escribir el sistema de ecuaciones a ser resuelto

$$M_j = m_0 + \frac{4\alpha}{\pi p} \sum_{i=1}^{n_{max}} \frac{k_i M_i}{k_i^2 + M_i^2} \left\{ \frac{k_j}{k_i} \theta(i - j) + \frac{k_i}{k_j} \theta(j - i) \right\} .$$

Un estudio similar ya se había realizado [14, 15], pero su objetivo fue analizar la dependencia de norma de la solución usual. Nosotros en cambio buscamos múltiples soluciones, y estudiamos su comportamiento.

4.3. Solución no Perturbativa

El objetivo principal de este trabajo de tesis, es encontrar soluciones no perturbativas al sistema planteado en la sección anterior. Pudimos encontrar la bien conocida solución no nodada (figura (4.1))¹.

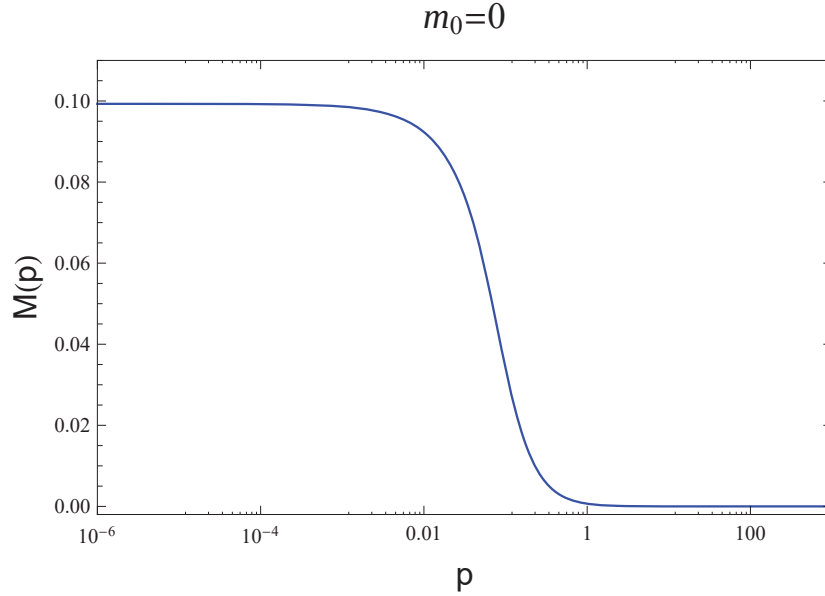


Figura 4.1: Solución Usual - Única solución no perturbativa definida positiva.

La solución no nodada ha sido ampliamente estudiada para el caso de QED3, y para QCD [3, 5, 13, 15]. Nuestro principal interés es encontrar otras soluciones, entender su comportamiento y buscar un posible significado físico.

¹Por comodidad hemos fijado $e^2 = 1$, nuestras soluciones están dadas en unidades de e^2 . Esto no causa ningún efecto negativo pues QED3 es una teoría escalable. Al final del capítulo 5 se hace una breve discusión sobre este hecho.

El polo en el propagador corresponde a la masa física del fermión (figura(4.2)).

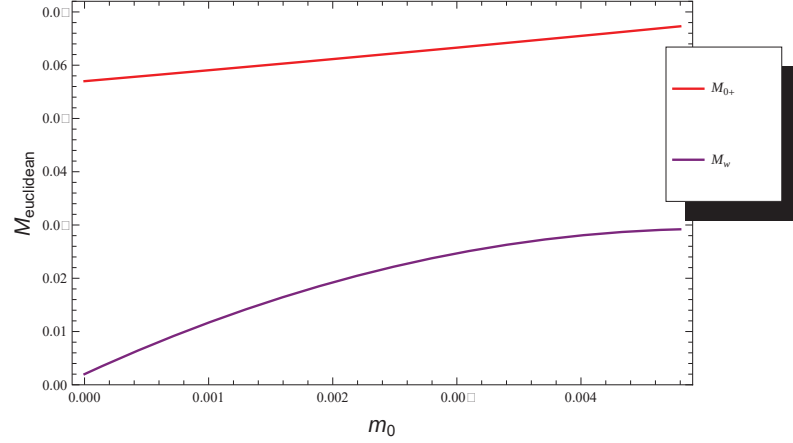


Figura 4.2: Masa física - Masa física para las soluciones no perturbativa y perturbativa (modo Wigner) como función de m_0 . La masa física corresponde al polo del propagador, es decir, a $M^2(p) = p^2$

Hemos encontrado hasta ahora más de seis soluciones, además de la usual, que desaparecen gradualmente a medida que se incrementa la masa desnuda m_0 . En el siguiente capítulo se hará un estudio amplio sobre tales soluciones, se exhibirá más a detalle su comportamiento y se discutirá sobre posibles causas y significados.

5

Soluciones Múltiples

Recientemente ha sido mostrado por Chang et al. [3] que para masas desnudas pequeñas, la ESD para el propagador del quark exhibe tres soluciones, dos no equivalentes que rompen simetría quiral y una que está conectada con la simetría quiral en el modo Wigner. Cuando la masa m_0 se incrementa sistemáticamente, sobre cierto valor crítico m_{cr} , todas salvo una solución desaparecen. Este valor m_{cr} puede ser visto como un límite superior en el dominio en el cual una expansión perturbativa en la masa de la corriente de quarks alrededor del límite quiral es válida para cantidades físicas. La multiplicidad de estas soluciones fue confirmada por Pennington et al. [5]. Basados en esta observación, nosotros realizamos un estudio paralelo en QED3. El análisis numérico llevado a cabo muestra, que en el caso de $m_0 = 0$ existen numerosas soluciones con diferentes cantidades de nodos, con solamente una definida positiva. A medida que la masa m_0 se incrementa, las soluciones con más alto número de nodos desaparecen más rápido y sobre un valor m_{cr} , sólo la típica solución no nodada sobrevive, motivando una interpretación similar a la encontrada en QCD.

5.1. Soluciones

En el límite quiral, aparecen muchas soluciones (figura (5.1)) a la ecuación (4.19). Tales soluciones van desapareciendo a medida que m_{cr} crece. Podemos notar que si $M(p)$ es solución, también lo es $-M(p)$. Salvo por la solución usual, todas alcanzan un valor m_{cr} en el que dejan de existir (figuras (5.2) y (5.3)). Aparecen también otras soluciones con mayor número de nodos han sido encontradas, pero son bastante inestables, pues desaparecen rápidamente cuando se incrementa m_0 (figura (5.4)).

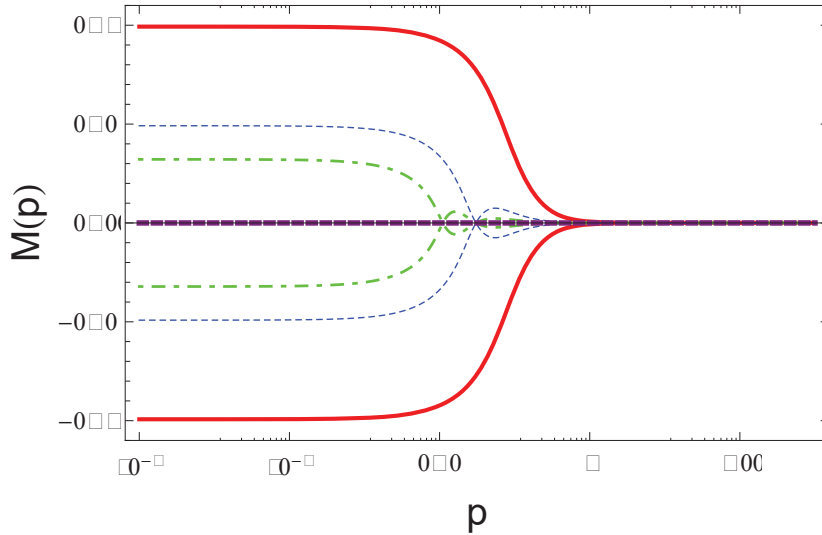


Figura 5.1: Soluciones Múltiples - Algunas soluciones encontradas en el límite quiral.

Motivados por Chang et al. [3], definimos la masa dinámica como $\bar{M} = \frac{1}{2}(M_{n+} - M_{n-})$ (figura (5.5)). Esto mide el componente dinámico, ya que el componente explícito m_0 , desaparece en la diferencia. Encontramos el análogo exacto de QCD en QED3, esto es, $\bar{M}$ disminuye a medida que m_0 crece ¹.

¹La notación para el subíndice de M es la siguiente: n representa el número de nodos, $\pm$ representa si la altura, $M(0)$, es positiva o negativa.

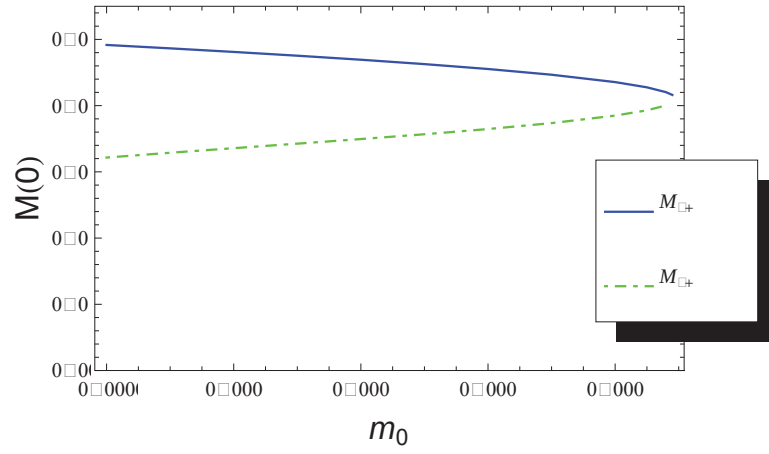


Figura 5.2: Soluciones positivas - Comportamiento de las soluciones positivas de uno y dos nodos, como función de m_0 .

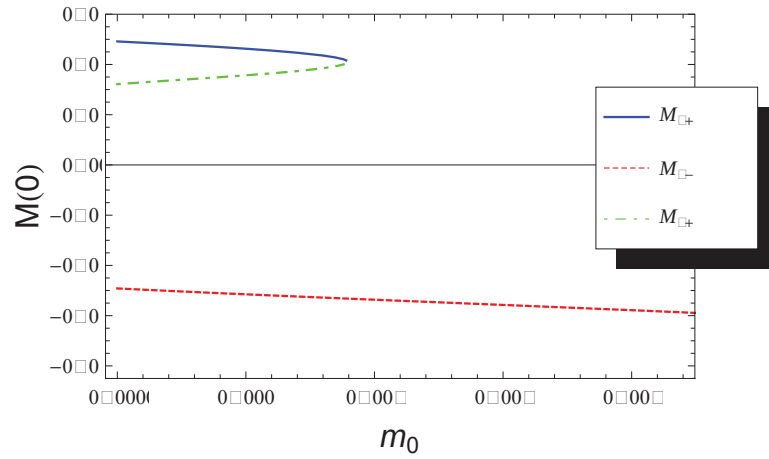


Figura 5.3: Solución negativa y positiva - La solución negativa de un nodo desaparece en $m_0 = 0.0046$, mientras que las soluciones positivas (de uno y dos nodos) desaparecen en $m_0 = 0.00088$.

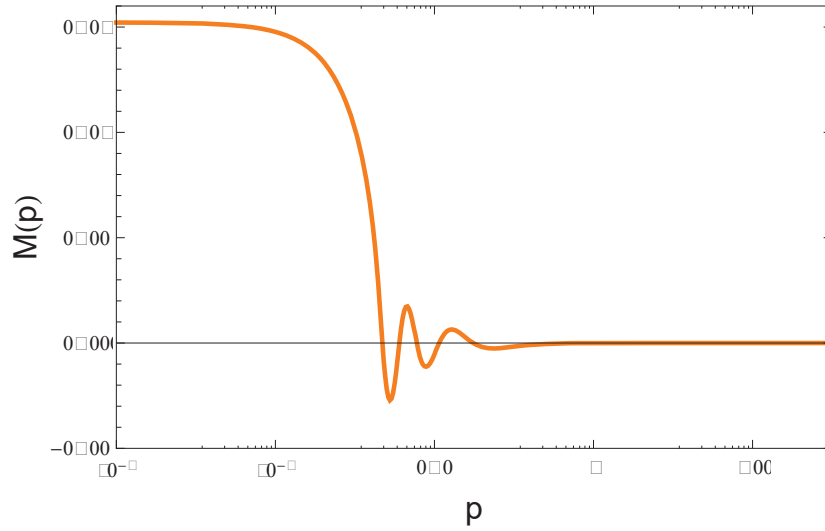


Figura 5.4: Solución Multinodada - Esta es una solución de seis nodos. Las soluciones de muchos nodos tienden a desaparecer muy rápido cuando la masa desnuda se incrementa.

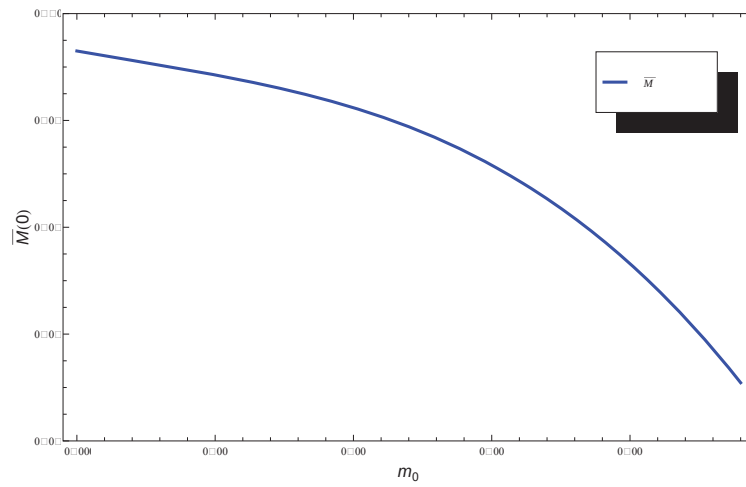


Figura 5.5: Masa dinámica - Masa obtenida dinámicamente como función de la masa desnuda m_0 , para la solución de cero nodos.

5.2. Tratamiento Analítico y Numérico

¿Por qué existen soluciones múltiples? Para responder a esta pregunta, abordaremos el problema de dos maneras diferentes:

1. **Ecuación de Eigenvalores:** Convertiremos la ecuación (4.1) en una ecuación de eigenvalores, y analizaremos como asociar tales eigenvalores con distintas soluciones.
2. **Ecuación Diferencial:** Retomaremos la ecuación diferencial (4.6) del capítulo anterior, y extraeremos la información que nos brinda sobre la multiplicidad de las soluciones.

En ambos casos, estudiaremos la versión linealizada de la ecuación correspondiente. Anteriormente ya hemos establecido bajo que condiciones es posible realizar esta aproximación, cuales son las consecuencias y como se pueden remediar.

5.2.1. Ecuación de Eigenvalores

Tomemos $M^2(k) \rightarrow 0$ en el denominador e introduzcamos un corte infrarrojo κ . En el límite quiral, esto es

$$M(p) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{\kappa}^{\infty} dk \frac{M(k)}{kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|, \quad (5.1)$$

que es de la forma

$$\lambda M(p) = \int_a^b dk \text{Kernel}(k, p) M(k). \quad (5.2)$$

Notemos que $\text{Kernel}(k, p)$ es simétrico bajo el intercambio de k y p . Esta es una ecuación homogénea de Fredholm del segundo tipo [16, 17]. Escogemos una regla para la cuadratura y reemplazamos la integral por un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas

$$\lambda M_i = \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} M_j,$$

donde $M_i = M(p_i)$ y $M_j = M(k_j)$. Los puntos p_i y k_j son tomados para que sean los mismo (numéricamente), así K_{ij} es simétrica respecto al intercambio de i y de j . Multiplicando por $A_i^{1/2}$, podemos escribir esta ecuación como

$$\lambda (A_i^{1/2} M_i) = \sum_{j=1}^n (A_i^{1/2} K_{ij} A_j^{1/2}) (A_j^{1/2} M_j).$$

Reemplazando $A_i^{1/2}M_i$ por Ψ_i y $A_i^{1/2}K_{ij}A_j^{1/2}$ por S_{ij} , obtenemos

$$\lambda\Psi = S\Psi . \quad (5.3)$$

Esta es una ecuación de eigenvalores, donde diferentes eigenvectores corresponden a diferentes soluciones de la ESD. Las soluciones además, tienen la propiedad de Sturm-Liouville, es decir, Ψ_n tiene un nodo más que Ψ_{n-1} . Estas soluciones se presentan en siguiente figura:

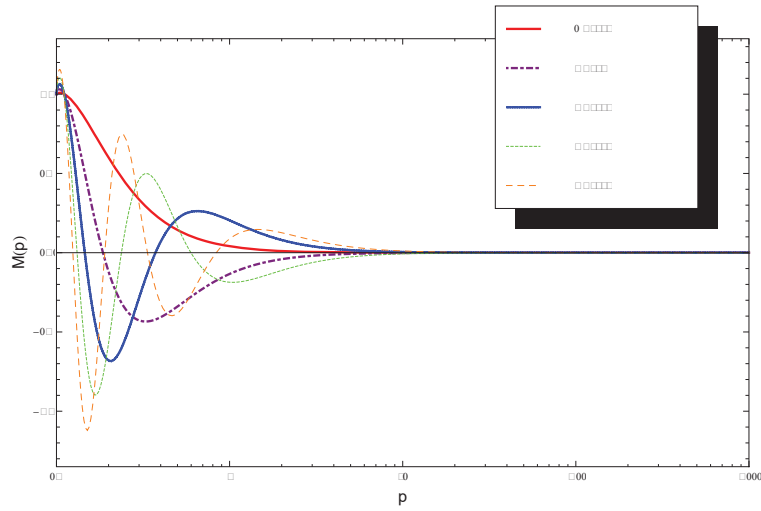


Figura 5.6: Soluciones Linealizadas - Primeras cinco soluciones a la ecuación linealizada. Notemos que a diferencia de su versión no linealizada, no existe una escala fija para las soluciones.

Este método tiene algunos inconvenientes:

- A diferencia de la versión no linealizada, la posición de los nodos no coincide.
- No existe una escala fija para las soluciones, por lo que no nos da el valor exacto de la masa generada dinámicamente, sólo nos muestra el comportamiento.

Sin embargo, uno puede obtener una torre completa de soluciones a esta ecuación con sus eigenvalores correspondientes. La ecuación linealizada tiene infinitas soluciones. Así, si la función de masa es pequeña cuando hay criticalidad, este siempre debería ser el caso. Interesantemente, todas las soluciones caen como $1/p^2$ en el ultravioleta.

5.2.2. Ecuación Diferencial

En esta sección retomaremos la ecuación (4.6), y analizaremos que información nos da ésta con respecto a las múltiples soluciones. La ecuación diferencial es

$$p^3 M''(p) + 3p^2 M'(p) + \frac{8\alpha}{\pi} M(p) = 0 , \quad (5.4)$$

cuya solución, en el caso de $m_0 = 0$ es

$$M(p) = C_1 \frac{4e^2}{\pi^2 p} J_2 \left(2 \left(\sqrt{\frac{2e^2}{\pi^2 p}} \right) \right) . \quad (5.5)$$

C_1 es una constante por determinar. Notemos que $C_1 = 0$ nos da la solución trivial $M(p) = 0$, para encontrar soluciones no triviales, fijamos dicha constante con la condición

$$M(\kappa^2) = \kappa^2 .$$

Diferentes valores de C_1 corresponden a soluciones con distinto número de nodos, encontrando el mayor número de nodos a medida que $C_1 \rightarrow 0$ como podemos observar en la figura (5.7).

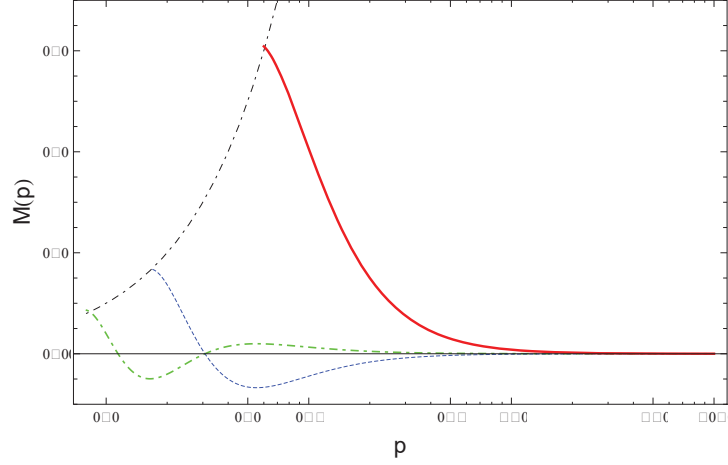


Figura 5.7: Soluciones Múltiples - Soluciones de cero, uno y dos nodos, correspondiente a $\kappa^2 = 0.06, 0.017, 0.0078$. La curva negra corresponde a $M(p) = p$.

5.3. Refinamientos

Resulta natural pensar que las soluciones nodadas son artefacto de las simplificaciones realizadas al problema. Sin embargo, nosotros pudimos seguir obteniendo dichas soluciones aún complicando el problema.

1. Se utilizó el logaritmo completo en la función de masa (4.1), es decir, no se realizó la simplificación (4.2). Su implementación se explica en la siguiente sección.
2. Mediante las transformaciones LKF, que explicaremos más adelante, encontramos soluciones en normas diferentes a las de Landau. Mostramos los resultados para $M(p)$ y $F(p)$ con $\xi = 0.1$, para las soluciones de 1 y 2 nodos.

También explicaremos un método, para extrapolar los resultados de un acoplamiento fijo a otros.

5.3.1. Logaritmo Completo

El integrando de la ecuación (4.1) no está definido para $p = k$, sin embargo las integrales correspondientes son convergentes. Esta dificultad numérica se resuelve con-

siderando que, cuando k es cercano a p , tenemos una integración de la siguiente forma

$$\int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} dk f(k) \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|.$$

Considerando que $f(k)$ es suave, tenemos que si $k \simeq p$, entonces $f(k) \simeq f(p)$. Entonces podemos hacer

$$\begin{aligned} \int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} dk f(k) \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| &= f(p) \int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} dk \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \\ &= f(p) \left[\int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} dk \ln |k+p| - \int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} dk \ln |k-p| \right] \\ &= f(p) [2\epsilon \ln(2p) - 2\epsilon(\ln(\epsilon) - 1)] \\ &= f(p)(2\epsilon) \left[\ln \frac{4p}{2\epsilon} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Tomando $2\epsilon = \Delta_i$, tenemos que para $i = j$

$$f(k_i) \ln \left| \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} \right| \Delta_i \simeq f(k_j) \left[\ln \frac{4k_j}{\Delta_j} + 1 \right] \Delta_j, \quad (5.6)$$

y así resolvemos el problema de las singularidades. La solución de dos nodos con el logaritmo completo se muestra en la siguiente figura:

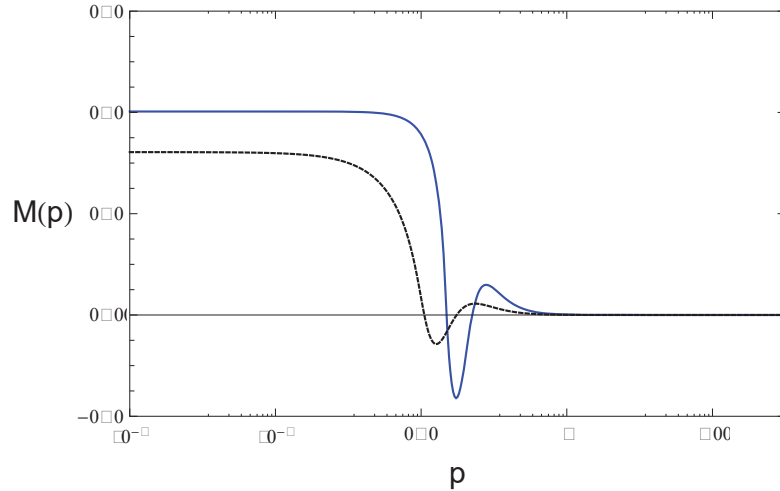


Figura 5.8: Logaritmo Completo - Solución de dos nodos con el logaritmo completo. Podemos notar que cambia un poco la posición de los polos.

5.3.2. Transformaciones LKF

En una teoría de campos, los propagadores se transforman de una manera específica bajo la variación del parámetro de norma [18]. En QED, estas transformaciones se llaman transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF), que para el caso del fermión en $2 + 1$ dimensiones es

$$S(z; \xi) = S(z; 0) e^{-\varsigma |z|}, \quad \varsigma = \xi \frac{e^2}{8\pi}. \quad (5.7)$$

Definimos las funciones

$$\sigma_s(p, \xi) \equiv \frac{M(p)F(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (5.8)$$

$$\sigma_v(p, \xi) \equiv \frac{F(p)}{p^2 + M^2(p)}. \quad (5.9)$$

Las transformaciones LKF correspondientes [19] para $\sigma_s(p, 0)$ y $\sigma_v(p, 0)$ son

$$\sigma_s(p, \xi) = \frac{\varsigma}{\pi p} \int_0^\infty dk \, k \, \sigma_s(k_0) \left[\frac{1}{\lambda^-} - \frac{1}{\lambda^+} \right], \quad (5.10)$$

$$\sigma_v(p, \xi) = \frac{\varsigma}{\pi p^2} \int_0^\infty dk \, k^2 \, \sigma_v(k_0) \left[\frac{1}{\lambda^-} + \frac{1}{\lambda^+} + \frac{1}{2kp} \ln \frac{\lambda^-}{\lambda^+} \right], \quad (5.11)$$

donde $\lambda^\pm = \varsigma^2 + (k^2 \pm p^2)$. Utilizando (5.8) y (5.9), trivialmente observamos que

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{\sigma_s(p, \xi)}{\sigma_v(p, \xi)} \\ F(p) &= \left(p^2 + \frac{\sigma_s^2(p, \xi)}{\sigma_v^2(p, \xi)} \right) \sigma_v(p). \end{aligned}$$

En las figuras (5.9) y (5.10) presentamos las soluciones de 1 y 2 nodos para la función de masa, con $\xi = 0.1$. En las figuras (5.11) y (5.12) se muestran sus correspondientes funciones de renormalización.

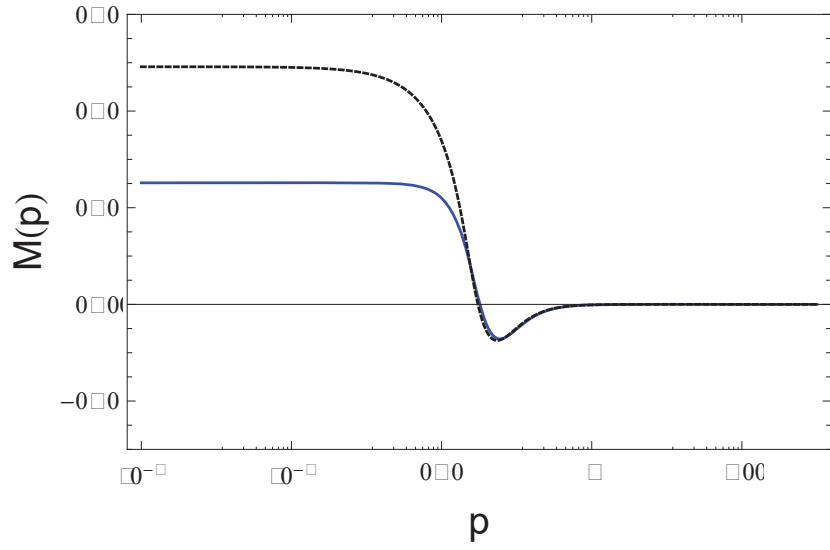


Figura 5.9: Función de masa - Función de masa de un nodo, $\xi = 0$ y $\xi = 0.1$. Podemos notar que los ceros coinciden.

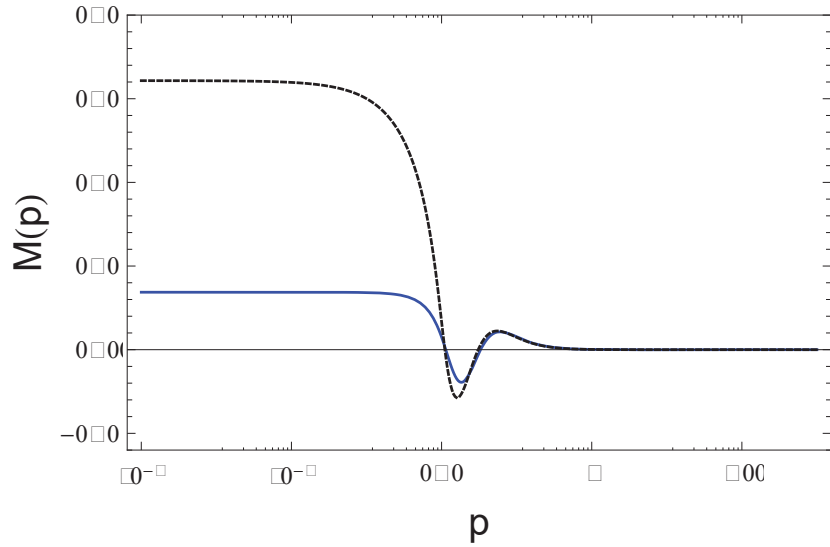


Figura 5.10: Función de masa - Función de masa de dos nodos, $\xi = 0$ y $\xi = 0.1$. Podemos notar que los ceros coinciden.

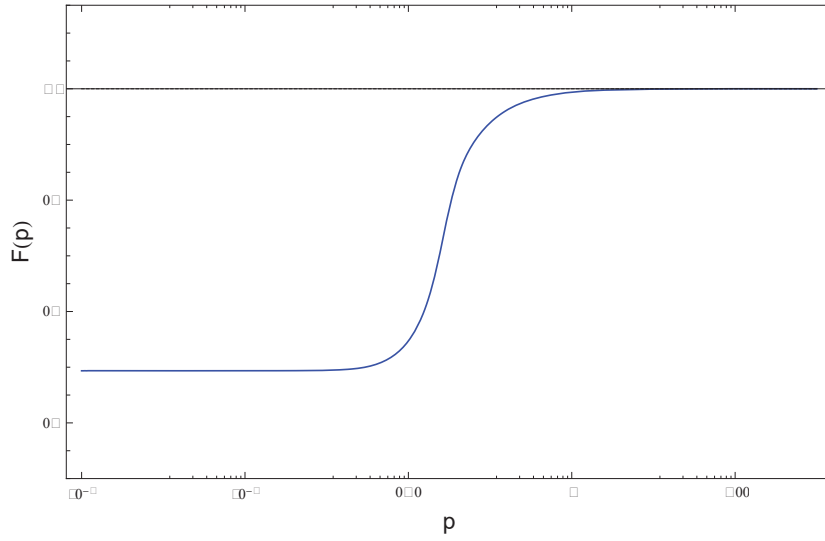


Figura 5.11: Función de renormalización - La función de normalización para la norma $\xi = 0.1$, función de masa de un nodo. $F(p) = 1$ en la norma de Landau.

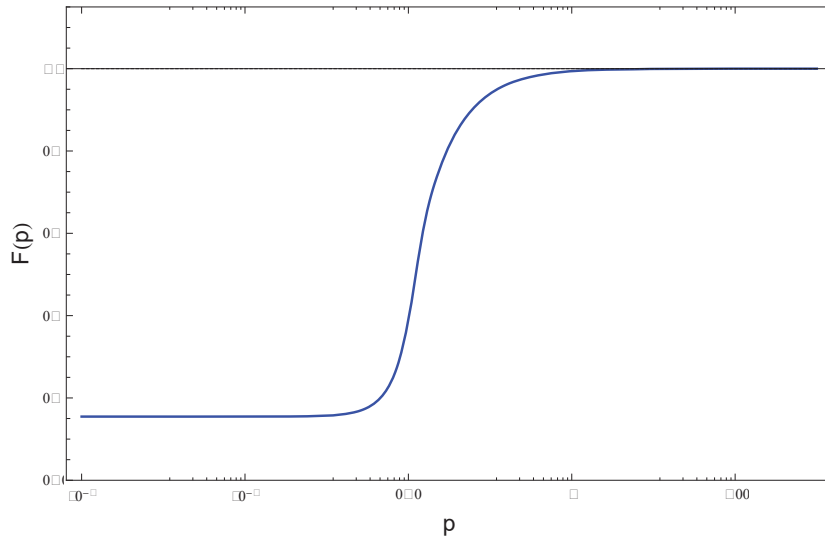


Figura 5.12: Función de renormalización - La función de normalización para la norma $\xi = 0.1$, función de masa de dos nodos. $F(p) = 1$ en la norma de Landau.

5.3.3. Acoplamiento en QED3

Un ejercicio interesante consiste en analizar que sucede con las soluciones para distintos valores del acoplamiento, pues es en teorías como QCD si es importante establecer un régimen para la constante de acoplamiento. Siguiendo a [4], encontramos una manera en la que podemos extrapolar el resultado de la función de masa para un valor de $e^2 = 1$, a cualquier otro valor

$$M(p^2; e^2) = e^2 M\left(\frac{p^2}{e^4}; 1\right). \quad (5.12)$$

Como podemos notar en la figura (5.13), QED3 es una teoría que tiene reescalamiento.

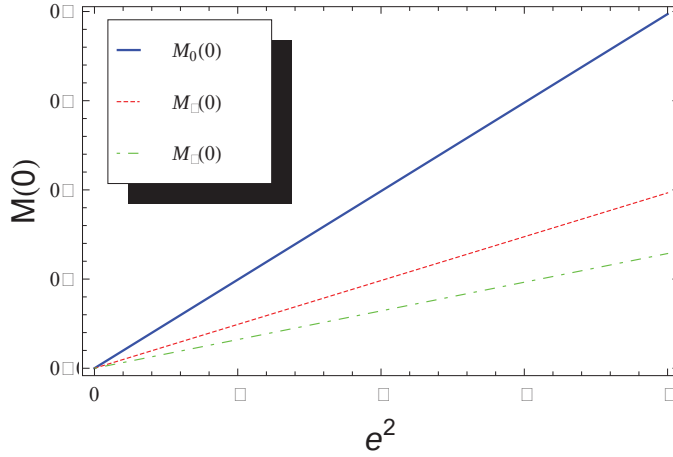


Figura 5.13: Masa generada dinámicamente - Masa generada dinámicamente en función del acoplamiento. Para cualquier valor del acoplamiento existen todas las soluciones.

Si existe una solución $M(p)$ para cierto valor de α , lo existe para todos los valores de α , a diferencia de QED4, donde hemos visto que las soluciones van a pareciendo a medida que α alcanza valores críticos [20].

6

Resultados y Discusión

Se resolvieron las ESD para el propagador del fermión en QED3, utilizando la aproximación arcoiris, con la norma de Landau. Los resultados fueron:

- Se encontraron las soluciones perturbativas (modo Wigner) y la solución de cero nodos no perturbativa (solución típica), las únicas definidas positivas.
- Se encontraron además soluciones multinodadas, de 1, 2 y 6 nodos, con $M(0)$ positiva y negativa. La solución de 6 nodos no fue estudiada a detalle, pues para un valor muy pequeño de m_0 desaparece.
- Estas soluciones desaparecen a medida que la masa desnuda m_0 se incrementa. La última solución desaparece para un valor crítico $m_{cr} = 0.0046$, dejando solamente la solución típica.
- Originalmente, habíamos realizado una aproximación para el logaritmo, después no consideramos esta aproximación y seguimos obteniendo las soluciones nodadas.
- Mediante las transformaciones LKF y reescalamiento, pudimos extrapolar nuestros resultados a otras normas y a diferentes valores del acoplamiento e^2 . Las soluciones multinodadas permanecen, dejando en claro que estas no son propias de la norma de Landau, y que existen para cualquier valor del acoplamiento (a diferencia de QED4, donde las soluciones van apareciendo a medida que se alcanzan valores críticos del acoplamiento).

-
- Con el estudio de la versión linealizada de la ecuación (4.1), pudimos descubrir de donde vienen estas soluciones, y demostrar que existe una infinidad de ellas en esta versión de la ecuación.

Mostrado todo esto, una discusión bastante novedosa y profunda queda pendiente.

- La existencia de esta variedad de soluciones podría ser efecto del truncamiento que se hizo a las ESD. Por otra parte, la presencia de múltiples soluciones en otras teorías como QCD, con otros truncamientos [3, 5], sugiere que es una característica más general de las ESD.
- ¿Cuántas soluciones hay exactamente? ¿Existe una cantidad infinita? Encontramos 6 soluciones en la versión no lineal de la ecuación. Por otra parte, al analizar la ecuación de eigenvalores, pudimos darnos cuenta que a cada eigenvalor le corresponde a una solución nodada. Al ser un sistema no degenerado, existen tantos eigenvalores como el tamaño de la cuadratura, lo que implica que en el límite donde este tiende a infinito, existen infinitas soluciones. Por otra parte, la arbitrariedad de la constante C_1 en la solución a la ecuación diferencial, deja más en claro esta infinitud en la versión linealizada de la ecuación.
- Existen múltiples soluciones, pero ¿cuál es el significado físico de ellas?. En la naturaleza sólo se observan la solución no nodada. En nuestro estudio observamos que a partir de un $m_{cr} = 0.0046$ sólo esta solución permanece, y es donde tiene lugar toda la física que podemos observar. Curiosamente, si fijamos las unidades de e^2 a GeV , este número se aproxima bastante al valor de la masa desnuda de los quarks más ligeros.

Todas estas cuestiones ya están siendo estudiadas [21].

Anexo A - Matrices Gamma

Las **matrices gamma**, $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, o matrices de Dirac, se definen mediante su relación de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad (6.1)$$

donde I es la matriz identidad de $d \times d$ y $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico del espacio de Minkowsky. En el capítulo 2, definimos la matriz $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, fácilmente se pueden verificar las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (6.2)$$

$$(\gamma^5)^2 = I \quad (6.3)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0. \quad (6.4)$$

Se utilizaron en el capítulo 3 algunas propiedades de las matrices gamma, que quizá no sean tan evidentes. A continuación se listan tales propiedades con su respectiva demostración.

Propiedades

1. $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I$
2. $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2 - d)\gamma^\nu$
3. $\text{tr}[\# \text{ impar de } \gamma] = 0$
4. $\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = dg^{\mu\nu}$
5. $\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = d(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$

Demostraciones

■ Demostración de (1).

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma_\mu &= \gamma^\mu g_{\mu\nu} \gamma^\nu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\nu\mu} \gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\nu\mu} \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (2g^{\mu\nu} I) = dI .\end{aligned}\tag{6.5}$$

Hemos usado sólo la relación de conmutación y el hecho de que $g^{\mu\nu}$ es simétrico.

■ Demostración de (2).

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= \gamma^\mu 2g_\mu^\nu I - \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\nu - d\gamma^\nu = (2-d)\gamma^\nu .\end{aligned}\tag{6.6}$$

Utilizamos la relación de conmutación y la propiedad 1.

■ Demostración de (3).

$$\begin{aligned}\text{tr}[\gamma^\mu \dots] &= \text{tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \dots] \\ &= -\text{tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \dots \gamma^5] \\ &= -\text{tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \dots] \\ &= -\text{tr}[\gamma^\mu \dots] \\ \Rightarrow \text{tr}[\gamma^\mu \dots] &= 0 .\end{aligned}\tag{6.7}$$

Hemos usado las propiedades de γ^5 .

■ Demostración de (4).

$$\begin{aligned}\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= \frac{1}{2}(\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] + \text{tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu]) \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}[2g^{\mu\nu} I] = dg^{\mu\nu} .\end{aligned}\tag{6.8}$$

■ **Demostración de (5).**

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho)] \\
&= 2g^{\rho\sigma} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] .
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Para el término de la derecha seguiremos intercambiando γ^σ con su vecino de la izquierda,

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] &= \text{tr}[\gamma^\mu (2g^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\nu) \gamma^\rho] \\
&= 2g^{\nu\sigma} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho] - \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho] .
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Nuevamente hacemos lo mismo con el término de la derecha

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho] &= \text{tr}[(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu) \gamma^\nu \gamma^\rho] \\
&= 2g^{\mu\sigma} \text{tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Sustituyendo (6.11) en (6.10), y esta última en (6.9)

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= g^{\rho\sigma} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - g^{\nu\sigma} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho] + g^{\mu\sigma} \text{tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho] \\
&= d(g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) .
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Para este último paso, hemos utilizado el hecho de que los términos dentro de la traza pueden ser ciclados y la propiedad 4.

Anexo B - Integrales Angulares

Hemos visto en el capítulo 3, que durante la derivación de la función de masa y la función de renormalización de la función de onda del fermión, aparecen integrales de la forma

$$I_{m,n} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{(p \cdot k)^m}{(q^2)^n} . \quad (6.13)$$

A simple vista, parecen integrales difíciles de resolver, pero uno puede llevarlas a una forma en la que su resolución se vuelva sencilla. Primero, recordemos que $q = k - p$, y que, por tratarse de 2 + 1 dimensiones, $p \cdot k = pk \cos \theta$. Con estas consideraciones, la expresión anterior se escribe como

$$I_{m,n} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{(pk \cos \theta)^m}{(p^2 + k^2 - 2p \cdot k \cos \theta)^n} . \quad (6.14)$$

Con el cambio de variable $u \equiv p^2 + k^2 - 2p \cdot k \cos \theta$, uno obtiene la expresión

$$I_{m,n} = \int_{(k-p)^2}^{(k+p)^2} du [a_m u^{m-n} + a_{m-1} u^{(m-1)-n} + \dots + a_0 u^{-n}] , \quad (6.15)$$

que se puede resolver de manera inmediata. Los coeficientes a_j están dados en términos de k y p

$$a_j = \binom{m}{j} (-1)^j \frac{(k^2 + p^2)^{m-j}}{2^{m+1} kp} . \quad (6.16)$$

A continuación mostramos la lista de resultados para $m, n = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
I_{00} &= 2 \\
I_{01} &= \frac{1}{kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \\
I_{02} &= \frac{2}{(k^2 - p^2)^2} \\
I_{10} &= 0 \\
I_{11} &= \frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| - 1 \\
I_{12} &= \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} - \frac{1}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \\
I_{20} &= \frac{2}{3} k^2 p^2 \\
I_{21} &= \frac{(k^2 + p^2)^2}{4kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| - \frac{k^2 + p^2}{2} \\
I_{22} &= \frac{k^4 + p^4}{(k^2 - p^2)^2} - \frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|
\end{aligned}$$

Referencias

- [1] ALFREDO RAYA. **The Origin of Mass.** *AIP Conf. Proc. CP1116,35*, 2009. 1, 25
- [2] A. BASHIR, A. RAYA, C.D. ROBERTS, AND IAN CLOET. **Confinement and Dynamical Chiral Symmetry Breaking in QED3.** *Phys. Rev. C. 78, 055201*, 2008. 1, 2
- [3] L. CHANG, Y-X. LIU, M.S. BHAGWAT, C.D. ROBERTS, AND S.V. WRIGHT. **Dynamical chiral symmetry breaking and a critical mass.** *Phys. Rev. C75, 015201*, 2007. 1, 2, 28, 30, 31, 44
- [4] C.D. ROBERTS AND A.G. WILLIAMS. **Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics.** *Prog.Part.Nucl.Phys.33:477-575*, 1994. 1, 13, 42
- [5] R. WILLIAMS, C.S. FISCHER, AND M.R. PENNINGTON. **$\bar{q}q$ condensate for light quarks beyond the chiral limit.** *Phys. Lett. B645, 167*, 2006. 1, 25, 28, 30, 44
- [6] HALZEN F. AND MARTIN A.D. **Quarks and leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.** *John Wiley and Sons*, 1984. 9
- [7] ADNAN BASHIR. **Nonperturbative fermion propagator for the massless quenched QED3.** *Phys. Lett. B491, 280*, 2000. 13
- [8] A. BASHIR AND R. DELBURGO. **The non-perturbative propagator and vertex in massless quenched QED(D).** *J. Phys. A37, 6587*, 2004. 13
- [9] A. BASHIR AND A. RAYA. **Truncated Schwinger-Dyson equations and gauge covariance in QED3.** *Few Body Syst. 41, 185*, 2007. 13
- [10] A.V. LING. **Trends in Boson Research.** *Nova. Chapter 7, pp. 183-229*, 2001. 13
- [11] A. BASHIR AND A. RAYA. **Constructing the fermion-boson vertex in three-dimensional QED.** *Phys. Rev. D64, 105001*, 2001. 20, 21
- [12] A.RAYA, J. GONZÁLEZ, S. HERNANDEZ, AND K. RAYA. **Sobre la función de Green de dos puntos a un lazo en varias dimensiones.** *En proceso*, 2011. 22
- [13] SAÚL SÁNCHEZ. **Estudio numérico de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson en QED3 en la aproximación $1/N$.** *Tesis de Maestría, UMSNH*, 2007. 24, 25, 28
- [14] ADOLFO HUET. **Generación de masas para fermiones en QED3.** *Tesis de Licenciatura, UMSNH*, 2001. 27
- [15] ADOLFO HUET. **Análisis numérico de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson.** *Tesis de Maestría, UMSNH*, 2003. 27, 28
- [16] G.B. ARFKEN AND H.J. WEBER. **Mathematical methods for physicists.** *Academid Press*, 1995. 34
- [17] J.C.R. BLOCH. **Numerical Investigation of Fermion Mass Generation in QED3.** *PhD. Thesis, University of Durham*, 2008. 34
- [18] A. BASHIR AND A. RAYA. **Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations and the fermion propagator in quantum electrodynamics.** *Physical Review D 66, 105005 (2002)*, 2002. 39
- [19] A. BASHIR, A. RAYA, C.D. ROBERTS, AND S. SÁNCHEZ. **Gauge invariance of a critical number of flavours in QED3.** *Few-Body Syst. 46, 229*, 2009. 39
- [20] G. CHENG AND T.K. KUO. **Bifurcation solutions of the Schwinger-Dyson equation.** *J. Math. Physics. 35 (12)*, 1994. 42
- [21] A. BASHIR, A. RAYA, K. RAYA, AND C.D. ROBERTS. **Multiple Solutions of the Fermion Propagator in QED3.** *En proceso*, 2011. 44