



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
"Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez"

**Estudio de las simetrías de Lorentz y CPT en
teoría no conmutativa**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

ALAN GILBERTO CHAVEZ MEZA

ASESOR

DR. EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ

MORELIA, MICH., MARZO 2011.



Estudio de las simetrías de Lorentz y CPT en teoría no-conmutativa

Alan Gilberto Chávez Meza

25 de marzo de 2011

Agradecimientos

A mis padres Gilberto Chávez y Estela Meza muchas gracias por todo el apoyo que me han dado durante toda mi vida, nunca me ha faltado nada, esto es por ustedes y para ustedes.

A toda mi familia, mis hermanas Gisela y Lizette, a todos mis tios y primos que en las buenas y en las malas han estado siempre conmigo y han hecho mi vida feliz.

A mi asesor Dr. Eduardo Tututi quien me brindó su apoyo y sus conocimientos, ha sido un gran pilar para mi formación académica.

A los Drs. Fernando Ramírez, Isidro Aranda, Gabriel Arroyo y Alberto Mendoza quienes se dieron tiempo para revisar ésta tesis y aportaron sus ideas para mejorar este trabajo.

A mis amigos Marco Bedolla, Francisco Rivera, Belem Vázquez, Gustavo Rodríguez, Nancy Magaña, Miriam Piña, José Angel Ramírez, Gabriel Mellado, Fabian Villa, Cristina Salto, Rafael Ballesteros, Mario Sánchez, Francisco Posadas, Oscar Labra, Sergio Calderón, entre otros, quienes me han brindado su amistad y compañía.

A mi novia Maricela Rodriguez que ha estado conmigo en la elaboración de esta tesis y me ha motivado siempre.

A la facultad de Cs. Físico-Matemáticas de la UMSNH y a todo su cuerpo académico y administrativo por haber sido de gran importancia para mi formación.

Al **CONACYT** por el apoyo brindado a través del proyecto **No. 106278**.

Índice general

1. Introducción	3
2. Teorías de Campos	6
2.1. Formalismo No Conmutativo	6
2.2. No Conmutatividad en Campos de Dirac	11
3. Simetrías de Lorentz y CPT en teoría de Campos	14
3.1. Invariancia de Lorentz	14
3.2. Paridad	16
3.3. Conjugación de carga	17
3.4. CP	19
3.5. Inversión temporal	19
3.6. CPT	20
3.7. Simetrías en el campo No Conmutativo	21
4. Átomo de Hidrógeno	24
4.1. Separación de variables para la ecuación de Dirac con potencial central	24
4.2. Solución de las ecuaciones radiales para una partícula de Dirac en un potencial de Coulomb	30
4.3. Correcciones debidas a la no conmutatividad del espacio-tiempo	38
5. Consideraciones finales y conclusiones	44

Capítulo 1

Introducción

La idea de un espacio-tiempo en el que las coordenadas espacio-temporales no conmutan entre sí, es un tema de interés en la actualidad, en particular, en gravitación, relatividad general y en teoría de campos, ha despertado interés los efectos que pueda tener un espacio cuyas coordenadas no conmutan [1]. Se ha visto que los efectos de un espacio tal pueden dar origen a la violación de simetrías en una teoría de campos que se han asumido explícitamente en el modelo estándar como ciertas, la invariancia de Lorentz y de la simetría de CPT (conjugación de carga, paridad e inversión temporal). El desarrollo de la teoría de campo cuántico no conmutativo históricamente empieza con las observaciones de Heisenberg (en una carta que escribió a Pierls a finales de 1930) sobre la posibilidad de introducir relaciones de incerteza para las coordenadas, como una forma de evitar singularidades de la auto-energía del electrón. Pierls hizo uso de esas ideas eventualmente en su trabajo relacionado con los problemas de los niveles de Landau. Heisenberg también comentó sobre esta posibilidad a Pauli quien luego involucró a Oppenheimer en esta discusión. Finalmente fue Hartland Snyder, un estudiante de Oppenheimer, quien primero formalizó esta idea en un artículo sobre *Espacio-tiempo Cuantizado* [2] dedicado por completo a este tema. Casi inmediatamente, C. N. Yang reaccionó a este paper y publicó una carta al editor de Physical Review ampliando el tratado de Snyder a el caso de espacio curvo (en un espacio de Sitter particular) [3]. Luego en 1948, Moyal analizó el problema usando la distribución de funciones del espacio fase de Wigner, introduciendo lo que se conoce como el producto de Moyal o producto estrella [4], un producto

asociativo no-conmutativo de la forma

$$f(x) \star g(x) = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu} f(x)g(x) \quad (1.1)$$

con

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con el fin de discutir la estructura matemática de la mecánica cuántica. Para un sistema clásico simple como el de una partícula moviéndose sobre una línea recta, la construcción del producto estrella puede estar motivada al considerar un conjunto de operadores del espacio fase ordenados de Weyl y su isomorfismo con el conjunto de funciones clásicas del espacio fase.

Una evidencia concreta de espacio-tiempo no conmutativo proviene de la teoría de cuerdas, que actualmente es el candidato más prometedor para una teoría cuántica de la gravedad. La teoría de cuerdas contiene un número finito de longitudes de escala l_s intrínsecas, que se pueden utilizar como prueba de la estructura a corta distancia. Por lo tanto, distancias más pequeñas que l_s no son posibles de observar. De hecho, con base en el análisis de las amplitudes de dispersión de muy altas energías de cuerdas, estas modifican las relaciones de incertidumbre de Heisenberg que se han postulado en la forma:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right). \quad (1.3)$$

Es fácil de ver que uno recupera los resultados usuales de mecánica cuántica en el límite $l_s \rightarrow 0$.

El trabajo importante de Seiberg y Witten [5] identifica límites en donde la dinámica de cuerdas completa puede ser descrita en términos de un acoplamiento mínimo de teoría de norma (supersimétrica) sobre un espacio no conmutativo. Su análisis muestra una equivalencia entre campos de norma ordinarios y campos de norma no conmutativos, realizados por un cambio de variables que puede ser descrito explícitamente. Este cambio de variables (comúnmente conocido como el mapeo de Seiberg-Witten (SW) en la literatura) permite llevar a cabo una generalización de una teoría de campos usual a una teoría de campos no conmutativa de norma directa.

Una de las cuestiones de interés en un espacio no conmutativo es sobre el rol que juega la simetría de Lorentz en una teoría de campos, y el papel que juega el término $\theta^{\mu\nu}$ que aparece en (1.2) en la violación de dicha simetría. La motivación principal en este estudio radica en los experimentos recientes que se han estado llevando a cabo para probar la simetría de Lorentz [6].

En efecto, $\theta^{\mu\nu}$ juega el papel similar del tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$. Una comparación simple muestra que es posible identificar a partir del tensor $\theta^{\mu\nu}$ un campo eléctrico "**e**" y un campo magnético "**b**" que permean el espacio y que pueden reinterpretarse como un campo de fondo con una dirección preferencial en las direcciones del campo eléctrico y magnético.

Uno de los objetivos de esta tesis es acotar las magnitudes de **e** y **b**, mediante transiciones electromagnéticas que ocurren en átomos hidrogenoides. Nos proponemos hacer una estimación de la escala de longitud en la cual los efectos de la no-conmutatividad empiezan a surtir efecto.

En el capítulo 2 se muestra que al tomar un espacio-tiempo discreto en lugar del espacio-tiempo continuo usual, el efecto de la no-conmutatividad surge de manera automática en una escala de longitud pequeña, además, veremos como cambian las teorías de campo al introducir la no-conmutatividad en las coordenadas.

En el capítulo 3 analizaremos las simetrías discretas de Lorentz de C , P y T y veremos como al introducir el efecto no-conmutativo aparece la violación de estas simetrías.

En el capítulo 4 buscamos una cota en donde los efectos de la no conmutatividad se hacen presentes, y así poder ver a que escala se podrán encontrar los efectos de la violación de las simetrías de Lorentz debidos a la no conmutatividad.

En esta tesis usaremos el sistema natural de unidades, donde $c = \hbar = 1$, cuando usemos a los valores de c y $\hbar$ en el sistema MKS lo mencionaremos.

Capítulo 2

Teorías de Campos

En este capítulo veremos como surge una teoría de campo no conmutativa, la cual aparece mediante la suposición usual de espacio-tiempo continuo. Esta suposición no requiere la simetría de Lorentz. Tendremos así un espacio-tiempo que es discreto e invariante de Lorentz [2]. Además veremos como cambia el campo de Dirac bajo el uso de las coordenadas que no conmutan entre sí, al cual se le añadirá un término que toma en cuenta este efecto de no conmutatividad.

2.1. Formalismo No Conmutativo

De acuerdo con el trabajo original de Snyder [2], es posible que el espacio-tiempo tetradimensional usual no posea un marco de referencia conveniente en donde la interacción de materia y campos pueda ser descrita. Una modificación del concepto ordinario de espacio-tiempo puede ser necesario porque las partículas "elementales" tienen fijas sus masas y su longitud de onda de Compton asociada.

La teoría especial de la relatividad está basada en la invariancia de la forma cuadrática

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (2.1)$$

para transformaciones de un sistema inercial a otro. Usualmente se supone que las variables x , y , z y t toman un continuo de valores y que ellos pueden tomar esos valores simultaneamente. Esta última suposición la cambiamos como sigue: x , y , z y t son operadores hermíticos para las coordenadas espacio-temporales de un marco de Lorentz particular; el espectro de cada

operador x, y, z y t está compuesto de los posibles resultados de una medición de la cantidad correspondiente; los operadores x, y, z y t serán tales que el espectro de operadores x', y', z' y t' se formen por combinación lineal de x, y, z y t , tal que deje la forma cuadrática (2.1) invariante, será la misma que el espectro de operadores x, y, z y t . En otras palabras, suponemos que el espectro de los operadores coordenados de espacio y tiempo son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Es evidente que el espacio-tiempo usualmente continuo satisface la anterior definición, esto, sin embargo, no es la única solución. El principal resultado en esta transformación de coordenadas en operadores es que existe un espacio-tiempo invariante de Lorentz en donde hay una unidad natural de longitud. Es de esperar que la introducción de tal unidad de longitud remueva muchos de los problemas de divergencia ultravioleta en una teoría de campos.

Se puede mostrar que la introducción de una pequeña unidad de longitud en el espacio-tiempo forzará a uno a dejar la suposición usual de conmutatividad de x, y, z y t , distinto a la suposición de invarianza de Lorentz del espectro de operadores x, y, z y t , si ellos conmutan, implica que tienen un espectro continuo.

Para encontrar operadores x, y, z y t que posean espectro invariante de Lorentz, consideramos la forma cuadrática homogénea de la forma

$$-\eta^2 = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2, \quad (2.2)$$

en donde los η 's son variables reales. Las variables $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ pueden ser consideradas como las coordenadas (proyectivas) homogéneas de un espacio real de cuatro dimensiones de curvatura constante (un espacio de De Sitter). Ahora definimos x, y, z y t por medio de los elementos infinitesimales del grupo donde la forma cuadrática (2.2) es invariante. Tomamos

$$\begin{aligned} x &= ia(\eta_4 \partial / \partial \eta_1 - \eta_1 \partial / \partial \eta_4), \\ y &= ia(\eta_4 \partial / \partial \eta_2 - \eta_2 \partial / \partial \eta_4), \\ z &= ia(\eta_4 \partial / \partial \eta_3 - \eta_3 \partial / \partial \eta_4), \\ t &= ia(\eta_4 \partial / \partial \eta_0 + \eta_0 \partial / \partial \eta_4), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde a es la unidad natural de longitud. Los operadores x, y, z y t se suponen Hermíticos y pueden ser considerados que operan sobre funciones valuadas de $\eta_0, \eta_1, \dots$. De la suposición de que x, y y z son operadores Hermíticos de la forma (2.3), uno puede mostrar que cada uno de estos tiene un

espectro que consiste de los valores característicos, ma donde m es un entero. El operador, t , tiene un espectro continuo extendido desde menos infinito hasta mas infinito. El espectro de cada uno de los operadores x , y , z y t es infinitamente degenerado.

Las transformaciones que dejan la forma cuadrática (2.2) y η_4 invariantes son transformaciones de Lorentz covariantes sobre las variables η_1 , η_2 , η_3 y η_0 . Cuando las variables transformadas η'_0 , η'_1 , η'_2 , η'_3 , η_4 son sustituidas en la ecuación (2.3), se encuentra que x , y , z y t se vuelven transformaciones de Lorentz contravariantes. Es evidente que los nuevos operadores x' , y' , z' y t' que se forman mediante el reemplazo de η_0 , η_1 , η_2 , η_3 , η_4 en la ecuación (2.3) por η'_0 , η'_1 , η'_2 , η'_3 , η_4 son expresiones lineales con coeficientes reales constantes en x , y , z y t , y son consecuentemente operadores Hermíticos si x , y , z y t son hermíticos. Las funciones en donde esos operadores operan son invariantes izquierdos excepto por cambios en el argumento. Por lo tanto, vemos que x' , y' , z' y t' que son operadores Hermíticos de la misma forma en las variables η'_0 , η'_1 , η'_2 , η'_3 , η_4 como lo son x , y , z y t en las variables η_0 , η_1 , η_2 , η_3 , η_4 , tienen el mismo espectro que estos. Definimos seis operadores adicionales a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
L_x &= i(\eta_3 \partial / \partial \eta_2 - \eta_2 \partial / \partial \eta_3), \\
L_y &= i(\eta_1 \partial / \partial \eta_3 - \eta_3 \partial / \partial \eta_1), \\
L_z &= i(\eta_2 \partial / \partial \eta_1 - \eta_1 \partial / \partial \eta_2), \\
M_x &= i(\eta_0 \partial / \partial \eta_1 + \eta_1 \partial / \partial \eta_0), \\
M_y &= i(\eta_0 \partial / \partial \eta_2 + \eta_2 \partial / \partial \eta_0), \\
M_z &= i(\eta_0 \partial / \partial \eta_3 + \eta_3 \partial / \partial \eta_0),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ahora, L_x , L_y , L_z , M_x , M_y , M_z son, con excepción del factor de 2π , los elementos infinitesimales del grupo de Lorentz tetra-dimensional. Esto puede ser mostrado tomando en cuenta que cada uno de los operadores anteriores conmuta con la forma cuadrática (2.1) donde los valores de x , y , z y t dados por (2.3) son usados. Esto es otra forma de afirmar la invariancia de la forma cuadrática (2.1). Se observa que L_x , L_y , L_z , M_x , M_y , M_z no involucran a η_4 , y que como una consecuencia de la transformación de Lorentz donde deja la forma (2.2) y η_4 invariantes deja la forma cuadrática (2.1) invariante, y como ya se ha mostrado, deja el espectro de operadores x , y , z y t invariante. Vemos de este hecho que las suposiciones usuales que conciernen a la naturaleza continua de espacio-tiempo no son necesarias para la invariancia de Lorentz.

Los 10 operadores definidos en (2.3) y (2.4) tienen un total de 45 conmutadores. Solo seis de esos conmutadores difieren de los ordinarios y son los siguientes:

$$\begin{aligned}
[x, y] &= (ia^2)L_z, \\
[y, z] &= (ia^2)L_x, \\
[z, x] &= (ia^2)L_y, \\
[t, x] &= (ia^2)M_x, \\
[t, y] &= (ia^2)M_y, \\
[t, z] &= (ia^2)M_z.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Vemos de esos conmutadores que si tomamos el límite $a \rightarrow 0$, nuestra cuantización del espacio tiempo cambia al espacio tiempo continuo ordinario.

Los conmutadores para las cantidades $L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z$ son las de los elementos infinitesimales del grupo de Lorentz, y por esa razón introducimos el factor de i en esta definición. Esto es: L_x, L_y, L_z tienen las propiedades usuales del momento angular cuántico. Los conmutadores que involucran uno de los operadores x, y, z o t , con uno de los operadores $L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z$ son independientes de a , la unidad natural de longitud. Esto es, todos los operadores pasan en el límite $a \rightarrow 0$ a sus expresiones usuales.

Además de las 10 cantidades definidas en (2.3) y (2.4) definimos cuatro operadores adicionales; teniendo las propiedades de transformación de operadores de desplazamiento de espacio o tiempo, o equivalentemente, operadores de energía y momento:

$$\begin{aligned}
P_x &= (1/a)(\eta_1/\eta_4), \\
P_y &= (1/a)(\eta_2/\eta_4), \\
P_z &= (1/a)(\eta_3/\eta_4), \\
P_t &= (1/a)(\eta_0/\eta_4).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por medio de manipulación algebraica uno puede mostrar que

$$\begin{aligned}
L_x &= yP_z - zP_y; \\
M_x &= xP_t + tP_x; \\
etc.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

El momento angular tiene la expresión usual en términos de coordenadas y momentos. Uno debe tener cuidado cuando ordene los factores en (2.7) debido a que ellos no conmutan. Las cuatro cantidades P_x, P_y, P_z, P_t conmutan unas con otras, y tienen los mismos conmutadores con $L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z$ como hacen las expresiones usuales para los operadores de desplazamiento de espacio o tiempo. Adicionalmente cada uno tiene un espectro continuo que va de menos infinito a mas infinito. Estos conmutadores con las coordenadas y tiempo no son las mismas que las usuales y están dadas por

$$\begin{aligned}
[x, P_x] &= i[1 + (a)^2 P_x^2]; \\
[t, P_t] &= i[1 - (a)^2 P_t^2]; \\
[x, P_y] &= [y, P_x] = i(a)^2 P_x P_y; \\
[x, P_t] &= [P_x, t] = i(a)^2 P_x P_t; \\
&\text{etc.}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Aqui notamos que si todos los componentes del momento son pequeños comparadas con $\hbar/a$ y la energía es pequeña comparada con $\hbar c/a$ entonces esos conmutadores se aproximan a los que están dados en la mecánica cuántica ordinaria. Además, como tomamos el límite $a \rightarrow 0$ esos conmutadores cambian a sus valores estandar. El hecho de que esos nuevos conmutadores entre coordenadas y momentos difieren de las antiguas apreciablemente solo para grandes valores del momento, y que ellos difieren por grandes cantidades cuando $|p| > \hbar/a$ implica que una teoría de campo basada en la cuantización del espacio-tiempo dará substancialmente el mismo resultado que la teoría de campo usual para todos los procesos que no involucren grandes componentes del momento, pero producirán efectos apreciables para procesos que involucren grandes componentes del momento. Deberíamos esperar que las fórmulas atómicas y moleculares usuales no sufrirán cambios notables, mientras las expresiones para la autoenergía, polarización del vacío, y posiblemente las fuerzas nucleares serán considerablemente alteradas. Alteraciones en las cantidades antes mencionadas son ciertamente necesarias para poner de manifiesto el efecto no-conmutativo.

Para este punto las propiedades de invariancia del espacio-tiempo cuantizado han sido consideradas solo con respecto a las rotaciones y transformaciones de Lorentz que dejan el origen fijo. Un continuo de traslaciones no es admisible en este espacio, de hecho uno puede probar que si x, y, z y t son tales que la forma cuadrática (2.1) es invariante bajo desplazamientos infinitesimales, el espacio debe ser un continuo. Traslaciones del origen pueden ser

introducidas como sigue. Sea $S(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ una función homogénea monovaluada unimodular arbitraria de grado cero y las variables $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ y η_4 . Sea A cualquiera de los operadores definidos por las ecuaciones (2.3), (2.4) o (2.6), y forman el nuevo operador $A' = \bar{S}AS$ en donde $\bar{S}$ significa el complejo conjugado de S . Se puede mostrar que los operadores primados satisfacen exactamente las mismas relaciones de conmutación como hicieron los operadores originales y que ellos pueden ser Hermíticos. Los operadores primados tienen exactamente las mismas propiedades de transformación con respecto a las transformaciones de Lorentz como hicieron los operadores originales. En particular los operadores de desplazamiento p_x, p_y, p_z, p_t no cambian por este proceso. Este es un resultado que debemos demandar para los operadores de desplazamiento de espacio y tiempo. Si elegimos $S = \exp[im \arctan(\eta_1/\eta_4)]$, encontramos que este resultado es una traslación de ma en la dirección x . Esto no debe ser esperado, no es esto posible en el espacio, para encontrar una función S que corresponde a la forma de los valores traslacionales definidos por x, y, z y t simultáneamente. La relación entre dos marcos de referencia diferentes no pueden ser establecidos mas precisamente que las relaciones de conmutación entre las coordenadas permitidas.

2.2. No Conmutatividad en Campos de Dirac

Para fines de este trabajo es importante analizar la Lagrangiana que describe a un electrón que se propaga en un campo electromagnético. Puesto que posteriormente restringiremos nuestro análisis al caso de átomos hidrogenoides, es conveniente definir el Hamiltoniano de ese sistema en esta sección. Éstas tareas las realizaremos en el contexto de teoría de campos no conmutativa. La Lagrangiana usual para un sistema cuyas coordenadas conmutan está dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu, \quad (2.9)$$

donde $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ es el tetra-potencial y $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es el tensor de campo electromagnético. El segundo y tercer término se refiere a la energía cuántica de los campos electromagnéticos y al término que fija la norma respectivamente. Estos términos resultan irrelevantes para nuestro análisis y los omitiremos en lo subsecuente. Nos centraremos solo en el potencial escalar ϕ que da cuenta de la interacción entre el núcleo y el electrón en cuestión.

Bajo estas consideraciones entonces tenemos que la ecuación de Schrödinger se puede expresar en términos del Hamiltoniano de Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + V)\psi, \quad (2.10)$$

donde

$$H_0 = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m \quad (2.11)$$

y

$$V = ie\beta\phi = ie\beta\frac{Ze}{r}, \quad (2.12)$$

siendo r la distancia entre el núcleo y el electrón. A partir de las ecuaciones (2.5) podemos definir una matriz antisimétrica de tal forma que

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

y tomamos a $\theta^{\mu\nu}$ simplemente de forma similar al tensor de campo electromagnético con campos $\mathbf{e}$ (eléctrico) y $\mathbf{b}$ (magnético).

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & b_z & -b_y \\ e_y & -b_z & 0 & b_x \\ e_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

y de acuerdo a (2.13) estos se relacionan con M_i y L_i como $e_i = a^2 M_i$ y $b_i = a^2 L_i$. Podemos definir nuestras cordenadas no conmutativas como un desplazamiento de las coordenadas iniciales más un término que depende de $\theta^{\mu\nu}$ de la siguiente manera

$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\nu, \quad (2.15)$$

y el corrimiento para A_μ como

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta A_\mu, \quad (2.16)$$

El Lagrangiano y el Hamiltoniano de Dirac pueden resolverse en el espacio conmutativo y las propiedades no conmutativas pueden ser realizadas a través de términos relacionados con θ^1 . En este trabajo le agregaremos a las

¹En esta tesis no tenemos como objetivo presentar la demostración de como cambian el Lagrangiano y Hamiltoniano bajo la dinámica no conmutativa, para ver una demostración de esto ver [5].

ecuaciones (2.9) y (2.10) un operador referente al espacio no conmutativo dado de la siguiente manera

$$\mathcal{O} = \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

con $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Agregando este término tenemos que nuestros ecuaciones (2.9) y (2.10) se ven como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m)\psi - \bar{\psi}\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}\psi, \quad (2.18)$$

y

$$H = (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m + i\beta\phi + \frac{i}{2}\beta\sigma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu})\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (2.19)$$

Entonces el operador de no conmutatividad causará un efecto en los estados de la partícula cuyos efectos serán apreciables a altas energías. En el capítulo 4 resolveremos la ecuación de Dirac para el átomo de hidrógeno y trataremos el término dado en (2.13) como una perturbación.

Capítulo 3

Simetrías de Lorentz y CPT en teoría de Campos

En este capítulo damos una breve descripción de lo que son las simetrías discretas de Lorentz C , P y T o también consideradas como las simetrías discretas de Lorentz. En la última sección incluimos en el lagrangiano de Dirac el término de campo no conmutativo y observamos como se rompe la invariancia de esas simetrías.

3.1. Invariancia de Lorentz

Dos observadores O y O' que se encuentran en diferentes sistemas inerciales describirán el mismo evento físico con diferentes coordenadas espacio temporales.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \quad (3.1)$$

es una transformación activa de Lorentz entre los dos conjuntos de coordenadas. El grupo de Lorentz completo incluye rotaciones R , *boosts* L y reflexiones espaciales I_s y temporales I_t . El intervalo bajo éstas TL es el intervalo de tiempo propio

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\alpha} \Lambda^{\mu}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (3.2)$$

De esto, $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\alpha} \Lambda^{\mu}_{\beta}$. Esto significa que $\delta^{\alpha}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\beta}$, implica $(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}$. En notación de matrices 4×4 . Si g representa $g_{\mu\nu}$ y Λ representa Λ^{μ}_{ν}

con ésta notación tenemos (Λ^T es la transpuesta de Λ),

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \quad \Lambda^{-1} = g \Lambda g, \\ \det(g) = \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) \det(\Lambda)^2, \quad (3.3)$$

consecuentemente, $\det(\Lambda) = \pm 1$.

Las transformaciones continuas son transformaciones de identidad (boosts y rotaciones espaciales), tales que $\det(\Lambda) = 1$, son llamadas propias, y se obtienen mediante la sucesión de transformaciones infinitesimales. Las transformaciones con $\det(\Lambda) = -1$ son llamadas impropias, estas no son continuas, es decir, no se obtienen de transformaciones infinitesimales (paridad e inversión espacial).

Nuestra tarea es construir una correspondencia que relacione el conjunto de observaciones de una partícula de Dirac hechas por dos observadores O y O'

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x'), \quad (3.4)$$

la regla de transformación nos debe llevar a soluciones que son formalmente iguales para los dos observadores. Pedimos que la transformación entre ψ y ψ' sea lineal

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1} x'), \quad (3.5)$$

$S(\Lambda)$ es una matriz 4×4 , que debe tener una inversa tal que

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = S^{-1}(\Lambda) \psi'(\Lambda x), \quad (3.6)$$

de (3.5) y (3.6) observamos claramente que $S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda)$. Para encontrar S tomamos el Lagrangiano de Dirac en términos de ψ'

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}' [\gamma^\mu (i\partial'_\mu - eA'_\mu) - m] \psi'. \quad (3.7)$$

Transformamos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} S^{-1} [\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] S \psi, \quad (3.8)$$

y vemos que $\mathcal{L}$ es invariante si podemos encontrar S tal que

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\mu. \quad (3.9)$$

En las siguientes secciones trataremos con transformaciones impropias de paridad e inversión temporal.

3.2. Paridad

La idea detrás de la simetría de paridad es que las ecuaciones de la física de partículas deben ser invariantes ante la inversión de espejo. Esto se debe a la predicción de que la imagen de espejo de una reacción (como una reacción química o un decaimiento radiactivo) ocurre en la misma razón que la reacción original.

El concepto de paridad fue introducido en el contexto de física de partículas por Wigner en 1927 y hasta 1956 la conservación de paridad era considerada una de las leyes de conservación geométrica fundamentales de la naturaleza (similar a la conservación de energía y momento). Sin embargo, en 1956, en una revisión crítica y cuidadosa y la existencia de datos experimentales, los físicos teóricos Tsung-Dao Lee y Chen Ning Yang revelaron que la conservación de paridad había sido verificada en decaimientos para las interacciones fuerte y electromagnética, pero no había sido examinado en las interacciones débiles. ellos propusieron muchas posibles pruebas experimentales directas. La primera prueba basada sobre el decaimiento- β de núcleos de cobalto-60 que fue llevada a cabo por un grupo liderado por Chien-Shiung Wu, demostró que las interacciones débiles violan la simetría de paridad.

Cuando el campo de Dirac se acopla con un campo de Maxwell, queremos que el Lagrangiano quede invariante después de una transformación de Lorentz que involucra paridad (transformación discreta), es decir $(x, y, z, t) \rightarrow (-x, -y, -z, t)$:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (3.10)$$

con Λ^{μ}_{ν} nuestra matriz de paridad que nos invierte el signo de $\mathbf{x}$ definida como:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (3.12)$$

Para encontrar una forma explícita para el operador de paridad P para el campo de Dirac, será conveniente decir que cualquier elemento de $O(3,1)$ (que incluye operaciones de paridad con $\det O = -1$) tiene el siguiente efecto en la matriz de Dirac:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\mu}. \quad (3.13)$$

Separando la parte espacial de la temporal tenemos

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^i S &= -\gamma^i, \\ S^{-1}\gamma^0 S &= \gamma^0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

de esto vemos que

$$[\gamma^0, S] = 0 \quad y \quad \{\gamma^i, S\} = 0. \quad (3.15)$$

El operador de paridad explícito deseado es

$$S = e^{i\phi}\gamma^0 = P \quad (3.16)$$

donde $e^{i\phi}$ es un factor de fase irrelevante. La acción de la transformación de paridad sobre un campo espinorial esta dado por:

$$\psi'(x') = e^{i\phi}\gamma^0\psi(x), \quad (3.17)$$

La cual es llamada operación de paridad. Si aplicamos el operador de paridad dos veces, por supuesto nos regresará a donde estábamos:

$$P^2 = I. \quad (3.18)$$

Se sigue que los eigenvalores de P son ± 1 . Por ejemplo, escalares y pseudo-vectores tienen eigenvalor $+1$, mientras que vectores y pseudoescalares tienen eigenvalor -1 .

La violación de una simetría en un sistema mecánico cuántico puede ser restaurado si otra simetría S puede ser encontrada tal que la combinación de las simetrías SP permanezca inalterada. Esto es un punto sutil de la estructura del espacio de Hilbert que fue realizado inmediatamente después del descubrimiento de la violación de P , y fue propuesta la conjugación de carga como la simetría que restaura el orden.

3.3. Conjugación de carga

La conjugación de carga es una simetría simple que reemplaza todas las partículas por su antipartícula en el mismo estado, donde el momento, la posición, etc. permanecen inalteradas.

Debe haber una expresión formal para esta simetría que nos permita construir la función de onda del positrón. Como ya hemos visto la Lagrangiana que describe a un electrón en un campo electromagnético es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi \quad \text{para } e^-, \quad (3.19)$$

De manera similar esperamos que la Lagrangiana que describe al positrón sea de la forma

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi' \quad \text{para } e^+. \quad (3.20)$$

Para encontrar la relación entre ψ con carga e y ψ' con carga $-e$, debemos tomar el complejo conjugado en (3.19)

$$\mathcal{L}^* = \bar{\psi}^*[-\gamma^{\mu*}(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi^*. \quad (3.21)$$

Para que esta simetría sea invariante de Lorentz hacemos el cambio

$$\psi' = S(\Lambda)\psi^*, \quad (3.22)$$

y sustituimos en (3.21)

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'S[-\gamma^{\mu*}(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]S^{-1}\psi'. \quad (3.23)$$

La condición de invariancia que surge de comparar (3.21) con (3.20) esta dada por

$$S\gamma^{\mu*}S^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (3.24)$$

Del conjunto de matrices de Dirac γ^μ la única que cumple con esta relación es γ^2 . De ésta forma

$$\begin{aligned} [S, \gamma^2] &= 0, \\ \{S, \gamma^0\} &= \{S, \gamma^1\} = \{S, \gamma^3\} = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

y por ende podemos decir que

$$\psi' = i\gamma^2\psi^*. \quad (3.26)$$

Definimos el operador de conjugación de carga como $C = i\gamma^2\gamma^0$. Con esto vemos que:

$$\psi' = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T. \quad (3.27)$$

El operador de carga cumple con

$$C = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger. \quad (3.28)$$

Al igual que con P , si aplicamos C al espinor ψ dos veces regresamos al estado original, y entonces

$$C^2 = I. \quad (3.29)$$

Por lo tanto los valores propios de C son ± 1 . Al igual que P , sin embargo, muchas de las partículas en la naturaleza claramente no son estados propios de C , por ejemplo el fotón. Entonces diremos que solo las partículas que tienen su propia antipartícula pueden ser estados propios de C .

3.4. CP

La simetría CP fue propuesta en 1957 por Lev Landau como la verdadera simetría entre materia y antimateria. En otras palabras un proceso en donde todas las partículas son cambiadas por sus antipartículas se supuso que es equivalente a ver la imagen en el espejo del proceso original. Aplicando simultáneamente al Lagrangiano las transformaciones de conjugación de carga C y de paridad P éste adquiere la forma

$$\mathcal{L}^* = \bar{\psi}^* [-\gamma^{\mu*} \Lambda (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi^*. \quad (3.30)$$

Para que sea invariante bajo CP , se debe cumplir

$$S(\Lambda) \gamma^{\mu*} \Lambda S^{-1}(\Lambda) = -\gamma^\mu. \quad (3.31)$$

El operador de CP para esta simetría es, como era de esperarse, dado por $S_{CP} = ie^{i\phi} \gamma^0 \gamma^2$, de modo que:

$$\psi' = ie^{i\phi} \gamma^0 \gamma^2 \psi^*. \quad (3.32)$$

La violación de CP descubierta en 1964 fue relacionada al hecho que kaones neutros pueden transformarse en sus antipartículas (en donde cada quark es reemplazado por su antiquark) y viceversa, pero tal transformación no ocurría exactamente con la misma probabilidad en ambas direcciones.

3.5. Inversión temporal

Ahora analizamos el efecto de hacer la transformación de inversión temporal, *i. e.* $t' = -t$. Una transformación tal nos lleva de $\psi(t)$ a $\psi'(t')$,

$$\psi'(t') = \mathcal{T} \psi(t), \quad (3.33)$$

donde $\mathcal{T} O \mathcal{T}^{-1} = T O^* T^{-1}$, con O cualquier operador, $\mathcal{T}$ es una matriz antiunitaria y T es una matriz ordinaria.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} i \mathcal{T}^{-1} &= T(-i) T^{-1} = -i, \\ \mathcal{T} \psi &= T \psi^*. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Tomamos el Lagrangiano de Dirac y le aplicamos esta transformación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(t)[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi(t) \\
&= (\bar{\psi}\mathcal{T}^{-1})\mathcal{T}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}\psi) \\
&= \bar{\psi}^*T^{-1}[\mathcal{T}\gamma^\mu\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1}\partial'_\mu - eA'_\mu) - m]T\psi^* \\
&= \bar{\psi}'[T\gamma^{\mu*}T^{-1}(-i\partial'_\mu - eA'_\mu) - m]\psi',
\end{aligned} \tag{3.35}$$

de esto se ve que

$$\psi' = T\psi^*. \tag{3.36}$$

Donde T es una transformación de Lorentz $T(\Lambda)$. El campo se transforma como $eA'_\nu(t) = e\Lambda^\mu{}_\nu A_\mu(t)$, y las parciales como $\partial'_\nu = -\Lambda^\mu{}_\nu \partial_\mu$, Λ es la matriz (3.11).

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}'[-T\gamma^{\mu*}\Lambda^\mu{}_\nu T^{-1}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi'. \tag{3.37}$$

Para que esta ecuación permanezca invariante bajo inversión temporal se debe cumplir

$$\begin{aligned}
T\gamma^{i*}T^{-1} &= -\gamma^i, \\
T\gamma^{0*}T^{-1} &= \gamma^0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned}
[T, \gamma^0] &= [T, \gamma^2] = 0, \\
\{T, \gamma^1\} &= \{T, \gamma^3\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

La solución explícita del operador de inversión temporal es $T = i\gamma^1\gamma^3$, y entonces

$$\psi' = i\gamma^1\gamma^3\psi^*. \tag{3.40}$$

3.6. CPT

En la naturaleza, estas simetrías discretas son violadas. Paridad es máximamente violada por interacciones débiles, y la combinación de CP es violada en los decaimientos del mesón K . Sin embargo, hay un teorema remarcable en que los estados de cualquier teoría cuántica de campos es invariante bajo la combinación de las operaciones de CPT bajo dos condiciones muy generales:

1. La teoría debe ser local, tener un Lagrangiano Hermítico, y ser invariante bajo transformaciones propias de Lorentz.
2. La teoría debe ser cuantizada con conmutadores por integración de campos de espín y cuantizada con anticonmutadores por medio de integración de campos de espín.

Esto es, las teorías cuánticas de campos violan las anteriores simetrías separadamente, pero cualquier teoría cuántica que obedece estas condiciones generales debe ser invariante bajo CPT . Ahora, en esta simetría, transformamos el lagrangiano de Dirac bajo paridad (P), conjugación de carga (C) e inversión temporal (T), es decir, hacemos el cambio $S_{PT}x_\mu = -x_\mu$ ($(x', y', z', t') = (-x, -y, -z, -t)$) y $S_C A_\mu = -A_\mu$. El lagrangiano de Dirac queda

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}'[-\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi'. \quad (3.41)$$

La función de onda invariante se transforma bajo CPT como

$$\psi'(x', t') = S_{CPT}\psi(x, t), \quad (3.42)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}S_{CPT}[-\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]S_{CPT}^{-1}\psi. \quad (3.43)$$

El operador S_{CPT} que deja invariante el lagrangiano de Dirac cumple:

$$S_{CPT}\gamma^\mu S_{CPT}^{-1} = -\gamma^\mu, \quad (3.44)$$

o lo que es igual

$$\{S, \gamma^\mu\} = 0. \quad (3.45)$$

El operador S_{CPT} que cumple con esta relación anticonmutación es γ^5 entonces nuestra función de onda es

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = -e^{i\phi}\gamma^5\psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.46)$$

3.7. Simetrías en el campo No Conmutativo

La aplicación de las transformaciones de Lorentz en una teoría no conmutativa es más complicada que la usual debido a que el parámetro $\theta^{\mu\nu}$ lleva índices de Lorentz. Los dos distintos tipos de transformaciones de Lorentz (pasivas o activas) existen. Por ejemplo, la ecuación (2.13) es totalmente covariante bajo las transformaciones de Lorentz propias: rotaciones o boosts del

marco de referencia observado dejan inalterada la física debido a que tanto los operadores de campo como $\theta^{\mu\nu}$ transforman de manera covariante. Sin embargo, esos cambios de coordenadas difieren profundamente para rotaciones o boosts de una configuración de partícula y campo localizado con un observador fijo. Las otras, llamadas transformaciones de Lorentz impropias, no afectan a $\theta^{\mu\nu}$ y por lo tanto modifican la física. En efecto, $\theta^{\mu\nu}$ provee una dirección tetra-dimensional del espacio tiempo en cualquier marco inercial fijo. Cualquier teoría no conmutativa por lo tanto viola las simetrías de Lorentz impropias.

Veamos como cambia $\theta^{\mu\nu}$ bajo una transformación de paridad. Definimos $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$ ¹ como

$$\theta^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\theta}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e_x & e_y & e_z \\ -e_x & 0 & b_z & -b_y \\ -e_y & -b_z & 0 & b_x \\ -e_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

El operador de paridad en una teoría no conmutativa cambia, ponemos nuestro nuevo operador de paridad como el producto de el operador de paridad para el campo libre con el operador de paridad referente al término de no conmutatividad, la ecuación de onda con los operadores de paridad se ve

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = KP\psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.48)$$

donde K es la matriz de paridad que cumple $K^{-1}K = I_{4 \times 4}$ y que solo actúa sobre el elemento de interacción no conmutativa $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$ y P es el operador de paridad para el campo libre definido en (3.16). Sustituyendo la ecuación de onda en el Lagrangiano dado en la ecuación (2.18) y pidiendo la invarianza de $K^{-1}\tilde{\theta}^{\mu\nu}K = \theta^{\mu\nu}$ encontramos que la matriz que cumple esta condición es

$$K = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Que es la misma dada en (3.11), así pues, $K = \Lambda^\mu{}_\nu$. Con estos dos operadores la ecuación de onda se ve

$$\psi'(-\mathbf{x}, t) = e^{i\phi} K \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.50)$$

¹La transformación de $\theta^{\mu\nu}$ bajo paridad la podemos apreciar de la ecuación (2.13), donde al hacer el cambio $x^0 \rightarrow x^0$ y $x^i \rightarrow -x^i$ los elementos de la matriz nos cambian como $e_i \rightarrow -e_i$ y $b_i \rightarrow b_i$.

Para la simetría de inversión temporal se puede demostrar fácilmente que cuando hacemos el cambio $t' \rightarrow -t$ y $x^i \rightarrow x^i$ $\theta^{\mu\nu}$ es otra vez $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$. Entonces el operador de inversión temporal va a estar dado por K junto con el operador para campo libre dado por (3.40), por lo que la ecuación de onda bajo inversión temporal queda dada por

$$\psi'(\mathbf{x}, -t) = iK\gamma^1\gamma^3\psi^*(\mathbf{x}, t). \quad (3.51)$$

Para la conjugación de carga, debido a que el término no conmutativo en el Lagrangiano no contiene ningún parámetro de carga, el operador es el mismo que para el campo libre (3.28). La violación de P y T y por lo tanto para CP debido a $\theta^{\mu\nu}$ era esperado por lo dicho anteriormente, pero veamos que pasa para CPT .

Los términos de la extensión del modelo estándar violan CPT si y sólo si los coeficientes para la violación de Lorentz llevar un número impar de índices [7]. Dado que es imposible construir un coeficiente para combinaciones de $\theta^{\mu\nu}$, se sigue inmediatamente que cualquier teoría no conmutativa realista necesariamente conserva CPT . Por el contrario, todas las otras combinaciones de las simetrías discretas C , P , T se puede romper en una teoría no conmutativa general.

Esto lo podemos ver cuando aplicamos a la ecuación de onda nuestras tres transformaciones discretas de Lorentz

$$\begin{aligned} \psi'(-\mathbf{x}, -t) &= K\gamma^0\gamma^1\gamma^3K\gamma^2\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= K^2\gamma^5\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= \gamma^5\psi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por lo que cumplimos con nuestra invariancia bajo la simetría de CPT .

Capítulo 4

Átomo de Hidrógeno

En este último capítulo encontraremos una escala para la unidad natural de longitud introducida en el capítulo 2 usando la dinámica del átomo de hidrógeno a partir del Hamiltoniano de Dirac con el potencial Coulombiano y agregaremos en forma de perturbación el operador de no conmutatividad dado en la ecuación (2.10). La forma de encontrar la solución de la ecuación de Dirac para un campo central fue inspirada en el libro de Greiner [9] de mecánica cuántica relativista. Sin embargo en la última sección de éste capítulo se presenta el cálculo del corrimiento de los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Los resultados son nuevos y son la principal contribución de esta tesis.

4.1. Separación de variables para la ecuación de Dirac con potencial central

El Hamiltoniano de Dirac en este caso es

$$\hat{H}_D = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0 + V(r) \quad (4.1)$$

donde $V(r) = eA_0(r)$. Debido a la simetría esférica del campo, el operador de momento angular $\hat{\mathbf{J}}$ y el operador de paridad $\hat{P} = e^{i\varphi}\hat{\beta}(x \rightarrow -x) = e^{i\varphi}\gamma^0\hat{P}_0$ con respecto al origen de coordenadas conmutan con el Hamiltoniano. por lo tanto, estados con energía definida, momento angular y paridad se producen. Las correspondientes funciones de onda son denotadas por [9]

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \psi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

aquí ψ_{jlm} y $\chi_{jl'm}$ son los dos espinores que van a ser determinados. Debido a que ψ_{jm} debe tener una buena paridad y el vector de paridad se lee $\hat{P} = e^{i\varphi} \hat{\beta} \hat{P}_0$ ($\hat{P}_0$ cambia $\mathbf{x}$ en $-\mathbf{x}$), tenemos

$$\psi'_{jm}(\mathbf{x}', t') = \lambda \psi_{jm}(\mathbf{x}, t) \quad \text{o} \quad \hat{P} \psi_{jm}(x') = \lambda \psi_{jm}(x), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{P} \psi_{jm} &= e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0 \begin{pmatrix} \psi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \hat{P}_0 \psi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ -\hat{P}_0 \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \psi_{jm} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $|\lambda| = 1$. Uno debe reconocer claramente el contenido de (4.3): que demanda la "buena paridad" de la función de onda que significa que la ecuación de onda es función propia del operador de paridad $\hat{P}$. La ecuación (4.4) muestra que la paridad de dos espinores φ_{jlm} debe ser igual a la paridad negativa de $\chi_{jl'm}$. Tambien podemos entender la declaración en la siguiente manera: Empezando con la ecuación de Dirac estacionaria $\hat{H}_D \psi = E \psi$, las matrices $\hat{\alpha}$ en (4.1) están dadas explícitamente por

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

De ésta forma de acuerdo a (4.1) la ecuación de Dirac es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \chi + m_0 \varphi + V \varphi &= E \varphi, \\ (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \varphi - m_0 \chi + V \chi &= E \chi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

o

$$\begin{aligned} (E - m_0 - V) \varphi &= (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \chi, \\ (E + m_0 - V) \chi &= (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \varphi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Debido a que el operador $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ cambia de paridad, estas ecuaciones muestran que los dos espinores φ y χ deben tener paridad opuesta.

Las funciones propias del momento angular y del operador de paridad son los bien conocidos espinores esféricos. Para evitar la confusión con la

función de onda completa ψ , denotaremos los espinores esféricos como Ω_{jlm} , que estan definidos como

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_{ls}} (l \frac{1}{2} j \mid m' m_s m) Y_{lm'} \chi_{\frac{1}{2} m_{ls}}. \quad (4.8)$$

Aqui los dos espinores $\chi_{\frac{1}{2} m_s}$ son funciones propias del operador de espín $\hat{S}^2 = \hat{\sigma}^2/4$ y $\hat{S}_3 = \hat{\sigma}_3/2$; ellos se ven explicitamente como:

$$\chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La paridad de Ω_{jlm} está dada por Y_{lm} :

$$\hat{P}_0 \Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm}. \quad (4.9)$$

Hacemos el siguiente ansatz

$$\begin{aligned} \varphi_{jlm} &= ig(r) \Omega_{jlm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \\ \chi_{jl'm} &= -f(r) \Omega_{jl'm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

con

$$l' = 2j - l =: \begin{cases} 2(l + \frac{1}{2}) - l = l + 1 & \text{para } j = l + \frac{1}{2}, \\ 2(l - \frac{1}{2}) - l = l - 1 & \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Repitamos esto una vez más: Debido a (4.8) cualquiera de $j = l + \frac{1}{2}$ o $j = l - \frac{1}{2}$. Si $j = l + \frac{1}{2}$, el momento orbital angular l' de $\chi_{jl'm}$ es $l' = l + 1$. Esta es la única forma de realizar la paridad opuesta de χ comparada con φ . El valor $l' = l - 1$ debe ser excluido, debido a que el momento angular total $j = l + \frac{1}{2}$ no puede ser construido por $l' = l - 1$ y $S = \frac{1}{2}$. Los argumentos siguen un patrón similar para el segundo caso de (4.11). Entonces uno tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_{jlm} &= \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \left(ig(r) \Omega_{jlm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right) = (\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} ig(r)) \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Omega_{jlm} \\ &= \frac{dg(r)}{dr} \left(\hat{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Omega_{jlm}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Con respecto a (4.8) los espinores esféricos son eigenfunciones de los operadores $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{J}}^2$ y $\hat{\mathbf{S}}^2 = (\frac{1}{2} \hat{\sigma})^2$ con eigenvalores $l'(l'+1)$, $j(j+1)$ y $\frac{3}{4}$ respectivamente.

Para completar el esquema otra vez daremos la forma explícita de Ω_{jlm} para los casos usuales $j = l + \frac{1}{2}$ y $j = l - \frac{1}{2}$ ($j \geq \frac{1}{2}$):

$$\Omega_{l+\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\Omega_{l-\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+l}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+l}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Los factores en la raíz de (4.13) son los coeficientes de Clebsch-Gordon en forma explícita. Ahora haremos uso de las siguientes relaciones entre los espinores esféricos

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm}, \quad (4.15)$$

que es fácil de probar, ya que $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{r}/r)$ es un operador escalar de paridad negativa. Con (4.15) tenemos que:

$$-(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Omega_{jlm} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jl'm}. \quad (4.16)$$

Ahora tomamos la ya conocida relación

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (4.17)$$

y cambiamos (4.16) en

$$-(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Omega_{jlm} = \left(\hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right) \Omega_{jl'm}. \quad (4.18)$$

Con $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ y $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$, (4.18) puede ser transformada en

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{r})) \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} \\ &= (-i(\nabla \cdot \mathbf{r}) - i\mathbf{r} \cdot \nabla - i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})) \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} \\ &= \left(-i\frac{3}{r} - ir \left(-\frac{1}{r^2} \right) - i\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}}{r} \right) \Omega_{jl'm} \\ &= -i \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \Omega_{jl'm}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = (\hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + (\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \quad (4.20)$$

se sigue que

$$\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Omega_{jl'm} = (\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - (\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2) \Omega_{jl'm} \quad (4.21)$$

$$= \{j(j+1) - l'(l'+1) - \frac{3}{4}\} \Omega_{jl'm}. \quad (4.22)$$

Ahora y en lo siguiente es conveniente definir un número cuántico κ por

$$\kappa = \mp(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(l+1) & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.23)$$

Obviamente siempre hay

$$|\kappa| = j + \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad j = |\kappa| - \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

Con esto y tomando $l' = 2j - 1$ en cuenta uno puede reescribir el valor de expectación en el lado derecho de (4.22). Para $j = l + \frac{1}{2}$ uno tiene

$$\begin{aligned} & (l + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2} + 1) - [2(l + \frac{1}{2}) - l][2(l + \frac{1}{2}) - l + 1] - \frac{3}{4} \\ &= l^2 + \frac{1}{2}l + l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (l+1)(l+2) - \frac{3}{4} \\ &= l^2 + 2l - l^2 - 2l - l - 2 = -(l+2) = \kappa - 1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Similarmente para $j = l - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & (l - \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2}) - [2(l - \frac{1}{2}) - l][2(l - \frac{1}{2}) - l + 1] - \frac{3}{4} \\ &= l^2 - \frac{1}{4} - (l-1)l - \frac{3}{4} = l - 1 = \kappa - 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ahora (4.19) puede ser escrita como

$$(2 + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \Omega_{jl'm} = (1 + \kappa) \Omega_{jl'm}. \quad (4.27)$$

Si en (4.22) hubieramos empezado con Ω_{jlm} habríamos obtenido $(2 + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \Omega_{jlm} = (1 - \kappa) \Omega_{jlm}$ por el mismo procedimiento. En la literatura la siguiente notación es frecuentemente usada para (4.27): uno escribe

$$\chi_{\kappa,m} \equiv \Omega_{jlm}, \quad \chi_{-\kappa,m} \equiv \Omega_{jl'm} \quad (4.28)$$

y definimos el operador

$$\hat{\kappa} = 1 + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.29)$$

Entonces debido a que (4.27) es ecuación de eigenvalores

$$\hat{\mathbf{K}}\chi_{\kappa,m} = -\kappa\chi_{\kappa,m}, \quad \hat{\mathbf{K}}\chi_{-\kappa,m} = \kappa\chi_{-\kappa,m} \quad (4.30)$$

donde

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) & = -(j + \frac{1}{2}) & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ l & = +(j + \frac{1}{2}) & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad y \quad |\kappa| = j + \frac{1}{2}.$$

Consecuentemente, los espinores esféricos de (4.10) pueden ser denotados por $\chi_{\kappa,m} = \Omega_{jlm}$ y $\chi_{-\kappa,m}$ y podemos por tanto escribir los cuatro espinores para un campo central como:

$$\begin{aligned} \psi_{jm} &= \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig(r)\Omega_{jlm}(\frac{\mathbf{r}}{r}) \\ -f(r)\Omega_{jl'm}(\frac{\mathbf{r}}{r}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ig(r)\chi_{\kappa,m} \\ -f(r)\chi_{-\kappa,m} \end{pmatrix} = +i \begin{pmatrix} g(r)\chi_{\kappa,m} \\ if(r)\chi_{-\kappa,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A veces usaremos esta notación alternativa. Con esto y (4.18) y (4.15), la ecuación (4.12) finalmente toma forma

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\varphi_{jlm} = -\Omega_{jl'm} \left(\frac{dg(r)}{dr} + \frac{\kappa+1}{r}g(r) \right). \quad (4.31)$$

Análogamente se puede derivar la siguiente expresión para $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi$:

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi_{jl'm} = -i\Omega_{jlm} \left(\frac{df(r)}{dr} - \frac{\kappa-1}{r}f(r) \right). \quad (4.32)$$

Ahora las expresiones (4.31) y (4.32) son insertadas en (4.7). Las funciones angulares de ambos lados de la ecuación pueden ser eliminadas. Entonces obtenemos las ecuaciones diferenciales para las funciones radiales f y g :

$$\begin{aligned} \frac{dg(r)}{dr} + (1+\kappa)\frac{g(r)}{r} - [E + m_0 - V(r)]f(r) &= 0, \\ \frac{df(r)}{dr} + (1-\kappa)\frac{f(r)}{r} + [E - m_0 - V(r)]g(r) &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Con las sustituciones

$$\begin{aligned} G = rg \quad y \quad F = rf \quad \text{con} \\ \frac{dG}{dr} = g + r\frac{dg(r)}{dr} \quad y \quad \frac{dF}{dr} = f + r\frac{df(r)}{dr}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G(r) - [E + m_0 - V(r)]F(r) &= 0, \\ \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F(r) + [E - m_0 - V(r)]G(r) &= 0.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Estas son el par frecuentemente usado de ecuaciones diferenciales para la función de onda radial F y G de la ecuación de Dirac en el caso de un potencial con simetría esférica $V(r)$. En la literatura uno ocasionalmente pone $G = u_1$ y $F = u_2$.

4.2. Solución de las ecuaciones radiales para una partícula de Dirac en un potencial de Coulomb

La energía de interacción de Coulomb de un núcleo de radio despreciable y una partícula de carga $-e$ es $V = -Ze^2/r$, por lo que las ecuaciones radiales para una partícula de Dirac son

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} &= -\frac{\kappa}{r}G + \left[E + m_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right]F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= \frac{\kappa}{r}F - \left[E - m_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right]G(r),\end{aligned}\quad (4.36)$$

donde $\alpha \approx 1/137$ es la constante de estructura fina. Primero examinaremos la solución de las ecuaciones (4.36) para r pequeña, i.e. cerca del origen ($r \sim 0$). En este caso el término con $E \pm m_0$ puede ser omitido y uno tiene

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r}G - \frac{Z\alpha}{r}F(r) &= 0, \\ \frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r}F + \frac{Z\alpha}{r}G(r) &= 0.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Usando una expansión en serie de potencias como un ansatz de la solución de (4.37), el primer término de esta serie en la región cerca del origen motiva al ansatz $G = ar^\gamma$ y $F = br^\gamma$. Usando esto se sigue que

$$\begin{aligned}a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - Z\alpha br^{\gamma-1} &= 0, \\ b\gamma r^{\gamma-1} - \kappa br^{\gamma-1} + Z\alpha ar^{\gamma-1} &= 0\end{aligned}\quad (4.38)$$

o

$$a(\gamma + \kappa) - bZ\alpha = 0, \quad aZ\alpha + b(\gamma - \kappa) = 0. \quad (4.39)$$

El determinante de los coeficientes debe desaparecer, dando

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \kappa^2 - (Z\alpha)^2, \\ \gamma &= \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = \pm \sqrt{(j + \tfrac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ya que la función de onda tiene que ser renormalizable debemos elegir el signo positivo para γ . Para la solución negativa $\gamma = -|\gamma|$ esto implica que $F^2 + G^2 \sim r^{-2|\gamma|}$ cercana a $r = 0$, que daría una integral divergente para la norma si $|\gamma| \leq \frac{1}{2}$. Sin embargo, debemos mencionar que para $\kappa^2 = 1$ y $Z\alpha\sqrt{3}/2$ o $Z \gtrsim 118$, soluciones regulares con γ negativa parecen posibles. De hecho, el tener $F^2 + G^2 \sim r^{-2\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}$ integrable todavía para $r \rightarrow 0$, la desigualdad $2\sqrt{1-(Z\alpha)^2} < 1$ debe ser cumplida, esto conduce a $(Z\alpha)^2 > \frac{3}{4}$. Solo diremos un posible argumento: *esas soluciones deben ser descartadas* por los siguientes postulados: no solo la integral de normalización $\int \psi^\dagger \hat{H}_D \psi d^3r$ debe existir, sino también el valor de expectación de cada operador parcial con $\hat{H}_D$, especialmente el valor de expectación de la energía de Coulomb:

$$\int \psi^\dagger \left(-\frac{Ze^2}{r} \right) \psi d^3x = \int (F^2 + G^2) \left(-\frac{Ze^2}{r} \right) dr.$$

Note que el factor usual r^2 para el elemento de volumen, acorde a (4.35), esta ya contenido en $(F^2 + G^2)$. El integrando se comporta como $r^{+2\gamma-1}dr$ en el límite $r \rightarrow 0$, dando una contribución finita solamente si $2\gamma - 1 > -1$, i.e. $\gamma > 0$. Esto, por otro lado, significa que solo la raíz positiva en (4.40) es físicamente aceptable. Además, uno puede concluir de la relación (4.40) que para estados con $j + \frac{1}{2} = 1$ solo soluciones anteriores de $Z = \alpha^{-1} \sim 137$ pueden ser construidas. Para valores grandes de Z la raíz llega a ser imaginaria y las funciones de onda no son mas normalizables. Para $(Z\alpha)^2 > \kappa^2$, en general la parte real de la función de onda muestra un comportamiento oscilatorio de la forma $Re(F, G) \sim \cos(|\gamma| \ln r)$ para r pequeña. Para resolver (4.36) hacemos la siguiente sustitución:

$$\varrho = 2\lambda r \quad \text{con} \quad \lambda = (m_0^2 - E^2)^{1/2}. \quad (4.41)$$

Con $d\rho/dr = 2\lambda$ y $d/dr = 2\lambda d/d\rho$ y dividiendo por 2γ se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{dG(\rho)}{d\rho} &= -\frac{\kappa}{\rho}G(\rho) + \left[\frac{E + m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] F(\rho), \\ \frac{dF(\rho)}{d\rho} &= \left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] G(\rho) + \frac{\kappa}{\gamma}F(\rho).\end{aligned}\quad (4.42)$$

Usando de esta forma las ecuaciones uno puede tener un comportamiento de $F(\rho)$ y $G(\rho)$ para $\rho \rightarrow \infty$, si despreciamos los términos proporcionales a $1/\rho$ las ecuaciones diferenciales (4.42) se ven

$$\begin{aligned}\frac{dG(\rho)}{d\rho} &= \frac{E + m_0}{2\lambda}F(\rho), \\ \frac{dF(\rho)}{d\rho} &= -\frac{E - m_0}{2\lambda}G(\rho).\end{aligned}$$

Combinadas con (4.41) se sigue inmediatamente que

$$\frac{d^2G(\rho)}{d\rho^2} = -\frac{E^2 - m_0^2}{(2\lambda)^2}G(\rho) = \frac{1}{4}G(\rho).$$

Uno tiene dos posibles soluciones con $G(\rho) \sim e^{\pm|\rho|^2}$, pero solo la exponencial decreciente puede ser usada debido a que solo esta es renormalizable. Un resultado similar se tiene para $F(\rho)$. Esto motiva al ansatz

$$\begin{aligned}G(\rho) &= (m_0 + E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1(\rho) + \phi_2(\rho)), \\ F(\rho) &= (m_0 - E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1(\rho) - \phi_2(\rho)),\end{aligned}\quad (4.43)$$

si lo insertamos en (4.42) tenemos:

$$\begin{aligned}&(m_0 + E)^{1/2}e^{-\rho/2} \left[-\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\rho} + \frac{d\phi_2}{d\rho} \right] \\ &= \frac{-\kappa}{\rho}(m_0 + E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + \left[\frac{E + m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] (m_0 - E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1 - \phi_2), \\ &(m_0 - E)^{1/2}e^{-\rho/2} \left[-\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\rho} - \frac{d\phi_2}{d\rho} \right] \\ &= -\left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] (m_0 + E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\rho}(m_0 - E)^{1/2}e^{-\rho/2}(\phi_1 - \phi_2).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Dividiendo por $e^{-\varrho/2}$ y además la primera ecuación por $(m_0 + E)^{1/2}$ y la segunda por $(m_0 - E)^{1/2}$ deja el resultado

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\phi_1 + \phi_2 \right) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
& = -\frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) + \left[\frac{E + m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0 - E)^{1/2}}{(m_0 + E)^{1/2}}(\phi_1 - \phi_2), \\
& -\frac{1}{2} \left(\phi_1 - \phi_2 \right) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
& = -\left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0 + E)^{1/2}}{(m_0 - E)^{1/2}}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2). \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{(m_0 - E)^{1/2}}{(m_0 + E)^{1/2}} = \frac{m_0 - E}{\lambda}$$

y

$$\frac{(m_0 + E)^{1/2}}{(m_0 - E)^{1/2}} = \frac{m_0 + E}{\lambda} \quad (4.46)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\phi_1 + \phi_2 \right) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
& = -\frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) + \left[\frac{E + m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0 - E)}{\lambda}(\phi_1 - \phi_2), \\
& -\frac{1}{2} \left(\phi_1 - \phi_2 \right) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
& = -\left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0 + E)}{\lambda}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2). \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones de (4.47) da

$$\begin{aligned}
& -\phi_1 + 2\frac{d\phi_1}{d\varrho} \\
& = -\frac{2\kappa}{\varrho}\phi_2 + \phi_1 + \frac{Z\alpha}{\varrho} \frac{(m_0 - E)}{\lambda}(\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad - \frac{Z\alpha}{\varrho} \frac{(m_0 + E)}{\lambda}(\phi_1 + \phi_2), \quad (4.48)
\end{aligned}$$

mientras que restándolas tenemos

$$\begin{aligned}
& -\phi_2 + 2\frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
& = -\frac{2\kappa}{\varrho}\phi_1 - \phi_2 + \frac{Z\alpha(m_0 - E)}{\varrho\lambda}(\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad - \frac{Z\alpha(m_0 + E)}{\varrho\lambda}(\phi_1 + \phi_2).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Sumando todas obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{d\varrho} & = \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\varrho}\right)\phi_1 - \left(\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda\varrho}\right)\phi_2, \\
\frac{d\phi_2}{d\varrho} & = \left(-\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda\varrho}\right)\phi_1 + \frac{Z\alpha E}{\lambda\varrho}\phi_2.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Para encontrar las soluciones para ϕ_1 y ϕ_2 hacemos el ansatz de una expansión en serie de potencias. Separando un factor ϱ^γ , que describe el comportamiento de la solución para $\varrho \rightarrow 0$, escribimos

$$\phi_1 = \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varrho^m, \quad \phi_2 = \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \varrho^m. \tag{4.51}$$

Insertando esto en (4.50) da

$$\begin{aligned}
& \sum (m + \gamma) \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
& = \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
& \quad - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda}\right) \sum \beta_m \varrho^{m+\gamma-1}, \\
& \sum \beta_m (m + \gamma) \varrho^{m+\gamma-1} \\
& = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda}\right) \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \sum \beta_m \varrho^{m+\gamma-1}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Comparando los coeficientes concluimos que

$$\begin{aligned}
\alpha_m (m + \gamma) & = \alpha_{m-1} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} \alpha_m - \left(\kappa - \frac{Z\alpha m_0}{\lambda}\right) \beta_m, \\
\beta_m (m + \gamma) & = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda}\right) \alpha_m + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \beta_m.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

De la segunda ecuación de (4.53) se sigue que

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m} = \frac{-\kappa + Z\alpha m_0/\lambda}{m + \gamma - Z\alpha E/\lambda} = \frac{\kappa - Z\alpha m_0/\lambda}{n' - m}, \quad (4.54)$$

con

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma. \quad (4.55)$$

Para $m = 0$ uno obtiene

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\kappa - Z\alpha m_0/\lambda}{n'} = \frac{\kappa - (n' + \gamma)m_0/E}{n'}. \quad (4.56)$$

Insertando el resultado (4.54) en la primera ecuación de (4.53)

$$\alpha_m \left[m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\lambda} + \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda} \right) \left(\frac{\kappa - Z\alpha m_0/\lambda}{n' - m} \right) \right] = \alpha_{m-1} \quad (4.57)$$

o

$$\alpha_m \left[\left(m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \right) (n' - m) + \kappa^2 - \frac{Z^2 \alpha^2 m_0^2}{\lambda^2} \right] = \alpha_{m-1} (n' - m). \quad (4.58)$$

Calculamos ambos paréntesis en el lado izquierdo de (4.58)

$$\left(m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \right) \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma - m \right) = -2m\gamma - m^2 - \gamma^2 + \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda} \right)^2, \quad (4.59)$$

con $\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$ y se sigue que

$$\alpha_m \left[-m(2\gamma + m) + (Z\alpha)^2 + \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{Z\alpha m_0}{\lambda} \right)^2 \right] = \alpha_{m-1} (n' - m), \quad (4.60)$$

Que se puede resumir como

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -\frac{(n' - m)}{m(2\gamma + m)} \alpha_{m-1} = \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \\ &= \frac{(1 - n')(2 - n') \dots (m - n')}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De acuerdo con (4.54) β_m se encuentra que es

$$\beta_m = (-1)^m \frac{(\kappa - Z\alpha m_0/\lambda)}{n' - m} \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0. \quad (4.62)$$

Usando (4.56) esto queda

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n'(n'-1)\dots(n'-m+1)}{m!(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)} \beta_0. \quad (4.63)$$

Las series de potencias (4.61) y (4.63) resultan ser la *función hipergeométrica confluyente* [10]

$$F(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (4.64)$$

Con esto encontramos que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha_0 \varrho^\gamma F(1-n', 2\gamma+1; \varrho), \\ \phi_2 &= \beta_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma+1; \varrho) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$= \left(\frac{\kappa - Z\alpha m_0/\lambda}{n'} \right) \alpha_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma+1; \varrho). \quad (4.66)$$

Con el fin de que la función de onda siga siendo normalizable debemos pedir que las series para ϕ_1 y ϕ_2 se termine; por lo tanto las funciones hipergeométricas tienen que ser simples polinomios. Esto solo puede ser logrado si n' es un entero no negativo, *i.e.* $n' = 0, 1, 2, \dots$. Definimos el número cuántico principal

$$n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.67)$$

Con esto podemos calcular los eigenvalores de energía de (4.55) y obtener

$$\frac{Z\alpha E}{(m_0^2 - E^2)^{1/2}} = n' + \gamma = n - j - \frac{1}{2} + \gamma \quad (4.68)$$

y consecuentemente

$$[(Z\alpha)^2 + (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2] E^2 = m_0^2 (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} E &= +m_0 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[n - j - \frac{1}{2} + [(j + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2}]^2} \right]^{-1/2}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \\ \kappa &= \pm(j + \frac{1}{2}) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \end{aligned} \quad (4.70)$$

El signo negativo en (4.70) debe ser excluido porque, para núcleos cargados positivamente ($Z\alpha > 0$), energías negativas E no cumplen la ecuación original (4.68), debido a que el lado de la derecha es positivo. Por lo tanto escribimos el signo negativo en (4.70) en paréntesis, y por tanto obtenemos la *fórmula de estructura fina de Sommerfeld* para eigenvalores de energía de electrones en átomos con un potencial de Coulomb y núcleos puntuales. Finalmente queremos citar la expresión completa para las funciones de onda radiales. Aquí las funciones de onda están normalizadas de acuerdo a la prescripción $\int \psi^\dagger \psi dV = 1$, lo que explícitamente implica para $f(r)$ y $g(r)$ que

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r^2 dr = 1. \quad (4.71)$$

Esto conduce a la expresión final para la *función de onda radial normalizada*.

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} g(r) \\ f(r) \end{matrix} \right\} &= \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \\ &\times \sqrt{\frac{(m_0 \pm E)\Gamma(2\gamma + n' + 1)}{4m_0 \frac{(n' + \gamma)m_0}{E} \left(\frac{(n' + \gamma)m_0}{E} - \kappa \right) n'!}} \\ &\times (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r} \left\{ \left(\frac{(n' + \gamma)m_0}{E} - \kappa \right) F(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right. \\ &\quad \left. \mp n' F(1 - n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right\}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Con el fin de calcular los valores de los estados ligados de la energía E_{bind} cuando $Z \ll 1$ expandimos la fórmula de la energía como:

$$\frac{E - m_0}{m_0} = -(Z\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}. \quad (4.73)$$

El primer término en (4.73) representa la fórmula de Bohr para los niveles de energía calculados acorde a la ecuación de Schrödinger. En consecuencia, las correcciones relativistas para los niveles de energía en un campo de Coulomb son del orden de $(Z\alpha)^2$. Esas correcciones son solamente importantes para pequeños números cuánticos principales y en núcleos pesados. Además notamos que las funciones de onda relativistas $f(r)$ y $g(r)$ muestran para $|\kappa| = 1$ una débil (pero de cuadrado integrable) divergencia en el origen

$r = 0$, en contraste con el caso no relativista. Los estados son clasificados en completo acuerdo con los niveles del átomo de hidrógeno ($Z = 1$).

Los eigenvalores de energía solo dependen del número cuántico principal n , de $|\kappa|$, y sobre un Z . En la tabla (4.1) se muestran los valores de la energía de los estados ligados del electrón en el átomo de hidrógeno $Z = 1$, en la notación espectroscópica el primer número representa el número cuántico principal, la letra se refiere al valor del momento magnético l y el subíndice esá dado por el valor de j .

Cuadro 4.1: Clasificación de estados ligados del electrón de acuerdo a la ecuación de Dirac para $Z=1$ (átomo de hidrógeno)

Notacion	n	l	j	n'	κ	$E_{bind}(eV)$
$1S_{1/2}$	1	0	$1/2$	0	-1	-13,606
$2S_{1/2}$	2	0	$1/2$	1	-1	-3,402
$2P_{1/2}$	2	1	$1/2$	1	1	-3,402
$2P_{3/2}$	2	1	$3/2$	0	-2	-3,401
$3S_{1/2}$	3	0	$1/2$	2	-1	-1,512
$3P_{1/2}$	3	1	$1/2$	0	1	-1,512
$3P_{3/2}$	3	1	$3/2$	0	-2	-1,512
$3d_{3/2}$	3	2	$3/2$	0	2	-1,512
$3d_{5/2}$	3	2	$5/2$	0	-3	-1,512

Hay una degeneración de los niveles con igual $|\kappa|$, pero diferente l , aquí, por ejemplo, $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ tienen el mismo valor de la energía pero con paridad opuesta.

4.3. Correcciones debidas a la no conmutatividad del espacio-tiempo

El Hamiltoniano de Dirac para el átomo de hidrógeno agregando la parte de interacción no conmutativa puede ser descrito como el hamiltoniano libre (4.1) más el operador referente a la no conmutatividad, esto es:

$$\hat{H} = \hat{H}_D + \hat{H}' \quad (4.74)$$

donde escribimos a H' como

$$H' = \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu}, \quad (4.75)$$

con $i\theta^{\mu\nu} = [x^\mu, x^\nu]$ la matriz antisimétrica dada por

$$\theta_{\mu\nu} = -i \begin{pmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & b_z & -b_y \\ e_y & -b_z & 0 & b_x \\ e_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, los elementos diagonales de esta matriz son iguales a 0 y desarrollando para los términos que incluyen a γ^0 tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma^{0i} &= \frac{i}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Es fácil comprobar que $\sigma^{0i} = -\sigma^{i0}$. El desarrollo para los elementos que no incluyen a γ^0 se ve

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{i}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & -2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Podemos expresar (4.75) por componentes como

$$\begin{aligned} H' &= \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\sigma^{0i}\theta_{0i} + \sigma^{i0}\theta_{i0} + \sigma^{ij}\theta_{ij}] \\ &= i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para determinar el cambio en los niveles de energía en el átomo de hidrógeno ocasionada por los efectos de la no conmutatividad del espacio-tiempo, tomaremos al operador en H' como una perturbación. Usamos entonces teoría de

perturbaciones para calcular la energía E' , tomamos el valor de expectación de nuestro operador (4.79)

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \langle \psi_{jm} | H' | \psi_{\hat{j}\hat{m}} \rangle \\
&= \langle \psi_{jm} | i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \psi_{\hat{j}\hat{m}} \rangle \\
&= \langle (\phi_{jlm}, \chi_{jl'm}) | i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \phi_{\hat{j}\hat{l}\hat{m}} \\ \chi_{\hat{j}\hat{l}'\hat{m}} \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle (\phi_{jlm}, \chi_{jl'm}) | i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \chi_{\hat{j}\hat{l}'\hat{m}} \\ \phi_{\hat{j}\hat{l}\hat{m}} \end{pmatrix} \rangle \\
&\quad - \langle (\phi_{jlm}, \chi_{jl'm}) | \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \phi_{\hat{j}\hat{l}\hat{m}} \\ \chi_{\hat{j}\hat{l}'\hat{m}} \end{pmatrix} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Donde ϕ_{jlm} y $\chi_{jl'm}$ son los espinores dados en la ecuación (4.10), y debido a que σ_x y σ_y tienen elementos en la contradiagonal y los armónicos son funciones ortogonales se puede mostrar fácilmente que $\int d^3x \Omega_{jlm} \sigma_{x,y} \Omega_{\hat{j},\hat{l},\hat{m}} = 0$. Por lo tanto, solo podemos construir una solución cuando tenemos la orientación en z : $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} = e_z \sigma_z \cos \theta$ y $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = b_z \sigma_z \cos \theta'$, para $0 < \theta, \theta' < \pi$. Por ahora solo nos enfocaremos cuando θ y θ' son $\pi/2$

$$\begin{aligned}
E &= ie_z \int_V d^3x (-ig^*(r) \Omega_{jlm}^\dagger, -f^*(r) \Omega_{jl'm}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f(r) \Omega_{\hat{j}\hat{l}'\hat{m}} \\ ig(r) \Omega_{\hat{j}\hat{l}\hat{m}} \end{pmatrix} \\
&\quad - b_z \int_V d^3x (-ig^*(r) \Omega_{jlm}^\dagger, -f^*(r) \Omega_{jl'm}^\dagger) \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ig(r) \Omega_{\hat{j}\hat{l}\hat{m}} \\ -f(r) \Omega_{\hat{j}\hat{l}'\hat{m}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Usando explícitamente los Ω 's dados en las ecuaciones (4.16) y (4.17) tenemos

$$\begin{aligned}
E' &= ie_z \int_V d^3x \left\{ \right. \\
&\quad \left(-ig^* \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^*, -ig^* \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* \right) \begin{pmatrix} -f \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} \\ f \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(-f^* \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^*, f^*(r) \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \right) \begin{pmatrix} ig \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} \\ -ig \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \left. \right\} \\
&\quad - b_z \int_V d^3x \left\{ \right. \\
&\quad \left(-ig^* \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^*, -ig^* \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* \right) \begin{pmatrix} ig \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} \\ -ig \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(-f^* \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^*, f^* \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \right) \begin{pmatrix} -f \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} \\ f \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \left. \right\} \\
&= ie_z \int_V d^3x \left\{ \right. \\
&\quad ig^* f \sqrt{\frac{j+m}{2j}} \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} - ig^* f \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \\
&\quad - if^* g \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} + if^* g \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \left. \right\} \\
&\quad - b_z \int_V d^3x \left\{ \right. \\
&\quad g^2 \sqrt{\frac{j+m}{2j}} \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} - g^2 \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}}{2\hat{j}}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \\
&\quad + f^2 \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{\hat{j}-\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}-\frac{1}{2}} - f^2 \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{\hat{j}+\hat{m}+1}{2\hat{j}+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}}^* Y_{\hat{l},\hat{m}+\frac{1}{2}} \left. \right\}. \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Usando que los armónicos esféricos están débilmente normalizados $\int d^3x Y_{l,m} Y_{\hat{l},\hat{m}} = \delta_{l,\hat{l}} \delta_{m,\hat{m}}$

$$\begin{aligned}
E' &= -e_z \int_0^\infty r^2 dr \left\{ gf \left[\sqrt{\frac{j+m}{2j}} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} - \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \right] \right. \\
&\quad \left. - fg \left[\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} - \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \right] \right\} \\
&\quad - b_z \int_0^\infty r^2 dr \left\{ g^2 \left[\left(\frac{j+m}{2j} \right) - \left(\frac{j-m}{2j} \right) \right] + f^2 \left[\left(\frac{j-m+1}{2j+2} \right) - \left(\frac{j+m+1}{2j+2} \right) \right] \right\} \\
&= 0 - b_z \left[\frac{m}{j} \int_0^\infty g^2(r) r^2 dr - \frac{m}{j+1} \int_0^\infty f^2(r) r^2 dr \right]. \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Recurriendo a la normalización de las funciones radiales (4.71) y viendo que para $Z = 1$ y los primeros valores de n se tiene $\int_0^\infty g^2 r^2 dr \approx 1$ (este dato se consiguió numéricamente) tenemos

$$E' = b_z \frac{m}{j}. \tag{4.84}$$

Esto corrige a los niveles de energía cuando $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ y por lo tanto $m = \pm l$ y $j = l + 1/2$, así que $E' = \pm b_z \frac{2l}{2l+1}$. Entonces la corrección en los niveles de la energía es la suma de la energía libre mas la energía debida a la no conmutatividad

$$E = E_0 + E'. \tag{4.85}$$

La energía en términos de la longitud de onda λ es

$$hc \frac{1}{\lambda} = E(n_2) - E(n_1), \tag{4.86}$$

donde $E(n_2)$ es la energía del electrón en el estado excitado y $E(n_1)$ es la energía del estado base del electrón¹.

El experimento nos dá las longitudes de onda en el espectro con un error experimental $\pm \Delta \lambda$ debido a las imprecisiones que se tengan a la hora de hacer la medición, este se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned}
E(n_2) - E(n_1) \pm \Delta E &= hc \frac{1}{\lambda \pm \Delta \lambda} \\
&= hc \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{1 \pm \Delta \lambda / \lambda} \right] \\
&= hc \frac{1}{\lambda} \left[1 \mp \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right]. \tag{4.87}
\end{aligned}$$

¹Aquí ya regresamos al sistema MKS de unidades.

Por lo que la imprecisión en el valor de la energía está dada por

$$\Delta E = \mp hc \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}. \quad (4.88)$$

El experimento [11] arroja los siguientes datos para diferentes n_2 en el caso cuando $n_1 = 1$.

Cuadro 4.2: Datos experimentales de la longitud de onda medida en el espectro del átomo de hidrógeno y el error experimental calculado para diferentes transiciones del electrón.

<i>Transicion</i>	$\lambda(\text{\AA})$	$\Delta\lambda(\text{\AA})$
$2 \rightarrow 1$	1215,66	0,06
$3 \rightarrow 1$	1025,83	0,06
$4 \rightarrow 1$	972,54	0,07
$5 \rightarrow 1$	949,76	0,07
$6 \rightarrow 1$	937,82	0,08

Con esto, podemos comparar (4.84) con (4.88) para poder ver en que rango se encuentra la unidad de longitud vista en el capítulo 2. Así tenemos que

$$b_z \frac{2l}{2l+1} = hc \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \quad (4.89)$$

Como $b_z = a^2/h$ tenemos que

$$a = h \sqrt{c \frac{2l+1}{2l} \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}}, \quad (4.90)$$

Para cada transición tenemos un promedio para $a \approx 3,2743 \times 10^{-31}m$. Aún estamos a tres órdenes de magnitud del valor esperado para a que se espera que esté en la escala de Planck $\sim 10^{-34}m$.

Capítulo 5

Consideraciones finales y conclusiones

El estudio de efectos físicos en el espacio no conmutativo ha atraído mucha atención en los años recientes, debido a que los efectos del espacio no conmutativo pueden llegar a ser significativos no solo en la escala de cuerdas sino que también a niveles de muy altas energías (TeV y niveles más altos de energía). Además de teoría de campos, hay muchos trabajos dedicados al estudio de varios aspectos de la mecánica cuántica en un espacio no conmutativo con la coordenada temporal usual (conmutativa).

Las simetrías discretas de Lorentz se pueden violar en el espacio no conmutativo por separado, pero la simetría de CPT no se viola debido a que el parámetro no conmutativo $\theta^{\mu\nu}$ acarrea un número par de índices de Lorentz.

El fenómeno de la no conmutatividad tiene efectos en las líneas espectrales para el átomo de hidrógeno, sin embargo éstos no pueden ser detectados de forma experimental, esto es debido a que aún estamos a tres órdenes de magnitud del valor que se espera que esté la unidad fundamental de longitud propuesta por Snyder [2] causante del fenómeno de la no conmutatividad que debe estar en el orden de la escala de Planck $10^{-34}m$. Entonces se debe hacer más preciso el experimento con el fin de ver la corrección en las líneas espectrales, y poder discutir sobre la cota de los efectos de no conmutatividad que hemos obtenido mediante mecánica cuántica.

En trabajos teóricos recientes, se ha establecido una cota para posibles efectos (no necesariamente proviniendo de la no conmutatividad, sino de gravedad u otros) de 2 TeV basada en procesos de dispersión $b \rightarrow S\gamma$ de alta energía [12]. Comparando nuestra cota con la que obtuvieron en el trabajo

mencionado, vemos que nuestro resultado es mucho más restrictivo por varios órdenes de magnitud ($\sim 10^{15}$ TeV) lo que indica, si nuestros resultados son correctos, que es más accesible experimentalmente buscar efectos de violación de Lorentz debido a otros efectos que no son debido a la no conmutatividad del espacio tiempo, cabe mencionar que éste es el principal resultado de ésta tesis.

Bibliografía

- [1] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D69 10.5009 (2004).
- [2] H. S. Snyder, *Quantized space time*, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [3] C. N. Yang, Phys. Rev. 72, 874 (1947).
- [4] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 99 (1949).
- [5] N. Seiberg, E. Witten, *high Energy Phys*, JHEP 09, 032 (1999).
- [6] C. Gemmel, et. al. Phys. Rev. D82, 111901 (R)(2010).
- [7] S. Carroll, J. Harvey, A. Kostelecky, C. Lane, T. Okamoto. *Noncommutative field theory and Lorentz Violation*, Phys. Rev. Lett. 87, (14) 10.1103.
- [8] D. G. C. McKeon, R. Clarkson, *Notes taken by R. Clarkson for Dr. McKeon's Field Theory (Parts I and II) Class.*, Enero 13, 2003.
- [9] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Ed Springer.
- [10] M. Abramowitz, I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications inc. 1970 New York.
- [11] D. V. Perepelitsa, B. J. Pepper, *Spectroscopy of Hydrogenic Atoms*, Report MIT Department of Physics, Octubre 23, 2006.
- [12] G. Ahuatzin, I. Bautista, J. A. Heredia-López, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano. Phys. Rev. D82, 053001 (2010).