



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“PROYECCIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EN 3D”

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

MARICIANO HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ

ASESOR:

Dr. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ

Profesor Investigador de la Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.

COASESOR:

M. en C. ÁNGEL ALFONSO VALDEZ DE ANDA
Profesor Investigador Preparatoria José María Morelos
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia Michoacán.

Junio de 2011, Morelia Michoacán.

Agradecimientos

Gracias primeramente a mis padres, José y Juana por darme la vida, por sus grandes consejos, que me han apoyado en momentos difíciles y han sonreído conmigo en los felices momentos, por enseñarme a llorar y reír, por su apoyo para mi formación profesional.

A mis hermanos(as): Orlando, Miguel, José Guadalupe, Lizbeth Nidelia, Iris Vianey, Hidania Elisud, Mariela Soledad, Santiago Walter, Sandra Selena, Pedro Edilzar y Cristian Gabriel.

A mis sobrinitos (as): Gisela del Rocío, Lizbeth Amairani, Brian Gabriel, Damián y Haley Johari.

A mis tíos (as): Narciso, Luis, Pablo, Jerónimo, Armando, Jerónima y Carmen.

A mi abuela Francisca por sus grandes consejos.

A mi asesor de tesis el Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez. Gracias por haber aceptado ser mi asesor de tesis. Gracias por la paciencia que me tuvo. Gracias sobre todo por su confianza y su amistad.

Al Maestro en Ciencias Ángel Alfonso Valdez de Anda por su interés mostrado en esta tesis, por haber hecho el espacio en su tiempo para dedicarlo a éste trabajo y por el apoyo brindado.

A todos mis amigos de la facultad y compañeros del grupo de óptica Ricardo, Gabriel, Cristina, Rosa, Benito, Sra. Eugenia y Fabián.

Al Dr. Fernando Guevara del laboratorio de Sinecología de la UMSNH por proporcionar algunos objetos para este trabajo.

Con respeto a los profesores del jurado

Dra. Mary Carmen Peña Gomar

Dr. Gonzalo Viramontes Gamboa

Dr. Luis Mariano Hernández Ramírez

Dr. Rafael González Campos

PROYECCIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EN 3D

Por

MARICIANO HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ

RESUMEN

En este trabajo se propone utilizar la técnica de proyección de luz estructurada para la reconstrucción tridimensional de la topografía de superficies de objetos milimétricos. Con esta técnica se reconstruye la topografía de un objeto a partir de la deformación de un sistema periódico de franjas, formadas por líneas blancas y oscuras, proyectadas sobre el objeto que es observado a través de un microscopio óptico. La imagen que se obtiene de las franjas deformadas es registrada por una cámara CCD.

Mediante una aplicación de procesamiento de imágenes se implementa la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de las superficies y proporciona información de los cambios superficiales que presentan.

Esta técnica se seleccionó por ser una técnica de fácil manejo ya que otras técnicas que utilizan iluminación láser presentan una fácil desalineación del sistema.

ÍNDICE

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1	Antecedentes -----	1
1.2	Objetivo General-----	4
1.2.1	Objetivos Específicos-----	4

CAPÍTULO II. TEORÍA

II.1	Rejillas Cosenoidales-----	5
II.2	Proyección de Franjas-----	6
II.3	Medios de Modulación de Fase-----	11
II.4	Fase por Pasos-----	12
II.5	Fase Envuelta-----	13
II.6	Desenvolvimiento de Fase-----	16

CAPÍTULO III. DESARROLLO Y RESULTADOS EXPERIMENTALES

III.1	Arreglo Experimental -----	31
III.2	Objetos Analizados-----	32
III.3	Adquisición de Imágenes -----	34
III.4	Procesamiento de Imágenes-----	37
III.5	Método de Corrimiento de Fase por Pasos-----	37
III.6	Resultados Experimentales-----	39

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES -----	44
---------------------------------------	----

APÉNDICE A. Ecuación General Para 11 Pasos-----	45
--	----

APÉNDICE B. Cálculo de la Fase Para 11 Pasos-----	50
--	----

REREFENCIAS -----	52
--------------------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1. Antecedentes

Hoy en día el crecimiento de la óptica ha tenido mayor importancia y aplicaciones en las actividades del ser humano, estas se pueden separar en cuatro grandes áreas en las cuales inciden las investigaciones que en la actualidad se realizan: instrumentación óptica, comunicaciones ópticas, fotónica y metrología óptica.

En el área de la Instrumentación Óptica se incluye el estudio y diseño de elementos y sistemas ópticos que se utilizan principalmente para formar o registrar imágenes, como por ejemplo: lentes, prismas, espejos, microscopios, telescopios, etc [1].

Las Comunicaciones Ópticas utilizan la luz como portadora de información y se usan sistemas ópticos para la transmisión y recepción de señales. Los temas relacionados con esta área de aplicaciones son fibras ópticas, detectores, fuentes de luz (láseres), procesamiento de señales, holografía, óptica no lineal, entre otros [2].

En la fotónica se investigan fenómenos relacionados con radiación y detección luminosa de alta potencia, la rápida detección y transmisión de información generada con luz, nuevos materiales ópticos, fuentes de radiación que sirve como soporte de la instrumentación, comunicación y metrología óptica. Los temas relacionados con esta área son coherencia, óptica cuántica, fibras fotónicas, óptica no lineal, etc. Las aplicaciones derivadas de estos estudios se reflejan en la aparición de nuevos tipos de láseres o bien en el perfeccionamiento de los ya existentes. Estas investigaciones también permiten el empleo de nuevos materiales para aplicaciones diversas como en las comunicaciones y sensores ópticos [3].

La Metrología Óptica es una técnica importante con la cual se pueden tomar medidas pequeñísimas inimaginables por otros medios. Este grupo de aplicación permite analizar propiedades físicas con alta precisión, la cual tiene que ver con la medición y monitoreo de

parámetros físicos, usando sistemas y métodos de no contacto mediante el manejo de luz, lo cual lleva a realizar pruebas no destructivas. Entre los métodos sin contacto están los sistemas ópticos basados en la técnica de proyección de franjas incoherente, efecto moiré, interferometría de Talbot e interferometría de moteado [4].

En la técnica de proyección de franjas incoherente, se digitaliza una imagen por medio de una cámara CCD de una serie de líneas blancas y negras deformada por el objeto a analizar.

La técnica del efecto moiré tiene su principio físico en la superposición de dos rejillas, donde una de ellas se distorsiona debido a la deformación o a la forma del objeto bajo estudio siendo esta proporcional a la cantidad física que se desea medir; la otra rejilla no sufre distorsión alguna y se le conoce como rejilla de referencia. Matemáticamente tiene una gran semejanza con el análisis que se realiza a los patrones de interferencia.

En la interferometría Talbot, el objeto a digitalizar es colocado en uno de los planos de las autoimágenes de una rejilla. Posteriormente, se capta con una cámara CCD la imagen del objeto con la rejilla proyectada ahora deformada. Ésta es superpuesta con una rejilla generada sintéticamente, formando así un patrón de franjas de moiré, el cual nos dará información de la topografía del objeto bajo prueba.

Para el caso de interferometría de moteado, el objeto es iluminado a un ángulo θ con respecto al eje óptico. Se capta una imagen inicial y una segunda imagen después de rotar el objeto a un ángulo $\Delta\theta$. Procesando ambas imágenes se obtiene información de la profundidad del objeto bajo estudio.

Esta tesis se basa en la metrología óptica por su importancia en la solución de problemas relacionados con la industria automovilística, aerostática, análisis no destructivo de materiales compuestos, inspección de turbinas y detección de fracturas en elementos mecánicos. También tiene que ver con la medición de parámetros físicos tales como: esfuerzo, desplazamiento, distancia, presión, temperatura, velocidad, forma, dimensiones, etc., de objetos y/o regiones de observación. Incluyendo el reconocimiento de patrones con respecto al cálculo de forma, textura, color, dimensiones, etc., de objetos, usando sistemas sin contacto y métodos no destructivos mediante la utilización de la luz. La razón es que se

utilizan sistemas de medición de campo completo y en la mayoría de los casos no invasivos además de alta resolución.

Para este trabajo se desarrolla una aplicación para el procesamiento de imágenes de superficies de objetos milimétricos utilizando un método llamado fase por pasos [5,6]. Los objetos analizados fueron: partes del escudo de la UMSNH, 2 hojas vegetales (*Burfera Palmeri* S.Wats y *Bursera bipinnata* Dc. Engl), línea hecha por dos bolígrafos sin tinta una de 0.5 mm y de 0.7 mm de diámetro y una cartulina troquelada. Este método permite establecer la aplicación de una técnica cualitativa de procesamiento de imágenes para luego analizar la topografía, forma y textura del objeto, utilizando el equipo que se encuentra en el laboratorio de Óptica de la Facultad Ciencias Físico Matemáticas de la U.M.S.N.H. Se experimenta con una técnica de proyección de franjas para detectar la topografía o cambios superficiales que presentan los objetos a analizar, los cuales se registran a través de una cámara CCD conectada a una computadora. Mediante una aplicación de procesamiento de imágenes, a través del método mencionado anteriormente, y en un programa en computadora se implementa la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de las superficies y proporciona información de los cambios superficiales que presentan.

Los resultados obtenidos pretenden relacionar la óptica con la Sinecología que es una subdisciplina de la ecología que estudia la composición y la estructura de la comunidad formada por especies diferentes; los cambios que ocurren en el tiempo; las relaciones entre la especie a la comunidad, etc. Es decir, por medio de la óptica se puede adquirir la topografía de hojas de árboles, plantas, etc, proporcionando información sobre las venas y las demás particularidades que distinguen una especie vegetal de otra. Para ello se establecen los siguientes objetivos

I.2. Objetivo General

Analizar cualitativamente la topografía, forma y textura de objetos milimétricos mediante una aplicación de procesamiento de imágenes a través de la técnica de proyección de franjas utilizando el método de fase por pasos.

I.2.1. Objetivos Específicos

- Comprender el método de fase por pasos.
- Comprender los cambios de fase en un patrón de franjas proyectado sobre una superficie.
- Realizar el arreglo experimental para la captura de imagen.
- Analizar la superficie de objetos milimétricos mediante proyección de franjas aplicando el método de fase por pasos.

La organización de la tesis es la siguiente. En el capítulo II se presentan los fundamentos de proyección de franjas y se describen los procesos matemáticos para la recuperación de la topografía de los objetos analizados. En el capítulo III se presenta el desarrollo experimental, se describe el método empleado para el procesamiento de imágenes y se muestran los resultados obtenidos; en el capítulo IV se presentan conclusiones.

CAPÍTULO II

TEORÍA

II.1. Rejillas Cosenoidales

Con frecuencia, las rejillas utilizadas en metrología óptica son transparencias con transmitancia $t_1(x, y)$ dada por una función de onda cuadrada [4]. Una alternativa de estas funciones, que se emplea en este trabajo, es describir la transmitancia con funciones cosenoidales teniendo en cuenta que todos los tipos de rejillas periódicas pueden ser descritas como una suma de rejillas de este tipo. Una rejilla cosenoidal de frecuencia constante, $f=1/p$, mostrada en la figura (2.1) está dada por

$$t_1(x, y) = a + b \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \quad (2.1)$$

donde p es el período de la rejilla y $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$.

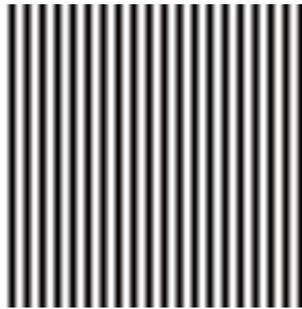


Figura 2.1. Rejilla cosenoidal generada en computadora.

La razón por la que las rejillas son usadas en metrología es debido a que pueden ser moduladas en fase. Esto significa que la rejilla dada por la ec. (2.1) se puede expresar como

$$t_2(x, y) = a + b \cos 2\pi \left(\frac{x}{p} + \Psi(x) \right), \quad (2.2)$$

donde $\Psi(x)$ es la función de modulación de fase y es igual al desplazamiento de las líneas de rejilla desde su posición original dividido por el período de la rejilla y está dada por

$$\Psi(x) = \frac{u(x)}{p}, \quad (2.3)$$

donde $u(x)$ es el desplazamiento de la rejilla.

Estas rejillas son útiles como herramienta para obtener el relieve de una superficie. Esto se explica detalladamente en la siguiente sección.

II.2. Proyección de Franjas

En esta sección se describe un método donde las franjas de la rejilla son proyectadas sobre una superficie de prueba y observadas por una cámara que forma un ángulo θ_2 con la normal de la superficie como se muestra en la figura 2.2. En esta figura se muestran las franjas con una distancia d entre franjas adyacentes proyectadas sobre el plano xy que forman un ángulo θ_1 respecto al eje z . El periodo de las franjas a lo largo del eje x se expresa en la ec. (2.4)

$$d_x = \frac{d}{\cos\theta_1}. \quad (2.4)$$

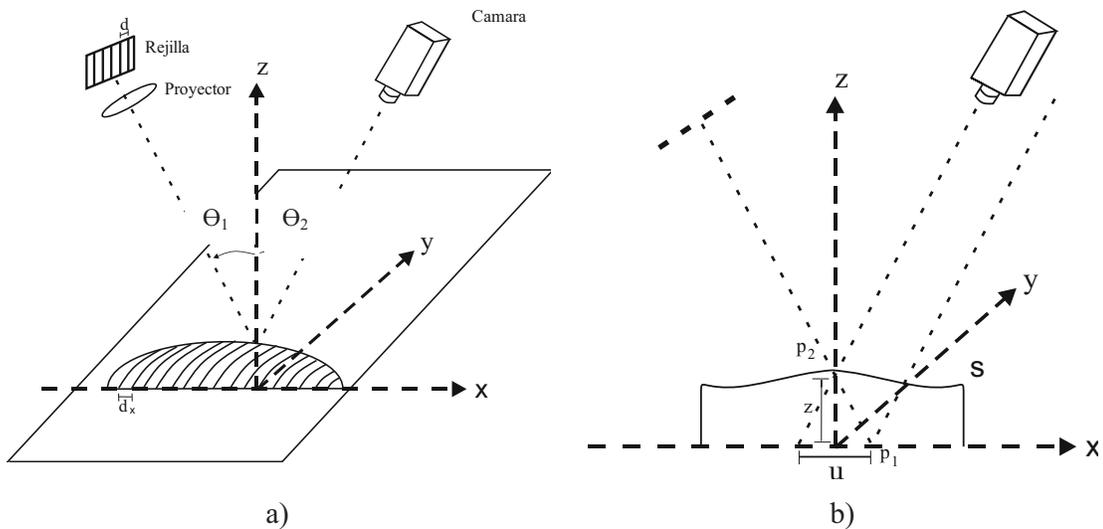


Figura 2.2 Geometría de la proyección de franjas, donde θ_1 =ángulo de proyección y θ_2 =ángulo de visión, a) esquema de la proyección de franjas y b) corte transversal del objeto bajo análisis.

En la figura 2.2 también se dibuja una curva S que representa una superficie de prueba a la que se desea obtener su contorno. En la figura 2.2b se puede ver que una franja originalmente colocada en p_1 se desplazará a p_2 debido a la superficie S . Proyectando el punto p_2 sobre el plano xy y visto con la cámara, el desplazamiento está dado por la ecuación

$$u = \overline{p_1 p_2'} = z(\tan\theta_1 + \tan\theta_2), \quad (2.5)$$

donde z es la altura del punto p_2 por encima del plano xy y θ_2 es el ángulo de visión. Usando las ecs. (2.3)-(2.5) se obtiene una función de modulación igual a

$$\Psi(x) = \frac{u}{d_x} = \frac{z(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{d/\cos\theta_1} = \frac{z}{d}(\sin\theta_1 + \cos\theta_2) = \frac{z}{d} \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\theta_2} = \frac{z}{d} G, \quad (2.6)$$

donde G es el factor de geometría dado de la siguiente forma:

$$G = G(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\theta_2} = \sin\theta_1 + \cos\theta_2 \tan\theta_2. \quad (2.7)$$

Considerando la ec. (2.2) y las ecs. (2.4)-(2.7), la distribución de intensidad a través de la superficie se puede escribir como

$$I = \left\{ 1 + \cos 2\pi \left[\frac{x}{d_x} + \Psi(x) \right] \right\} = \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{d} [x \cos\theta_1 + zG] \right\}, \quad (2.8)$$

donde se consideró que $a = b = 1$.

Comparando las ecs. (2.2) y (2.8) se observa que tiene la misma forma, con la diferencia que la fase en la ec. (2.8) está relacionada con la altura z de la superficie que se analiza. De esta manera, si se conoce la fase de la rejilla se puede determinar la forma 3D que tiene la superficie. Esto se lleva a cabo mediante procesado digital de imágenes.

Cabe destacar que la proyección de franjas no es la única forma de analizar una superficie. Recuérdese la expresión general de un interferograma que es dada por la ecuación

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \phi, \quad (2.9)$$

donde I_1 es la intensidad del primer haz, I_2 la intensidad del segundo haz y $\Delta\phi$ la diferencia de fase.

La ec. (2.9) se puede encontrar fácilmente realizando la interferencia entre dos haces de luz [7]. Colocando la superficie que se desea analizar sobre el mismo plano del patrón de interferencia se puede relacionar la fase del patrón con las alturas z de la superficie.

Para calcular la fase, la ec. (2.9) se resuelve con respecto a $\Delta\phi$ y se obtiene:

$$\Delta\phi = \cos^{-1} \frac{I - (I_1 + I_2)}{2\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (2.10)$$

En este trabajo se hace la reconstrucción de la superficie de un objeto proyectando franjas sobre éste, por lo que a continuación se analiza la forma para encontrar el valor de la fase de una rejilla.

Observando las ecs. (2.8) y (2.9) se nota la similitud entre ambas, por lo que de manera general, la intensidad registrada por una cámara CCD debido a un interferograma o una rejilla proyectada se puede escribir de la siguiente forma:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y), \quad (2.11)$$

donde a representa la intensidad de la iluminación de fondo, b la visibilidad o contraste de las franjas y ϕ función de las coordenadas espaciales. Para recuperar la fase describiremos un método interferométrico de medición de fase PMI (por siglas en inglés *phase measurement interferometry*). La PMI es la técnica más utilizada para la medición de la fase de frente de onda y también ha sido aplicado con éxito en holografía, interferometría y moiré [4]. La técnica PMI se divide en dos categorías principales: *los que toman los datos de fase en forma secuencial* y *los que toman todos los datos de fase al mismo tiempo*. Los métodos del primer tipo se conocen como interferometría de medición de fase temporal o TPMI y, los del segundo tipo son conocidos como interferometría de fase espacial o SPMI.

El punto de partida para todas las técnicas PMI es la expresión de intensidad para el interferograma que se puede escribir, de forma simplificada, como

$$I = a + b \cos(\phi + \alpha), \quad (2.12)$$

donde es introducido un término adicional de fase α , a y b son constantes y \emptyset la fase que es función de la altura z . La característica esencial de todas las técnicas de PMI es que α es una fase de modulación que se introduce y es controlada experimentalmente.

Las técnicas para la determinación de la fase se pueden dividir en dos categorías básicas: **electrónica** y **analítica**, las técnicas electrónicas son también conocidas como interferometría heterodina [8] y no son tratados en este trabajo. Para las técnicas analíticas, los datos de intensidad se registran mientras que la fase es temporalmente modulada y se envían a una computadora y luego se usan para calcular la intensidad relativa de las mediciones.

Los métodos de análisis se pueden subdividir en dos técnicas, *una que integra la intensidad mientras que la fase se va incrementando linealmente y, la segunda técnica cuando se modifica la fase en pasos entre cada medición de intensidad*. Este método es conocido como fase por pasos y se ha convertido en el más popular en los últimos años. En el siguiente párrafo se describe esta técnica.

Como se puede ver, la ec. (2.12) tiene tres incógnitas, a , b y \emptyset , por lo que para determinar la intensidad se requiere un mínimo de tres mediciones. Estas mediciones se realizan aplicando un desfase como se indica en las ecs. (2.13a-c). El desfase entre las medidas adyacentes puede ser cualquiera entre 0 y π radianes. Entonces para cambios de fase arbitraria α_1 , α_2 y α_3 se obtiene

$$I_1 = a + b \cos(\emptyset + \alpha_1) , \quad (2.13a)$$

$$I_2 = a + b \cos(\emptyset + \alpha_2) , \quad (2.13b)$$

$$I_3 = a + b \cos(\emptyset + \alpha_3) . \quad (2.13c)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por cualquier método y despejando \emptyset se tiene

$$\emptyset = \arctan \frac{(I_2 - I_3) \cos \alpha_1 - (I_1 - I_3) \cos \alpha_2 + (I_1 - I_2) \cos \alpha_3}{(I_2 - I_3) \sin \alpha_1 - (I_1 - I_3) \sin \alpha_2 + (I_1 - I_2) \sin \alpha_3} . \quad (2.14)$$

Si se supone que $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, $\alpha_3 = 5\pi/4$, es decir, se aplica un cambio de fase de $\pi/2$ por cada toma, se llega a una expresión simple dada por:

$$\emptyset = \arctan \frac{I_2 - I_3}{I_2 - I_1}. \quad (2.15)$$

En general, si se realizan N interferogramas, para la i -ésima fase escalonada, la intensidad resultante se puede escribir como [3]

$$I_i = a + b \cos(\emptyset + \alpha_i) = a_0 + a_1 \cos \alpha_i + a_2 \sin \alpha_i, \quad (2.16a)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= a = I_0, \\ a_1 &= b \cos \emptyset, \\ a_2 &= -b \sin \emptyset. \end{aligned} \quad (2.16b)$$

Al hacer N pasos es decir $i=1, 2, \dots, N$, la ec. (2.16a) se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 1 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \alpha_n & \sin \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

Los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 se puede encontrar utilizando la solución de mínimos cuadrados (ver apéndice A), y se deduce que están dados por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B, \quad (2.18)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} N & \sum \cos \alpha_i & \sum \sin \alpha_i \\ \sum \cos \alpha_i & \sum \cos^2 \alpha_i & \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sum \sin \alpha_i & \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \sum \sin^2 \alpha_i \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \sum I_i \\ \sum I_i \cos \alpha_i \\ \sum I_i \sin \alpha_i \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

las ecs. (2.16b), se encuentra que

$$\varnothing = \arctan\left(\frac{-a_2}{a_1}\right), \quad (2.21a)$$

o

$$\varnothing = \arctan\left(-\frac{b_2 \sum I_i + b_4 \sum I_i \cos \alpha_i + b_5 \sum I_i \sin \alpha_i}{b_1 \sum I_i + b_3 \sum I_i \cos \alpha_i + b_4 \sum I_i \sin \alpha_i}\right). \quad (2.21b)$$

El desarrollo de estas ecuaciones se encuentra en el apéndice A.

Estas ecuaciones indican que para obtener la fase \varnothing se deben adquirir N imágenes de interferogramas proyectados sobre el objeto a analizar, cada uno de ellos con un corrimiento de fase controlado entre $-\pi$ y π radianes.

II.3. Medios de Modulación de Fase

Un cambio o modulación de fase en un interferómetro puede ser inducido por un espejo en movimiento, inclinando una placa de vidrio, moviendo una rejilla, una placa retardadora giratoria de media onda o un polarizador, utilizando un modulador acusto-óptico, electro-ópticos o usando un láser de Zeeman. Los desfasadores pueden ser colocados en un brazo del interferómetro de modo que cambian la fase de uno de los dos haces. En la figura 2.3 se esquematizan estos métodos [4,9].

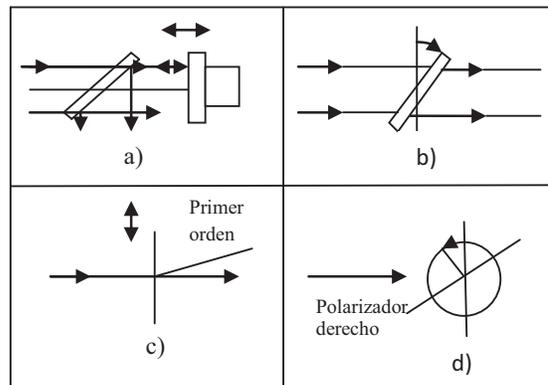


Figura 2.3. Los medios de modulación o cambios de la fase de la luz con un interferómetro (a) movimiento del espejo, (b) placa de vidrio inclinada, (c) movimiento de difracción de rejilla y (d) placa retardadora giratoria.

Sin embargo en este trabajo se utilizó una rejilla cosenoidal grabada en una película fotográfica y el desfase se introduce moviendo lateralmente la rejilla.

II.4. Fase por Pasos

Usando la ec. (2.17) se puede obtener un sistema de ecuaciones para calcular la fase dada en la ec. (2.21a). La fase que se introduce en el interferograma (o en la rejilla) puede ser en general, de N pasos. A continuación se presenta el resultado de evaluar el sistema de ecuaciones en la ec. (2.17) para N= 3, 4 y 5 pasos.

Técnica de tres pasos

Supóngase que:

$$(1) \alpha_i = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$$

$$\text{entonces} \quad \emptyset = \arctan \left(\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2} \right). \quad (2.22)$$

$$(2) \alpha_i = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$$

$$\text{por tanto} \quad \emptyset = \arctan \left[\sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{2I_1 - I_2 - I_3} \right]. \quad (2.23)$$

Técnica de cuatro pasos

Ahora supóngase que $\alpha_i = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

$$\text{y en este caso} \quad \emptyset = \arctan \left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right). \quad (2.24)$$

Técnica de cinco pasos

Si $\alpha_i = -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$

$$\text{Se obtiene} \quad \emptyset = \arctan \left(\frac{7(I_2 - I_4)}{-4I_1 + I_2 + 6I_3 + I_4 - 4I_6} \right). \quad (2.25)$$

En estas técnicas es necesario conocer el cambio de fase en cada paso y éste debe ser tal que permita reducir la expresión para la fase, ec. (2.21a).

Es conveniente que dos interferogramas con un cambio de fase relativa de 2π sean idénticos, como es el caso de la técnica de cinco pasos donde la diferencia de fase entre la primera y el último interferograma es 2π . Este "extra" interferograma puede ser utilizado para corregir la mala calibración de fase y el detector. Las técnicas con una diferencia de fase 2π entre el primer y el último interferograma se llaman técnicas de $(N + 1)$ pasos [4].

En este trabajo se emplea la técnica de 11 pasos debido al periodo de la rejilla que se sintetizó en el laboratorio. Cada paso se obtiene de la relación de

$$\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i = 2\pi/N , \quad (2.26)$$

donde $N=10$, por lo que de acuerdo al párrafo anterior se tiene 11 pasos.

Sustituyendo el valor de α_i en la ec. (2.21b) se obtiene la ecuación de 11 pasos para la fase de \emptyset dada por:

$$\emptyset = \arctan\left(\frac{38.28(I_7+I_{10}-I_2-I_5)+61.81(I_8+I_9-I_3-I_4)}{50(I_1-I_{11})+39.49(I_2-I_{10})+11.99(I_3-I_9)-21.99(I_4-I_8)-49.49(I_5-I_7)-60I_6}\right). \quad (2.27)$$

En el apéndice B se muestra el desarrollo de la ec. (2.27).

II.5. Fase Envuelta

Como se mencionó en la sección anterior, la expresión general para un interferograma se escribe como

$$I = a + b \cos\emptyset , \quad (2.28)$$

y al resolver esta ecuación para la fase \emptyset se obtiene

$$\emptyset = \arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right), \quad (2.29)$$

donde a_2 y a_1 son funciones de la intensidad registrada del conjunto de interferogramas localizados en la región donde se realiza la medición de fase (ver ec. 2.21b).

La amplitud de la fase calculada puede tomar cualquier valor que típicamente excede el rango $[-\pi, \pi]$ que es el valor proporcionado por la función arco tangente. En los casos donde la fase excede este rango de valores, se dice que la fase está envuelta de tal forma que permanezca dentro del rango normal, es decir, en el rango $[-\pi, \pi]$. En estos casos, la fase envuelta contendrá uno o más brincos de 2π [10].

Para comprender el significado de fase envuelta considérese el siguiente caso; supóngase que se tiene una señal discreta $x(n)$ cuya amplitud excede el rango $[-\pi, \pi]$. Se puede envolver la señal $x(n)$ como se indica a continuación.

1. Se calcula el valor senoidal de x .
2. Se calcula el valor cosenoidal de x .
3. Se calcula la función arco tangente de $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

Este procedimiento se puede realizar en cualquier software comercial. En este trabajo se emplea Matlab para realizarlo. En este programa la función arco tangente se define como la función `atan2`.

La función `atan2` puede ser calculada usando la siguiente ecuación

$$\text{atan2}(a,b) = \begin{cases} \arctan [a/b] & \text{si } a>0 \text{ y } b>0 \\ \arctan[a/b]+\pi & \text{si } a>0 \text{ y } b<0 \\ \arctan [a/b]-\pi & \text{si } a<0 \text{ y } b<0 \\ \arctan [a/b] & \text{si } a<0 \text{ y } b>0 \end{cases}$$

donde a y b son números reales.

Se puede expresar matemáticamente el proceso de envolvimiento mediante la ec. (2.31)

$$x_w(n) = w[x(n)] , \tag{2.31}$$

donde $x(n)$ es la señal original, $w[x(n)]$ es la operación de envolvimiento y $x_w(n)$ es la señal de fase envuelta.

Usando un código en Matlab se puede hacer una simulación del proceso de envolvimiento de fase. Para ello, supóngase una función $x(n)$ dada por la ec. (2.32) cuya amplitud excede el rango $[-\pi, \pi]$ a la que posteriormente se hará el proceso de envolvimiento. En la figura 2.4 se muestra una gráfica de la función

$$x(n)=6 \sin(2\pi*f*n) , \quad (2.32)$$

donde f es la frecuencia de la función y n es el número de pixel.

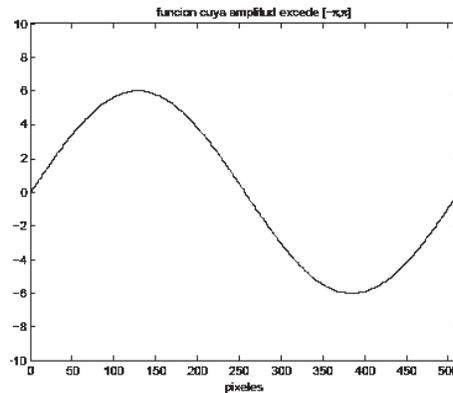


Figura 2.4. Función original con fase continua.

Para extraer la información de la fase de la función deseada, se emplea la función de Matlab `atan2` de la siguiente manera

$$x_w=\text{atan2}(\sin(x), \cos(x)) . \quad (2.33)$$

En la figura 2.5 se muestra el resultado de aplicar la función `atan2`.

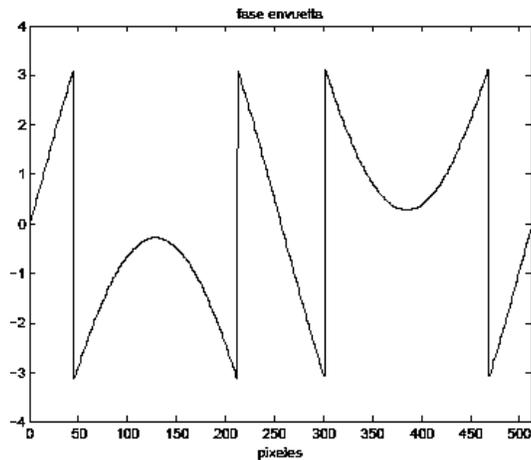


Figura 2.5. Fase envuelta se observa que el valor en el eje y, se encuentra entre $-\pi$ y π .

II.6. Desenvolvimiento de Fase

Los brincos 2π que están presentes en la fase envuelta que se muestran en la figura 2.5 deben ser eliminados para encontrar el valor de la fase de la señal $x_w(n)$ de forma continua y hacer la fase de fácil manejo para cualquier análisis o procesado. Este proceso es llamado “desenvolvimiento” y tiene como resultado regresar la fase envuelta de una señal como una señal de fase continua sin brincos de fase 2π .

El proceso de desenvolvimiento puede llevarse a cabo mediante el siguiente procedimiento.

1. Tomar el segundo dato (empezando por la izquierda) de la señal envuelta $x_w(n)$.
2. Calcular la diferencia entre el valor de este dato y el de su vecino izquierdo.
3. Si la diferencia entre estos dos valores es mayor que $+\pi$, entonces se resta 2π de este valor y a todos los valores a la derecha de este.
4. Si la diferencia entre estos dos valores es menor que $-\pi$, entonces se suma 2π de este valor y a todos los valores a la derecha de este.
5. Este proceso se repite hasta que se haya hecho con todos los valores de la muestra $x_w(n)$.

La progresión gradual del proceso de desenvolvimiento de fase se muestra en la figura 2.6. La señal original envuelta $x_w(n)$ contiene cuatro envolvimientos, como se muestra en la figura 2.5. La eliminación del primer envolvimiento se muestra en la figura 2.6a. La remoción del segundo envolvimiento se muestra en la figura 2.6b, y la eliminación del tercer envolvimiento se muestra en la figura 2.6c. Una vez que el cuarto y final envolvimiento es eliminado, la señal ha sido completamente desenvuelta, como se muestra en la figura 2.6d.

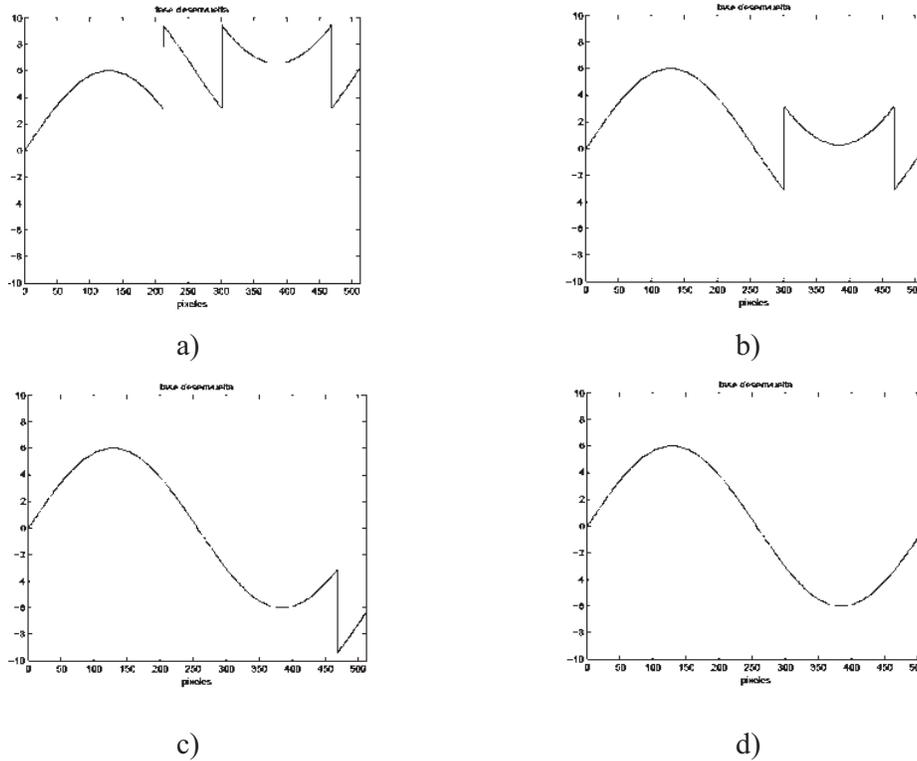


Figura 2.6. Proceso de desenvolvimiento de fase.

El código para Matlab para realizar las operaciones arriba mostradas se presenta a continuación.

Código de Matlab para el desenvolvimiento de fase unidimensional.

```
N=512;
n=0:N-1;
fo=1/512;
x=6*sin(2*pi*fo*n);
plot(x)
xlabel('pixeles')
axis([0 512 -10 10])
title('funcion cuya amplitud excede [-\pi,\pi]')
xw=atan2(sin(x), cos(x));
figure, plot(xw)
xlabel('pixeles')
axis([0 512 -4 4])
title('fase envuelta')
xu=xw;
for i=2:length(xw)
difference=xw(i)-xw(i-1);
if difference>pi
xu(i:end)=xu(i:end)-2*pi;
elseif difference<-pi
xu(i:end)=xu(i:end)+2*pi;
end
end
figure, plot(xu)
xlabel('pixeles')
axis([0 512 -10 10])
title('fase desenvuelta')
```

Se puede expresar el proceso de desenvolvimiento mediante la ecuación.

$$X_u(n)=U(x_w(n))=x_w(n)+2\pi k , \quad (2.34)$$

donde $U(x_w(n))$ es la operación de desenvolvimiento, $x_u(n)$ es la señal de fase desenvuelta y k es un entero.

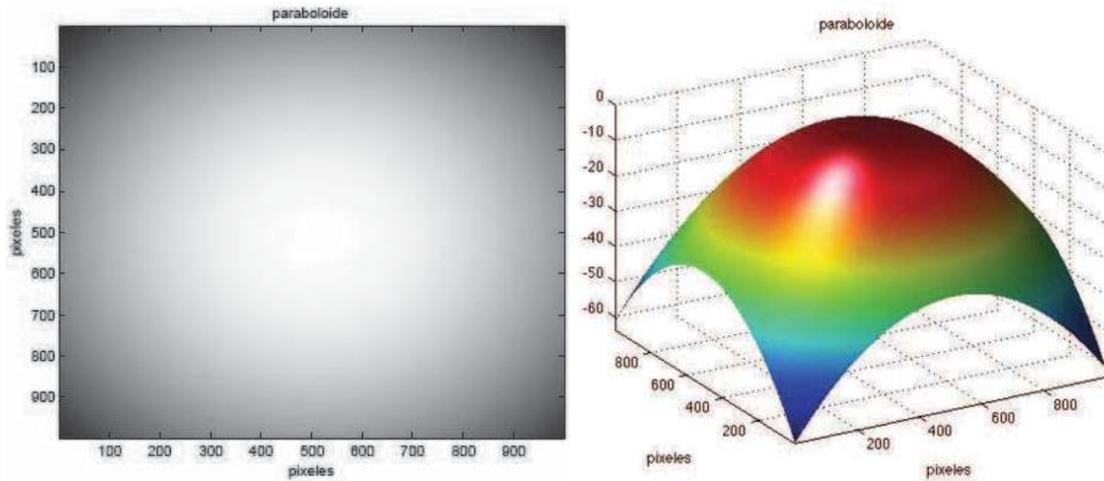
La señal de fase envuelta mostrada en la figura 2.5 es una señal unidimensional muy simple para desenvolver, esto es porque $x_w(n)$ es una señal simulada y no presenta ruido y además, es muestreada 512 veces por periodo.

El desenvolvimiento de fase para aplicaciones reales es una tarea actual de investigación en procesado de señales, esto es debido principalmente a dos razones:

1. La señal envuelta puede presentar ruido.
2. La señal envuelta puede estar submuestreada.

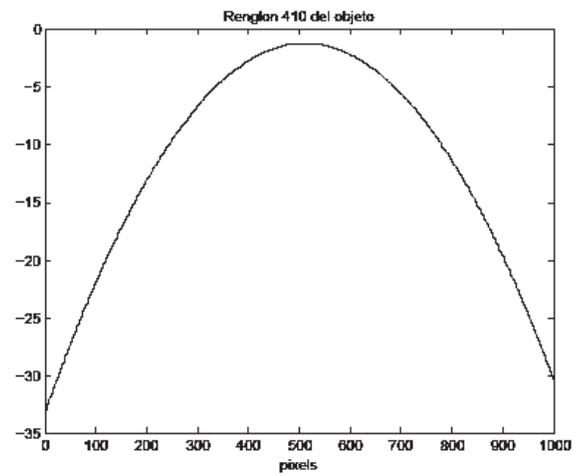
Como se ha explicado previamente, para realizar el proceso de desenvolvimiento, se calcula la diferencia entre una muestra y la muestra precedente (directamente adyacente a la izquierda). Cuando esta diferencia es mayor que $+\pi$ o más pequeña que $-\pi$, se detecta una fase envuelta. Una vez que se detecta la fase envuelta, el valor de 2π es agregado o restado de esta muestra y también de las demás muestras ubicadas en la derecha de ésta. Ahora considérese que la fase envuelta que ha sido detectada sea una “fase envuelta genuina” o una “fase envuelta falsa” que ha sido producida por ruido en la señal. Esto es, esta distinción entre fase envuelta verdadera y aparente que ha sido causada por ruido lo que hace el problema de fase desenvuelta un problema de investigación.

A continuación se ampliará el proceso de desenvolvimiento de fase para el caso bidimensional. Supóngase que se tiene una imagen generada por computadora que no contiene fase envuelta, es decir, no contiene brincos de fase de 2π . Esta imagen puede ser graficada como un arreglo de intensidades como se muestra en la figura 2.7a. La misma imagen puede ser graficada como una superficie en 3D mostrada en la figura 2.7b. Las intensidades de uno de los renglones es mostrada en la figura 2.7c.



a)

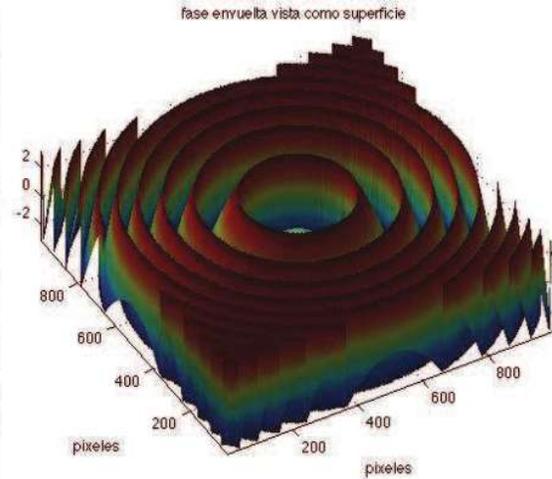
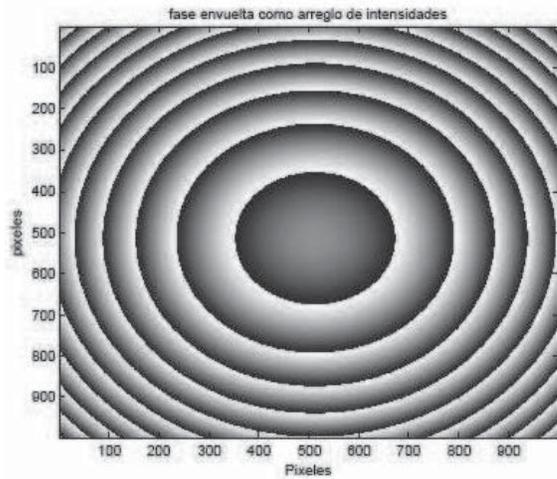
b)



c)

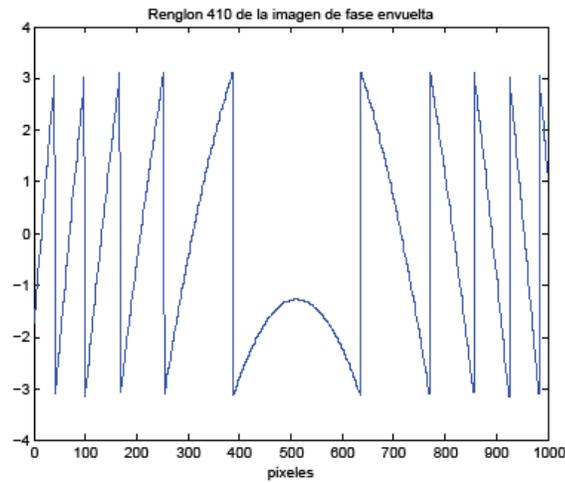
Figura. 2.7. Imagen de fase generada por computadora mostrada como, a) gráfica de intensidad, b) superficie 3D y c) gráfica del renglón 410 del objeto.

A continuación se procede a envolver la fase de la imagen generada por computadora. En la figura 2.8a-c se muestra la fase envuelta como un arreglo de intensidades, como una superficie y uno de los renglones de la imagen.



a)

b)



c)

Figura. 2.8. a) fase como un arreglo de intensidades, b) como una superficie y c) uno de los renglones de la imagen.

Es importante notar, que en el caso bidimensional, la fase envuelta aparece como curvas de contorno, como se muestra en la figura 2.8a. Estas curvas puede aparecer abiertas o cerradas o ambas; en el caso de la figura 2.8a las curvas son cerradas. Para desenvolver la fase se utiliza el algoritmo propuesto por K. Itoh [10]. En este caso bidimensional, se presentan dos métodos para desenvolver la fase.

Primer método:

El primer método de desenvolvimiento de fase consiste en desenvolver los renglones en la imagen de fase envuelta secuencialmente (uno a uno). Esto produce una imagen intermedia que es parcialmente desenvuelta. Posteriormente, se realiza un proceso similar, pero esta vez se desenvuelven todas las columnas de la imagen parcialmente desenvuelta. La imagen resultante está completamente desenvuelta.

Segundo método:

El segundo método es similar al anterior, pero primero desenvuelve todas las columnas de la imagen de fase envuelta (una por una). Esto también produce una imagen parcialmente desenvuelta. Posteriormente, se desenvuelven todos los renglones de la imagen parcialmente desenvuelta y se genera la imagen de fase desenvuelta.

En la figura 2.9 se muestra el resultado de la imagen desenvuelta usando el primer método.

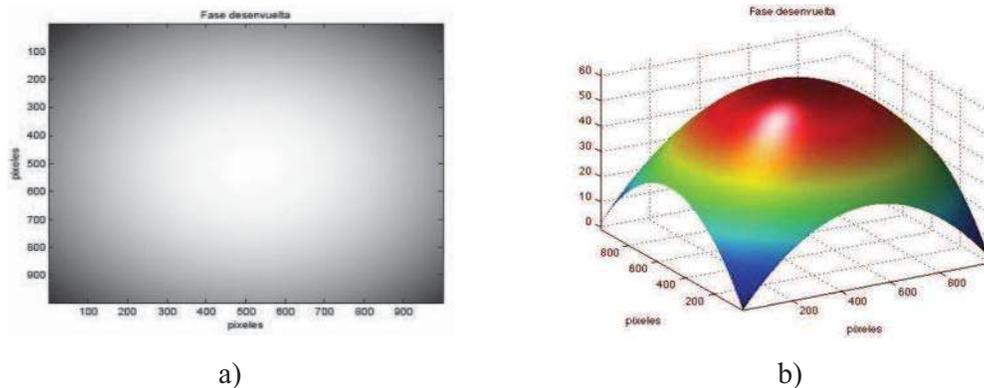


Figura 2.9. Fase desenvuelta de un objeto bidimensional generado por computadora.

El algoritmo en Matlab que se usó para generar las imágenes mostradas en las figuras 2.8-2.9 se muestra a continuación.

Código en Matlab para desenvolver una función bidimensional

```
clc; close all; clear;

N=1000;

n=N-1;

fo=1/64;

for i=1:n
for j=1:n
image1(i,j)=-.5*(fo*i-8)^2-.5*(fo*j-8)^2;
end
end

figure, colormap(gray(256)), imagesc(image1)
title('paraboloide')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles')

figure

surf(image1,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong
')

view(-30,30), camlightleft, axis tight

title('paraboloide')

xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles'),

image1_wrapped=atan2(sin(image1),cos(image1));

figure, colormap(gray(256)), imagesc(image1_wrapped)

title('fase envuelta como arreglo de intensidades')

xlabel('Pixeles'), ylabel('pixeles')

figure

surf(image1_wrapped,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong
')

view(-30,70), camlightleft, axis tight
```

```

title('faseenvuelta vista comosuperficie')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles'),
figure, plot(image1(410,:))
title('Renglon 410 del objeto')
xlabel('pixels'),
figure, plot(image1_wrapped(410,:))
title('Renglon 410 de la imagen de fase envuelta')
xlabel('pixeles'),
image2_unwrapped=image1_wrapped;
for i=1:n
    image2_unwrapped(i,:)=unwrap(image2_unwrapped(i,:));
end
for i=1:n
    image2_unwrapped(:,i)=unwrap(image2_unwrapped(:,i));
end
figure, colormap(gray(256)), imagesc(image2_unwrapped)
title('Fase desenvuelta')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles')
figure
surf(image2_unwrapped,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong
')
view(-30,30),camlightleft, axis tight
title('Fasedesenvuelta')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles'),

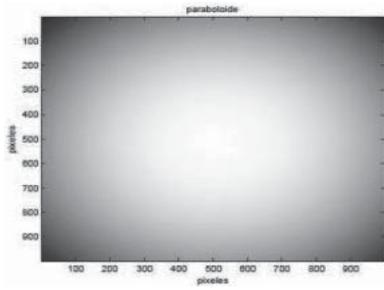
```

En los procesos de desenvolvimiento de fase bidimensionales se pueden presentar 4 fuentes de errores que pueden complicar el proceso de desenvolvimiento. Estas fuentes de errores son:

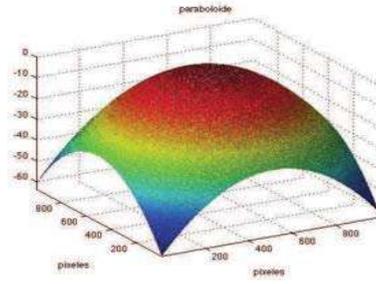
1. Que las imágenes presenten ruido.
2. Que no se realice un buen muestreo de la imagen original.
3. Cuando la imagen de fase continua presente cambios irregulares de fase.
4. Errores producidos en la extracción de fase por el propio algoritmo.

A continuación se presenta un ejemplo cuando la imagen tiene ruido. El análisis para las fuentes de errores 2-4 se dejan para un trabajo posterior.

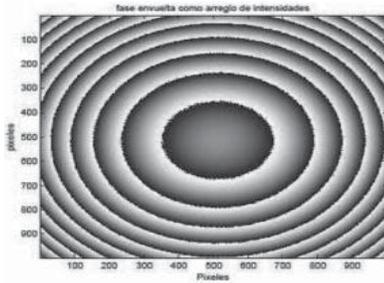
El algoritmo para detectar la existencia de fase envuelta en una imagen calcula la diferencia entre la intensidad de dos pixeles consecutivos. Si la diferencia es mayor que π , entonces el algoritmo considera que en ese punto existe una discontinuidad en la fase. Esta puede ser una fase envuelta genuina o puede ser una fase envuelta falsa debido a la presencia de ruido. Para analizar el efecto de ruido en una imagen, se agrega ruido a la función simulada mostrada previamente. A continuación se presentan dos casos en que la variación de ruido está en un valor de 0.1 y 1. En las figuras 2.10 y 2.11 se muestran los resultados obtenidos.



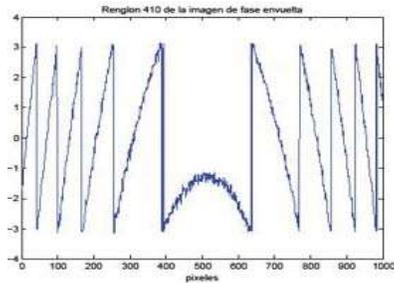
a)



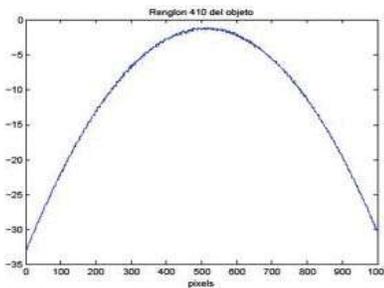
b)



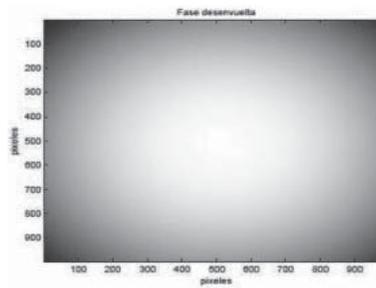
c)



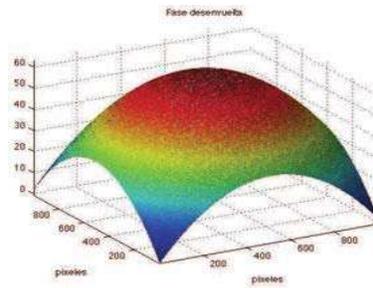
d)



e)

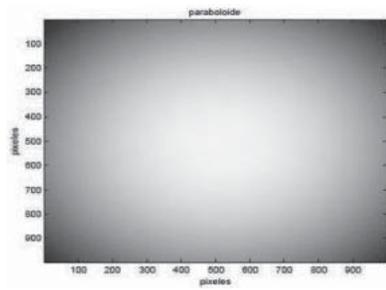


f)

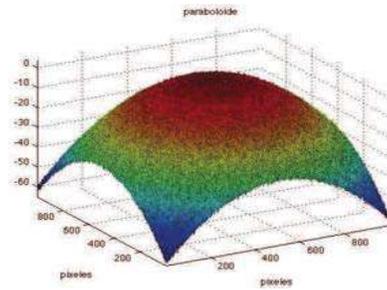


g)

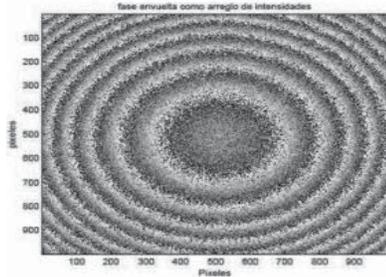
Figura 2.10. a) objeto original como gráfica de intensidades, b) objeto original tridimensional, c) fase envuelta d) renglón 410 de la fase envuelta, e) renglón 410 de la fase desenvuelta, f) recuperación del objeto como gráfica de intensidad y g) recuperación del objeto tridimensional. El ruido que se agregó a esta imagen tiene un valor de 0.1.



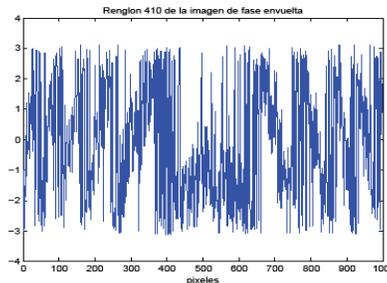
a)



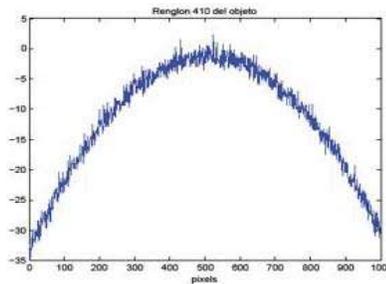
b)



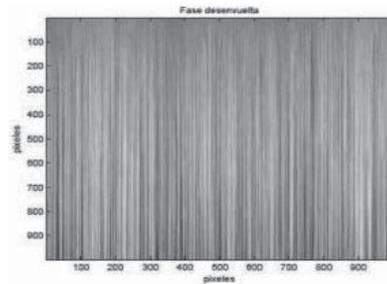
c)



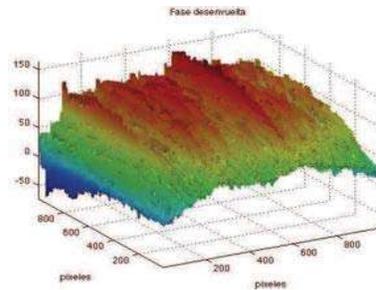
d)



e)



f)



g)

Figura 2.11. a) objeto original como gráfica de intensidades, b) objeto original tridimensional, c) fase envuelta d) renglón 410 de la fase envuelta, e) renglón 410 de la fase desenvuelta, f) recuperación del objeto como gráfica de intensidad y g) recuperación del objeto tridimensional. El ruido que se agregó a esta imagen tiene un valor del 1.

A continuación se presenta el algoritmo empleado para generar las imágenes de las figura 2.10 y 2.11.

Código en Matlab para desenvolvimiento de fase cuando el objeto presenta ruido

```
clc; close all; clear;

N=1000;

n=N-1;

fo=1/64;

for i=1:n
    for j=1:n
        image2(i,j)=-.5*(fo*i-8)^2-.5*(fo*j-8)^2;
    end
end

variance=0.1;
A=randn(n,n)*variance;
image1=image2+A;

figure, colormap(gray(256)), imagesc(image1)
title('paraboloide')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles')

figure

surf(image1,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong'
)

view(-30,30), camlight left, axis tight
title('paraboloide')
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles'),
image1_wrapped=atan2(sin(image1),cos(image1));
figure, colormap(gray(256)), imagesc(image1_wrapped)
title('fase envuelta como arreglo de intensidades')
```

```

xlabel('Píxeles'), ylabel('píxeles')
figure
surf(image1_wrapped,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong
')
view(-30,70),camlight left, axis tight
title('fase envuelta vista como superficie')
xlabel('píxeles'), ylabel('píxeles'),
figure, plot(image1(410,:))
title('Renglon 410 del objeto')
xlabel('pixels'),
figure, plot(image1_wrapped(410,:))
title('Renglon 410 de la imagen de fase envuelta')
xlabel('píxeles'),
image2_unwrapped=image1_wrapped;
for i=1:n
    image2_unwrapped(i,:)=unwrap(image2_unwrapped(i,:));
end
for i=1:n
    image2_unwrapped(:,i)=unwrap(image2_unwrapped(:,i));
end
figure, colormap(gray(256)), imagesc(image2_unwrapped)
title('Fase desenvuelta')
xlabel('píxeles'), ylabel('píxeles')
figure
surf(image2_unwrapped,
'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong
')
view(-30,30),camlight left, axis tight

```

```
title('Fase desenvuelta')  
xlabel('pixeles'), ylabel('pixeles'),
```

La variable VARIANCE determina el porcentaje de ruido y la función randn (n,n) genera una matriz de nxn elementos de valores aleatorios.

Es importante notar la diferencia en la reconstrucción del objeto tridimensional en las figuras 2.10 g y 2.11g debido a la diferencia de ruido que se introduce en cada una de ellas. En las imágenes adquiridas en laboratorio no se puede controlar el ruido debido a la porosidad, color y textura del papel en que están hechos los objetos, por lo que las imágenes que se obtienen presentan ruido. Se deja para un trabajo futuro desarrollar un software capaz de eliminar el ruido de las imágenes capturadas.

CAPÍTULO III

DESARROLLO Y RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se describe el arreglo experimental utilizado y los pasos que se realizaron durante el proceso de adquisición de superficies de objetos; para esto se utilizó el método de Corrimiento de fase por pasos y se muestran los resultados obtenidos.

III.1. Arreglo Experimental

En la figura 3.1 se muestra las fotografías del arreglo experimental empleado. Consiste en un microscopio binocular metalúrgico con un objetivo de 40x y un ocular 10x que tiene una adaptación para la cámara CCD. El objeto que se utiliza para proyectar las franjas es una rejilla binaria del tipo Ronchi con una frecuencia de 100 líneas / cm, esto equivale a un periodo de 100 micras. Esta rejilla es iluminada por una fuente de luz blanca de 150 watts de potencia. La lente que se muestra en la figura 3.1b permite enfocar la imagen de la rejilla sobre el objeto bajo estudio y tiene una distancia focal de 10 cm.

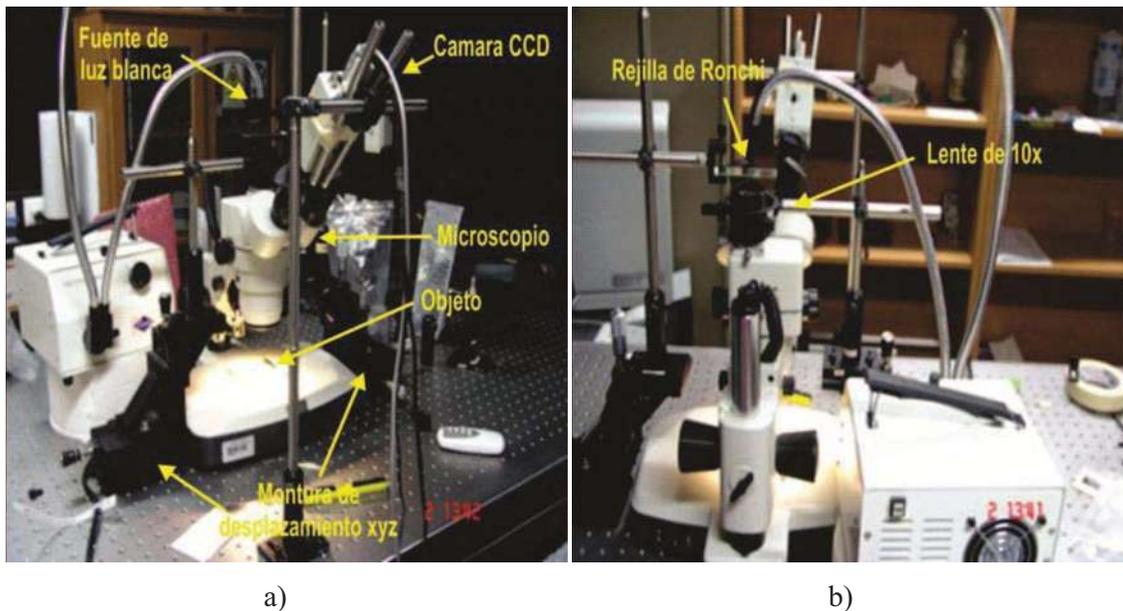


Figura 3.1. Fotografías del arreglo experimental.

Los objetos que se desean analizar se colocan en la platina del microscopio. Debido al tipo de microscopio que se utilizó no es posible mover el objetivo por lo que para introducir los desfasamientos la rejilla se colocó en una montura mecánica que permite un desplazamiento xyz con un paso mínimo de 10 micras en cada eje.

La rejilla se coloca sobre el microscopio en la apertura para la cámara CCD y ésta se coloca sobre uno de los oculares como se aprecia en la figura 3.1a. No se coloca la cámara CCD sobre su apertura debido a la dificultad para proyectar la rejilla por un ocular.

Las imágenes que se capturan con la cámara CCD se almacenan en formato BMP a color con tamaño de 640 x 480 pixeles.

III.2. Objetos Analizados

Los objetos que se utilizaron en este trabajo son: partes del escudo de la universidad ver figura 3.2, hojas vegetales ver figura 3.3, línea hecha por un bolígrafo sin tinta con una punta de 0.5mm y otro de 0.7mm de diámetro ver figura 3.4 y partes de una letra troquelada sobre un papel ver figura 3.5.

Los objetos (partes del escudo) se obtuvieron de una tarjeta de presentación con el escudo de la UMSNH troquelada. La tarjeta está hecha en cartulina de 9cm x 5.5cm. El escudo ocupa un área de 2cm x 1.6cm. En la figura 3.2 se muestra el escudo de la universidad y se marca las zonas que se utilizaron y tiene un tamaño de 3mm x 2mm.

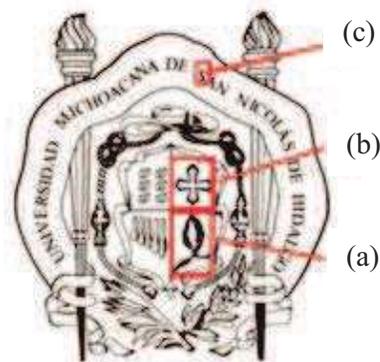


Figura 3.2. Escudo de la UMSNH, se marcan las partes utilizadas.

El escudo tiene borde de 0.0032mm de altura y se generan aplicando una presión de 5.264 N/cm² sobre el papel. Este se midió utilizando un micrómetro digital.

Los objetos d) y e) son partes de una hoja vegetal (Bursera Palmeri S. Wats y Bursera Bipinnata DC. Engl) que se muestra en la figura 3.3.



Figura 3.3. Fotografía de la hoja vegetal.

Los objetos f) y g) fueron fabricados sobre una hoja de papel con un borde de 0.00295mm de altura y se generó con una presión de 5.40 N/cm² y 3.864 N/m² y se utilizaron 2 bolígrafos sin tinta para realizar un surco sobre el papel. Los bolígrafos tienen una punta de 0.5 mm y 0.7 mm de diámetro y los objetos h e i) fueron obtenidas de un papel troquelado en una imprenta con un borde de 0.0038mm de altura con una presión de 12.20 N/cm².

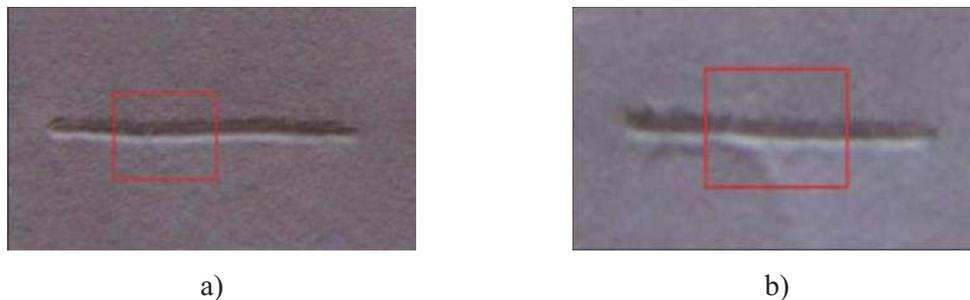


Figura 3.4. línea hecha por un bolígrafos sin tinta a) 0.5mm de y b) 0.7mm de diámetro.

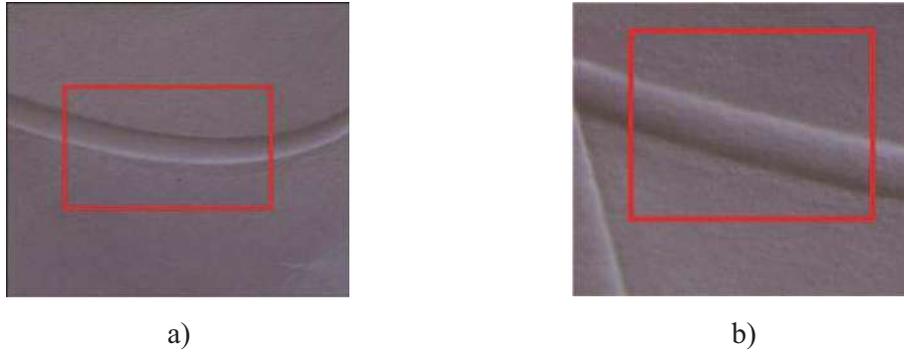


Figura 3.5. Letra troquelada sobre un papel.

III.3. Adquisición de Imágenes

Como se mencionó anteriormente, la adquisición de imágenes se basa en la captura y procesamiento de n medidas de intensidades tomadas mientras se introducen corrimientos constantes en la fase. Generalmente el desfase introducido debe ajustarse a un valor preciso de corrimientos controlados de fase. Como se mencionó en el capítulo anterior se requieren tres tomas como mínimo para la reconstrucción de la fase mediante un algoritmo adecuado, aunque también se pueden implementar algoritmos de cuatro pasos o en general $N+1$ pasos para la reconstrucción de la fase.

Para poder utilizar estos algoritmos debe ajustarse la orientación y frecuencia espacial del sistema de franjas de tal modo que se logre conseguir una diferencia de fase constante y la modulación de amplitud apropiada.

En este caso, para la adquisición de formas en tercera dimensión de materiales a nivel milimétrico se realizó la captura y procesamiento de 11 medidas de intensidad tomadas mientras se introducen corrimientos constantes en la fase.

Para obtener las imágenes de los objetos a analizar se utilizó el arreglo que se mostró en la figura 3.1; el número de tomas de muestras fueron 11 con corrimientos de fase de $\frac{\pi}{5}$, esto es debido a que el periodo de la rejilla usada es de 100 micras y el paso mínimo de la montura que la sostiene es de 10 micras, lo que equivale a realizar 10 pasos y 11 tomas fotográficas. En la figura. 3.6 se muestran las 11 tomas fotográficas que se realizaron sobre uno de los objetos analizados.

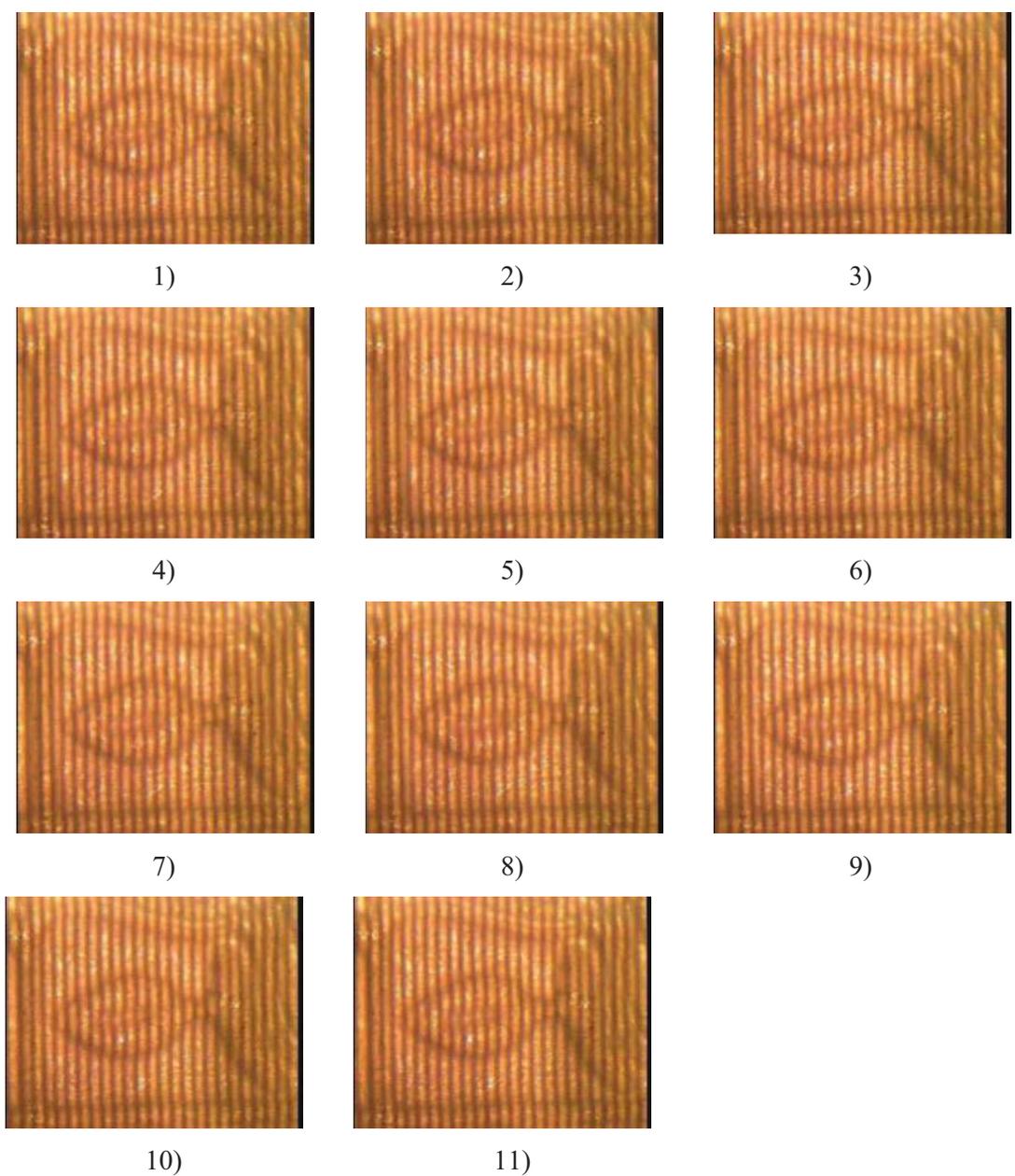


Figura 3.6. Objetos con franjas proyectadas con corrimiento de fase por pasos de $\pi/5$. Cada paso equivale a 10 micras de desplazamiento de la rejilla. En este caso es el árbol del escudo de la UMSNH.

En la figura 3.7 se muestran las imágenes obtenidas de diferentes objetos sobre los que se proyectaron franjas. Se muestra únicamente una fotografía por objeto.

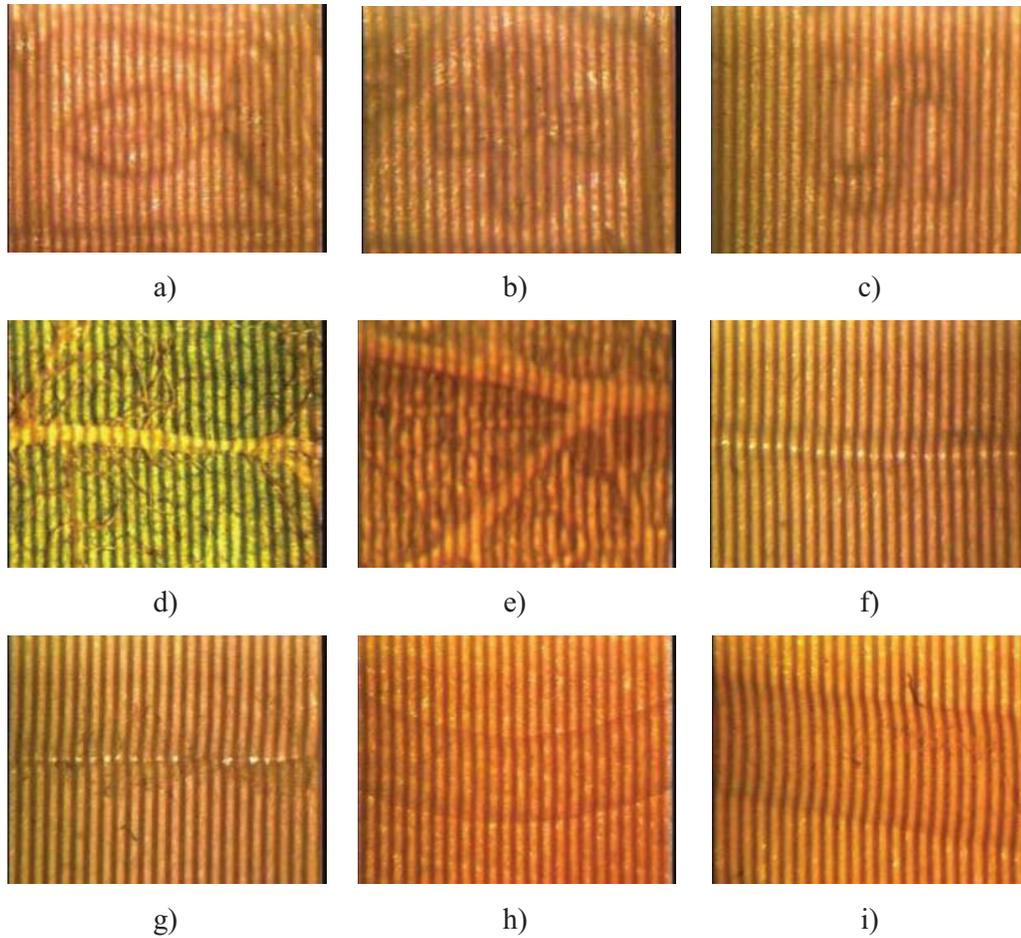


Figura 3.7. Imágenes de los objetos con franjas proyectadas antes de ser procesados a), b), c) parte del escudo de la universidad, d) y e) hojas vegetales, f) y g) línea hecha con un bolígrafo sin tinta una de 0.5mm y de 0.7mm de diámetro y h) e i) partes de una letra troquelada sobre un papel.

Obsérvese la deformación de las franjas proyectada sobre los objetos. Esta deformación depende de la topografía de la superficie del objeto.

III.4. Procesamiento de Imágenes

Para procesar las imágenes se utilizó el software Mathcad por su fácil manejo y programación sencilla. En sí, su manera de realizar cálculos se basa en el manejo de matrices de datos. Para ello se requiere que el formato de las imágenes digitales sea en BMP y a escala de grises de 8 bits, ya que el uso de escala de grises asegura que la imagen contenga en cada uno de los elementos de la matriz solo el valor de intensidad que le corresponde.

Para convertir la imagen desde el formato original se puede usar cualquier editor de imágenes. En este trabajo, el software que se utilizó fue el Photoshop el cual fue escogido por su facilidad de uso y principalmente por contener un sistema para convertir una imagen a color a una con escala de grises de varias profundidades. Las imágenes obtenidas en este proceso se muestran en la figura 3.8.

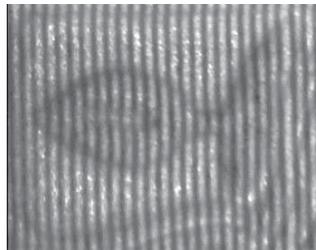


Figura 3.8. Imagen del objeto que se analizan en escala de gris y convertida a bmp.

III.5. Método de Corrimiento de Fase por Pasos

Una vez que se ha trabajado en el proceso de la obtención de las imágenes y procesado el resto del trabajo se realiza en el ambiente de Mathcad. Como primer paso para la obtención del modelo de un cuerpo en la computadora, las 11 imágenes de muestra son importadas mediante la siguiente instrucción.

$$I_i := \text{READ_IMAGE}(\text{"imageni.bmp"}), \quad i=0,1,\dots,11.$$

En la figura 3.9 se muestra el resultado de la superposición de las imágenes (o intensidades) del árbol del escudo de la universidad de acuerdo a la ec. (2.29) del capítulo anterior, con esta imagen se puede obtener la fase envuelta por medio del arco tangente.

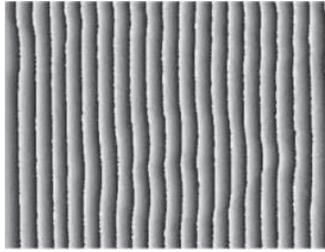


Figura 3.9. Superposición del árbol del escudo de la universidad.

Posteriormente, usando el método de regularización se obtiene la fase desenvuelta del objeto de la figura anterior y el resultado se muestra en la figura 3.10.

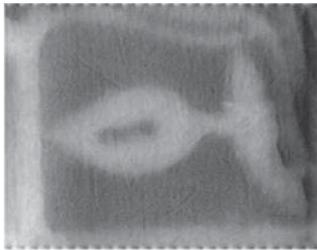


Figura 3.10. Fase desenvuelta del árbol del escudo de la universidad.

Finalmente, se hace la reconstrucción de la topografía, ver figura 3.11.

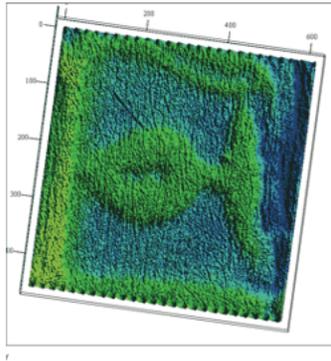


Figura 3.11. Imagen de la topografía en 3D.

Es importante notar que el color que se muestra en la figura corresponde a diferentes profundidades en el relieve del objeto.

III.6. Resultados Experimentales

En este capítulo se muestra el resultado del resto de los 9 objetos utilizados, así como el cambio de cada uno de ellos.

En la figura 3.12 y 3.13 partes del escudo de la universidad UMNH, la figura 3.14 y 3.15 hojas vegetales, la figura 3.16 y 3.17 línea hecha por dos bolígrafos sin tinta una de 0.5mm y otra de 0.7mm de diámetro y la figura 3.18 y 3.19 partes de una letra troquelada sobre un papel.

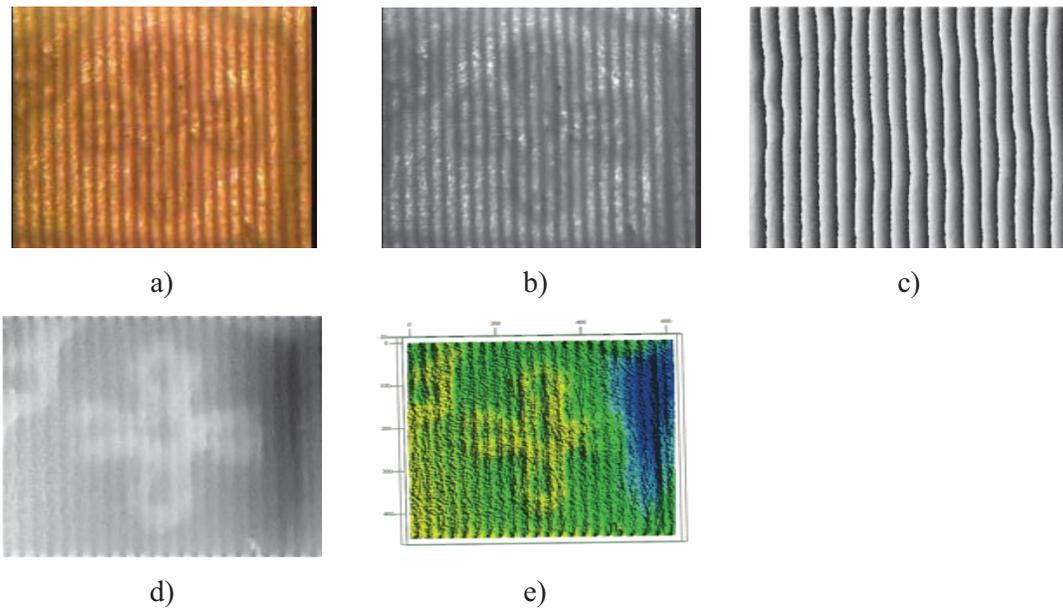


Figura 3.12. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

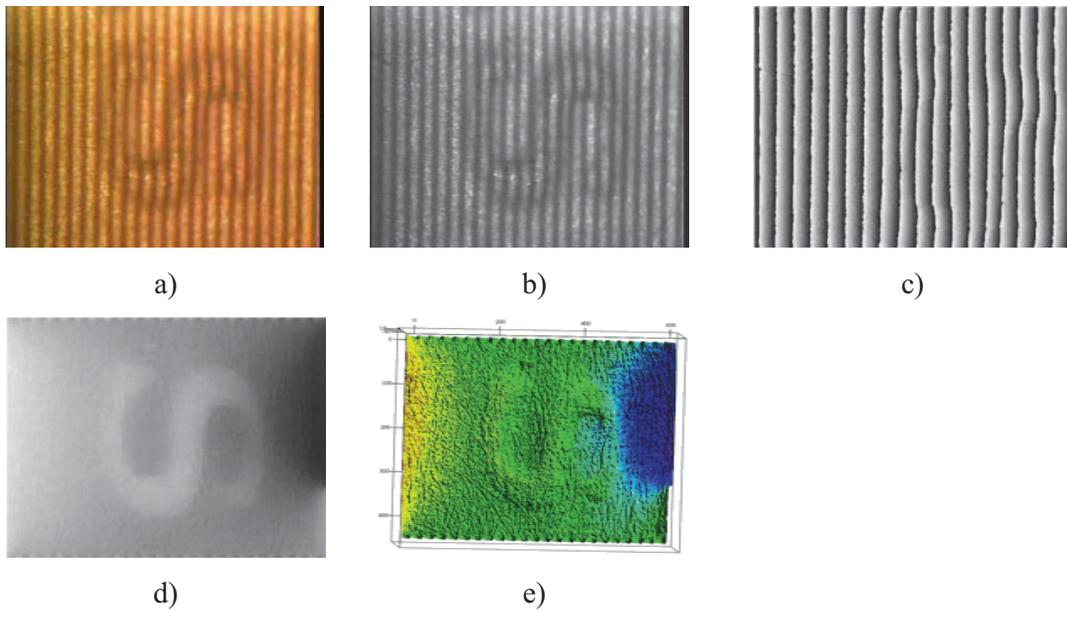


Figura 3.13. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

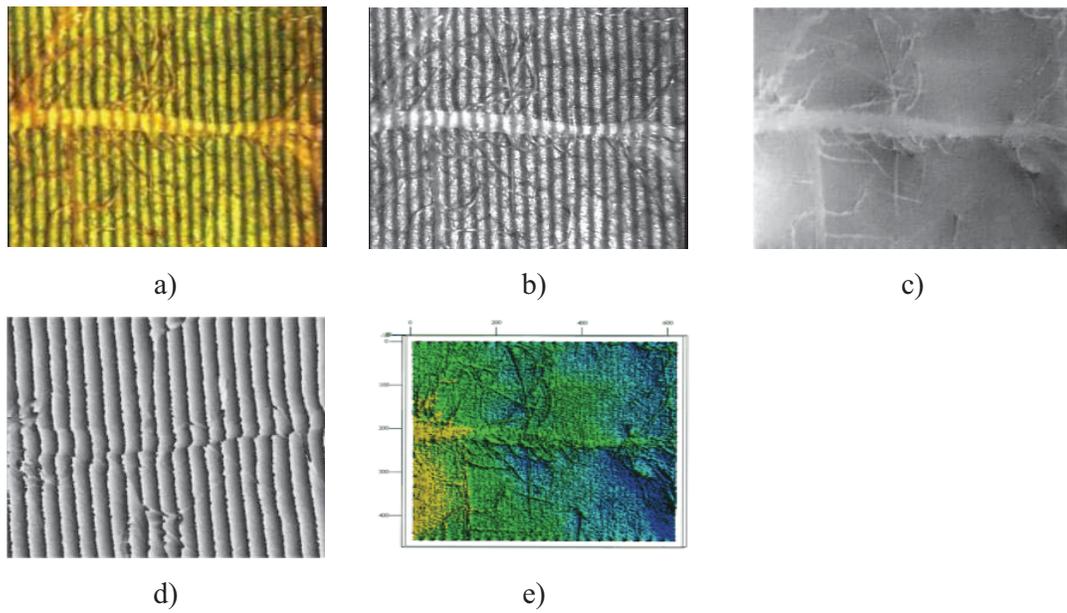


Figura 3.14. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

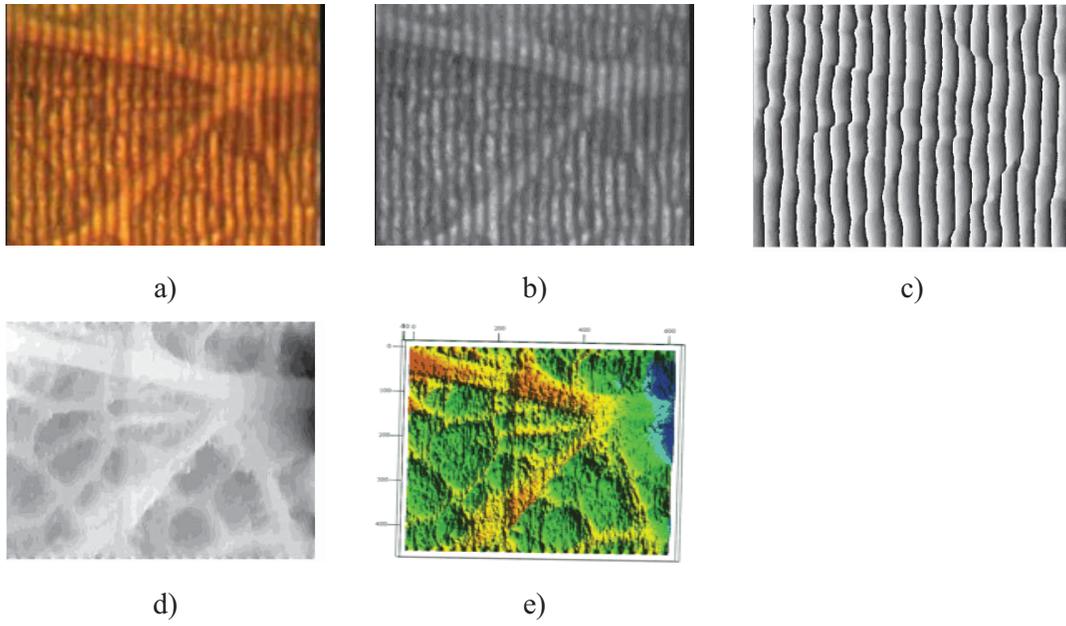


Figura 3.15. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

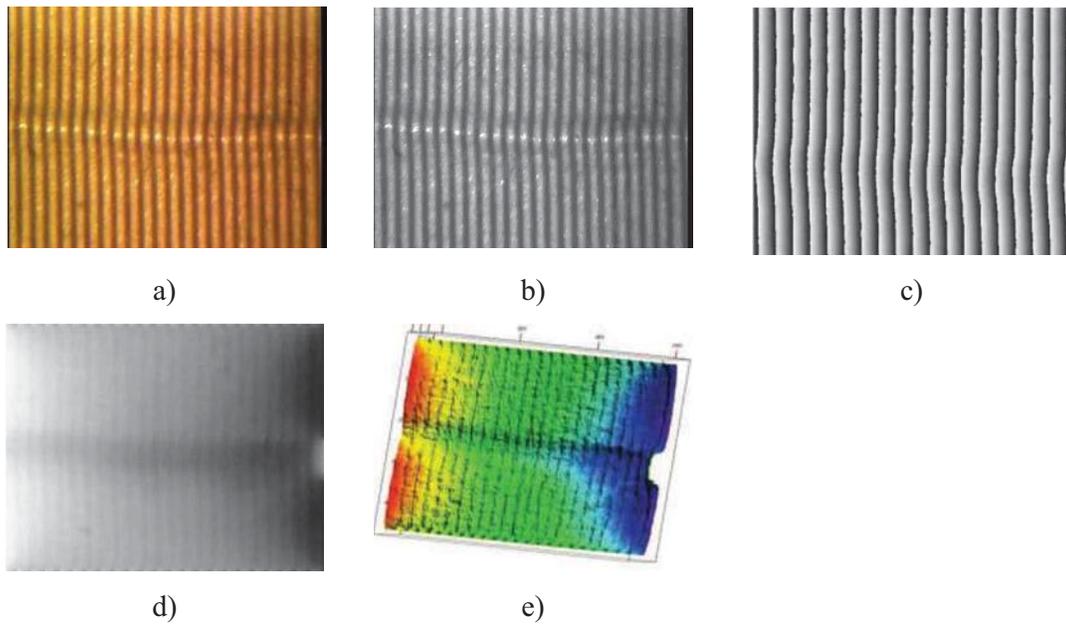


Figura 3.16. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

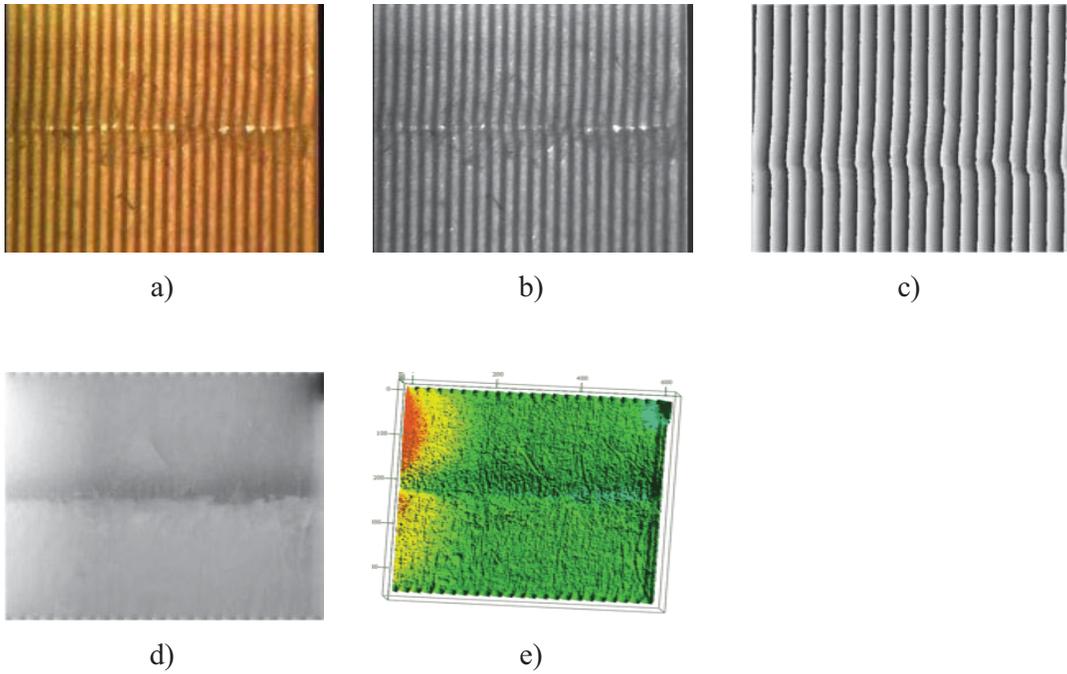


Figura 3.17. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

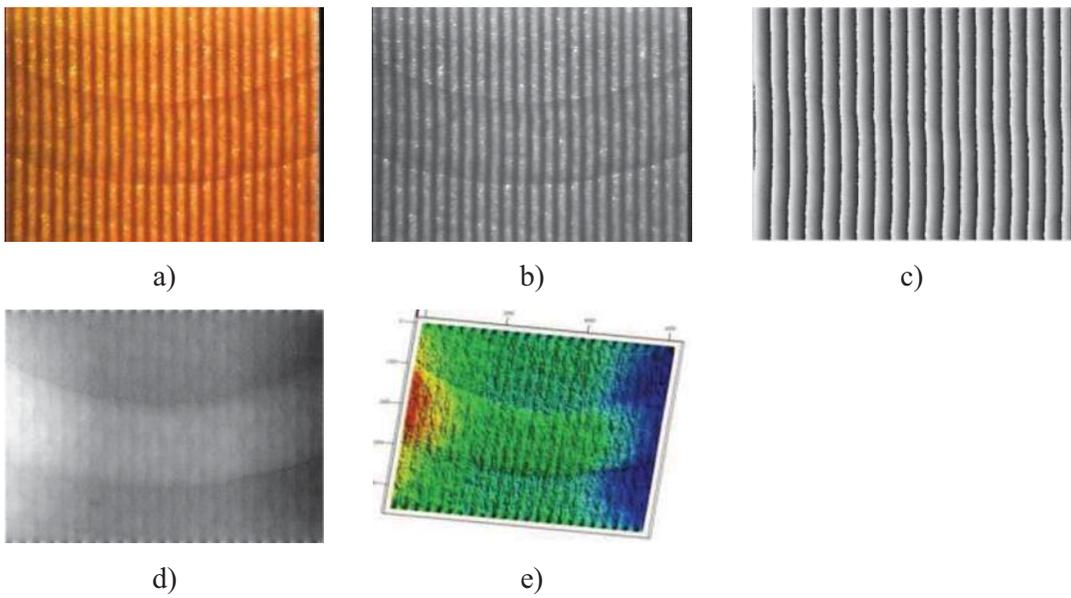


Figura 3.18. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

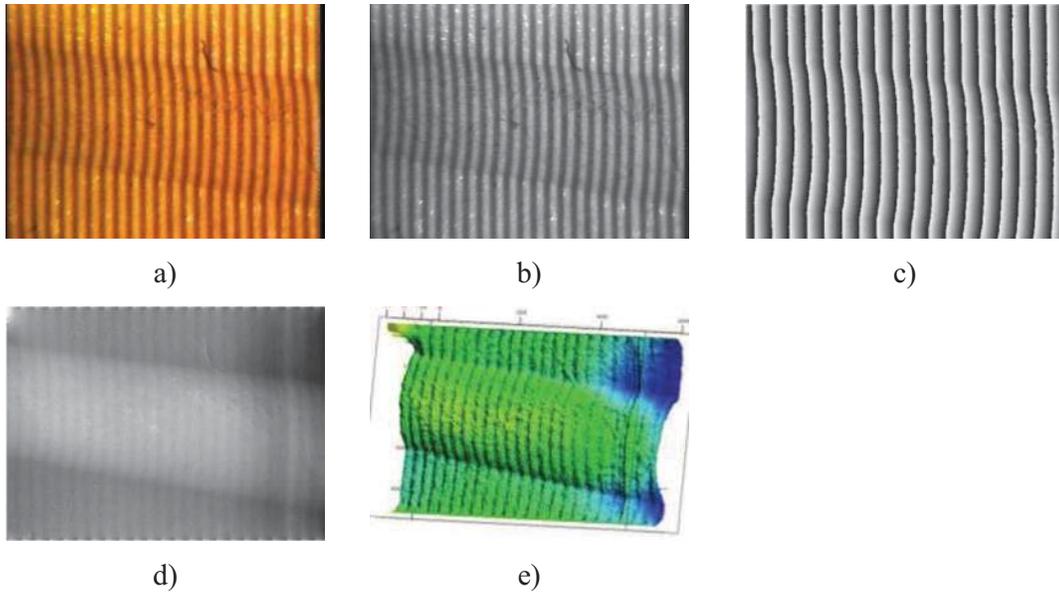


Figura 3.19. a) imagen original, b) imagen a escala de gris y convertida a bmp, c) superposición, d) fase desenvuelta y e) topografía en 3D.

Es importante notar que el color que se muestran en las figuras corresponde a diferentes profundidades en el relieve de los objetos.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

En esta tesis se han presentado los resultados experimentales obtenidos a partir de la utilización de la técnica de proyección de luz estructurada para la reconstrucción tridimensional de la topografía de superficies de objetos milimétricos. En esta técnica se reconstruye la topografía de un objeto a partir de la deformación de un sistema periódico de franjas formadas por líneas blancas y oscuras, proyectadas sobre el objeto que es observado a través de un microscopio óptico. La imagen que se obtiene de las franjas deformadas fue registrada por una cámara CCD.

Los resultados obtenidos en esta tesis nos permitió verificar que:

El método seleccionado nos proporcionó el resultado adecuado tal como se esperaba. El arreglo experimental nos proporcionó buenos resultados por su buena estabilidad física y su fácil manejo. Con el resultado de este trabajo, se pueden visualizar los objetos en 3D y además se puede proveer valores numéricos así como alturas y áreas.

Las imágenes de los objetos obtenidos tienen similitud con los objetos originales. Sin embargo, se deja para un trabajo posterior obtener los valores exactos de la profundidad del relieve de los objetos utilizados.

Este trabajo abre nuevas líneas de investigación como son: la creación de un software robusto que permita la obtención de relieves de objetos sin importar el ruido que se presente en la adquisición de las imágenes; desarrollar una técnica fotolitográfica que permita crear rejillas con distintos valores para la frecuencia.

APÉNDICE A

Ecuación General Para 11 Pasos

El desarrollo general para llegar al arco tangente que se utilizó en este trabajo fue para un paso de fase i -ésimo, entonces la intensidad es:

$$\begin{aligned} I_i &= a + b \cos(\varnothing + \alpha_i), \\ &= a_0 + a_1 \cos(\alpha_i) + a_2 \sin(\alpha_i), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$a_0 = a, a_1 = b \cos(\varnothing), a_2 = -b \sin(\varnothing). \quad (\text{A.2})$$

Al hacer N pasos, es decir $i=1, \dots, N$ La ec. A1 se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ 1 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \\ 1 & \cos(\alpha_3) & \sin(\alpha_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\alpha_n) & \sin(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Para resolver la ec. (A.3) se sigue el procedimiento de mínimos cuadrados. Supóngase que

$$f = a_0 g^0 + a_1 g^1 + a_2 g^2 + \dots + a_N g^N. \quad (\text{A.4})$$

En forma matricial ($m > n$)

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^0 & g_1^1 & g_1^2 & g_1^n \\ g_2^0 & g_2^1 & g_2^2 & g_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_m^0 & g_m^1 & g_m^2 & g_m^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde e es la matriz de errores. Entonces

$$f = Xa + e, \quad (\text{A.6})$$

como X no es cuadrado entonces

$$e = f - Xa . \quad (\text{A.7})$$

Calculando la matriz transpuesta

$$\begin{aligned} e^T e &= (f + Xa)^T (f - Xa) , \\ &= f^T f - f^T Xa - a^T X^T f + a^T X^T Xa , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde

$$(AB)^T = B^T A^T . \quad (\text{A.9})$$

Derivando la ec. (A.8) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e^T e)}{\partial a} &= 0 - \frac{\partial(f^T Xa)}{\partial a} - \frac{\partial(a^T X^T f)}{\partial a} + \frac{\partial(a^T X^T Xa)}{\partial a} , \\ &= 2X^T f + 2X^T Xa . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para ser de mínimos cuadrados la ec. (A.10) se iguala a cero

$$\begin{aligned} 2X^T f + 2X^T Xa &= 0 \\ a &= (X^T X)^{-1} X^T f . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Considerando un ejemplo se tiene que:

$$f(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 . \quad (\text{A.12})$$

Si se hace N observaciones, se tiene que:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_N & X_N^2 \end{bmatrix} , \quad (\text{A.13a})$$

y

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1^2 & X_2^2 & X_N^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13b})$$

Multiplicando las ecs. (A.13a) y (A.13b)

$$\begin{aligned} X * X^T &= \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_N & X_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1^2 & X_2^2 & X_N^2 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} N & \sum X_i & \sum X_i^2 \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde

$$S_1 = \sum X_i, S_2 = \sum X_i^2, S_3 = \sum X_i^3, S_4 = \sum X_i^4, \quad (\text{A.15})$$

además

$$(X^T * X)^{-1} = \frac{1}{\det(X^T X)} \begin{pmatrix} S_2 S_4 - S_3^2 & -(S_1 S_4 - S_3 S_2) & (S_1 S_3 - S_2^2) \\ -(S_2 S_4 - S_3^2) & (N S_4 - S_2^2) & -(N S_3 - S_1 S_2) \\ S_2 S_4 - S_3^2 & -(N S_3 - S_2 S_1) & (N S_2 - S_1^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$X^T f = \begin{pmatrix} \sum f_j \\ \sum X_j f_j \\ \sum X_j^2 f_j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

y

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(X^T X)} \begin{pmatrix} (S_2 S_4 - S_3^2) & -(S_1 S_4 - S_3 S_2) & (S_1 S_3 - S_2^2) \\ -(S_2 S_4 - S_3^2) & (N S_4 - S_2^2) & -(N S_3 - S_1 S_2) \\ (S_2 S_4 - S_3^2) & -(N S_3 - S_2 S_1) & (N S_2 - S_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum f_j \\ \sum X_j f_j \\ \sum X_j^2 f_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

entonces de la ec. (A.3) se obtiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ 1 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\alpha_n) & \sin(\alpha_n) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19a})$$

y

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \sin(\alpha_n) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19b})$$

multiplicando las ecs. (A.19a) y (A.19b) se tiene que

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A^T A)}, \quad (\text{A.20})$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i - \left(\sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i \right)^2 \\ b_1 &= \sum \cos \alpha_i \sum \sin^2 \alpha_i + \sum \sin \alpha_i \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ b_2 &= \sum \cos \alpha_i \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i - \sum \cos^2 \alpha_i \sum \sin \alpha_i \\ b_3 &= N \sum \sin^2 \alpha_i - \left(\sum \sin \alpha_i \right)^2 \\ b_4 &= -N \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i + \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ b_5 &= N \sum \cos^2 \alpha_i - \left(\sum \cos \alpha_i \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

y

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= N \sum \cos^2 \alpha_i \sum \sin^2 \alpha_i - N \left(\sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i \right)^2 - \left(\sum \cos \alpha_i \right)^2 \sum \sin^2 \alpha_i + \\ & 2 \sum \cos \alpha_i \sum \sin \alpha_i \sum \cos \alpha_i \sin \alpha_i - \sum \cos^2 \alpha_i \left(\sum \sin \alpha_i \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Finalmente se llega a la ec. (A.22)

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} \begin{pmatrix} \sum I_i \\ \sum I_i \cos \alpha_i \\ \sum I_i \sin \alpha_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum I_i \\ \sum I_i \cos \alpha_i \\ \sum I_i \sin \alpha_i \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} b_0 \sum I_i + b_1 \sum I_i \cos \alpha_i + b_2 \sum I_i \sin \alpha_i \\ b_1 \sum I_i + b_3 \sum I_i \cos \alpha_i + b_4 \sum I_i \sin \alpha_i \\ b_2 \sum I_i + b_4 \sum I_i \cos \alpha_i + b_5 \sum I_i \sin \alpha_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Por lo que la fase envuelta está dada por la ecuación

$$\varnothing = \arctan \left(-\frac{a_2}{a_1} \right), \quad (\text{A.25a})$$

o

$$\varnothing = \arctan \left(-\frac{b_2 \sum I_i + b_4 \sum I_i \cos \alpha_i + b_5 \sum I_i \sin \alpha_i}{b_1 \sum I_i + b_3 \sum I_i \cos \alpha_i + b_4 \sum I_i \sin \alpha_i} \right). \quad (\text{A.25b})$$

APÉNDICE B

Calculo de la Fase Para 11 Pasos

Desarrollando la ec. (A.25b) con un corrimiento de 11 pasos, entonces los valores de I es dada por la ec. (B.1)

$$\sum_1^{11} I_i = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11} . \quad (\text{B.1})$$

Para la fase, en este caso como se aplico 11 corrimientos esto quiere decir que por cada corrimiento tiene una diferencia de $\pi/5$, entonces se tiene que los valores de la fase por cada corrimiento es dada por la ec. (B.2)

$$\alpha_i = -\pi + \pi/5(i - 1) , \quad \text{para } i = 1,2,3,\dots,11 \quad (\text{B.2a})$$

Para el coseno y seno es dada por la siguiente ecuación

$$\cos \alpha_i \quad \text{para } i=1,2,3,\dots,11 , \quad (\text{B.2b})$$

y

$$\sin \alpha_i \quad \text{para } i=1,2,3,\dots,11 . \quad (\text{B.2c})$$

Sustituyendo las ecs. (B.1), (B.2b) y (B.2c), se puede ver que la parte numerador de la ec. (A.25a) es dada en la ec. (B.3)

$$\begin{aligned} & I_1(b_2 + b_4 \cos \alpha_1 + b_5 \sin \alpha_1) + I_2(b_2 + b_4 \cos \alpha_2 + b_5 \sin \alpha_2) + \\ & I_3(b_2 + b_4 \cos \alpha_3 + b_5 \sin \alpha_3) + I_4(b_2 + b_4 \cos \alpha_4 + b_5 \sin \alpha_4) + \\ & I_5(b_2 + b_4 \cos \alpha_5 + b_5 \sin \alpha_5) + I_6(b_2 + b_4 \cos \alpha_6 + b_5 \sin \alpha_6) + \\ & I_7(b_2 + b_4 \cos \alpha_7 + b_5 \sin \alpha_7) + I_8(b_2 + b_4 \cos \alpha_8 + b_5 \sin \alpha_8) + \\ & I_9(b_2 + b_4 \cos \alpha_9 + b_5 \sin \alpha_9) + I_{10}(b_2 + b_4 \cos \alpha_{10} + b_5 \sin \alpha_{10}) + \\ & I_{11}(b_2 + b_4 \cos \alpha_{11} + b_5 \sin \alpha_{11}) . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

y la parte denominador

$$\begin{aligned}
& I_1(b_1 + b_3 \cos \alpha_1 + b_4 \sin \alpha_1) + I_2(b_1 + b_3 \cos \alpha_2 + b_4 \sin \alpha_2) + \\
& I_3(b_1 + b_3 \cos \alpha_3 + b_4 \sin \alpha_3) + I_4(b_1 + b_3 \cos \alpha_4 + b_4 \sin \alpha_4) + \\
& I_5(b_1 + b_3 \cos \alpha_5 + b_4 \sin \alpha_5) + I_6(b_1 + b_3 \cos \alpha_6 + b_4 \sin \alpha_6) + \\
& I_7(b_1 + b_3 \cos \alpha_7 + b_4 \sin \alpha_7) + I_8(b_1 + b_3 \cos \alpha_8 + b_4 \sin \alpha_8) + \\
& I_9(b_1 + b_3 \cos \alpha_9 + b_4 \sin \alpha_9) + I_{10}(b_1 + b_3 \cos \alpha_{10} + b_4 \sin \alpha_{10}) + \\
& I_{11}(b_1 + b_3 \cos \alpha_{11} + b_4 \sin \alpha_{11}) .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

donde b_2, b_3, b_4 y b_5 es dada en la ecuación (A.21)

Sustituyendo los valores de la ec. (B.2a) en las ecs. (A.21), (B.3) y (B.4)

Finalmente se tiene que la ecuación del arco tangente de la ec. (A.25b) queda de la siguiente forma

$$\emptyset = \arctan \left(\frac{38.28(I_7 + I_{10} - I_2 - I_5) + 61.81(I_8 + I_9 - I_3 - I_4)}{50(I_1 - I_{11}) + 39.49(I_2 - I_{10}) + 11.99(I_3 - I_9) - 21.99(I_4 - I_8) - 49.49(I_5 - I_7) - 60I_6} \right) . \tag{B.5}$$

REFERENCIAS

- [1] Torres Vidales Eugenia; Análisis cualitativo de la topografía de objetos por proyección de luz estructurada; Tesis de licenciatura; UMSNH, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; (Febrero 2010); Morelia, Michoacán.
- [2] Jasprit Singn; Optoelectronics an introduction to materials and devices; McGraw-Hill; (1996), USA.
- [3] Bahaa E.A Saleh, Malvin Carl Teich; Fundamentals of photonics; John Wiley; (1999), USA.
- [4] Gasvik Kjell J; Optical Metrology, 3 ed; John Wiley; (2002); England.
- [5] Martínez Amalia, Rayas J.A, Puga H.J, Rodríguez Vera R; Metrología óptica en detección de grietas en elementos mecánicos; 1er encuentro participación de la mujer en la ciencia; (21 de Mayo 2004); León Guanajuato.
- [6] Martínez A. Donato, J.A. Rayas J.M. Flores. R. Rodríguez Vera, Donato Aguayo; Técnicas ópticas para el contorno de superficies tridimensionales; Revista Mexicana de Física; Vol. 51, No. 4; (2005); D.F; pp. 431-436.
- [7] Hecht Eugene; Óptica fondo educativo internacional; (1977).
- [8] Rodriguez Zurita G; Interferometrías heterodina y cuasi heterodina; Revista Mexicana de Física; Vol. 37 No. 3; (1991); pp. 396-417.
- [9] Malacara Daniel, Manuel Servín, Sacarias Malacara; Interferogram analysis for optical testing; 2 ed; Taylor and Francis; (2005); USA.
- [10] Itoh K; Analisis of the phase unwrapping problem; Applied Optics; Vol. 21, No. 14; p. 2470-2479; (1982).